М.Ю. Галкина

Контрольная работа по дискретной математике

Новосибирск

Содержание

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

При выполнении контрольной работы необходимо строго придерживаться указанных ниже правил.

1. Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.
2. На обложке должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, номер студенческого билета, название дисциплины.
3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по своему варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи или задачи не своего варианта, не засчитываются.
4. Решения задач необходимо располагать в порядке возрастания номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.
5. Перед решением каждой задачи необходимо выписать полностью ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачу своего варианта, имеют общую формулировку, следует, при переписывании условия задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.
6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи и рисунки.
7. После получения прорецензированной работы, как недопущенной, так и допущенной к защите, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации. Если работа не допущена к защите, то после исправления указанных рецензентом ошибок работу следует прислать для повторной проверки в короткий срок. При высылаемых исправлениях должны обязательно находиться прорецензированная работа и <u>рецензия к ней</u>. В связи с этим рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. <u>Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования категорически запрещено!</u>
8. По каждой работе перед зачетом проводится собеседование, после чего выставляется зачет по контрольной работе. Без зачтенной контрольной работы студент к экзамену не допускается.

Программа курса охватывает материал не только по темам задач контрольной работы. При подготовке к экзамену следует изучить материал темы «Алгебра логики».

ПРАВИЛА ВЫБОРА ВАРИАНТА

Контрольная работа состоит из трех задач. Номера задач контрольной работы выбираются по таблице из колонки, соответствующей последней цифре номера студенческого билета. Например, если номер студенческого билета оканчивается на 3, то контрольная работа состоит из задач с номерами: 3, 13, 23.

Будьте внимательны при выборе варианта. Работа, выполненная не по своему варианту, возвращается без проверки!

ТАБЛИЦА ВЫБОРА ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Последняя цифра номера зачетной книжки									
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10 20 30	1 11 21	2 12 22	3 13 23	4 14 24	5 15 25	6 16 26	7 17 27	8 18 28	9 19 29

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задачи 1-10

Сколько четырехзначных чисел можно образовать из цифр указанного числа?

Номер задачи	Число
1	1111234567890
2	1112234567890
3	1122334567890
4	1112345678900
5	1122345678900
6	1123456789000
7	1234567890000
8	1111223456780
9	1111234567800
10	1123456780000

Задачи 11-20

Управление имеет a предприятий, из них a_1 предприятий выпускают продукцию A, a_2 – продукцию B, a_3 – продукцию C. Продукцию A и B выпускают a_4 предприятий, B и C – a_5 предприятий, A и C – a_6 предприятий. Все виды продукции выпускают a_7 предприятий. Сколько предприятий

а) выпускают ровно один вид продукции A, B или C?

б) не выпускают ни одного из указанных видов продукции?

Номер задачи	a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
11	158	120	50	30	40	10	20	8
12	147	110	60	50	30	20	30	7
13	181	100	90	80	50	30	40	6

Номер задачи	a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
14	129	90	80	60	60	20	30	5
15	151	80	90	70	40	50	20	3
16	166	70	100	80	30	40	40	3
17	177	60	110	60	20	30	30	9
18	178	50	120	40	30	20	20	4
19	192	40	130	30	10	10	10	6
20	205	30	140	20	20	10	10	2

Задачи 21-30

Граф G задан списком ребер (каждый элемент списка – это тройка чисел: номера двух смежных вершин и вес ребра, их соединяющего). Требуется

а) Нарисовать граф G.
б) Найти степенную последовательность графа G.
в) Найти матрицу смежности графа G.
г) Обозначить ребра и найти матрицу инцидентности графа.
д) Найти минимальный остов графа и его вес.

Номер задачи	Список ребер с весами
21	(1,4,5), (1,5,3), (1,6,1), (1,8,4), (2,3,6), (2,6,3), (3,8,2), (4,5,1), (4,6,5), (4,7,4), (6,7,7)
22	(1,2,6), (1,4,8), (1,5,5), (1,6,3), (2,3,6), (2,4,1), (2,5,2), (3,8,7), (4,5,1), (4,6,2), (4,7,5), (4,8,9), (5,6,3), (6,8,2), (7,8,5)
23	(1,3,4), (1,5,7), (1,7,1), (2,5,8), (2,6,2), (3,4,3), (3,6,8), (3,7,2), (4,6,1), (4,7,5), (4,8,3), (6,8,1)
24	(1,4,3), (1,5,6), (1,6,8), (1,8,3), (2,3,1), (2,6,2), (2,8,4), (3,7,6), (3,8,9), (4,5,1), (4,6,2), (4,7,7), (6,7,2)
25	(1,5,3), (1,6,6), (1,7,8), (2,5,9), (2,6,7), (2,7,2), (3,5,1), (3,6,3) (3,8,4), (4,7,6), (4,8,1)
26	(1,3,6), (1,7,8), (2,6,5), (2,8,4), (3,5,3), (3,6,9), (3,7,4), (4,7,5), (4,8,2), (5,6,1), (5,7,3), (5,8,8), (6,7,4), (7,8,1)
27	(1,2,3), (1,3,7), (1,6,8), (2,6,4), (2,8,1), (3,4,5), (3,6,9), (3,7,2), (4,8,1), (5,6,4), (5,7,1)
28	(1,2,7), (1,4,8), (1,5,6), (1,6,4), (2,3,1), (2,4,5), (2,5,8), (3,8,1), (4,5,4), (4,6,3), (4,7,5), (4,8,7), (5,6,3), (6,8,4), (7,8,2)
29	(1,4,8), (1,5,4), (1,6,6), (1,8,3), (2,3,1), (2,6,5), (3,8,7), (4,5,9), (4,7,2), (6,7,5), (7,8,1)
30	(1,4,3), (1,5,6), (2,6,8), (2,7,9), (2,8,2), (3,7,5), (3,8,4), (4,6,1), (4,8,3), (5,6,7), (5,7,9), (5,8,4)

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1

Сколько четырехзначных чисел можно образовать из цифр числа 1112222345000?

Решение:

Разделим все составленные числа на группы по первой цифре в числе. Таких групп будет пять. Сначал будем ставить на первое место цифры, которые встречаются чаще всего.

1-я группа. У чисел из этой группы на первом месте стоит «двойка». Эти числа имеют вид 2***, где на место *** выбираются 3 цифры из набора 111222345000.

Перечислим 3 возможных случая выбора цифр на место ***.

а). Это могут быть либо 3 «единицы», либо 3 «двойки», либо 3 «нуля» – всего 3 варианта.

б). Либо 2 одинаковые («единицы» или «двойки» или «нули») и одна от них отличная (если выбрали 2 «единицы», третью выбираем из {2,3,4,5,0}, если выбрали 2 «двойки», третью выбираем из {1,3,4,5,0}, если выбрали 2 «нуля», третью выбираем из {1,2,3,4,5}). Выбранные две одинаковые цифры можно поставит на два из трех мест тремя ($C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$) способами (порядок не важен, т.к. цифры одинаковые). Всего таких чисел будет: $3 \cdot C_3^2 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$.

в). Либо 3 разные цифры из {1,2,3,4,5,0}. Всего таких чисел будет $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ (здесь порядок выбора важен).

Всего чисел в этой группе будет $\underline{n_1 = 3 + 45 + 120 = 168}$.

2-я группа. У чисел из этой группы на первом месте стоит «единица». Эти числа имеют вид 1***, где на место *** выбираются 3 цифры из набора 112222345000.

Аналогично предыдущему перечислим 3 возможных случая выбора цифр на место ***.

а). Это могут быть либо 3 «двойки», либо 3 «нуля» – всего 2 варианта.

б). Либо 2 одинаковые («единицы» или «двойки» или «нули») и одна от них отличная (если выбрали 2 «единицы», третью выбираем из {2,3,4,5,0}, если выбрали 2 «двойки», третью выбираем из {1,3,4,5,0}, если выбрали 2 «нуля», третью выбираем из {1,2,3,4,5}). Выбранные две одинаковые цифры можно поставит на два из трех мест тремя ($C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$) способами (порядок не важен, т.к. цифры одинаковые). Всего таких чисел будет: $3 \cdot C_3^2 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$.

в). Либо 3 разные цифры из $\{1,2,3,4,5,0\}$. Всего таких чисел будет $A_6^3 = \dfrac{6!}{(6-3)!} = \dfrac{6!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ (здесь порядок выбора важен).

Всего чисел в этой группе будет $\underline{n_2 = 2 + 45 + 120 = 167}$.

3-я группа. У чисел из этой группы на первом месте стоит «тройка».
Эти числа имеют вид 3***, где на место *** выбираются 3 цифры из набора 111222245000.

Аналогично предыдущему перечислим 3 возможных случая выбора цифр на место ***.

а). Это могут быть либо 3 «единицы», либо 3 «двойки», либо 3 «нуля» – всего 3 варианта.

б). Либо 2 одинаковые («единицы» или «двойки» или «нули») и одна от них отличная (если выбрали 2 «единицы», третью выбираем из $\{2,4,5,0\}$, если выбрали 2 «двойки», третью выбираем из $\{1,4,5,0\}$, если выбрали 2 «нуля», третью выбираем из $\{1,2,4,5\}$). Выбранные две одинаковые цифры можно поставит на два из трех мест тремя ($C_3^2 = \dfrac{3!}{2!1!} = 3$) способами (порядок не важен, т.к. цифры одинаковые). Всего таких чисел будет: $3 \cdot C_3^2 \cdot 4 = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$.

в). Либо 3 разные цифры из $\{1,2,4,5,0\}$. Всего таких чисел будет $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ (здесь порядок выбора важен).

Всего чисел в этой группе будет $\underline{n_3 = 3 + 36 + 60 = 99}$.

4-я группа. У чисел из этой группы на первом месте стоит «четверка».
Эти числа имеют вид 4***, где на место *** выбираются 3 цифры из набора 111222235000.

Случай не отличается от предыдущего (просто заменяем «тройку» на «четверку»).

Всего чисел в этой группе будет $\underline{n_4 = n_3 = 99}$.

5-я группа. У чисел из этой группы на первом месте стоит «пятерка».
Эти числа имеют вид 5***, где на место *** выбираются 3 цифры из набора 111222234000.

Случай не отличается от предыдущего (просто заменяем «четверку» на «пятерку»).

Всего чисел в этой группе будет $\underline{n_5 = n_4 = 99}$.

Замечание! **На первое место ставить «нуль» нельзя, т.к. такое число не будет являться четырехзначным.**

Всего четырехзначных чисел будет:

$N = n_1 + n_2 + n_3 \cdot 3 = 168 + 167 + 99 \cdot 3 = 632$.•

Задача 2

Управление имеет 300 предприятий, из них 100 предприятий выпускают продукцию А, 150 – продукцию В, 200 – продукцию С. Продукцию А и В выпускают 40 предприятий, В и С – 60 предприятий, А и С – 100 предприятий. Все виды продукции выпускают 20 предприятий. Сколько предприятий

а) выпускают ровно один вид продукции А, В или С?

б) не выпускают ни одного из указанных видов продукции?

Решение:

Будем использовать формулы включений и исключений. Введем обозначения:

N – общее количество предприятий.

N_A – количество предприятий, которые выпускают продукцию A (и может быть еще другую).

N_B – количество предприятий, которые выпускают продукцию B (и может быть еще другую).

N_C – количество предприятий, которые выпускают продукцию C (и может быть еще другую).

N_{AB} – количество предприятий, которые выпускают продукцию A и B (и может быть еще C).

N_{AC} – количество предприятий, которые выпускают продукцию A и C (и может быть еще B).

N_{BC} – количество предприятий, которые выпускают продукцию B и C (и может быть еще A).

N_{ABC} – количество предприятий, которые выпускают все три вида продукции A, B, C.

а). $N(1)$ – количество предприятий, выпускающих ровно один вид продукции, находится по формуле:

$$N(1) = (N_A + N_B + N_c) - 2(N_{AB} + N_{AC} + N_{BC}) + 3N_{ABC}$$

Из условия задачи

$$N_A + N_B + N_c = 100 + 150 + 200 = 450$$

$$N_{AB} + N_{AC} + N_{BC} = 40 + 60 + 100 = 200$$

$$N_{ABC} = 20$$

$$N(1) = 450 - 2 \cdot 200 + 3 \cdot 20 = 110$$

110 предприятий выпускают ровно один вид продукции.

б). $N(0)$ – количество предприятий, не выпускающих ни одного из указанных видов продукции, находится по формуле:

$$N(0) = N - (N_A + N_B + N_c) + (N_{AB} + N_{AC} + N_{BC}) - N_{ABC}$$

$$N(0) = 300 - 450 + 200 - 20 = 30$$

30 предприятий не выпускают ни одного из указанных видов продукции A, B, C. •

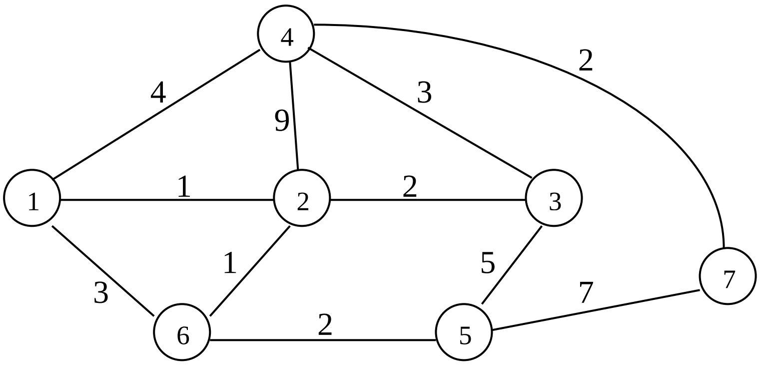
Задача 3

Граф G задан списком ребер (каждый элемент списка – это тройка чисел: номера двух смежных вершин и вес ребра, их соединяющего).
(1,2,1), (1,4,4), (1,6,3), (2,3,2), (2,4,9), (2,6,1), (3,4,3), (3,5,5), (4,7,2), (5,6,2), (5,7,7).

Требуется

а) Нарисовать граф *G*.
б) Найти степенную последовательность графа *G*.
в) Найти матрицу смежности графа *G*.
г) Обозначить ребра и найти матрицу инцидентности графа.
д) Найти минимальный остов графа и его вес.

Решение:
а).



б). Каждый элемент степенной последовательности отражает со сколькими вершинами связана данная.
(3, 4, 3, 4, 3, 3, 2)

Например, первый элемент последовательности 3 отражает, что вершина 1 соединена с тремя другими вершинами; второй элемент – что вершина 2 соединена с четырьмя другими вершинами и т.д.

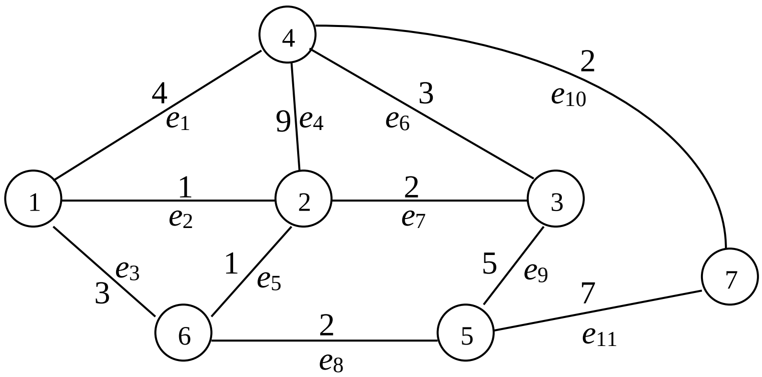
в). Матрица смежности – квадратная размера 7×7 (7 – количество вершин).

Элемент матрицы a_{ij} равен 1, если вершина i соединена с вершиной j, и нулю в противном случае.

Для удобства заполнения слева и сверху в матрице подписаны вершины. Например, вершина 1 соединена с вершинами 2, 4, 6, поэтому в первой строке напротив столбцов с заголовками 2, 4, 6 стоят единицы.

$$A(G)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

г). Обозначим ребра в графе.



Матрица инцидентности – прямоугольная размера 7×10 (7 – количество вершин, 10 – количество ребер). Каждый столбец матрицы соответствует ребру. В столбце стоят 2 «единицы», соответствующих вершинам, которые соединяет данное ребро, остальные элементы равны «нулю».

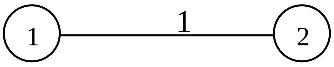
Для удобства заполнения слева в матрице подписаны вершины, а сверху – ребра в соответствии с введенными обозначениями. Например, ребро e_1 соединеняет вершины 1 и 4, поэтому в первом столбце напротив строк с заголовками 1и 4 стоят единицы.

$$I(G)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccc}e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11}\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\end{array}$$

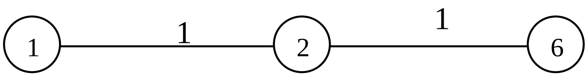
д). Упорядочим ребра в порядке неубывания их весов (последней числа в тройке чисел, задающих ребро в условии задачи): (1,2,1), (2,6,1), (2,3,2), (4,7,2), (5,6,2), (1,6,3), (3,4,3), (1,4,4), (3,5,5), (5,7,7), (2,4,9). Если вес нескольких ребер одинаков, то между собой они могут располагаться в любом порядке.

Будем выбирать из списка последовательно ребро и присоединять его к остову, если не образуется циклов с уже имеющимися ребрами остова. Если цикл образуется, ребро не присоединяем. Процесс закончен, когда переберем все ребра из списка.

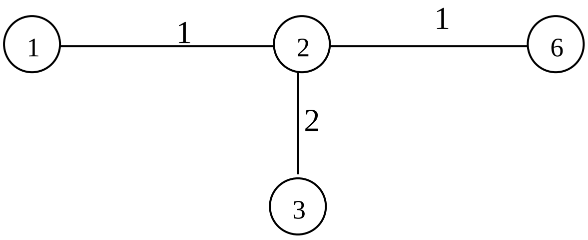
Берем ребро (1,2,1). Присоединяем его к остову (пока он пуст).



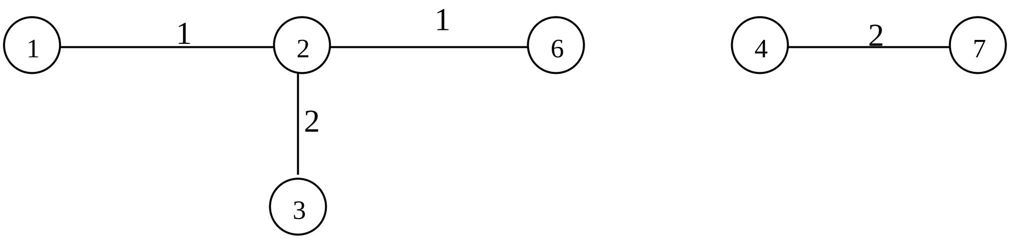
Берем ребро (2,6,1). При присоединении к имеющемуся остову цикла не образуется, присоединем это ребро.



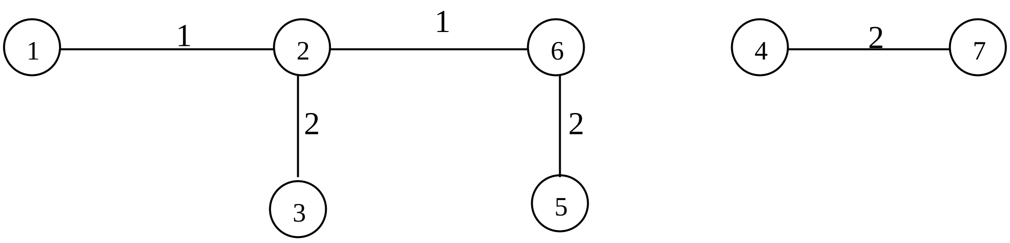
Берем ребро (2,3,2). При присоединении к имеющемуся остову цикла не образуется, присоединем это ребро.



Берем ребро (4,7,2). При присоединении к имеющемуся остову цикла не образуется, присоединем это ребро.

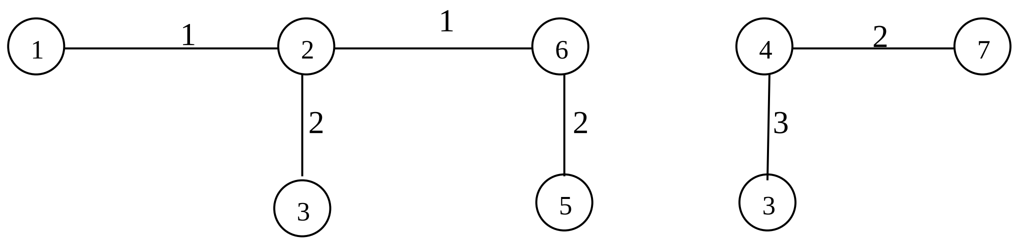


Берем ребро (5,6,2). При присоединении к имеющемуся остову цикла не образуется, присоединем это ребро.

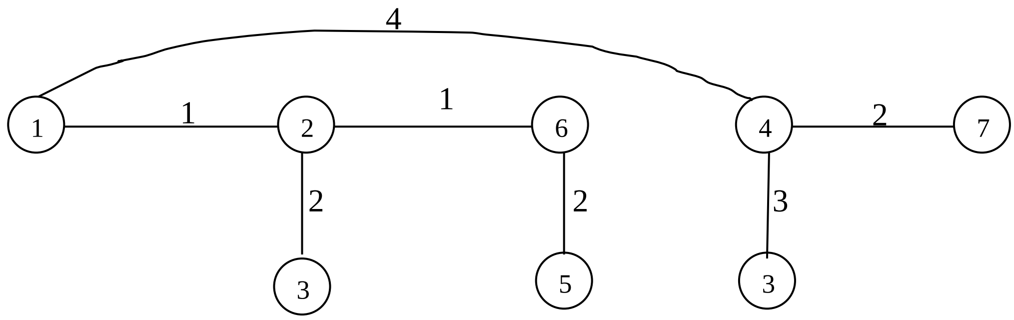


Берем ребро (1,6,3). При присоединении к имеющемуся остову образуется цикл (1-2-6-1), ребро не присоединяем.

Берем ребро (3,4,3). При присоединении к имеющемуся остову цикла не образуется, присоединем это ребро.



Берем ребро (1,4,4). При присоединении к имеющемуся остову цикла не образуется, присоединем это ребро.



Берем ребро (3,5,5). При присоединении к имеющемуся остову образуется цикл (2-3-5-6-2), ребро не присоединяем.

Берем ребро (5,7,7). При присоединении к имеющемуся остову образуется цикл (5-6-2-1-4-7-5), ребро не присоединяем.

Берем ребро (2,4,9). При присоединении к имеющемуся остову образуется цикл (2-1-4-2), ребро не присоединяем.

Больше ребер в списке нет. Процесс построения минимального остова закончен. Вес минимального остова – сумма весов ребер:
$W = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4 = 15$.•