

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ЛЕСА

Подрубалов М.В., Спирин Б.Л., Тулузаков Д.В.

Теоретическая механика

Методическое пособие для выполнения расчетно-проектировочных работ

Допущено УМО по образованию для направлений подготовки: 35.03.02 Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств; 14.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств; 15.03.02 Технологические машины и оборудование; 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника; 15.03.01 Машиностроение; 15.03.06 Мехатроника и робототехника.

МОСКВА 2016

УДК 539.4

БКК ????

Разработано в соответствии с Федеральными Государственным образовательным стандартом ВПО 2016 г. для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки: 35.03.02 Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств; 15.03.02 Технологические машины и оборудование; 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника; 15.03.01 Машиностроение; 15.03.06 Мехатроника и робототехника.

Рецензент: Зав.кафедрой «Технология машиностроения и ремонта» МГУЛ, д.т.н., профессор Быков В.В.

Работа подготовлена на кафедре «Техническая механика»

Подрубалов М.В., Теоретическая механика. Методические пособие для выполнения расчетно-проектировочных работ: методическое пособие / М.В. Подрубалов, Б.Л. Спирин, Д.В. Тулузаков / – М.: МГУЛ, 2016.- ??? с.

В методическом пособие приведены задания, примеры и методика решения расчетно-проектировочных работ по разделам теоретической механике: статика, кинематика и динамика. Настоящее методическом пособие полезно для студентов технических вузов и при практической работе инженеров.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее методическое пособие разработано в помощь студентам обучающихся по направлениям подготовки: 35.03.02 Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств; 15.03.02 Технологические машины и оборудование; 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника; 15.03.01 Машиностроение; 15.03.06 Мехатроника и робототехника

В методическом пособии приведены задания для расчетно-проектировочных работ по дисциплине «Теоретическая механика». Представлены методики и примеры расчета расчетно-проектировочных работ по основным разделам статики, кинематики и динамики.

Для сдачи зачета или экзамена необходимо выполнить контрольные задания. При этом следует пользоваться рекомендуемой ниже литературой.

Литература

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 2002.
3. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 2010.
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под редакцией А.А. Яблонского. — М.: Высшая школа, 2010.
5. Андронов В. В. Теоретическая механика. 20 лекций. Ч. 1. Статика и кинематика: Учебное пособие для студентов очного и заочного обучения. Спец. 260100 и 260200. 2-е изд., доп. и испр. — М.: МГУЛ, 2003.-128 с.
6. Андронов В. В. Теоретическая механика. 20 лекций. Ч. 2. Динамика: Учебное пособие для студентов очного и заочного обучения. Спец. 260100 и 260200. 2-е изд., доп. и испр. — М.: МГУЛ, 2003.-128 с.
7. Птицин, Д.И. Теоретическая механика. Статика и Кинематика. : учеб.-методич.пособие. -М.ГОУ ВПО МГУЛ, 2007. -42 с.

Задание № 1. Определение реакций опор в плоской произвольной или сходящейся системе сил

Для данной на рисунке схемы закрепления балки определить реакции опор (табл. 1.1), необходимые для расчета данные приведены в табл. 1.2 .

Таблица 1.1

1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	
7.		8.	
9.		10.	

11.		12.	
13.		14.	
15.		16.	
17.		18.	
19.		20.	
21.		22.	

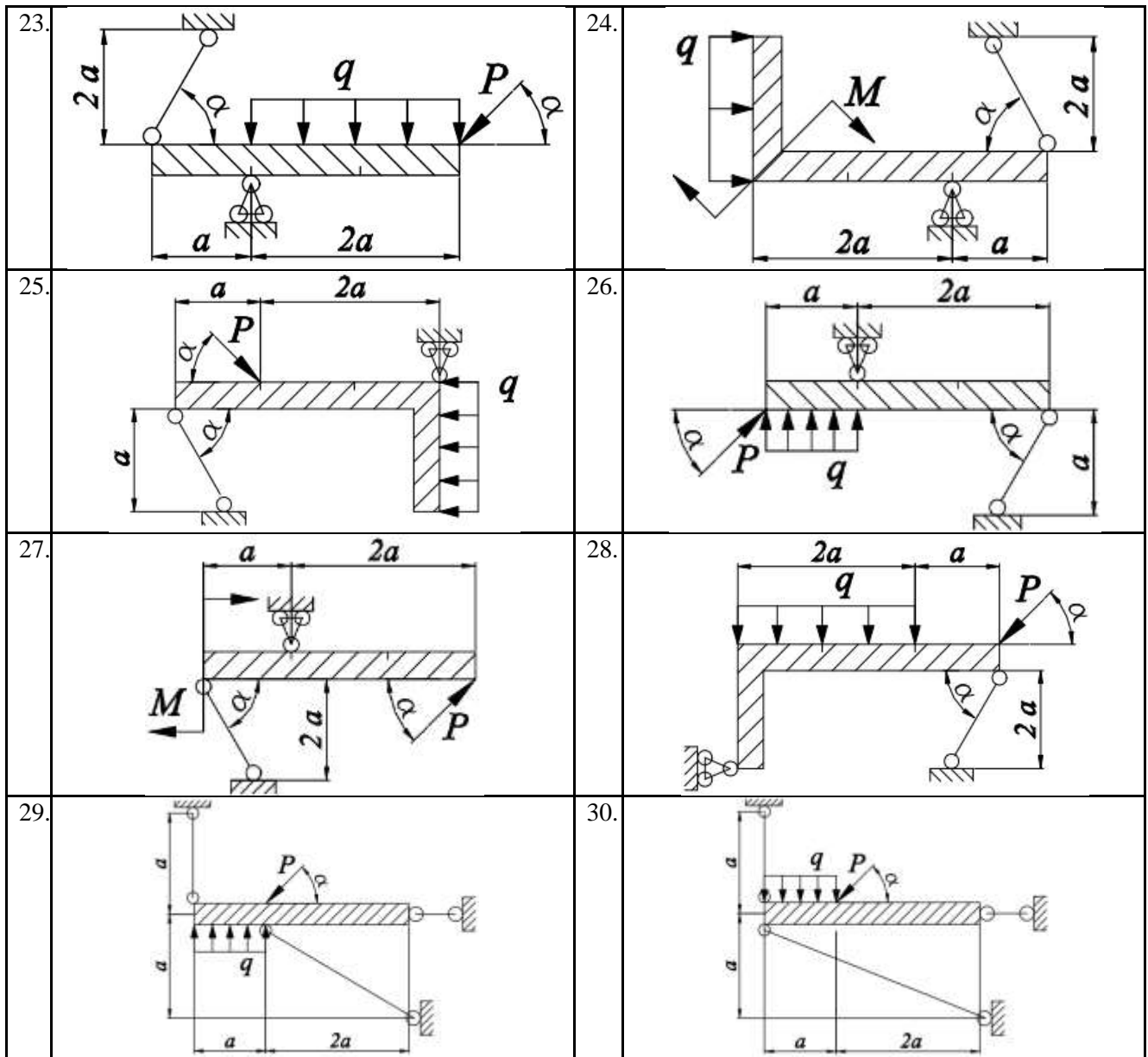


Таблица 1.2

№ варианта	Сила P [кН]	Распределенная нагрузка q [кН/м]	Сосредоточенный момент силы M [кНм]	Длина a [м]	Угол наклона силы α°
1.	2	4	6	1	0
2.	4	6	8	2	30
3.	6	8	10	4	60
4.	8	10	2	1	90
5.	10	2	4	2	0
6.	2	4	6	4	30
7.	4	6	8	1	60
8.	6	8	10	2	90
9.	8	10	2	4	0
10.	10	2	4	1	30

Пример №1: Определение реакций опор в плоской произвольной системе сил.

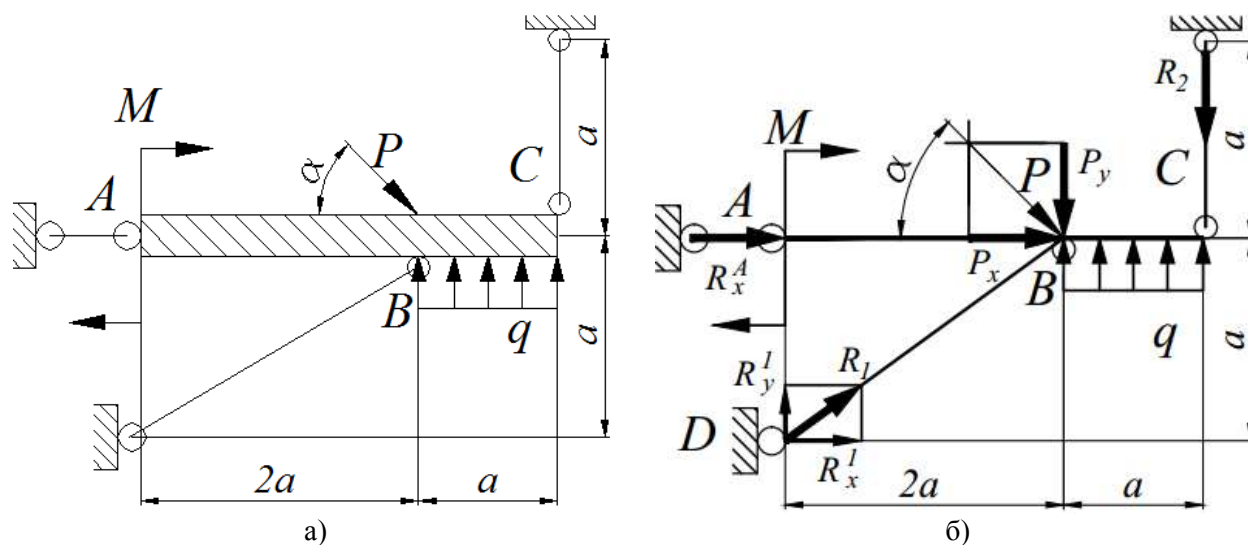


Рис. 1.

Дана плоская произвольная система сил, в которой балка закреплена с помощью двух стержней и одной шарнирно подвижной опоры (рис. 1 а), требуется определить реакции в этих стержнях и опорах. Представим балку сплошной линией. Из рис. 1 б видно, что слева в точке A на схеме установлена шарнирно подвижная опора, отбирающая одну степени свободы, которые заменим одной реакцией по оси x (R_x^A). В стержнях возникает по одной реакции R^1 и R^2 .

Обозначим на схеме известные величины длин, сил и моментов, $a=2$ м, $P=10$ кН, $q=6$ кН/м, $M=8$ кНм, $\alpha=30^\circ$ действующих на балку. Расставим на схеме неизвестные реакции опор (рис. 1.1 б). Силу P действующую под углом α разложим на две проекции, по осям x и y . Проекцию на ось x обозначим $P_x = P \cos(\alpha) = 10 \cdot \cos(30^\circ) = 5\sqrt{3}$ кН, а проекцию на ось y обозначим $P_y = P \sin(\alpha) = 10 \cdot \sin(30^\circ) = 5$ кН. Так же поступим с R^1 проекцию на ось x обозначим $R_x^1 = R^1 \cos(\beta)$, а проекцию на ось y обозначим $R_y^1 = R^1 \sin(\beta)$.

Определим угол β из треугольника ABD . Известно, что в прямоугольном треугольнике отношение $AD/AB = \operatorname{tg}(\beta)$, следовательно:

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{AD}{AB}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{2a}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = 26,6^\circ;$$

Для определения реакций в опорах воспользуемся 3-мя уравнениями статики (условиями уравновешенной системы).

1. $\sum F_x = 0; R_x^A + P_x + R_x^1 = 0;$
2. $\sum F_y = 0; R_y^1 - P_y + q \cdot a - R^2 = 0;$
3. $\sum M_B = 0; -M + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - R_2 \cdot a = 0;$

Из 3-го уравнения определим:

$$R_2 = \frac{+q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - M}{2} = \frac{6 \cdot 2 - 8}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ кН};$$

Из 2-го уравнения определим:

$$R_y^1 = R^2 + P_y - q \cdot 2 = 2 - 5 + 6 \cdot 2 = 9 \text{ кН};$$

Следовательно: $R^1 = \frac{R_y^1}{\sin(\beta)} = \frac{9}{0,45} = 20 \text{ кН}$, $R_x^1 = R^1 \cos(26,6) = 20 \cdot 0,9 = 18 \text{ кН}$.

Из 1-го уравнения определим:

$$R_x^A = -P_x - R_x^1 = -5\sqrt{3} - 18 = -26,66 \text{ кН}.$$

Минус показывает, что на схеме реакция опоры R_x^A направлена в противоположную сторону.

Задание № 2. Определение реакций опор в балках с двумя опорами

Для данной на рисунке схемы закрепления балки двумя опорами (табл. 2.1) определить реакции опор, необходимые для расчета данные приведены в табл. 2.2 .

Таблица 2.2

1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	
7.		8.	
9.		10.	
11.		12.	
13.		14.	
15.		16.	
17.		18.	
19.		20.	

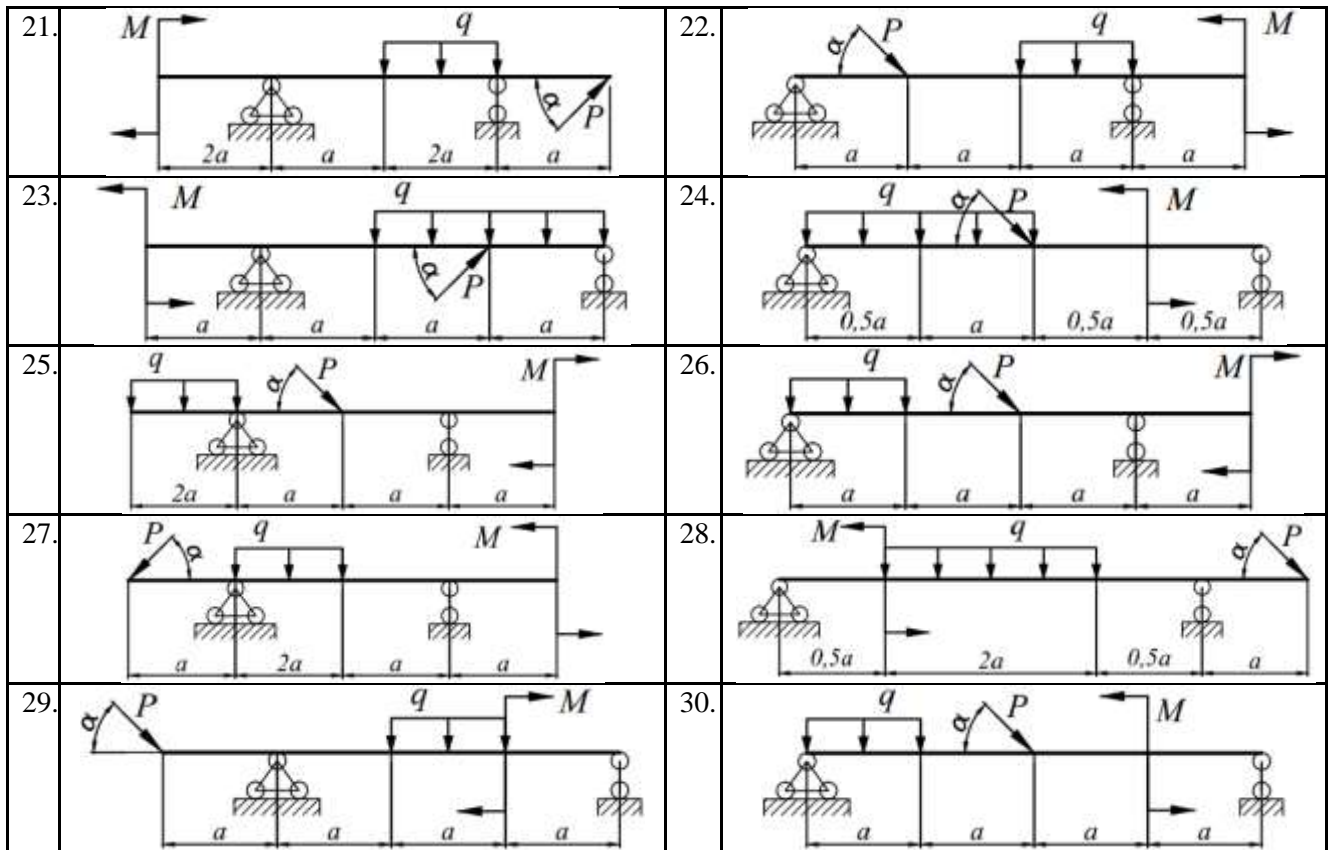
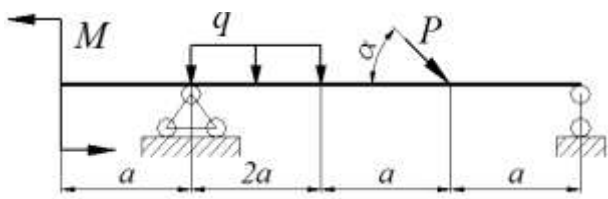


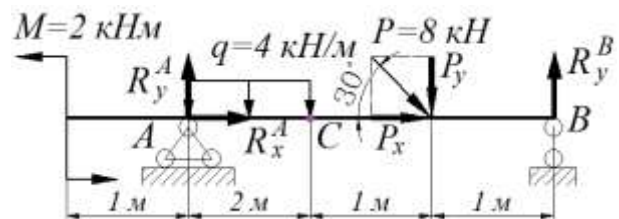
Таблица 2.2

№ варианта	Сила P [кН]	Распределенная нагрузка q [кН/м]	Сосредоточенный момент силы M [кНм]	Длина a [м]	Угол наклона силы α°
1.	2	4	6	1	0
2.	4	6	8	2	30
3.	6	8	10	4	60
4.	8	10	2	1	90
5.	10	2	4	2	0
6.	2	4	6	4	30
7.	4	6	8	1	60
8.	6	8	10	2	90
9.	8	10	2	4	0
10.	10	2	4	1	30

Пример №2: Определение реакций опор в балках на двух опорах.



а)



б)

Рис. 2.

Дана балка, закрепленная на двух опорах (рис. 2 а), требуется определить реакции в этих опорах. Как видно из рис. 2 слева в точке A на схеме установлена шарнирно неподвижная опора, отбирающая две степени свободы, которые заменим двумя реакциями по оси x и y . С права в точке B на схеме установлена шарнирно подвижная опора, отбирающая одну степень свободы по оси y .

Обозначим на схеме известные величины сил и моментов, действующих на балку. Расставим на схеме неизвестные реакции опор (рис. 2 б). Силу P действующую под углом α разложим на две проекции, по осям x и y . Проекцию на ось x обозначим $P_x = P \cos(\alpha) = 10 \cdot \cos(30^\circ) = 4\sqrt{3}$ кН, а проекцию на ось y обозначим $P_y = P \sin(\alpha) = 10 \cdot \sin(30^\circ) = 4$ кН.

Для определения реакций в опорах воспользуемся 3-мя уравнениями статики (условиями уравновешенной системы).

1. $\sum F_x = 0; R_x^A + P_x = 0;$
2. $\sum F_y = 0; R_y^A - q \cdot 2 - P_y + R_y^B = 0;$
3. $\sum M_z^A = 0; +M - q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - P_y \cdot 3 + R_y^B \cdot 4 = 0;$

Из 1-го уравнения определим: $R_x^A = -P_x = -5\sqrt{3}$ кН.

Минус показывает, что на схеме реакция опоры R_x^A направлена в противоположную сторону.

Из 3-го уравнения определим:

$$R_y^B = \frac{q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - M + P_y \cdot 3}{4} = \frac{4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - 2 + 4 \cdot 3}{4} = 4,5 \text{ кН};$$

Из 2-го уравнения определим: $R_y^A = q \cdot 2 + P_y - R_y^B = 4 \cdot 2 + 4 - 4,5 = 7,5$ кН.

Проверим правильность вычисленных реакций опор. Для этого возьмем момент относительно любой точки (точка C) нашей балки.

$$\begin{aligned} \sum M_z^C = 0; +M - R_y^A \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - P_y \cdot 1 + R_y^B \cdot 2 &= 0; \\ +2 - 7,5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - 4 \cdot 1 + 4,5 \cdot 2 &= 0; \\ 19 - 19 &= 0. \end{aligned}$$

Из полученного равенства следует, что реакции опор определены правильно.

Задание № 3. Определение реакций опор в балках с одной опорой

Для данной на рисунке схемы закрепления балки двумя опорами (табл. 3.1) определить реакции опор, необходимые для расчета данные приведены в табл. 2.2.

Таблица 3.1

1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	
7.		8.	
9.		10.	
11.		12.	
13.		14.	
15.		16.	
17.		18.	

19.		20.	
21.		22.	
23.		24.	
25.		26.	
27.		28.	
29.		30.	

Пример №3: Определение реакций опор в балках с одной опорой.

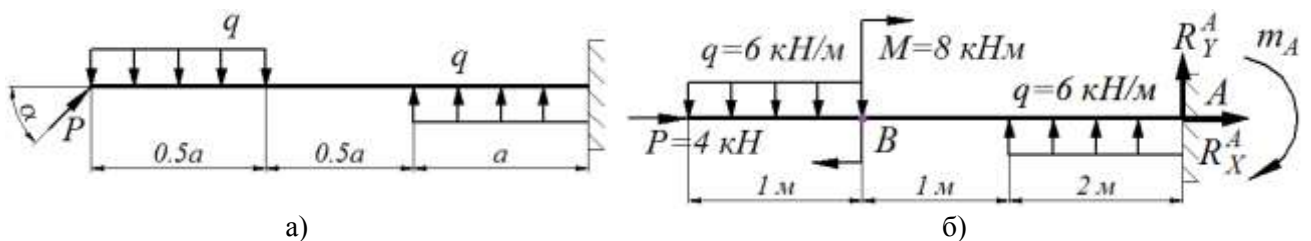


Рис. 3.

Дана балка, закрепленная в жесткой заделке (рис. 3 а), требуется определить реакции опор. Как видно из рис. 3 справа в точке А на схеме установлена жесткая заделка, отбирающая 3-и степени свободы, которые заменим 3-мя реакциями по оси x и y и сопротивление вращению вокруг оси z .

Обозначим на схеме известные величины сил и моментов, действующих на балку. Расставим на схеме неизвестные реакции опор (рис. 3 б). Силу P действующую под углом $\alpha = 0^\circ$ действует по оси x .

Для определения реакций в опорах воспользуемся 3-мя уравнениями статики (условиями уравновешенной системы).

1. $\sum F_x = 0; R_x^A + P_x = 0;$
2. $\sum F_y = 0; -q \cdot 1 + q \cdot 2 + R_y^A = 0;$
3. $\sum M_z^A = 0; +q \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 3\right) - M - q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} - m_A = 0;$

Из 1-го уравнения определим: $R_x^A = -P_x = -4$ кН.

Из 2-го уравнения определим: $R_y^A = q \cdot 1 - q \cdot 2 = -6$ кН.

Минус показывает, что на схеме реакция опоры R_x^A и R_y^A направлены в противоположную сторону.

Из 3-го уравнения определим:

$$m_A = +q \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 3\right) - M - q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 6 \cdot 3,5 - 8 - 6 \cdot 2 = 1 \text{ кНм}$$

Проверим правильность вычисленных реакций опор. Для этого возьмем момент относительно любой точки (точка B) нашей балки.

$$\begin{aligned} \sum M_z^B = 0; +q \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - M + q \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{2} + 1\right) - m_A + R_y^A \cdot 3 &= 0; \\ +6 \cdot 0,5 - 8 + 6 \cdot 2 \cdot 2 - 1 + (-6 \cdot 3) &= 0; \\ 27 - 27 &= 0. \end{aligned}$$

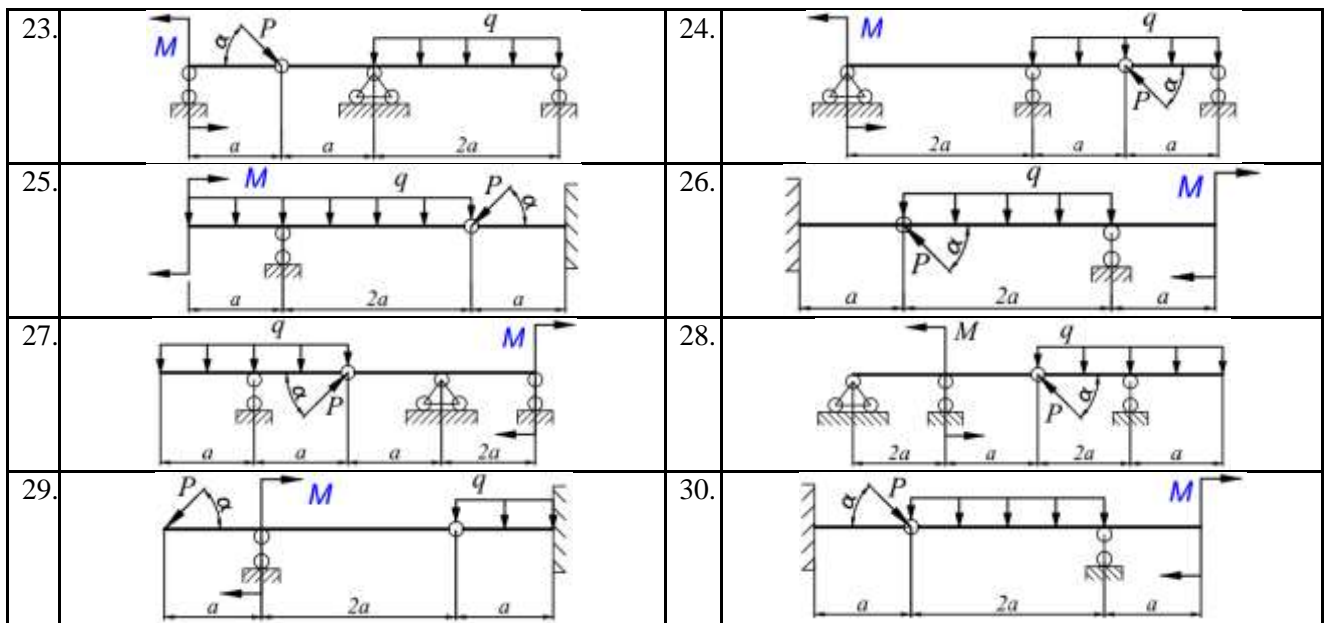
Из полученного равенства следует, что реакции опор определены правильно.

Задание № 4. Определение реакций опор в балках с шарниром

Для данной на рисунке схемы закрепления балки двумя опорами (табл. 4.1) определить реакции опор, необходимые для расчета данные приведены в табл. 2.2.

Таблица 4.1

1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	
7.		8.	
9.		10.	
11.		12.	
13.		14.	
15.		16.	
17.		18.	
19.		20.	
21.		22.	



Заданная балка состоит из 2-х балок: АВ, ВС, соединенная шарнирно в точке В. Балки, входящие в состав многопролетной шарнирной балки, разделяются на основные и подвесные по признаку достаточности или недостаточности опирания непосредственно на "землю" для работы на вертикальную нагрузку.

Балки, достаточно закрепленные опорами, связанными непосредственно с "землей", называются основными, а недостаточно закрепленные такими опорами - подвесными. В рассматриваемой балке АВС балки АВ и СД являются основными, а подвесных балок а данной конструкции нет. Первые могут нести вертикальную нагрузку и при отсутствии соседних балок, а вторые - не могут, так как при отсутствии соседних балок они являются недостаточно закрепленными. Поэтому считают, что для основных балок соединительный шарнир является точкой на конце консоли, на которую поступает нагрузка со стороны соседней подвесной балки, тогда как тот же соединительный шарнир для этой подвесной балки является необходимой опорой. Поэтому в расчетной схеме многопролетной шарнирной балки, нередко называемой поэтажной схемой, недостаточно связанные с "землей" подвесные балка опирают в соединительных шарнирах на основные или связанные с последними подвесные.

Схема заданной балки представлена на рис. 4 (а).

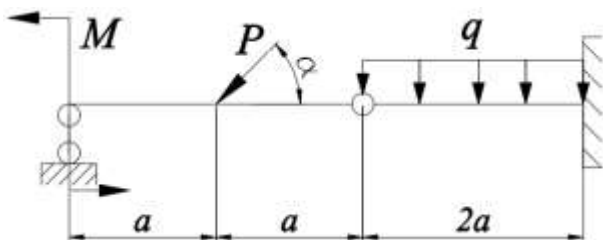


Рис. 4 (а)

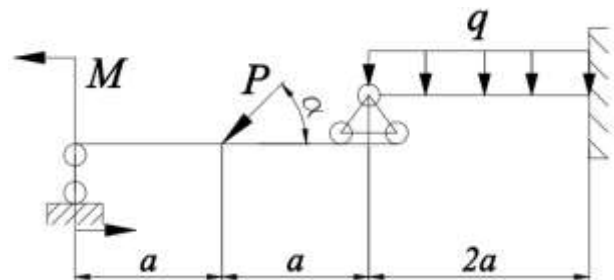


Рис. 4 (б)

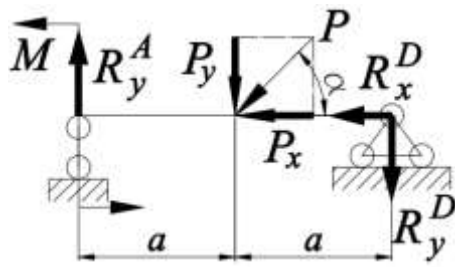


Рис. 4 (в)

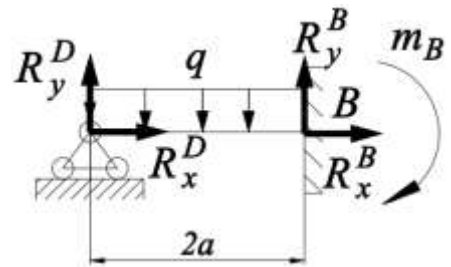


Рис. 4 (г)

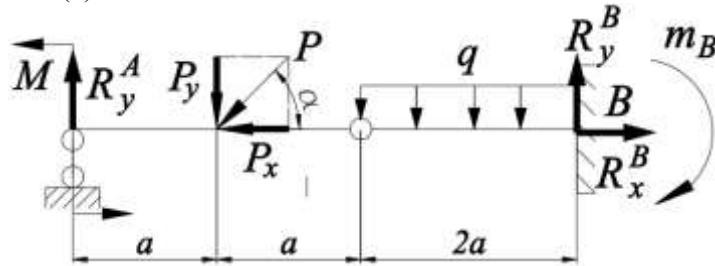


Рис. 4 (д)

Так же балку можно представить по поэтажной схеме (рис. 4(б)). Разделим балку на две части по шарниру (рис. 4 (в) и рис. 4 (г)). Расчет начинается с балки, в которой имеется наименьшее число неизвестных реакций опор.

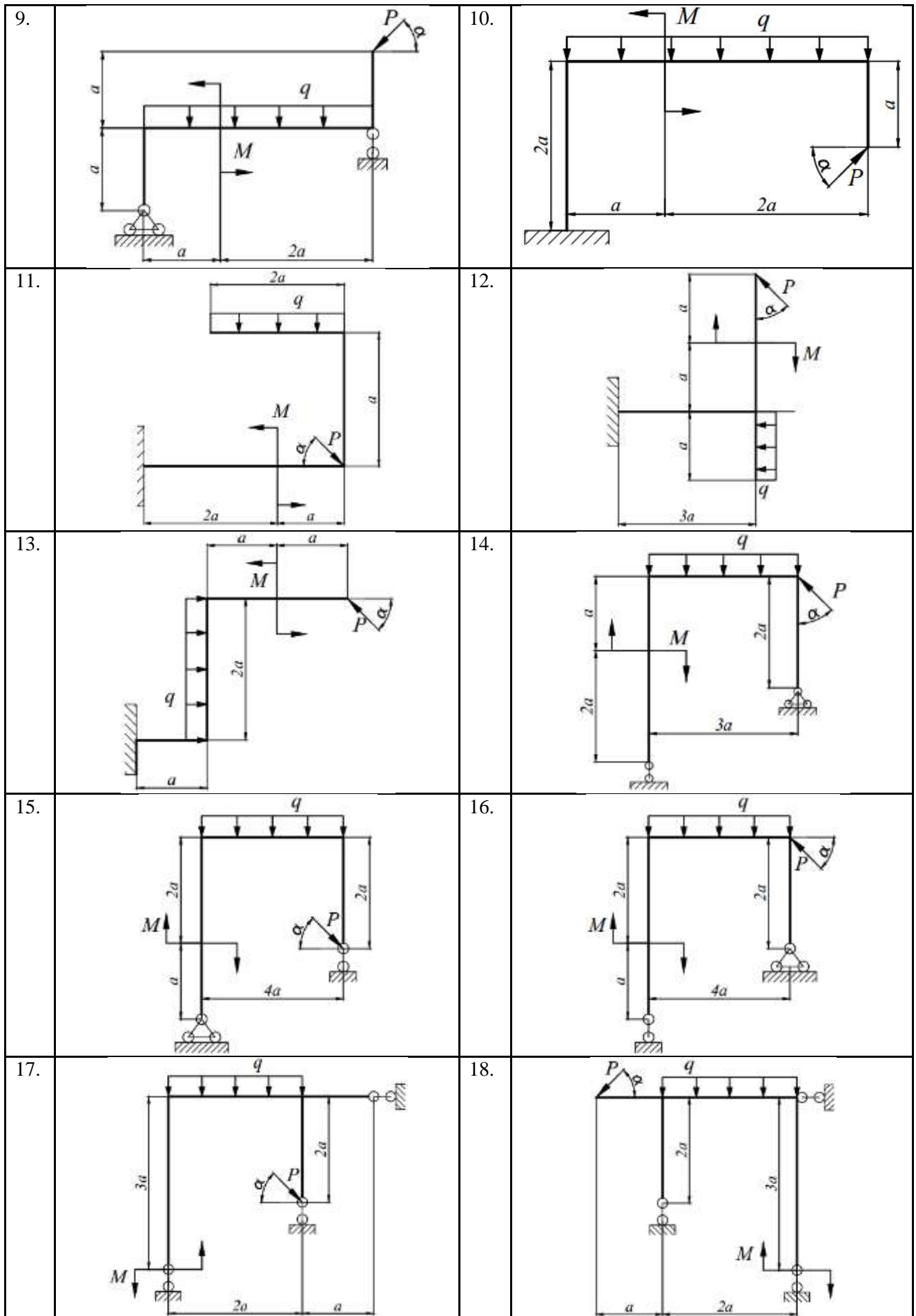
Находим вертикальные реакции в шарнирных опорах балки ВС, рассматривая равновесие последней и совместив начало координат с точкой Б.

Задание № 5. «Определение реакций опор в плоских рамах»

Для данной на рисунке схемы закрепления балки двумя опорами (табл. 5.1) определить реакции опор, необходимые для расчета данные приведены в табл. 5.2.

Таблица .5.1

1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	
7.		8.	



19.		20.	
21.		22.	
23.		24.	
25.		26.	
27.		28.	

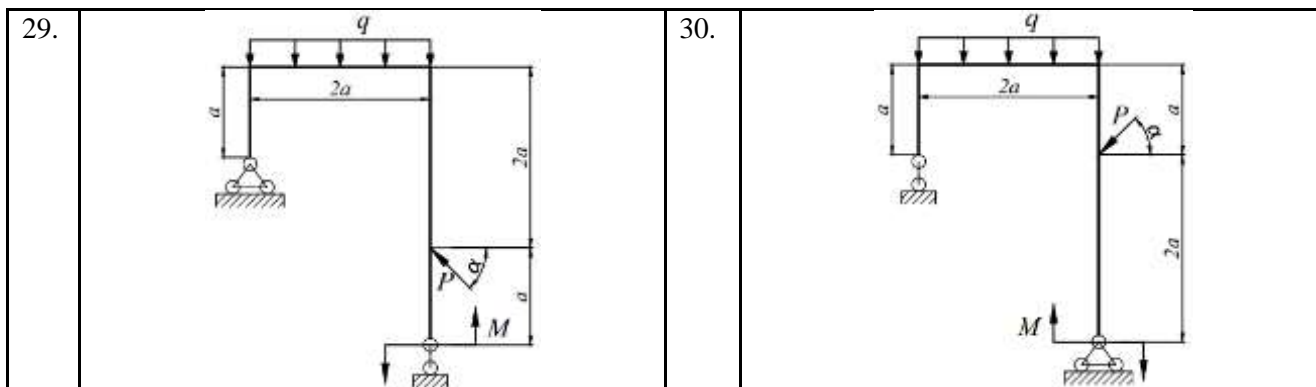


Таблица 5.2

№ варианта	Сила P [кН]	Распределенная нагрузка q [кН/м]	Сосредоточенный момент силы M [кНм]	Длина a [м]	Угол наклона силы α°
1.	2	4	6	1	0
2.	4	6	8	2	90
3.	6	8	10	4	0
4.	8	10	2	1	90
5.	10	2	4	2	0
6.	2	4	6	4	90
7.	4	6	8	1	0
8.	6	8	10	2	90
9.	8	10	2	4	0
10.	10	2	4	1	90

Пример №5: Определение реакций опор в балках на двух опорах.

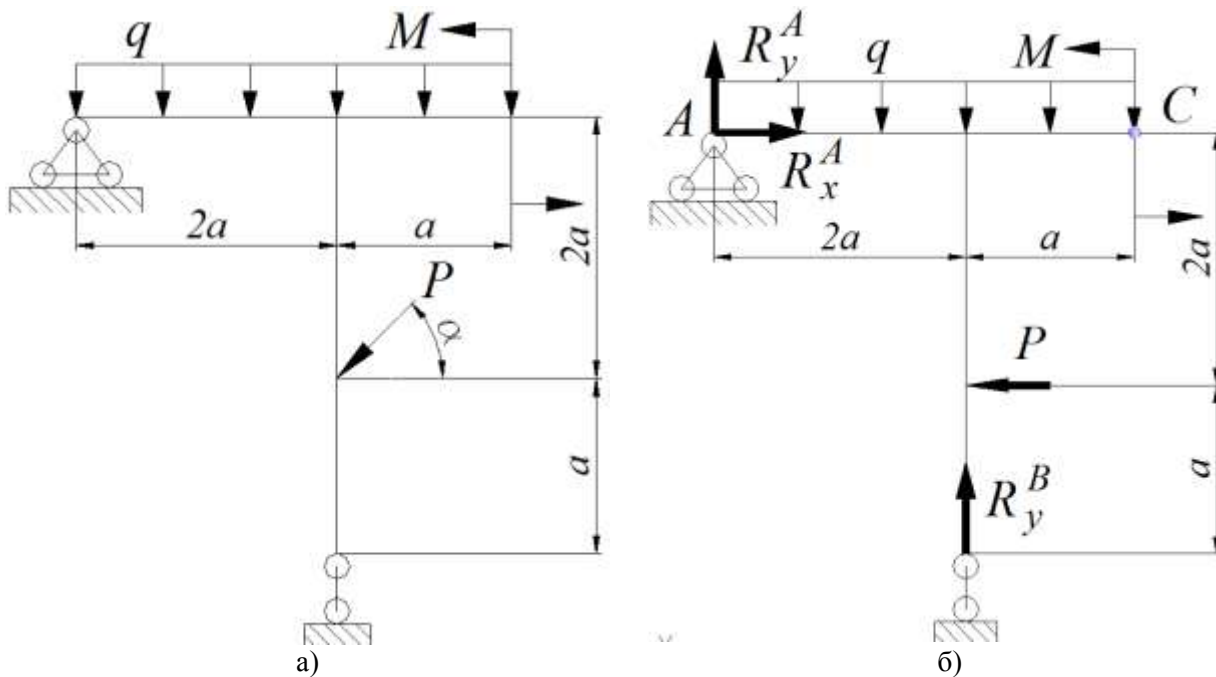


Рис. 5.

Дана плоская рама, закрепленная на двух опорах (рис. 5 а), требуется определить реакции в этих опорах. Как видно из рис. 5 слева в точке A на схеме установлена шарнирно неподвижная опора, отбирающая две степени свободы, которые заменим двумя реакциями по оси x и y . С права в точке B на схеме установлена шарнирно подвижная опора, отбирающая одну степень свободы по оси y .

Обозначим на схеме известные величины длин, сил и моментов, $a=2$ м, $P=10$ кН, $q=4$ кН/м, $M=2$ кНм, $\alpha=0^\circ$ действующих на балку. Расставим на схеме неизвестные реакции опор (рис. 5 б).

Для определения реакций в опорах воспользуемся 3-мя уравнениями статики (условиями уравновешенной системы).

1. $\sum F_x = 0; R_x^A - P = 0;$
2. $\sum F_y = 0; R_y^A - q \cdot 6 + R_y^B = 0;$
3. $\sum M_z^A = 0; -q \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} + M - P \cdot 4 + R_y^B \cdot 4 = 0;$

Из 1-го уравнения определим: $R_x^A = P = 10$ кН.

Из 3-го уравнения определим:

$$R_y^B = \frac{q \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} - M + P \cdot 4}{4} = \frac{4 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} - 2 + 10 \cdot 4}{4} = 27,5 \text{ кН};$$

Из 2-го уравнения определим: $R_y^A = q \cdot 6 - R_y^B = 4 \cdot 6 - 27,5 = -3,5$ кН.

Минус показывает, что на схеме реакция опоры R_y^A направлена в противоположную сторону.

Проверим правильность вычисленных реакций опор. Для этого возьмем момент относительно любой точки (точка B) нашей балки.

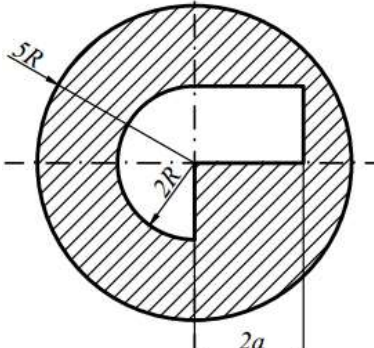
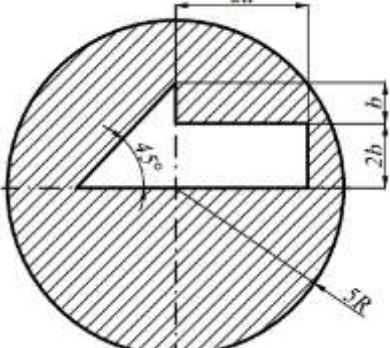
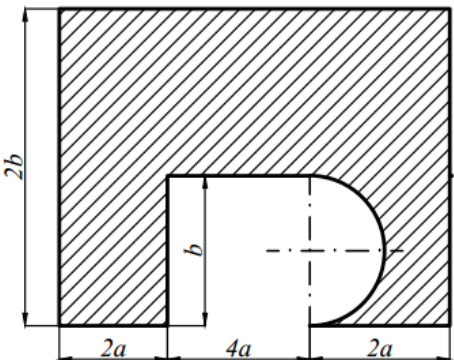
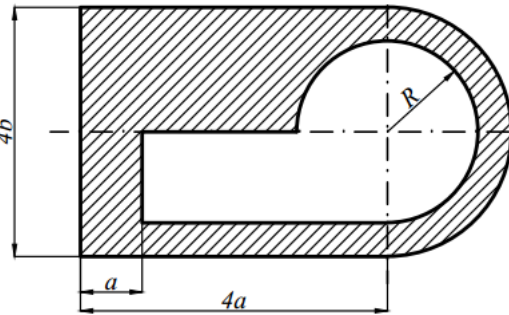
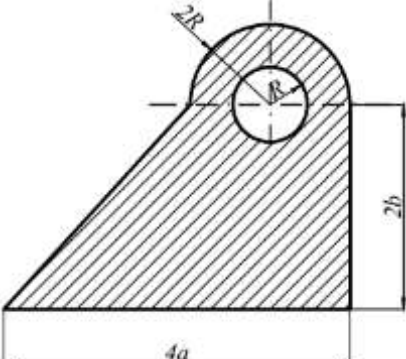
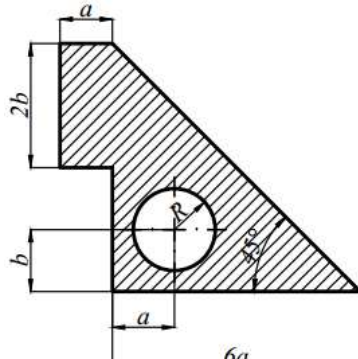
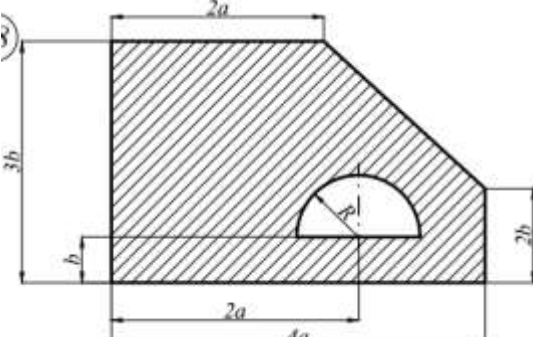
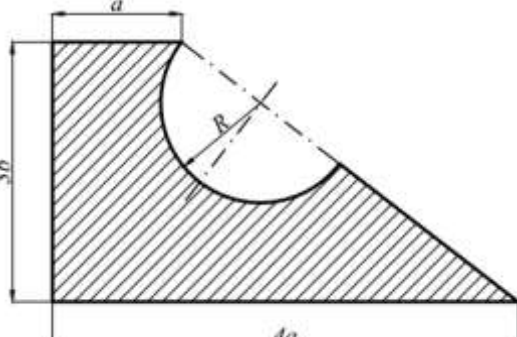
$$\begin{aligned} \sum M_z^B &= 0; -R_y^A \cdot 4 - R_x^A \cdot 6 + q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + M + P \cdot 4 = 0; \\ &-(-3,5) \cdot 4 - 10 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} - 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 2 + 10 \cdot 4 = 0; \\ &86 - 86 = 0. \end{aligned}$$

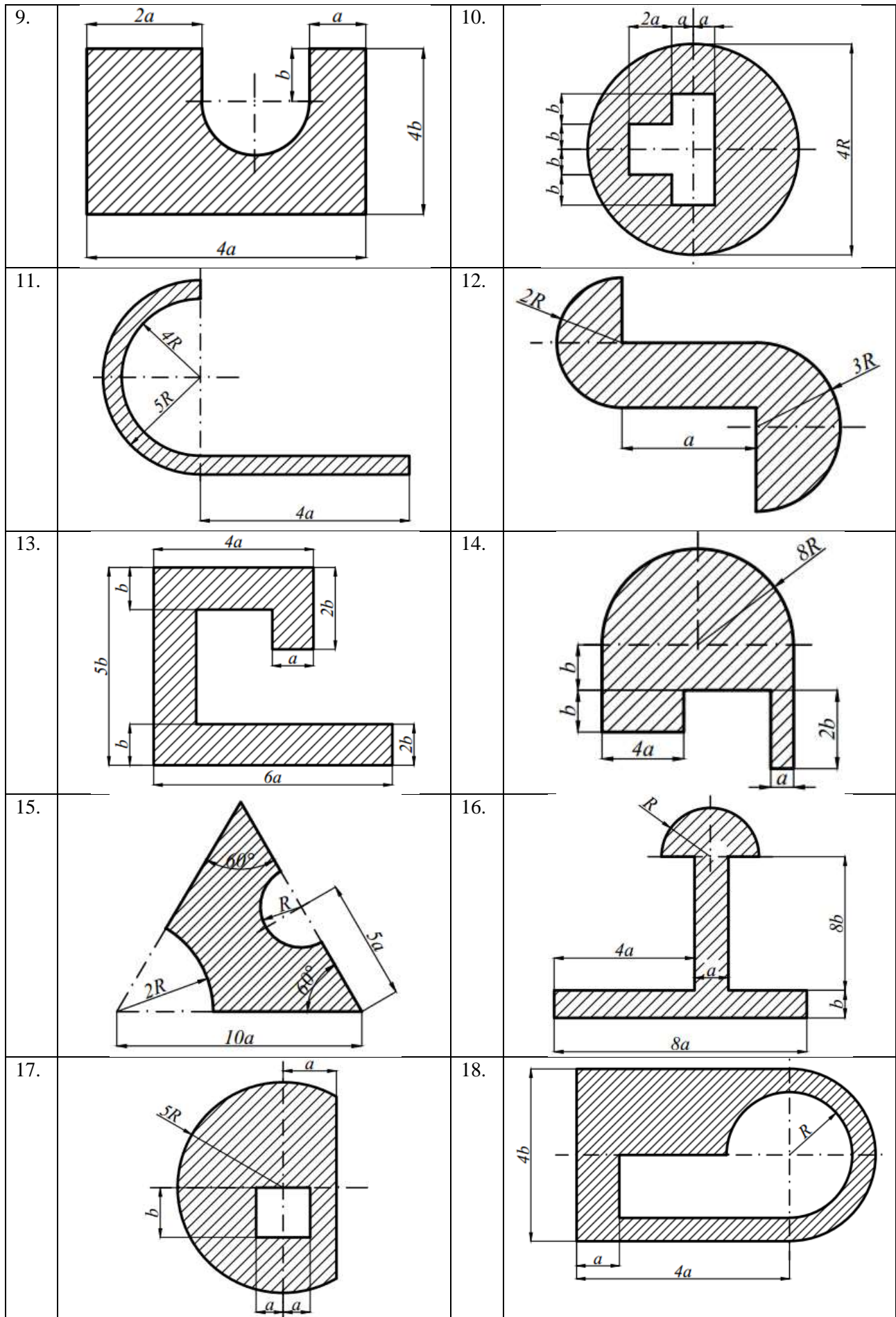
Из полученного равенства следует, что реакции опор определены правильно.

Задание № 6. Определение положения центра тяжести тела

Найти координаты центра масс плоской фигуры (табл. 6.1), необходимые для расчета данные приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.1

1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	
7.		8.	



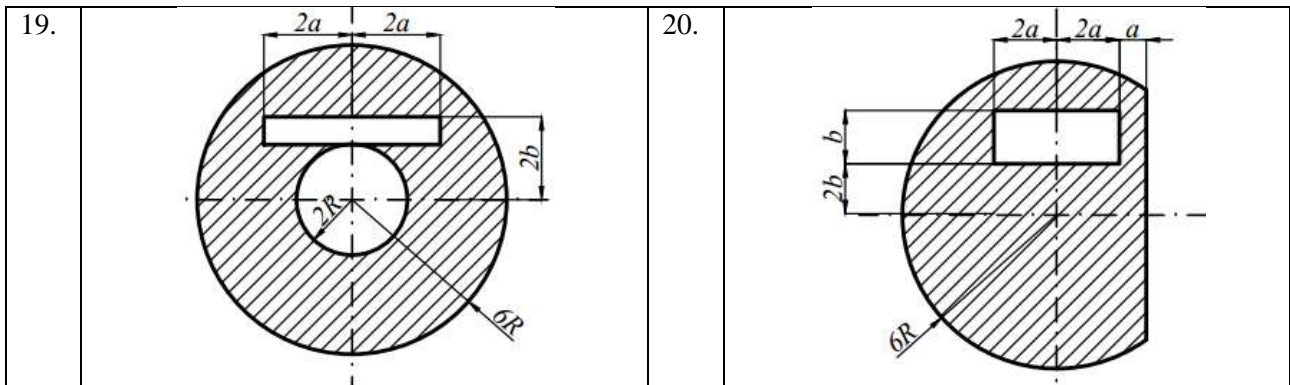


Таблица 6.2

№ варианта	Ширина a [см]	Высота b [см]	Радиус R [см]
1.	2	4	6
2.	4	6	8
3.	6	8	10
4.	8	10	2
5.	10	2	4
6.	2	4	6
7.	4	6	8
8.	6	8	10
9.	8	10	2
10.	10	2	4

Пример выполнения задания. Определить координаты центра масс плоской фигуры, показанной на рис. 6.

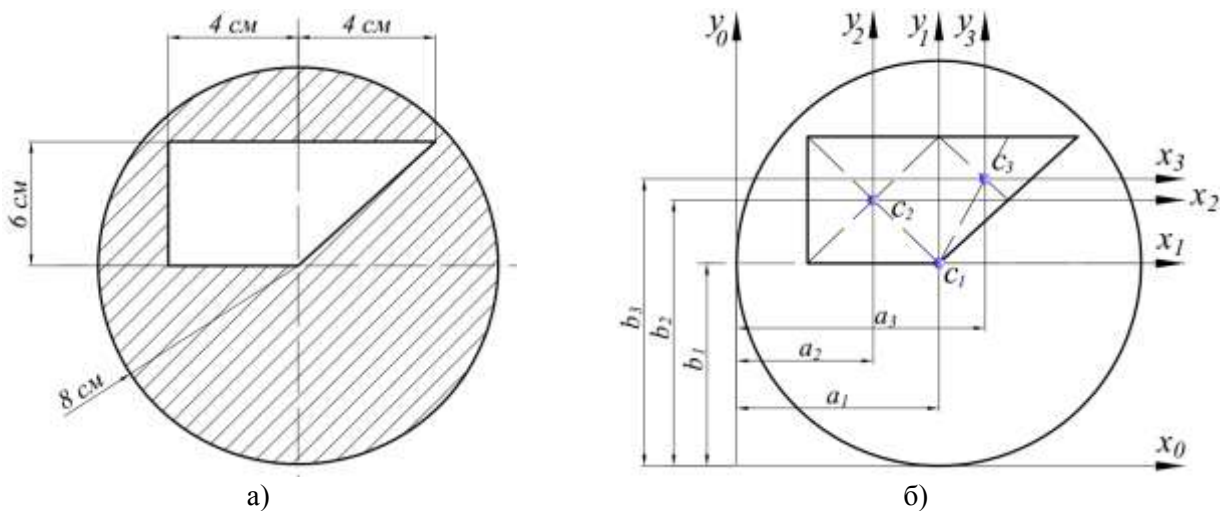


Рис. 6

Определим координаты x_c и y_c до центра масс находящегося в точке c :

$$x_c = \frac{S_y}{A}; y_c = \frac{S_x}{A}.$$

где: S_x и S_y - статические моменты относительно осей x_0 и y_0 .

Чтобы воспользоваться данными формулами, делим плоскую фигуру на части, для которых известны или легко определяются площади A_i и координаты центров масс x_i и y_i .

$$x_c = \frac{\sum S_{y_i}}{\sum A_i}; y_c = \frac{\sum S_{x_i}}{\sum A_i}. \quad (5.2)$$

где: S_{y_i} и S_{x_i} - статические моменты относительно осей x и y i -х простых фигур.

В данном случае в качестве таких частей принимаем круг, прямоугольник и треугольник (рис. 6 б). Площадь и статические моменты прямоугольника и треугольника, вырезанные из круга, считаем отрицательными.

Определим координаты до центров масс простых фигур $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$:

$$\begin{aligned} a_1 &= 8 \text{ см}; b_1 = 8 \text{ см}; \\ a_2 &= 8 - \frac{4}{2} = 6 \text{ см}; b_2 = 8 + \frac{6}{2} = 11 \text{ см}; \\ a_3 &= 8 + \frac{1}{3} \cdot 4 = 9,33 \text{ см}; b_3 = 8 + \frac{1}{3} \cdot 6 = 10 \text{ см}. \end{aligned}$$

Определим по формуле (5.2) координаты x_c и y_c :

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum S_{y_i}}{\sum A_i} = \frac{a_1 \cdot A_1 - a_2 \cdot A_2 - a_3 \cdot A_3}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{8 \cdot \pi \cdot 8^2 - 6 \cdot 4 \cdot 6 - 9,33 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6}{\pi \cdot 8^2 - 4 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6} = 8,19 \text{ см}; \\ y_c &= \frac{\sum S_{x_i}}{\sum A_i} = \frac{b_1 \cdot A_1 - b_2 \cdot A_2 - b_3 \cdot A_3}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{8 \cdot \pi \cdot 8^2 - 11 \cdot 4 \cdot 6 - 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6}{\pi \cdot 8^2 - 4 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6} = 7,42 \text{ см}. \end{aligned}$$

Положение центра масс сечения изображено на рис 6 в.

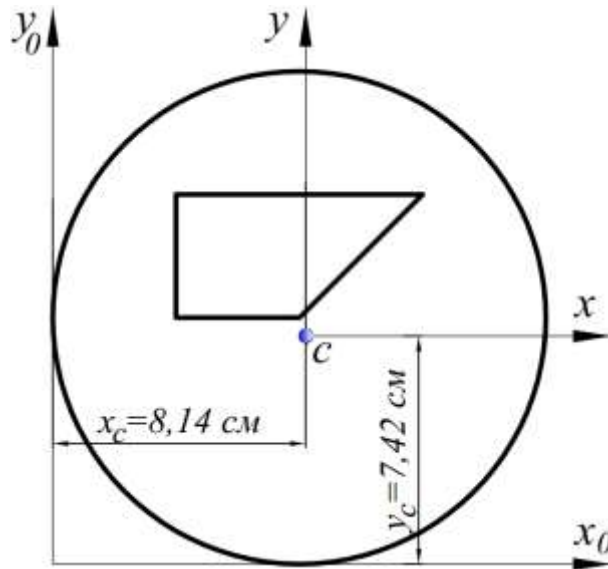


Рис 6 в

Задание № 7. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки M нарисовать в масштабе траекторию ее движения (прямая, парабола, круг или эллипс) и для момента времени $t = t_1 = 1$ [с] найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 7.

Таблица 7

	Уравнения движения			Уравнения движения	
	$x=x(t)$ [см]	$y=y(t)$ [см]		$x=x(t)$ [см]	$y=y(t)$ [см]
1.	$3\cos(\pi t^2/3)-3$	$-3\sin(\pi t^2/3)+2$	2.	$5t^2+5t/3-3$	$3t^2+t+3$
3.	$-3t$	$-4t^2+1$	4.	$-9\cos(\pi t^2/6)+5$	$-3-9\sin(\pi t^2/6)$
5.	$-8\sin(\pi t/6)-7$	$8\cos(\pi t/6)+2$	6.	$-2t^2-4$	$-6t$
7.	$4-5t^2+5t/3$	$3-3t^2+t$	8.	$-4\sin(\pi t/3)$	$-4\cos(\pi t/3)-1$
9.	$6\cos(\pi t^2/6)+3$	$6\sin(\pi t^2/6)-2$	10.	$5t$	$-7t^2-3$
11.	$3-3t/2-3t^2$	$2-3t-6t^2$	12.	$3\sin(\pi t^2/3)+3$	$1+3\cos(\pi t^2/3)$
13.	$3t$	$-5t^2-4$	14.	$7\cos^2(\pi t/6)$	$7\sin^2(\pi t/6)-5$
15.	$-3\sin(\pi t/3)$	$4\cos(\pi t/3)$	16.	$4t^2+1$	$3t$
17.	$2/(t+1)$	$2t-2$	18.	$\cos(\pi t^2/3)$	$-\sin(\pi t^2/3)$
19.	$4\sin^2(\pi t/6)$	$-4\cos^2(\pi t/6)-3$	20.	$-4t^2+1$	$8-3t$
21.	$-3t^2+2$	$3t+6$	22.	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3)-3$
23.	$7\sin(\pi t^2/6)+3$	$2-7\cos(\pi t^2/6)$	24.	$3t^2-t+1$	$5t^2-5t/3-2$
25.	$-3\cos(\pi t/3)+4$	$2\sin(\pi t/3)$	26.	$3t^2+2$	$-14t$
27.	$3t+3$	$3/(t+1)$	28.	$\cos(\pi t^2/3)+3$	$\sin(\pi t^2/3)-1$
29.	$4\sin^2(\pi t/3)$	$4\cos^2(\pi t/3)+2$	30.	$-2t^2+4$	$-4t$

Пример выполнения задания.

Движение точки в плоскости xu задано уравнениями:

$$x = 2 - 7 \cos\left(\frac{\pi}{6} t^2\right) \text{ см}; \quad y = 7 \sin\left(\frac{\pi}{6} t^2\right) + 3 \text{ см.} \quad (7.1)$$

Найти и изобразить траекторию движения точки, считая, что движение начинается в момент $t = t_0 = 0$. Определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории в момент времени $t_1 = 1$ с. Изобразить все векторы на рисунке в масштабе.

Решение. Уравнения движения можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений получим:

$$\frac{x-2}{-7} = \cos\left(\frac{\pi}{6} t^2\right); \quad (7.2)$$

$$\frac{y-3}{7} = \sin\left(\frac{\pi}{6} t^2\right); \quad (7.3)$$

Возведя в квадрат и сложив почленно уравнения (7.2) и (7.3), получим:

$$\frac{(x-2)^2}{(-7)^2} + \frac{(y-3)^2}{(7)^2} = 1; \quad (7.4)$$

Это уравнение окружности с центром $x_0 = 2$ см, $y_0 = 3$ см и радиусом 7 см (рис. 7.1).

$$x(t) := 2 - 7 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t^2\right) \quad y(t) := 7 \sin\left(\frac{\pi}{6} t^2\right) + 3$$

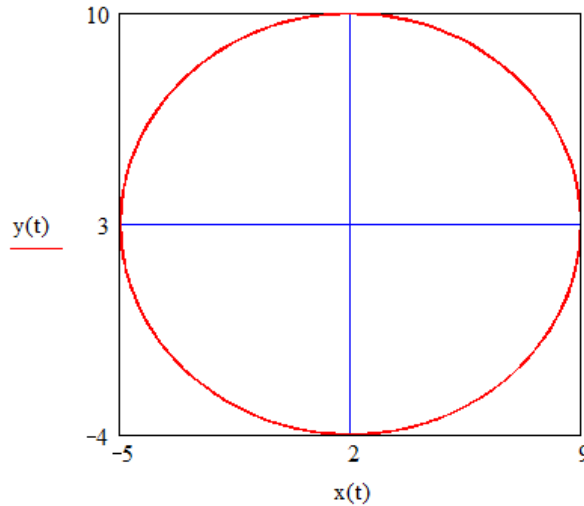


Рис. 7.1. Траектория движения точки

Определим координату точки в момент времени $t = t_1 = 1$ с.

$$\begin{aligned} x_{t=t_1} &= 2 - 7 \cos\left(\frac{\pi}{6} t^2\right) = 2 - 7 \cos(30^\circ) = -4,1 \text{ см}; \\ y_{t=t_1} &= 7 \sin\left(\frac{\pi}{6} t^2\right) + 3 = 7 \sin(30^\circ) + 3 = 6,5 \text{ см}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Вектор скорости и векторы ускорения точки:

$$\begin{aligned} v &= v_{xi} + v_{yj}; \\ a &= a_{xi} + a_{yj} \end{aligned} \quad (7.6)$$

где: i, j — орты осей x и y ; v_x, v_y, a_x, a_y — проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} = +7 \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{6} t^2\right); \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = 7 \frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6} t^2\right); \\ v_{x(t_1=1\text{с})} &= +7 \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{6} 1^2\right) = 1,8 \frac{\text{см}}{\text{с}}; \quad v_{y(t_1=1\text{с})} = 7 \frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6} 1^2\right) = 3,2 \frac{\text{см}}{\text{с}}; \\ a_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = +7 \frac{\pi^2}{6^2} \cos\left(\frac{\pi}{6} t^2\right); \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = -7 \frac{\pi^2}{6^2} \sin\left(\frac{\pi}{6} t^2\right); \\ a_{x(t_1=1\text{с})} &= +7 \frac{\pi^2}{6^2} \cos\left(\frac{\pi}{6} 1^2\right) = 1,7 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}; \quad a_{y(t_1=1\text{с})} = -7 \frac{\pi^2}{6^2} \sin\left(\frac{\pi}{6} t^2\right) = -1 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}; \end{aligned} \quad (7.7)$$

По найденным проекциям определяются модуль скорости и ускорения:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3,7 \frac{\text{см}}{\text{с}}; \quad (7.8)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1,9 \frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

Далее находим касательное a_τ , нормальное a_n ускорения и радиус кривизны траектории ρ при $t = t_1$ по формулам:

$$\begin{aligned} a_\tau &= \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v} = 0; \\ a_n &= \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 1,9 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}; \\ \rho &= \frac{v^2}{a_n} = \frac{3,7^2}{1,9} = 7 \text{ см}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

На рис. 7.2 показано положение точки M в заданный момент времени. Вектор v строим по составляющим v_x и v_y , причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор a строим по составляющим a_x и a_y и затем раскладываем на составляющие a_τ и a_n . Совпадение величин a_τ и a_n , найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

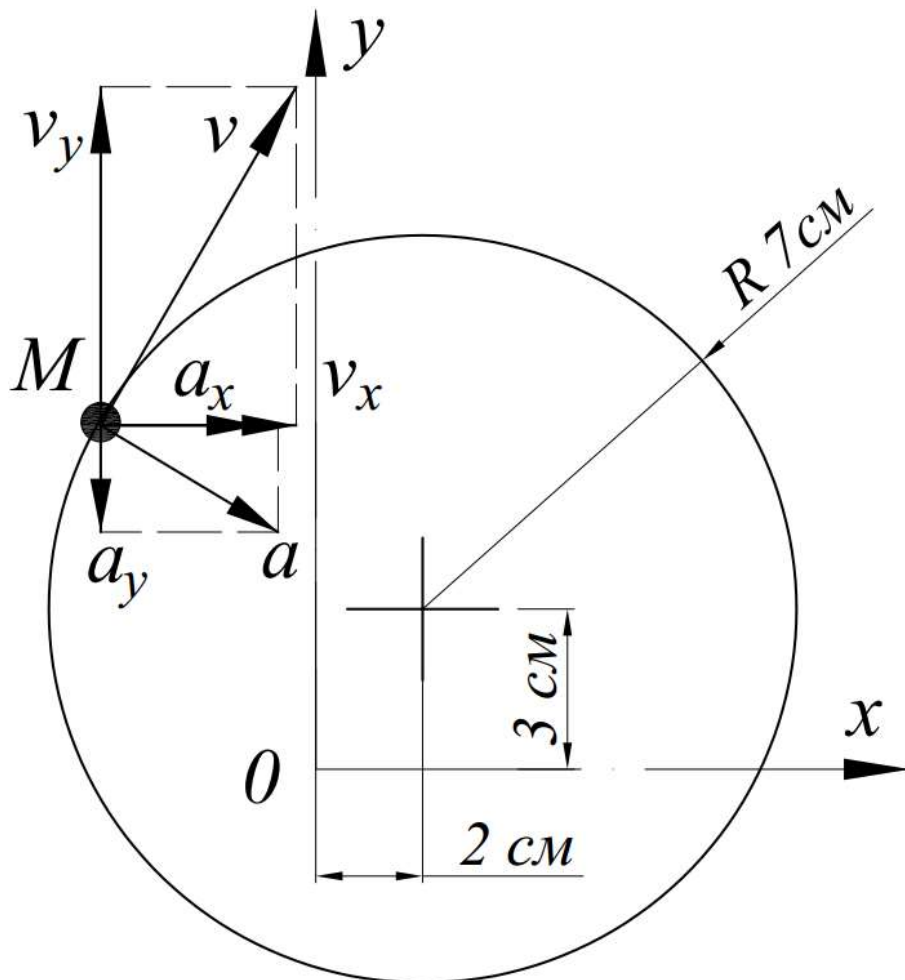


Рис. 7.2. Положение точки M в заданный момент времени

Задание №8. Кинематический анализ плоского механизма

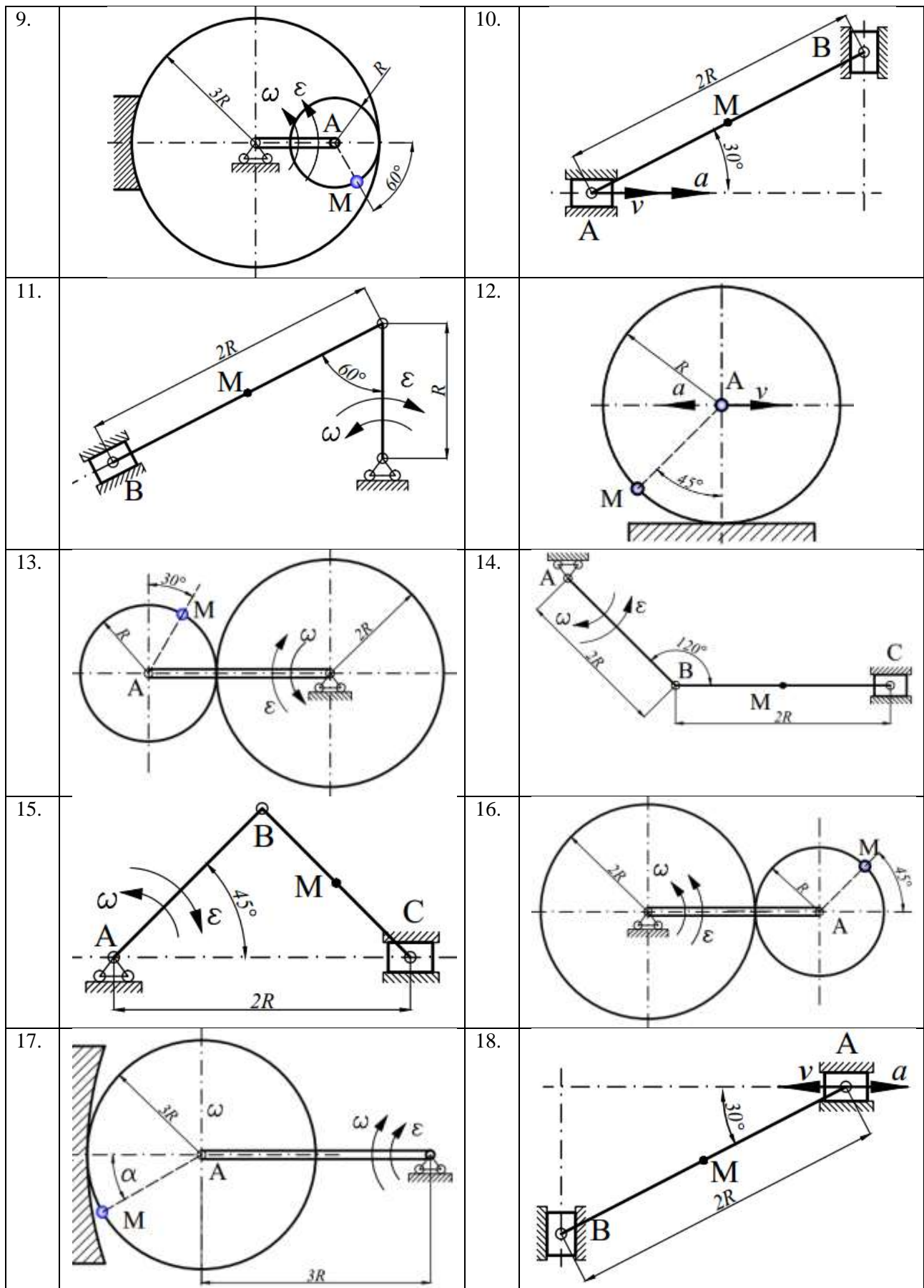
Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек А, В, С и М, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Схемы механизмов показаны в табл. 8.1, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 8.2.

Для кривошипно-ползунного механизма точка М находится посередине шатуна.

Таблица 8.1

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	



19.		20.	
21.		22.	
23.		24.	
25.		26.	
27.		28.	

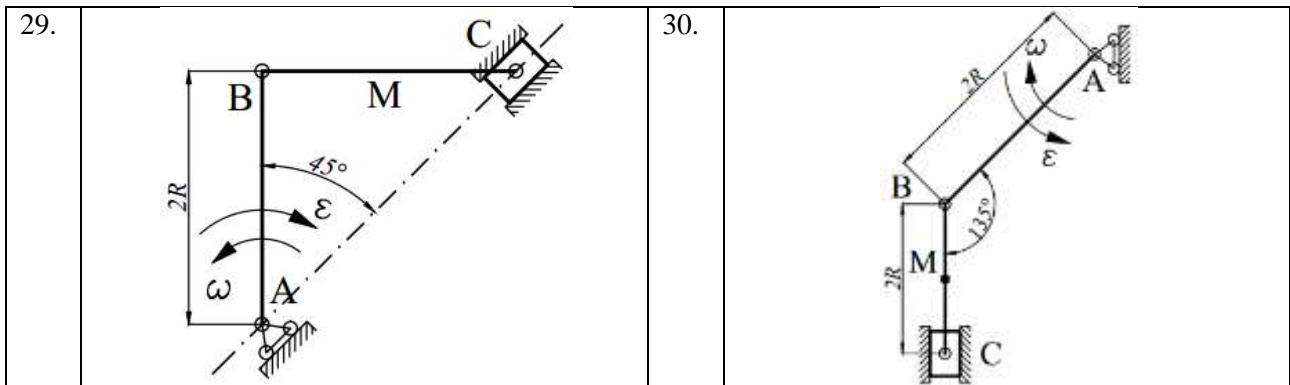


Таблица 8.2

№	R [м]	v [м/с]	ω [рад/с]	a [м/с ²]	ε [рад/с ²]
1.	0,5	0,5	1	1,5	2
2.	1	1	1,5	2	0,5
3.	1,5	1,5	2	0,5	1
4.	2	2	0,5	1	1,5
5.	0,5	0,5	1	1,5	2
6.	1	1	1,5	2	0,5
7.	1,5	1,5	2	0,5	1
8.	2	2	0,5	1	1,5
9.	0,5	0,5	1	1,5	2
10.	1	1	1,5	2	0,5

Пример выполнения задания. В плоском механизме кривошип OA вращается замедленно с угловой скоростью $\omega_0 = 1$ рад/с и имеет в данный момент времени ускорение $\varepsilon_0 = 1$ рад/с². Кривошип приводит в движение колесо 1 радиуса $R = 0,5$ м, которое катится без скольжения по неподвижному колесу 2 радиуса $2R = 1$ м. В положении, указанном на рис. 8.1, определить скорости и ускорения точек A , M , а также угловую скорость и ускорение колеса 1.

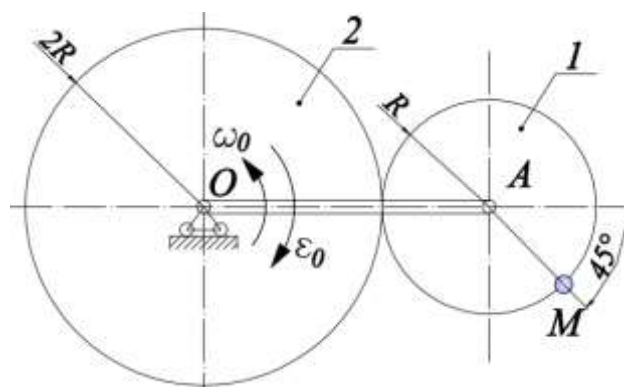


Рис. 8.1

Решение. Определим скорость точки A по формуле.

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = \omega_0 \cdot 3R = 1 \cdot 3 \cdot 0,5 = 1,5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Вектор $\vec{v}_A \perp OA$ и направлен в сторону вращения стержня OA по отношению к оси вращения O . Колесо 1 находится в плоскопараллельном движении. Определим его угловую скорость ω_1 , и скорость точки M через мгновенный центр скоростей. Он находится в точке касания двух колес т. P (рис 8.2), т.к. скорость этой точки колеса 1 при качении без скольжения равна нулю. По формуле определим ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_M}{MP}$$

Как видно из рис. 8.2, треугольник AMP - равнобедренный, и $AP = R = 0,5$ м, а $MP = 2R \cos(22,5^\circ) = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,924 = 0,924$ м. Таким образом,

$$\omega_1 = \frac{v_A}{AP} = \frac{1,5}{0,5} = 3 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$v_M = \omega_1 \cdot MP = 3 \cdot 0,924 = 2,77 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Обозначим на рис. 8.2 векторы скоростей точек A и B .

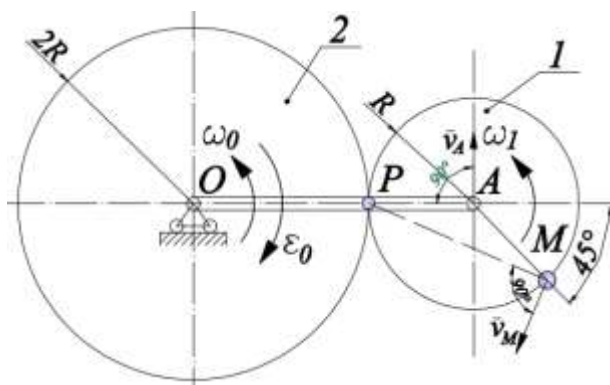


Рис. 8.2

Колесо 1 вращается по часовой стрелке. Вектор скорости \vec{v}_M направлен перпендикулярно к мгновенному радиусу MP в сторону поворота колеса 1 по отношению к мгновенному центру скорости P .

Перейдем к определению ускорений. Точка A совершает вращательное движение относительно т. O . Ускорение точки A определяется по формуле:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau;$$

$$\vec{a}_A^n = \omega_0^2 \cdot AO = 1^2 \cdot 3 = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$\vec{a}_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot AO = 1 \cdot 3 = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

Точка B совершает плоско-параллельное движение относительно т. O . Ускорение точки B определяется по формуле:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA} = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{MA}^n + \vec{a}_{MA}^\tau;$$

$$\vec{a}_{MA}^n = \omega_1^2 \cdot AM = 3^2 \cdot 1 = 9 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$\vec{a}_{MA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot AM = 3 \cdot 1 = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_A}{AP} \right) = \frac{1}{AP} \frac{dv_A}{dt} = \frac{a_A^r}{AP} = \frac{3}{1} = 3 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Изобразим векторы в точке A (рис. 8.3).

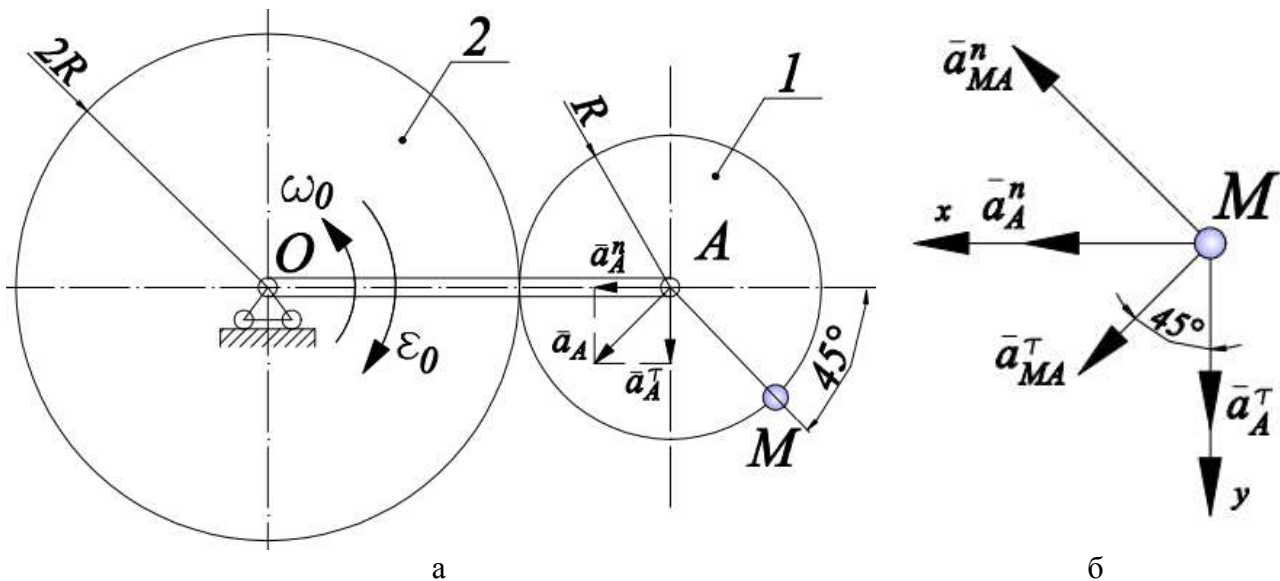


Рис. 8.3

Направление вектора ускорения точки B можно определить аналитически или графически. При графическом методе схема выполняется на миллиметровке в масштабе, с масштабным коэффициентом $\mu = \frac{\text{м}/\text{с}^2}{\text{см}}$.

В примере определим вектора ускорения точки B аналитически. Спроектируем векторы ускорений на вспомогательные оси x и y . Получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \bar{a}_M &= \bar{a}_{Mx} + \bar{a}_{My}; \\ \bar{a}_{Mx} &= \bar{a}_{Ax}^n + \bar{a}_{Ax}^\tau + \bar{a}_{MAx}^n + \bar{a}_{MAx}^\tau; \\ \bar{a}_{My} &= \bar{a}_{Ay}^n + \bar{a}_{Ay}^\tau + \bar{a}_{MAy}^n + \bar{a}_{MAy}^\tau. \end{aligned}$$

В нашем примере эти два выражения примут вид

$$\begin{aligned} \bar{a}_{Mx} &= \bar{a}_A^n + \bar{a}_{MA}^n \cdot \cos 45^\circ + \bar{a}_{MA}^\tau \cdot \cos 45^\circ = \\ &= 3 + 9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 + 6,4 + 2,1 = 11,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \\ \bar{a}_{My} &= \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{MA}^n \cdot \sin 45^\circ - \bar{a}_{MA}^\tau \cdot \sin 45^\circ = \\ &= 3 + 9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 + 6,4 - 2,1 = 7,3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \end{aligned}$$

Модуль вектора a_M составит:

$$|a_M| = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = \sqrt{11,5^2 + 7,3^2} = 13,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

Направление вектора a_M можно определить направляющими косинусами, что и предлагается сделать читателю.

Задание № 9. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки.

Точка M движется относительно тела D . По заданным уравнениям относительного движения точки M и движения тела D определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M .

Схемы механизмов показаны в табл. 9.1 а необходимые для расчета данные приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.1

1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	

7.		8.	
9.		10.	
11.		12.	
13.		14.	

15.		16.	
17.		18.	
19.		20.	
21.		22.	

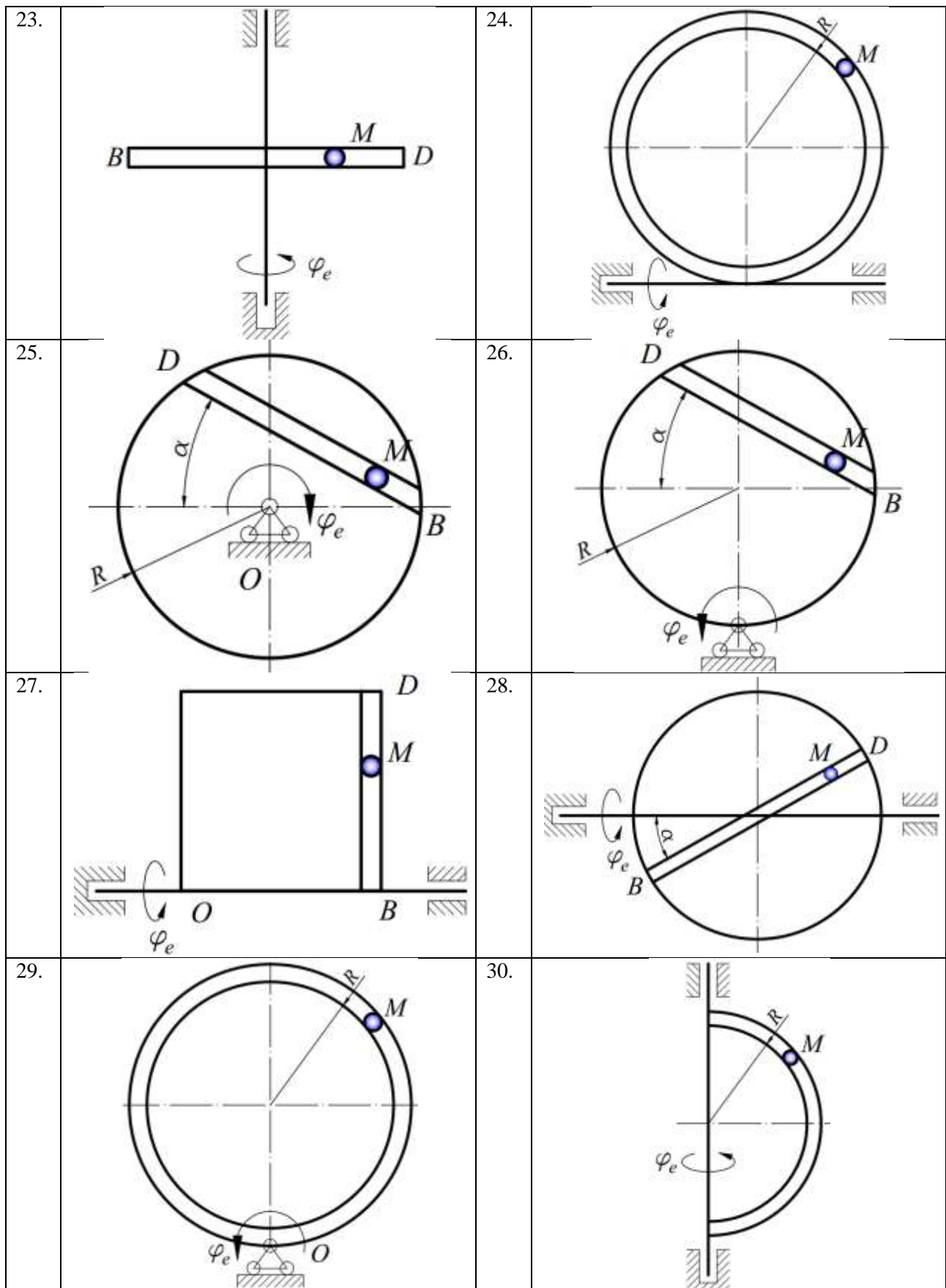


Таблица 9.2

	Уравнения движения тела		Уравнения относительного движения точки M	t_1 [с]	R [см]	a [см]	α°
	$\varphi_e = \varphi_e(t)$ [см]	$x_e = x_e(t)$ [см]	$s = s(t)$ [см]	0,5	10	20	30
1.	$3\cos(\pi t^2/3) - 3$	$-3\sin(\pi t^2/3) + 2$	$5t^2 + 5t/3 - 3$	1	15	25	60
2.	$-3t$	$-4t^2 + 1$	$-9\cos(\pi t/6) + 5$	1,5	20	10	30
3.	$-8\sin(\pi t/6) - 7$	$8\cos(\pi t/6) + 2$	$-2t^2 - 4$	2	25	15	60
4.	$4 - 5t^2 + 5t/3$	$3 - 3t^2 + t$	$-4\sin(\pi t/3)$	0,5	10	20	30
5.	$6\cos(\pi t^2/6) + 3$	$6\sin(\pi t^2/6) - 2$	$5t$	1	15	25	60
6.	$3 - 3t/2 - 3t^2$	$2 - 3t - 6t^2$	$3\sin(\pi t^2/3) + 3$	1,5	20	10	30
7.	$3t$	$-5t^2 - 4$	$7\cos^2(\pi t/6)$	2	25	15	60
8.	$-3\sin(\pi t/3)$	$4\cos(\pi t/3)$	$4t^2 + 1$	0,5	10	20	30
9.	$2/(t+1)$	$2t - 2$	$\cos(\pi t^2/3)$	1	15	25	60
10.	$4\sin^2(\pi t/6)$	$-4\cos^2(\pi t/6) - 3$	$-4t^2 + 1$	1,5	20	10	30

Пример выполнения задания. Прямоугольная пластина вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 4(t^2 - t)$ рад. Положительное направление отсчета угла показано на рис.9 дуговой стрелкой.

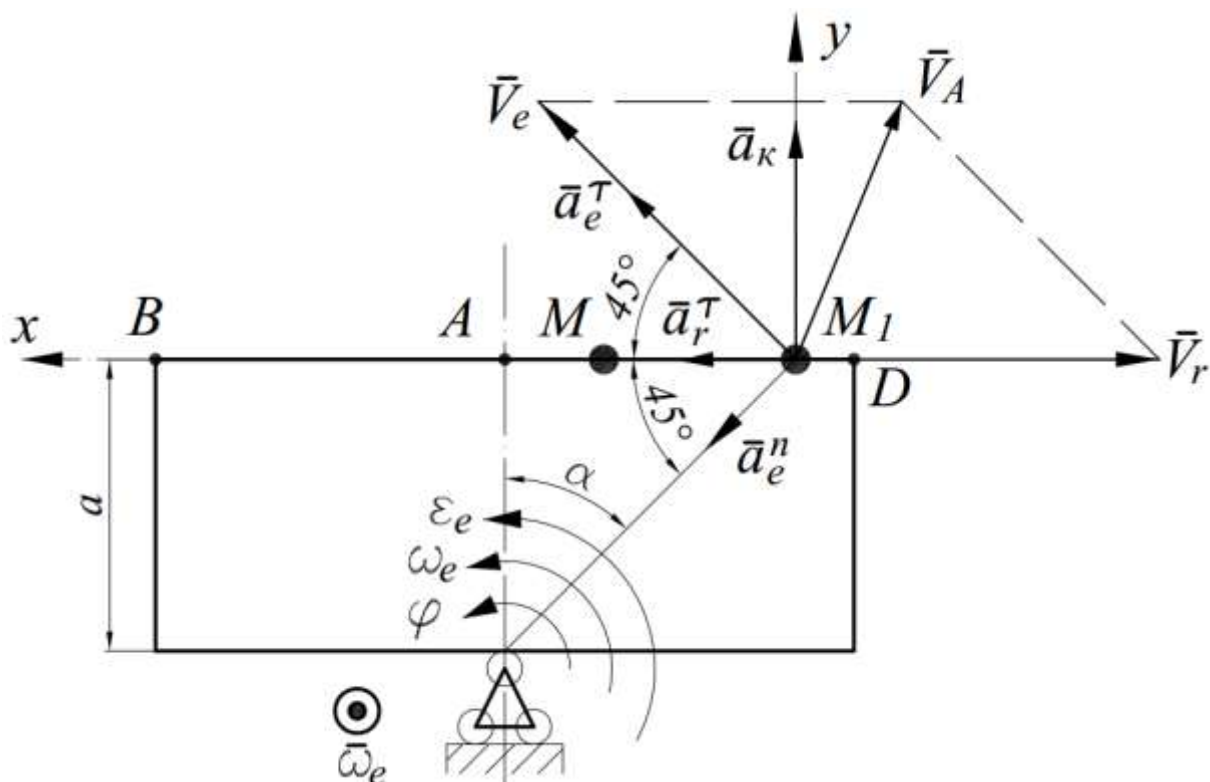


Рис. 9

По пластинке вдоль прямой BD движется точка M . Закон ее относительного движения $S_r = AM = 50(3t - t^2) - 64$ см. Положительное направление отсчета расстояния S_r от точки A к точке D . Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с, если $a = 36$ см.

Решение. Найдем положение точки M на прямой BD в момент времени $t = t_1$ по формуле:

$$S_r = AM = 50(31 - 1^2) - 64 = 36 \text{ см.} \quad (9.1)$$

Обозначим это положение M_1 , (рис. 27).

Т.к. $AM_1 > 0$, то это расстояние откладывается в положительном направлении отсчета. Движение точки M по прямой BD будет ее относительным движением. Закрепив точку M_1 на прямой BD в данный момент времени и заставив ее вращаться вместе с пластиной, получим переносное движение точки. Она описывает окружность с центром в точке O и с радиусом равным OM_1 . Определим абсолютную скорость точки M_1 по формуле:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r \quad (9.2)$$

Модуль переносной скорости будет

$$V_e = \omega_e \cdot OM_1 \quad (9.3)$$

где:

$$\omega_e = \frac{d\varphi}{dt} = 4(2t - 1) = 4(2 \cdot 1 - 1) = 4 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$OM_1 = \sqrt{OA^2 + AM_1^2} = \sqrt{36^2 + 36^2} = 51 \text{ см};$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{AM_1}{OA} = \frac{36}{36} = 1, \alpha = 45^\circ.$$

При $t = t_1$:

$$V_e = 4 \cdot 51 = 204 \frac{\text{см}}{\text{с}}. \quad (9.4)$$

Вектор \bar{V}_e направлен по касательной к окружности с центром в точке O (перпендикулярно к ее радиусу OM_1) в сторону вращения пластинки, а она вращается в сторону положительного отсчета угла φ , т.к. $\omega_e > 0$. Определим относительную скорость V_r по формуле:

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = 450(3 - 2t) = 50(3 - 2 \cdot 1) = 50 \frac{\text{см}}{\text{с}}. \quad (9.5)$$

Вектор \bar{V}_r направлен вдоль прямой BD в сторону положительного отсчета расстояния S_r , т.к. $V_r > 0$. Векторы \bar{V}_e и \bar{V}_r образуют угол 135° , поэтому модуль абсолютной скорости определяется по формуле:

$$\begin{aligned} |V_a| &= \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2|V_e| \cdot |V_r| \cdot \cos(\bar{V}_e \wedge \bar{V}_r)} = \\ &= \sqrt{204^2 + 50^2 + 2 \cdot 204 \cdot 50 \cos(135^\circ)} = 172,3 \frac{\text{см}}{\text{с}} \end{aligned} \quad (9.6)$$

Абсолютное ускорение точки M определяется по формуле:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k; \quad (9.7)$$

или в развернутом виде:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^t + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^t + \bar{a}_k; \quad (9.8)$$

Модуль переносного нормального ускорения

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM_1 = 4^2 \cdot 51 = 816 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}. \quad (9.9)$$

Вектор \bar{a}_e^n направлен к центру O . Модуль переносного касательного ускорения

$$|a_e^r| = |\varepsilon_e| \cdot OM_1; \quad (9.10)$$

где:

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 8 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Т.к. ω_e и ε_e , одного знака и положительны, то пластина в данный момент времени вращается ускоренно в сторону положительного отсчета угла φ против часовой стрелки. Т.е.

$$a_e^r = \varepsilon_e \cdot OM_1 = 8 \cdot 51 = 408 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}. \quad (9.12)$$

Т.к. переносное движение ускоренное, то вектор \bar{a}_e^r направлен в ту же сторону что и вектор \bar{V}_e .

Т.к. относительное движение точки прямолинейное, то $\bar{a}_r^n = 0$.

Относительное касательное ускорение определяется по формуле:

$$a_r^r = \frac{d}{dt} V_r = -100 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}. \quad (9.13)$$

Т.к. $a_r^r < 0$, то вектор \bar{a}_r^r направлен вдоль прямой BD в сторону, противоположную положительному направлению отсчета расстояния.

Ускорение Кориолиса и его модуль определяется по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{a}_k &= 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r; \\ |a_k| &= 2|\omega_e| \cdot |V_r| \cdot \sin(\bar{\omega}_e \hat{\ } \bar{V}_r) \end{aligned} \quad (9.4)$$

Вектор $\bar{\omega}_e$ лежит на оси вращения пластины и направлен перпендикулярно плоскости рисунка вверх. Угол между векторами ω_e и V_r составляет 90° . Тогда:

$$a_k = 2 \cdot 4 \cdot 50 \cdot \sin(90^\circ) = 400 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}; \quad (9.5)$$

Проектируя равенство (11.8) на оси x и y , получим

$$\begin{aligned} a_{ax} &= a_e^n \cos(45^\circ) + a_e^r \cos(45^\circ) + a_r^r = 816 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 408 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 = 765,5 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \\ a_{ay} &= -a_e^n \cos(45^\circ) + a_e^r \cos(45^\circ) + a_k = -816 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 408 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 400 = 111,5 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \end{aligned} \quad (9.6)$$

Модуль абсолютного ускорения:

$$a_a = \sqrt{(a_{ax})^2 + (a_{ay})^2} = \sqrt{765,5^2 + 111,5^2} = 773,6 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}. \quad (9.7)$$

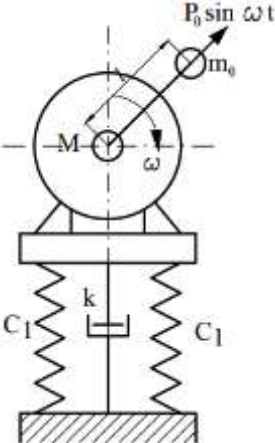
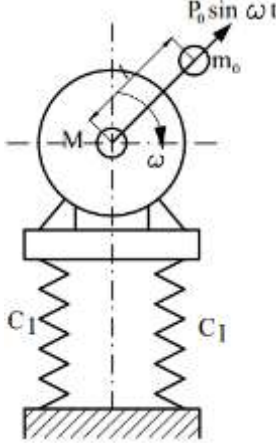
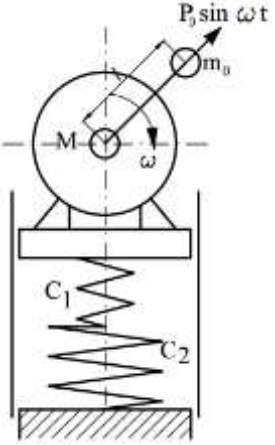
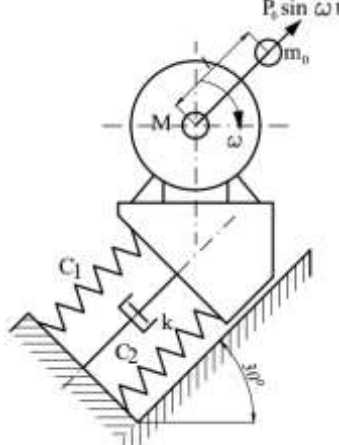
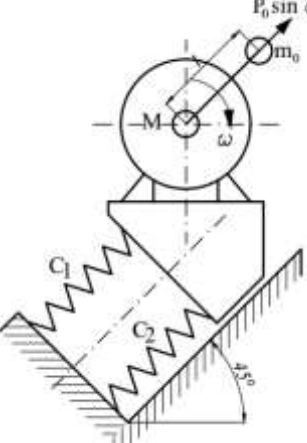
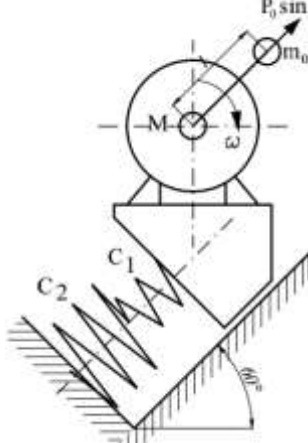
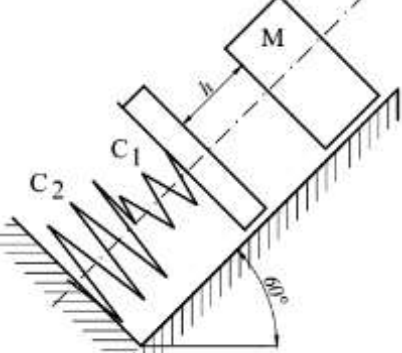
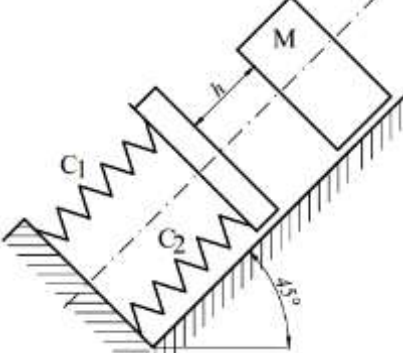
Задание № 10. Исследование колебательного движения материальной точки

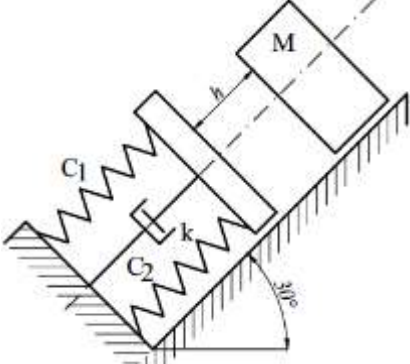
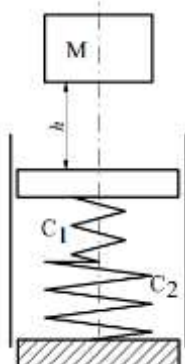
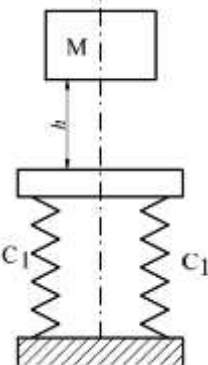
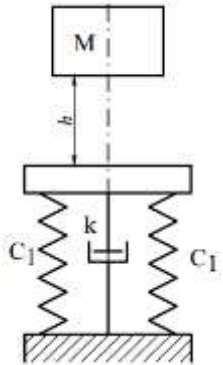
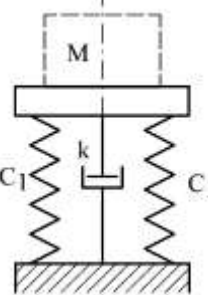
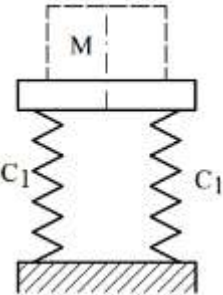
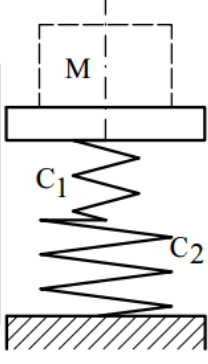
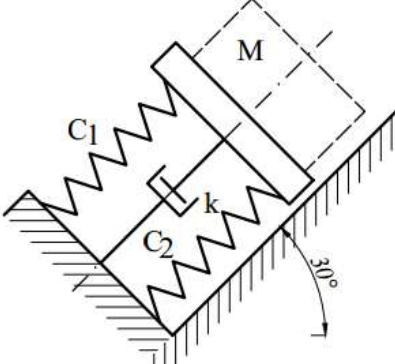
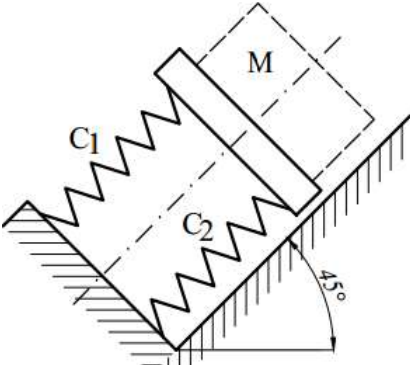
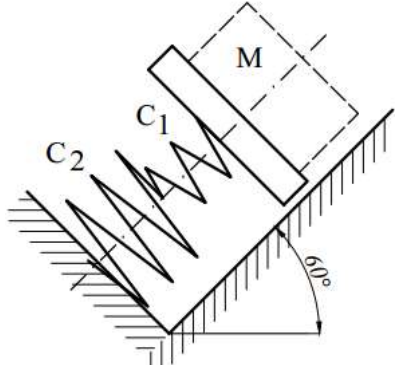
Найти уравнение движения и построить графики амплитудно-частотной, фазо-частотной характеристик и колебательного процесса груза массой M или системы грузов массами m_0 и M , начало отсчета совместить с положением покоя груза или соответственно системы грузов (при статической деформации пружин). Стержень, соединяющий грузы, считать невесомым и недеформируемым.

Схемы механизмов показаны в табл. 10.1, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 10.2.

Таблица 10.1

1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	

7.		8.	
9.		10.	
11.		12.	
13.		14.	

15.		16.	
17.		18.	
19.		20.	
21.		22.	
23.		24.	

Пример выполнения задания. Найти вертикальные колебания работающего электродвигателя с частотой вращения $\omega=100 \text{ с}^{-1}$, массы $m = 100 \text{ кг}$ имеющего дисбаланс ротора $m_0=0,1 \text{ кг}$ расположенном на расстоянии $l = 1 \text{ см}$ от его оси, поставленного на подрессоренный стол с жесткостью пружин $c = 4 \text{ кН/м}$ (рис. 10.1) и коэффициентом сопротивления амортизатора $k=0.2 \text{ кНс/м}$. При решении принять следующие допущения:

1. Электродвигатель отпущен без начальной скорости из положения, соответствующего недеформированной пружине;
2. Электродвигатель перемещается только в вертикальном направлении;
3. Реактивным моментом при работе электродвигателя пренебречь.

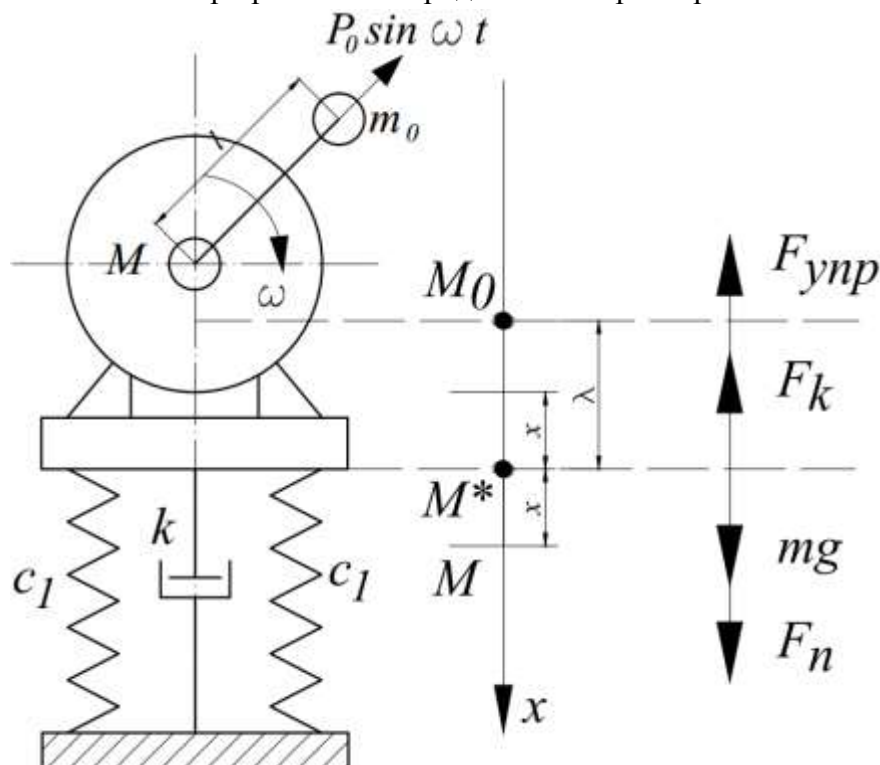


Рис. 10.1

Таблица 10.2

№	M [кг]	m_0 [кг]	l [мм]	c_1 [кН/м]	c_2 [кН/м]	k [кНс/м]	ω [с ⁻¹]
1.	50	0,5	10	4	6	0,2	100
2.	60	1	15	6	8	0,3	150
3.	70	1,5	20	8	10	0,4	300
4.	80	2	10	4	6	0,2	100
5.	90	0,5	15	6	8	0,3	150
6.	100	1	20	8	10	0,4	300
7.	50	1,5	10	4	6	0,2	100
8.	60	2	15	6	8	0,3	150
9.	70	0,5	20	8	10	0,4	300
10.	80	1	10	4	6	0,2	100

Решение. Будем рассматривать электродвигатель как материальную точку M , расположенную в точке прикрепления к подрессоренному столу. Отнесем движение к оси x , которую направим вдоль вертикали вниз. Пусть M_0 — положение этой точки,

соответствующее недеформированной пружине, M^* — положение равновесия, M — положение точки в текущий момент колебаний. Расстояние $\lambda = M_0M^*$, на которое растянута пружина в положении равновесия, называется статическим удлинением. Так как в положении равновесия вес и упругая сила уравновешены то:

$$\lambda = \frac{mg}{c} = \frac{100 \cdot 10}{4 \cdot 10^3} = 0,25 \text{ м,}$$

где: c – суммарная жесткость параллельно установленных пружин:

$$c = c_1 + c_2 = 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Для составления дифференциального уравнения движения рассматриваем текущее положение груза. В этом положении к нему приложены упругая сила, равная по модулю $F_{\text{упр}} = c \cdot M_0M$ и направленная вверх, сила тяжести $F_T = mg$ направленная вниз, сила сопротивления демпфера $F_k = -k \cdot v$ и периодически изменяемая силу $F_{\text{п}} = P_0 \sin(\omega t) = m_0 \omega^2 l \cdot \sin(\omega t)$.

Составим дифференциальное уравнение движения относительно точки выбранной за начало координат O в положении равновесия M^* :

$$m\ddot{x} = mg - c(\lambda - x) - kv + m_0 \omega^2 l \cdot \sin(\omega t)$$

Так как $c\lambda = mg$, в правой части два первых слагаемых взаимно уничтожаются, и мы приходим к уравнению:

$$m\ddot{x} = -cx - k\dot{x} + m_0 \omega^2 l \cdot \sin(\omega t)$$

Или

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = m_0 \omega^2 l \cdot \sin(\omega t)$$

Поделим обе стороны уравнения на массу m

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + f_c^2 x = h \cdot \sin(\omega t) \quad (10.1)$$

где:

$$f_c = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^3}{100}} = 6,3 \text{ рад/с;}$$

$$2n = \frac{k}{m}; n = \frac{0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 100} = 1$$

$$h = \frac{m_0 \omega^2 l}{m} = \frac{1 \cdot 100^2 \cdot 0,01}{100} = 1.$$

Уравнение (10.1) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, которое описывает любые механические системы, на которые действуют собственные, периодически изменяемые и силы сопротивления движению.

Как известно из высшей математике решение данного уравнения примет вид:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

где: $x_1(t)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения;

$x_2(t)$ – какое-либо частное решение неоднородного уравнения.

Вид общего решения однородного уравнения примет вид:

$$x_1(t) = e^{-nt}(A \cdot \sin(\psi t) + B \cdot \cos(\psi t)) \quad (10.2)$$

где: $\psi = \sqrt{f_c^2 - n^2} = \sqrt{40 - 1} = 6,25 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$,

A, B – постоянные интегрирования.

Анализ его решения показывает, что при условии $n \geq k$ движение точки не будет иметь колебательного характера. Выведенная из положения равновесия, точка медленно возвращается снова в это положение, находясь все время по одну сторону от положения равновесия либо единственный раз переходя через него. Чтобы движение было колебательным, должно выполняться условие $n < k$.

Роль амплитуды колебаний в данном случае играет величина $A^* = ae^{-nt}$, где $a = \sqrt{A^2 + B^2}$ убывающая с течением времени. Следовательно, свободные колебания при наличии сопротивления являются затухающими колебаниями.

С другой стороны общее решение однородного уравнения представляет собой затухающие колебания, исчезающие с течением времени:

$$x_1|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-nt}(A \cdot \sin(\psi t) + B \cdot \cos(\psi t))) \quad (10.2)$$

Поэтому при установившемся режиме движения $x_{\text{уст}} = x_1|_{t \rightarrow \infty}$ будет состоять только из вынужденных колебаний, которые определяются частным решением этого уравнения

Честное решение неоднородного уравнения примет вид:

$$x_2(t) = \frac{h}{\psi^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \quad (10.3)$$

Теперь можем записать и общее решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний с учетом сил сопротивления:

$$x(t) = e^{-nt}(A \cdot \sin(\psi t) + B \cdot \cos(\psi t)) + \frac{h}{\psi^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \quad (10.4)$$

Чтобы найти закон движения точки и постоянные интегрирования, надо найти его производную и в эти выражения подставить начальные условия $t=0$; $x_0=-\lambda$; $v_0 = 0$:

$$\dot{x}(t) = -n \cdot e^{-nt}(A\psi \cdot \cos(\psi t) - B\psi \cdot \sin(\psi t)) + \frac{h \cdot \omega}{\psi^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \quad (10.5)$$

Из уравнения (9.5) при заданных начальных условиях найдем A :

$$0 = -n \cdot e^0(A\psi \cdot \cos(0) - 0) + \frac{h \cdot \omega}{\psi^2 - \omega^2} \cos(0)$$

$$A = \frac{h \cdot \omega}{(\psi^2 - \omega^2)n \cdot e^0\psi} = \frac{1 \cdot 100}{(6,25^2 - 100^2) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6,25} = -1,6 \cdot 10^{-3}$$

Из уравнения (9.4) при заданных начальных условиях найдем B :

$$-\lambda = e^0(0 + B \cdot 1) + 0$$

$$B = -\lambda = -0,25 \text{ м.}$$

Период затухающих колебаний с учетом сил сопротивления можно определить по следующей формуле:

$$T = 2\pi/\psi = 1 \text{ с.}$$

График колебательного процесса из-за его сложности предлагается выполнить в среде MathCAD (рис. 10.2.а). На рис. 10.3.а и рис. 10.3.б изображен переходный режим движения и установившийся режим движения соответственно.

Как видно из рис. 10.3 При любых начальных условиях движение точки с течением времени будет состоять только из вынужденных колебаний. Начальные условия «умирают» вместе со свободными колебаниями, которые постепенно затухают.

Несмотря на присутствие сопротивления движению, вынужденные колебания являются гармоническими (незатухающими) колебаниями и происходят с частотой периодически изменяемой силы $F_{п} = P_0 \sin(\omega t)$, при постоянной амплитуде (10.6) и фазовом сдвиге (10.7):

$$a = \frac{h}{\sqrt{(\psi^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \quad (10.6)$$

$$tg(\alpha) = \frac{2n\omega}{\psi^2 - \omega^2} \quad (10.7)$$

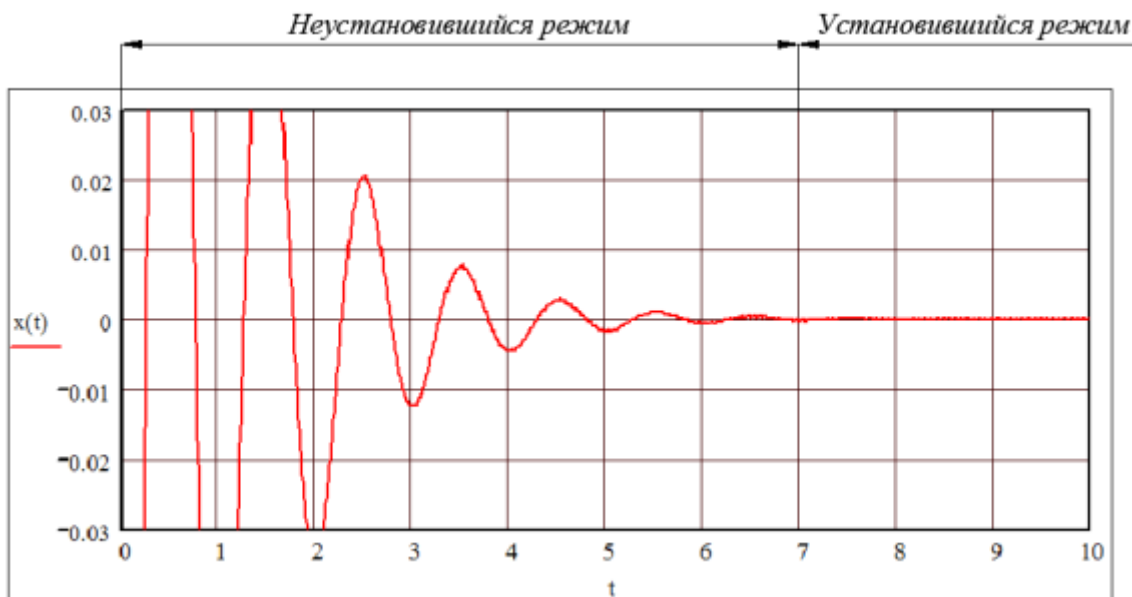


Рис. 10.2

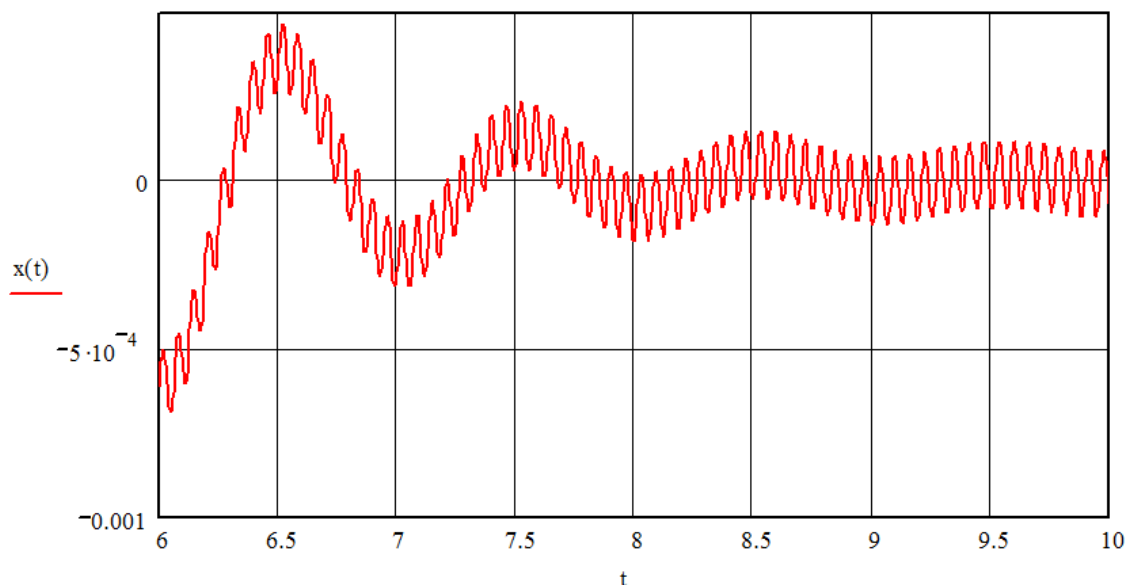


Рис. 10.3. а

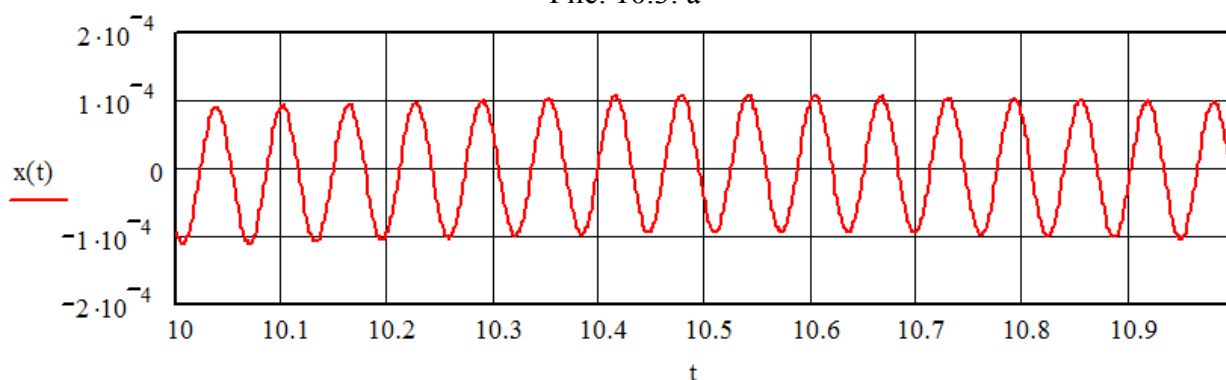


Рис. 10.3. б

Строим графики амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик. Для этого зададимся варьированием собственной частоты в первых 5-и октавных диапазонах частот (ОДЧ), от 0 до 22,4 Гц. Для построения графиков воспользуемся ранее приведенными формулами (10.6) и (10.7):

$$a(f) = \frac{h}{\sqrt{(f^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \quad (10.6)$$

$$\alpha(f) = \arctg\left(\frac{2n\omega}{f^2 - \omega^2}\right) \quad (10.7)$$

Примеры графиков, выполненные в среде MathCAD и представлены на рис. 10.4.а и рис. 10.4.б:

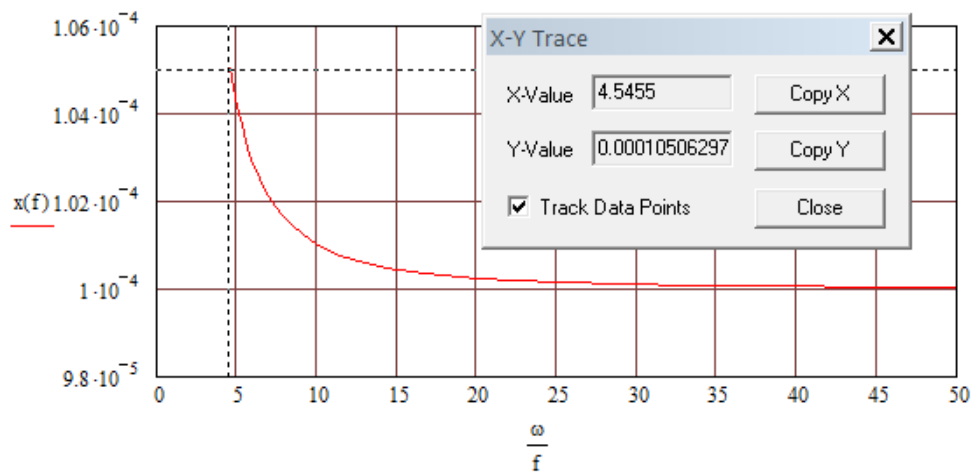


Рис. 1.4. а

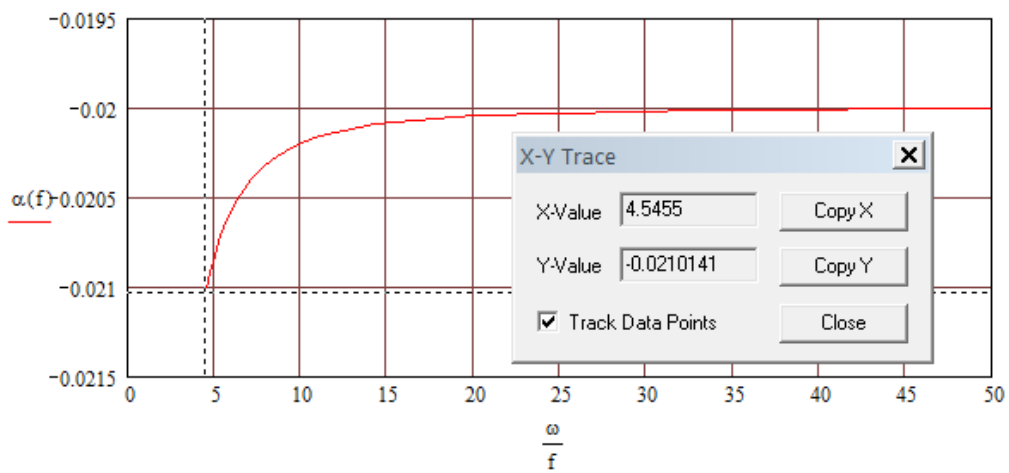


Рис. 1.4. б

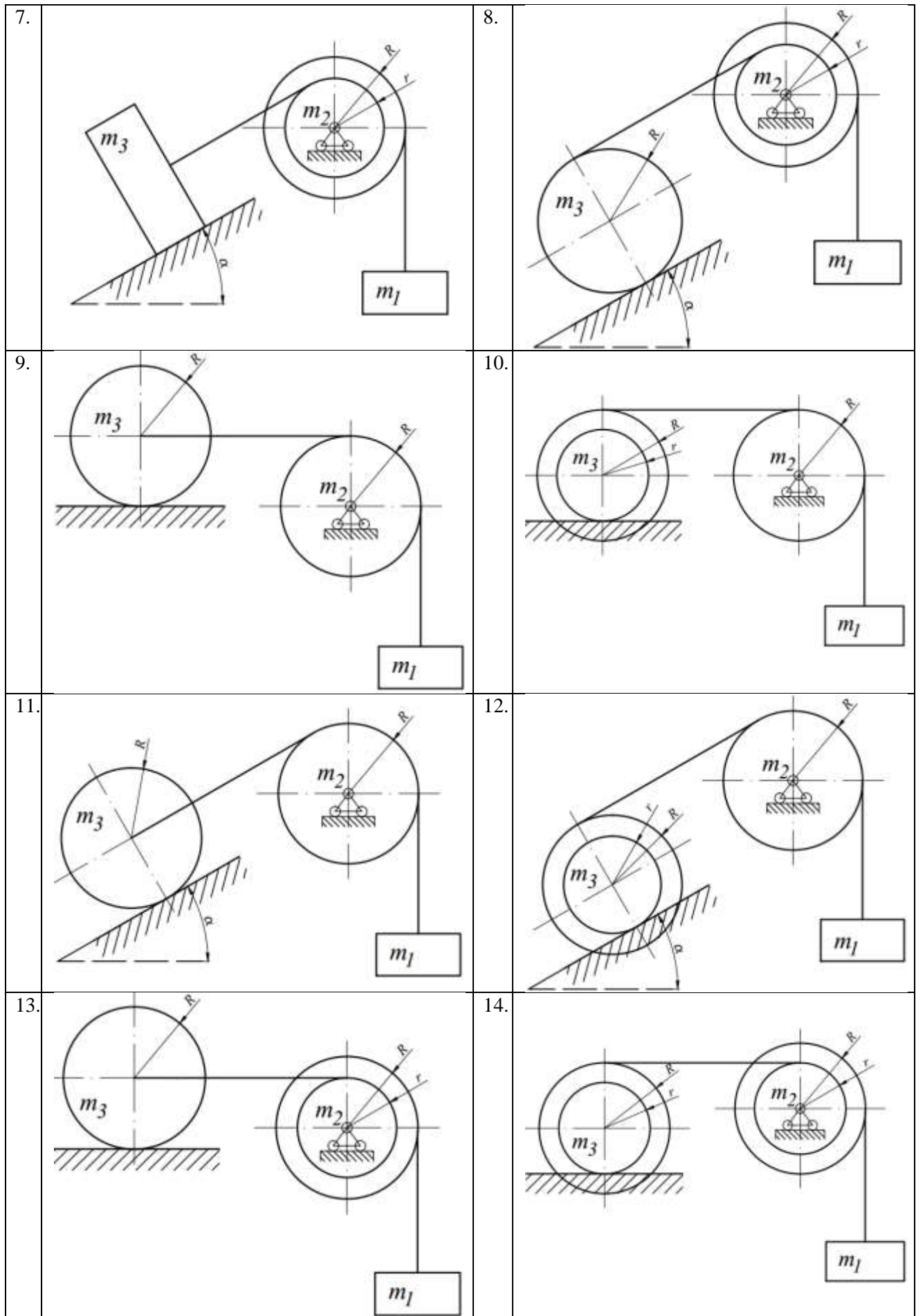
Задание № 11. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы.

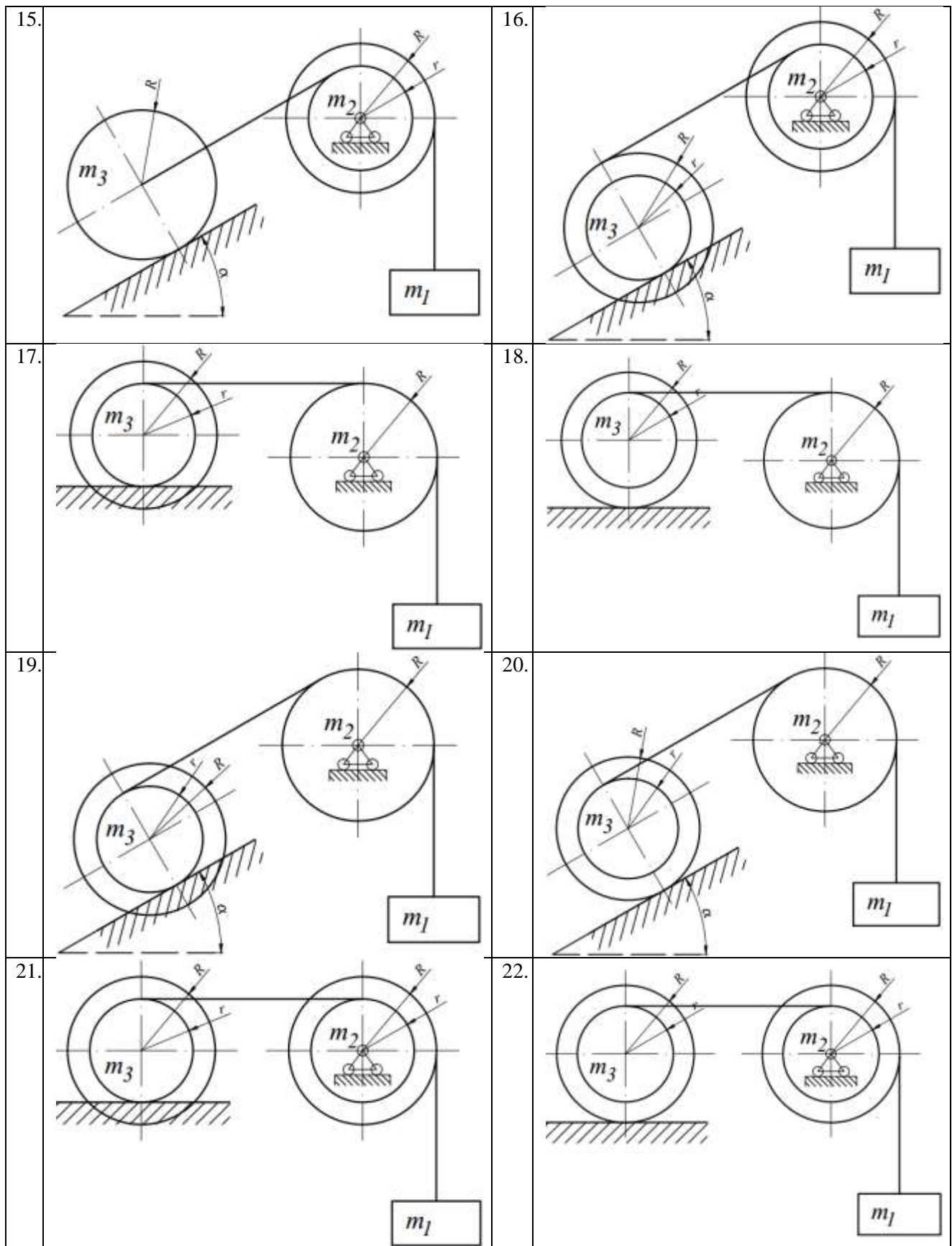
Определить скорость подвешенного тела массы m_1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным s . Массами нитей пренебречь. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Система движется из состояния покоя. Блоки и катки, считать сплошными однородными цилиндрами.

Схемы механизмов показаны в табл. 11.1, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 11.2.

Таблица 11.1

1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	





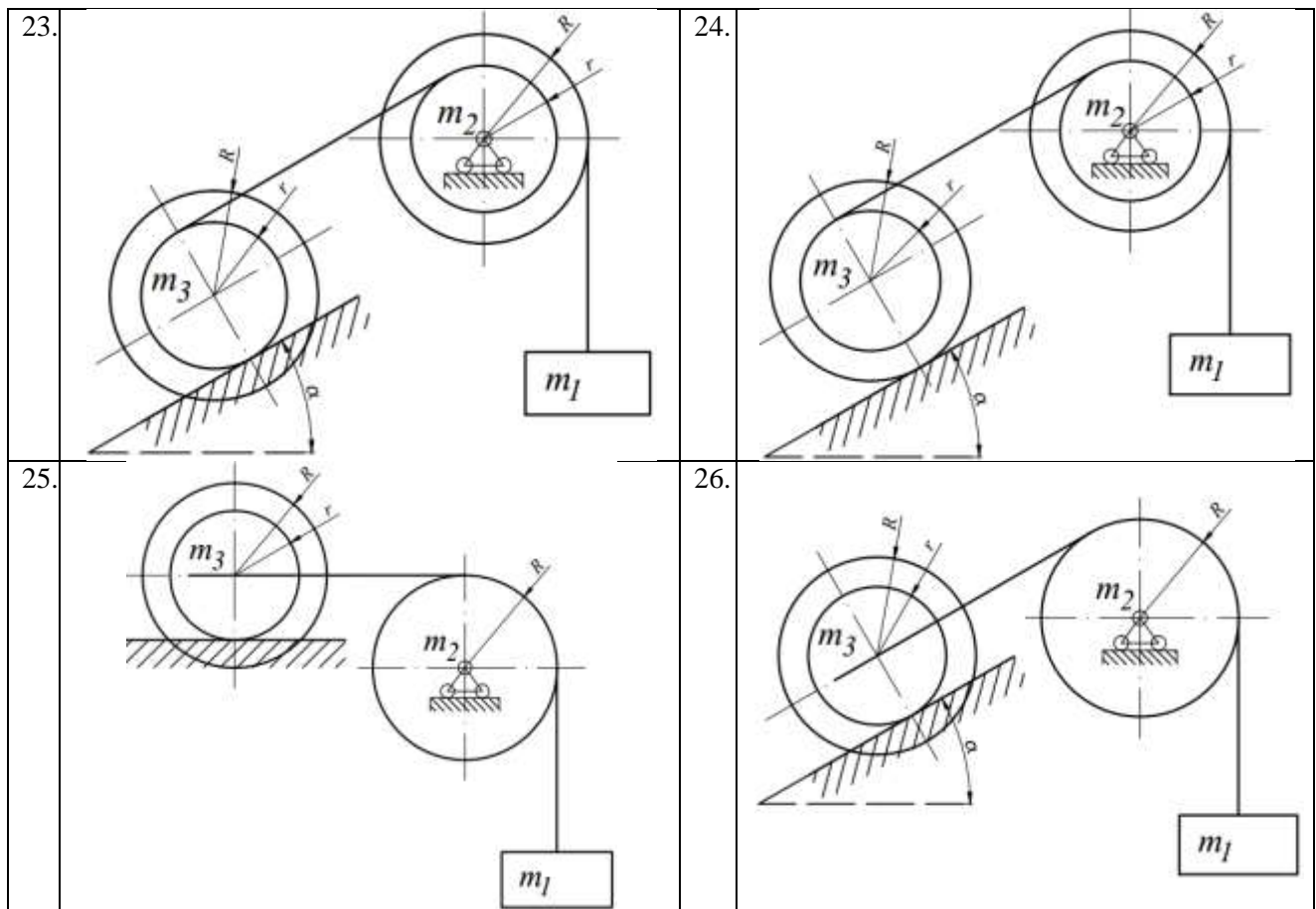


Таблица 11.2

№	m_1 [кг]	m_2 [кг]	m_3 [кг]	R [см]	R/r	f	s [см]	α [град]
1.	20	5	10	5	2	0,3	10	30
2.	30	10	20	10	1,5	0,25	20	45
3.	40	15	10	15	2	0,2	30	60
4.	20	5	20	20	2,5	0,15	30	60
5.	30	10	10	5	1,5	0,1	20	45
6.	40	15	20	10	2	0,15	10	30
7.	20	5	10	15	2,5	0,2	40	30
8.	30	10	20	20	1,5	0,25	50	45
9.	40	15	10	5	2	0,3	50	60
10.	20	5	20	10	2,5	0,2	40	30

Пример выполнения задания. Определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным s (рис. 11.1).

Дано: $m_1 = 2m$; $m_2 = m_3 = m_4 = m = 10$ кг; $R_1 = R_2 = R = 10$ см; $f = 0,1$; $s = 1$ м; $\alpha = 60^\circ$.

Определить: v_1 - ?.

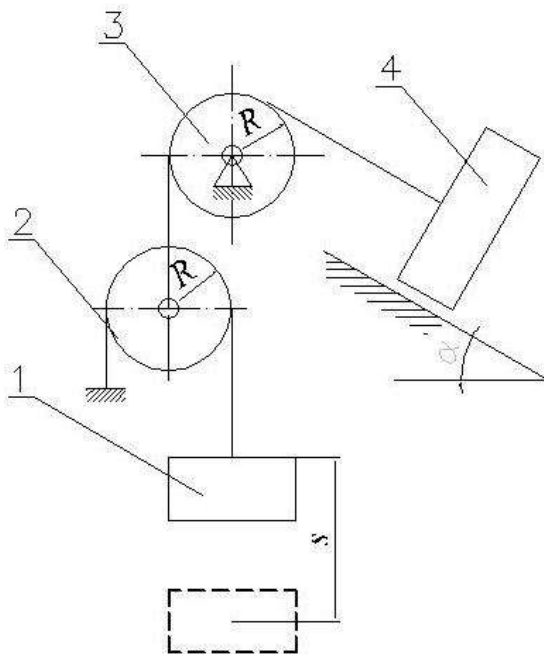


Рис. 11.1 Схема механизма

Решение:

Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^J \quad (11.1)$$

Т.к. системы состоят из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями и стержнями, то $\sum A_i^J = 0$. Т.к. в начальном положении система находится в покое, то $T_0 = 0$.

Следовательно, уравнение (1) принимает вид:

$$T = \sum A_i^E \quad (11.2)$$

Найдем скорости всех тел, входящих в систему, относительно скорости тела 1:

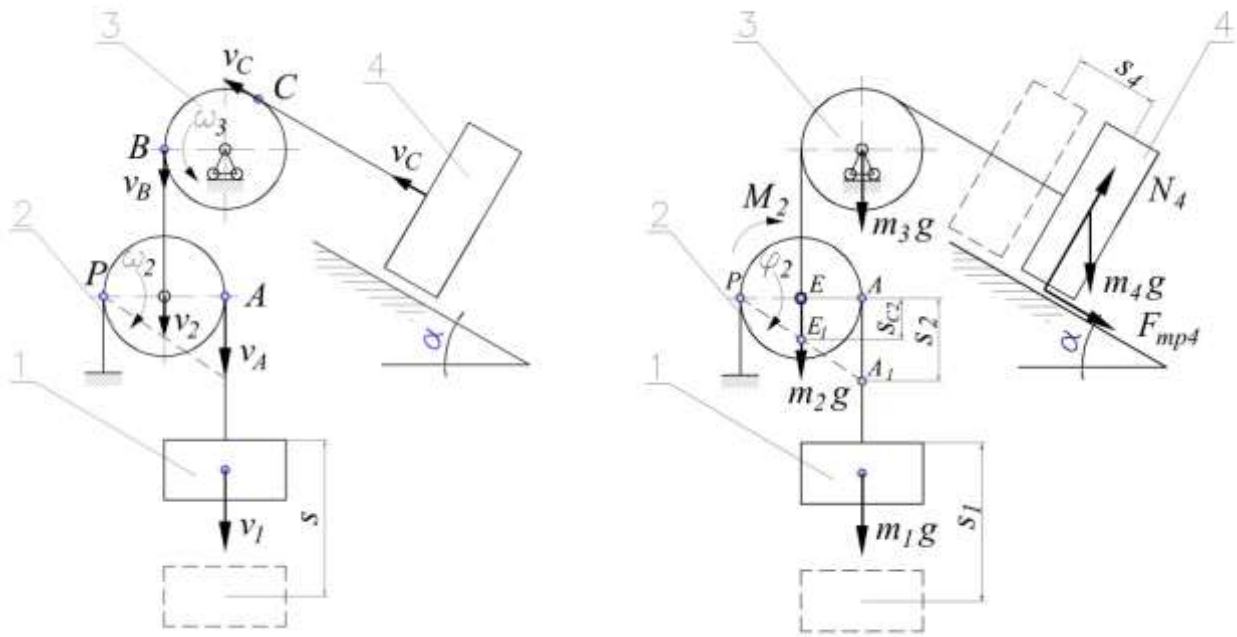


Рис. 11.2. Схема механизма с учетом скоростей и внешних сил

Т.к. нити не растяжимы то скорость 1-го тела равна скорости точки А, второе тело поворачивается относительно точки Р которая является мгновенным центром скоростей 2-го тела. Скорости точек В и С и скорость 4-го тела равны скорости 2-го тела.

$$v_1 = v_A; v_2 = v_4 = \omega_2 \cdot R_2 = \frac{v_1}{2}; \omega_2 = \frac{v_A}{2R_2} = \frac{v_1}{2R} \quad v_3 = 0; \omega_3 = \frac{v_B}{R_3} = \frac{v_2}{R} = \frac{v_1}{2R}.$$

Вычислим энергию системы в конечном положении как сумму кинетических энергий тел 1, 2, 3, 4:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \tag{11.3}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} 2m v_1^2 = m v_1^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_{2x} \omega_2^2 = \frac{1}{4} m v_1^2 + \frac{1}{4} m R_2^2 \omega_2^2 = \frac{1}{4} m v_1^2 + \frac{1}{4} m R^2 \frac{v_1^2}{4R^2} = \frac{5}{16} m v_1^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{3x} \omega_3^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \omega_3^2 = \frac{1}{16} m R_2^2 \frac{v_1^2}{R_2^2} = \frac{1}{16} m v_1^2;$$

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_4^2 = \frac{1}{8} m v_1^2;$$

Т.к. для блоков радиусы инерции не даны, значит, они являются однородными цилиндрами и следовательно определяются:

$$J_{2x} = \frac{1}{2} m_2 R_2^2; \quad J_{3x} = \frac{1}{2} m_3 R_3^2;$$

Найдем энергию системы в конечном положении по формуле (11.3):

$$T = mv_1^2 + \frac{5}{16} mv + \frac{1}{16} mv + \frac{1}{8} m v_1^2 = \frac{16+5+1+2}{16} mv_1^2 = \frac{24}{16} mv_1^2 = \frac{3}{2} mv_1^2;$$

Найдем сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе, на заданном перемещении.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \quad (11.4)$$

Работа силы тяжести 1-го тела:

$$A_1 = m_1 g \cdot s_1 = 2mg \cdot s_1;$$

Работа силы тяжести 2-го тела:

$$A_2 = m_2 g \cdot s_2 = \frac{1}{2R} mg \cdot s_1;$$

Когда груз 1 пройдет путь s_1 , барабан 2 повернется на угол φ_2 . Этот угол можно определить на основании формулы полученной ранее $\omega_2 = v_1/2R$; заменяя в ней $\omega_2 = d\varphi/dt$, $v_1 = ds/dt$, получаем: $\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{1}{2R} \frac{ds_1}{dt}$ после интегрирования (при нулевых начальных условиях) получим $\varphi_2 = \frac{1}{2R} s_1$. Из полученного видно, что линейные и угловые перемещения находятся в такой же зависимости, как соответствующие линейные и угловые скорости.

Работа силы тяжести 3-го тела:

$A_3=0$, т.к. силами сопротивления подшипника качения 3-го тела можно пренебречь.

Работа силы тяжести 4-го тела:

$$A_4 = -m_4 g \sin \alpha \cdot s_4 = -mg \sin \alpha \cdot \frac{s_1}{2} = -\frac{1}{2} mg \sin \alpha \cdot s_1;$$

Т.к. нити считаются нерастяжимыми то перемещение 4-го тела равно перемещению центра тяжести 2-го тела ($s_4 = s_{C2}$) которое в свою очередь можно найти из подобия треугольников PAA_1 и PEE_1 получим $s_{C2} = s_2/2 = s_1/2$ т.к. $s_2 = s_1$.

Работа силы трения скольжения \vec{F}_{mp4} :

$$A_{mp_4} = -F_{mp_4} \cdot s_4 = -fN_4 \cos \alpha \cdot \frac{s_1}{2} = -\frac{1}{2} fmg \cos \alpha \cdot s_1$$

Сумма работ внешних сил определится по формуле:

$$\sum A_i^E = 2mgs_1 + \frac{1}{2R} mgs_1 - \frac{1}{2} mg \sin \alpha \cdot s_1 - \frac{1}{2} fmg \cos \alpha \cdot s_1 ;$$

Подставляя известные значения, получаем:

$$\sum A_i^E = \left(2 + \frac{1}{2R} - \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} f \cos \alpha \right) mgs_1 = 1,6gs_1m = 16m$$

Согласно теореме (2) приравняем значения T и $\sum A_i^E$ получим:

$$\frac{3}{2}mv_1^2 = 16m$$

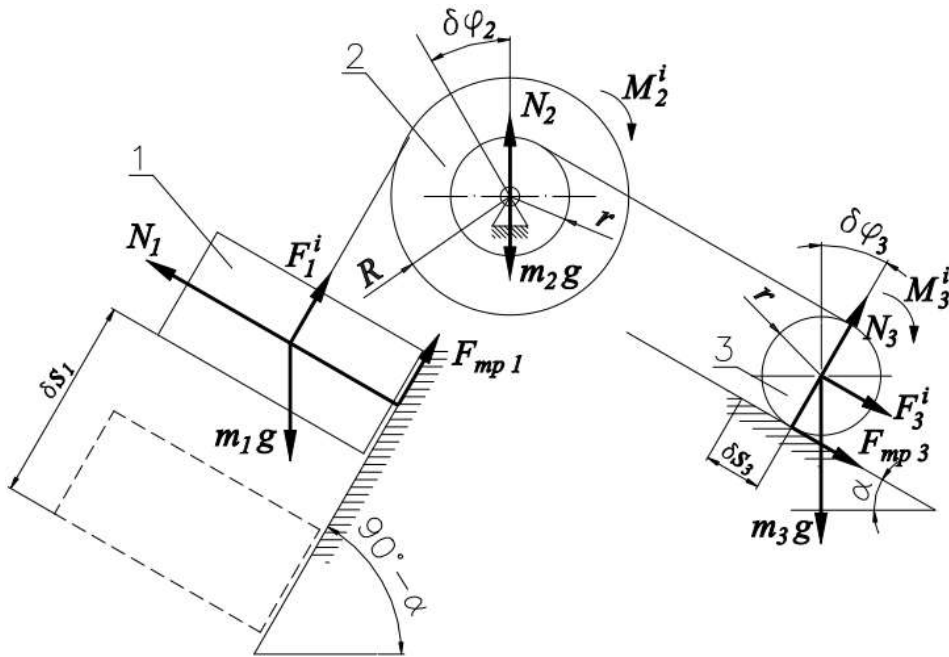
откуда:
$$v_1 = \sqrt{16 \cdot \frac{2}{3}} = 3,3 \text{ м/с.}$$

Задание № 12. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы

Для заданной механической системы взятой из задания №11 определить ускорения грузов и натяжения в ветвях нитей, к которым прикреплены грузы. Массами нитей пренебречь. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Система движется из состояния покоя. Блоки и катки, считать сплошными однородными цилиндрами.

Пример выполнения задания. Для заданной механической системы определить ускорения грузов и натяжения в ветвях нитей, к которым прикреплены грузы.

Дано. $m_1=3m, m_2=2m, m_3=m, R/r=2, f=0.1, \alpha=60^\circ$.



Найти a_1, T_1

Решение:

1. Запишем общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A + \sum \delta A^H = 0 \quad (12.1)$$

2. Определяем силы инерции:

Для 1-го тела:

$$F_1^H = m_1 \cdot a_1;$$

Для 2-го тела:

$$I_2^H = m_2 \cdot i_2^2 \cdot \varepsilon_2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot R^2 \cdot \varepsilon_2; \quad (12.2)$$

Для 3-го тела:

$$F_3^H = m_3 \cdot a_3; \quad I_3^H = m_3 \cdot i_3^2 \cdot \varepsilon_3 = \frac{1}{2} m_3 \cdot r^2 \cdot \varepsilon_3$$

3. Сообщая системе возможное перемещение и составляя уравнение (12.1), получим:

$$\begin{aligned} & (m_1 \cdot g \cdot \sin(60) - m_1 \cdot g \cdot f \cdot \cos(60) - m_1 \cdot a_1) \cdot \delta s_1 - \\ & - \frac{1}{2} m_2 \cdot R^2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \delta \varphi_2 - \\ & - (m_3 \cdot g \cdot \sin(30) + m_3 \cdot a_3) \cdot \delta s_3 - \frac{1}{2} m_3 \cdot r^2 \cdot \varepsilon_3 \cdot \delta \varphi_3 = 0 \end{aligned} \quad (12.3)$$

Все входящие сюда перемещения выражаем через δs_1 , которую обозначим просто δs :

$$\delta\phi_2 = \frac{\delta s}{R}; \quad \delta s_3 = \delta s \cdot \frac{r}{R} = \frac{\delta s}{2}; \quad \delta\phi_3 = \frac{\delta s_3}{r} = \frac{\delta s}{2r} \quad (12.4)$$

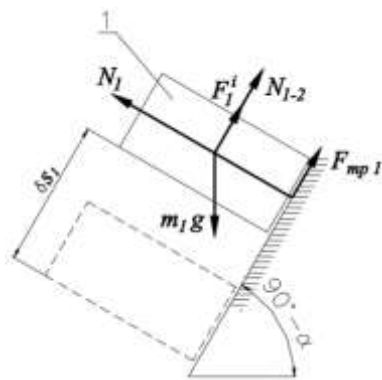
Подставив величины (12.4) в (12.3), получим:

$$\begin{aligned} & (m_1 \cdot g \cdot \sin(60) - m_1 \cdot g \cdot f \cdot \cos(60) - m_1 \cdot a_1) \cdot \delta s - \\ & - \frac{1}{2} m_2 \cdot R^2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{\delta s}{R} - \\ & - (m_3 \cdot g \cdot \sin(30) + m_3 \cdot a_3) \cdot \frac{\delta s}{2} - \frac{1}{2} m_3 \cdot r^2 \cdot \varepsilon_3 \cdot \frac{\delta s}{2r} = 0 \end{aligned} \quad (12.5)$$

Все входящие сюда ускорения выражаем через a_1 , которое обозначим просто a :

$$a_3 = a \cdot \frac{r}{R} = \frac{a}{2}; \quad \varepsilon_2 = \frac{a}{R}; \quad \varepsilon_3 = \frac{a}{2r} \quad (12.6)$$

Затем, учтя, что $\delta s \neq 0$, из (12.5) получим:

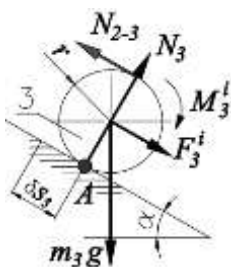


$$\begin{aligned} & \left(m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - m \cdot g \cdot f \cdot \frac{1}{2} - m \cdot a \right) \cdot 3\delta s - \\ & - m \cdot R \cdot \frac{a}{R} \cdot \delta s - \\ & - \left(m \cdot g \cdot \frac{1}{2} + m \cdot \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{\delta s}{2} - \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \frac{a}{2r} \cdot \frac{\delta s}{2r} = 0 \end{aligned}$$

Упростим выражение и перенесем в правую часть все слагаемые с a .

$$\frac{\sqrt{3}}{2} m \cdot g \cdot \delta s - 3m \cdot a \cdot \delta s - \frac{1}{2} m \cdot g \cdot f \cdot \delta s - m \cdot a \cdot \delta s - \frac{1}{4} m \cdot g \cdot \delta s - \frac{1}{2} m \cdot a \cdot \delta s - \frac{1}{8} m \cdot a \cdot \delta s = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} m \cdot g \cdot \delta s - \frac{1}{2} m \cdot g \cdot f \cdot \delta s - \frac{1}{4} m \cdot g \cdot \delta s = 3m \cdot a \cdot \delta s + m \cdot a \cdot \delta s + \frac{1}{2} m \cdot a \cdot \delta s + \frac{1}{8} m \cdot a \cdot \delta s$$



Поделим обе части уравнения на $m \cdot \delta s$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot g - \frac{1}{2} \cdot g \cdot f - \frac{1}{4} \cdot g = 3 \cdot a + a + \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{8} \cdot a$$

$$\text{или} \left(3 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0,1 - \frac{1}{4} \right) g$$

$$a = 0,2 g = 2 \text{ м/с}^2$$

Для определения натяжения в ветви нити 1–2 мысленно разрежем нить и заменим ее действие на груз 2 реакцией N_{1-2} . Запишем общее уравнение динамики.

$$N_{1-2} = m_1 \cdot (g \cdot \sin(60) - g \cdot f \cdot \cos(60) - a_1) = 3m \left(\frac{10\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - 2 \right) = 18,5m$$

$$\sum M_A = 0; \quad N_{2-3} \cdot 2r - m_3 \cdot g \cdot \sin(30) \cdot r - F_3'' \cdot r - M_3'' = 0$$

$$N_{2-3} = \frac{m_3 \cdot g \cdot \sin(30) \cdot r + m_3 \cdot a_3 \cdot r + \frac{1}{2} m_3 \cdot r^2 \cdot \varepsilon_3}{2r} = \frac{m \cdot r \left(\frac{g}{2} + \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \frac{a \cdot r}{2r} \right)}{2r} = 3,25m$$