

**РУКОВОДСТВО
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ
МАТЕРИАЛОВ**

Московский Государственный Университет леса

**РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ



ПРЕДИСЛОВИЕ

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций (сооружений и машин). Инженер любой специальности должен не только обладать знаниями в области сопротивления материалов, необходимыми для проведения расчетов элементов конструкций, но и уметь применять эти знания при решении конкретных задач. Студенты-заочники, самостоятельно изучающие сопротивление материалов, испытывают зачастую большие затруднения при выполнении контрольных работ по предмету. Отсутствие постоянного руководства со стороны преподавателя снижает эффективность выполнения контрольных заданий, существенно повышает трудоемкость работы над курсом.

Настоящее пособие имеет целью оказать действенную помощь студентам при выполнении контрольных заданий. По каждой теме контрольных работ даны практические рекомендации и приведены численные примеры решения задач. Перед выполнением контрольных заданий с использованием данного учебного пособия студентам необходимо проработать соответствующие темы по учебнику.

I. РАСЧЕТ НА РАСТЯЖЕНИЕ, СЖАТИЕ

Рассмотрим расчет на растяжение, сжатие на следующем примере.

Для стального бруса заданной схемы (рис. 1.1) требуется (без учета собственного веса):

- 1) построить эпюру продольных сил N_x ;
- 2) при допускаемых напряжениях на растяжение $[\sigma_p] = 160$ МПа и на сжатие $[\sigma_c] = 80$ МПа подобрать постоянное по длине бруса сечение (определить площадь сечения);
- 3) построить эпюру нормальных напряжений σ_x по длине бруса;
- 4) приняв модуль упругости материала бруса $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, определить абсолютные удлинения всех участков бруса и построить эпюру продольных перемещений Δ_x его поперечных сечений;
- 5) вычислить потенциальную энергию упругой деформации бруса U и работу внешних сил A (при расхождении этих величин более чем на 1 % следует уточнить расчет или найти ошибки).

Дано: $P_1 = 80$ кН, $P_2 = 230$ кН, $P_3 = 120$ кН,
 $l_1 = 1,1$ м, $l_2 = 1$ м, $l_3 = 0,6$ м.

Решение

Для построения эпюры продольных сил N_x надо знать все внешние силы, к которым относятся заданные нагрузки и опорные реакции.

Определим опорную реакцию в заделке (рис. 1.2, а)

$$\Sigma x = 0; \quad R_A - P_1 - P_2 + P_3 = 0.$$

$$R_A = 80 \text{ кН} + 230 \text{ кН} - 120 \text{ кН} = 190 \text{ кН}.$$

Определяем продольные силы N_x . Разобьем брус на участки и воспользуемся методом сечений (рис. 1.2, а).

$$\begin{aligned} \text{1-й участок:} \quad N_1 &= -\Sigma P_x^{\text{лев.}} = -R_A = -190 \text{ кН.} \\ \text{2-й участок:} \quad N_2 &= -\Sigma P_x^{\text{лев.}} = -(R_A - P_1) = -110 \text{ кН.} \\ \text{3-й участок:} \quad N_3 &= \Sigma P_x^{\text{прав.}} = P_3 = 120 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Строим эпюру N_x , т.е. график, показывающий изменение продольной силы N по длине бруса. Выбираем масштаб эпюры и откладываем на каждом участке положительные значения N вверх, отрицательные – вниз. Эпюра N_x показана на рис. 1.2, б.

Определяем площадь поперечного сечения бруса.

Условие прочности на растяжение записывается так:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma_p], \quad \text{или} \quad \frac{N_{\max}}{F} \leq [\sigma_p],$$

$$\text{откуда} \quad F \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma_p]}; \quad F \geq \frac{N_3}{[\sigma_p]}; \quad F = \frac{120 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

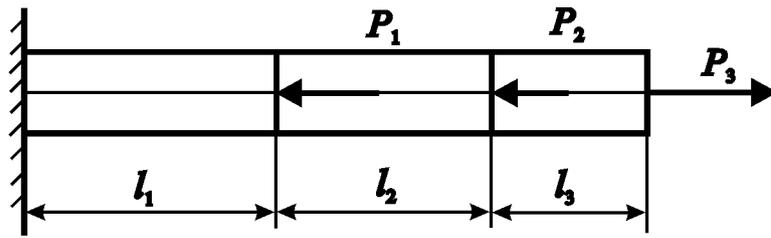


Рис. 1.1

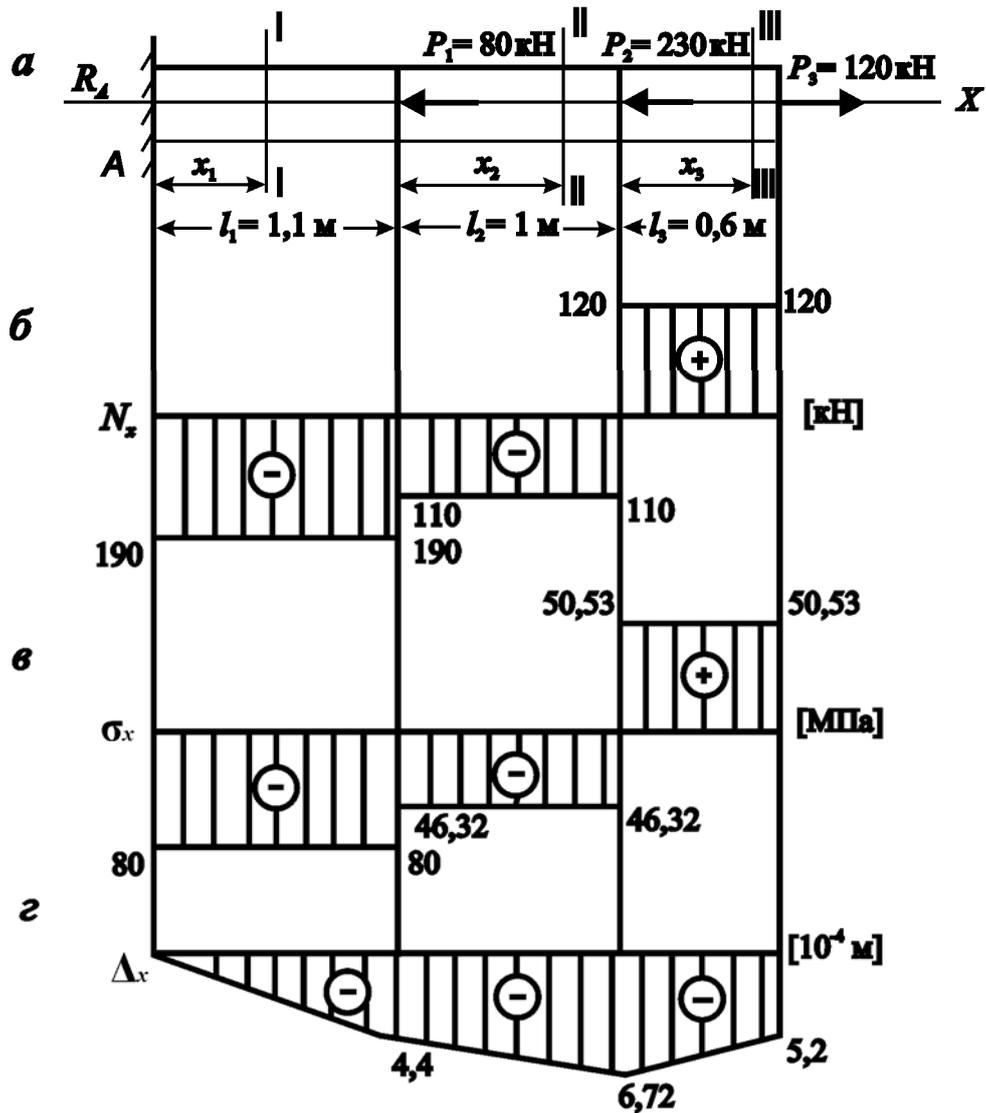


Рис. 1.2

Условие прочности на сжатие будет $\sigma_{\min} \leq [\sigma_c]$, или $\frac{N_{\min}}{F} \leq [\sigma_c]$,

$$\text{откуда } F \geq \frac{N_{\min}}{[\sigma_c]}; \quad F \geq \frac{N_1}{[\sigma_c]}; \quad F = \frac{190 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 2,375 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Так как сечение бруса постоянно по его длине, принимаем окончательно большую площадь, т.е. $F = 2,375 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 23,75 \text{ см}^2$.

Определяем напряжения в поперечных сечениях бруса

$$\text{1-й участок: } \sigma_1 = \frac{N_1}{F} = -\frac{190 \cdot 10^3}{2,375 \cdot 10^{-3}} = -80 \text{ МПа};$$

$$\text{2-й участок: } \sigma_2 = \frac{N_2}{F} = -\frac{110 \cdot 10^3}{2,375 \cdot 10^{-3}} = -46,32 \text{ МПа};$$

$$\text{3-й участок: } \sigma_3 = \frac{N_3}{F} = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2,375 \cdot 10^{-3}} = 50,53 \text{ МПа};$$

По полученным значениям строим эпюру σ . Эпюра σ показана на рис. 1.2, в.

Определяем абсолютные удлинения всех участков бруса.

$$\text{1-й участок: } \Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F} = -\frac{190 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,375 \cdot 10^{-3}} = -4,4 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\text{2-й участок: } \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F} = -\frac{110 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,375 \cdot 10^{-3}} = -2,32 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\text{3-й участок: } \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot F} = \frac{120 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,375 \cdot 10^{-3}} = 1,52 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Строим эпюру продольных перемещений Δ_x поперечных сечений бруса.

Составим аналитические выражения Δ_x на каждом участке бруса.

Перемещение крайне левого сечения бруса равно нулю, т.к. там жесткая заделка.

1-й участок: В пределах 1-го участка проводим сечение 1–1 и обозначим его расстояние от заделки x_1 (рис. 1.2, а).

$$0 \leq x_1 \leq 1,1 \text{ м} \quad \Delta_{(x_1)} = \frac{N_1 x_1}{E \cdot F}; \quad \text{при } x_1 = 0 \quad \Delta_{(x_1)} = 0$$

$$\text{при } x_1 = 1,1 \text{ м} \quad \Delta_{(x_1)} = \Delta l_1 = -4,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

2-й участок: В пределах 2-го участка проводим сечение 2–2 и обозначим его расстояние от границы 1-го и 2-го участка x_2 (рис. 1.2, а)

$$0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м} \quad \Delta_{(x_2)} = \Delta l_1 + \frac{N_2 x_2}{E \cdot F};$$

$$\text{при } x_2 = 0 \quad \Delta_{(x_2)} = \Delta l_1 = -4,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

$$\text{при } x_2 = 1 \text{ м} \quad \Delta_{(x_2)} = \Delta l_1 + \frac{N_2 \cdot 1 \text{ м}}{E \cdot F} = \Delta l_1 + \Delta l_2 =$$

$$= -4,4 \cdot 10^{-4} \text{ м} - 2,32 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -6,72 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

3-й участок: В пределах 3-го участка проводим сечение 3–3 и обозначим его расстояние от границы 2-го и 3-го участка x_3 (рис. 1.2, а)

$$0 \leq x_3 \leq 0,6 \text{ м} \quad \Delta_{(x_3)} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \frac{N_3 x_3}{E \cdot F};$$

$$\text{при } x_3 = 0 \quad \Delta_{(x_3)} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -6,72 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

$$\begin{aligned} \text{при } x_3 = 0,6 \text{ м} \quad \Delta_{(x_3)} &= \Delta l_1 + \Delta l_2 + \frac{N_3 \cdot 0,6 \text{ м}}{E \cdot F} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \\ &= -4,4 \cdot 10^{-4} \text{ м} - 2,32 \cdot 10^{-4} \text{ м} + 1,52 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -5,2 \cdot 10^{-4} \text{ м.} \end{aligned}$$

По полученным значениям Δ_x строим эпюру Δ_x .

Из вышеперечисленных аналитических выражений Δ_x видно, что Δ_x меняется линейно на каждом участке бруса.

На рис. 1.2, з показана эпюра Δ_x .

Вычисляем потенциальную энергию упругой деформации бруса U и работу внешних сил A .

Так как в пределах каждого участка продольная сила N и жесткость бруса EF постоянны, то потенциальную энергию деформации вычислим по формуле:

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2EF}; \quad \text{или} \quad U = \frac{N_1^2 l_1}{2EF} + \frac{N_2^2 l_2}{2EF} + \frac{N_3^2 l_3}{2EF};$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{(-190 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2,375 \cdot 10^{-3}} + \frac{(-110 \cdot 10^3)^2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2,375 \cdot 10^{-3}} + \\ &+ \frac{(120 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,6}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2,375 \cdot 10^{-3}} = 41,8 \text{ Дж} + 12,74 \text{ Дж} + 9,09 \text{ Дж} = 63,63 \text{ Дж} \end{aligned}$$

Работа внешних сил вычисляется по формуле

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{P_k \Delta_k}{2},$$

где Δ_k – перемещение точки приложения силы P_k , взятое из эпюры Δ_x .

В нашем случае имеем:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(-80 \cdot 10^3)(-4,4 \cdot 10^{-4})}{2} + \frac{(-230 \cdot 10^3)(-6,72 \cdot 10^{-4})}{2} + \\ &+ \frac{120 \cdot 10^3(-5,2 \cdot 10^{-4})}{2} = 17,6 \text{ Дж} + 77,28 \text{ Дж} - 31,2 \text{ Дж} = \\ &A = 63,68 \text{ Дж} \end{aligned}$$

Подсчитаем процент расхождения величин U и A .

$$\delta = \frac{63,68 - 63,63}{63,63} \cdot 100 \% = 0,08 \%$$

Так как δ меньше 1 %, задача решена верно.

2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Статически неопределимыми стержневыми системами называются системы, усилия в элементах которых невозможно определить с помощью только уравнения равновесия.

Степень статической неопределимости стержневой системы может быть определена по формуле

$$m = c_0 + c_b - 3D. \quad (2.1.)$$

где $c_0 + c_b$ – соответственно количество освобожденных внешних и внутренних связей при ликвидации внешних связей и расчленении системы на элементы;

D – количество элементов системы после расчленения.

На рис. 2.1, *a* показана стержневая система, степень статической неопределимости которой необходимо определить. Расчленяя стержневую систему на элементы (рис. 2.1, *б*), освобождаем одиннадцать внешних и восемь внутренних связей ($c_0 = 11$, $c_b = 8$) и получим пять элементов ($D = 5$). Подставляя эти значения в формулу (2.1), получим

$$m = 11 + 8 - 3 \cdot 5 = 2.$$

Система два раза статически неопределима.

Рассмотрим решение статически неопределимой задачи, представленной на рис. 2.2, *a*.

Абсолютно жесткий брус АВ, толщиной которого можно пренебречь подвешен на трех стержнях. Все стержни стальные (модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа), площадь поперечного сечения одинакова: $P = 88$ кН, $F = 4 \cdot 10^{-4}$ м², $l = 2$ м.

Требуется:

- 1) найти усилия и напряжения в стержнях;
- 2) определить перемещение точки приложения силы P ;
- 3) вычислить потенциальную энергию упругой деформации стержней и сравнить ее с работой внешней силы P .

Абсолютно жесткий брус АВ поддерживается тремя вертикальными стержнями и имеет горизонтальную связь в точке А. Благодаря наличию горизонтальной связи в точке А стержневая система является геометрически неизменяемой. Зачастую при изображении исходной системы горизонтальную связь не показывают и этим самым превращают стержневую систему в геометрически изменяемую. При применении в этом случае формулы (2.1)

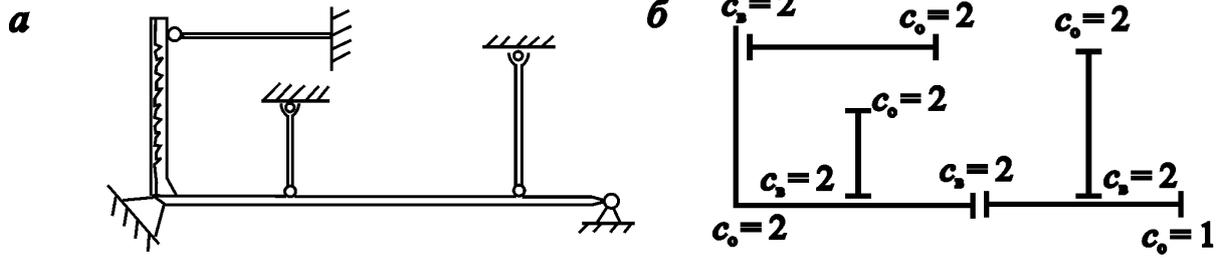


Рис. 2.1

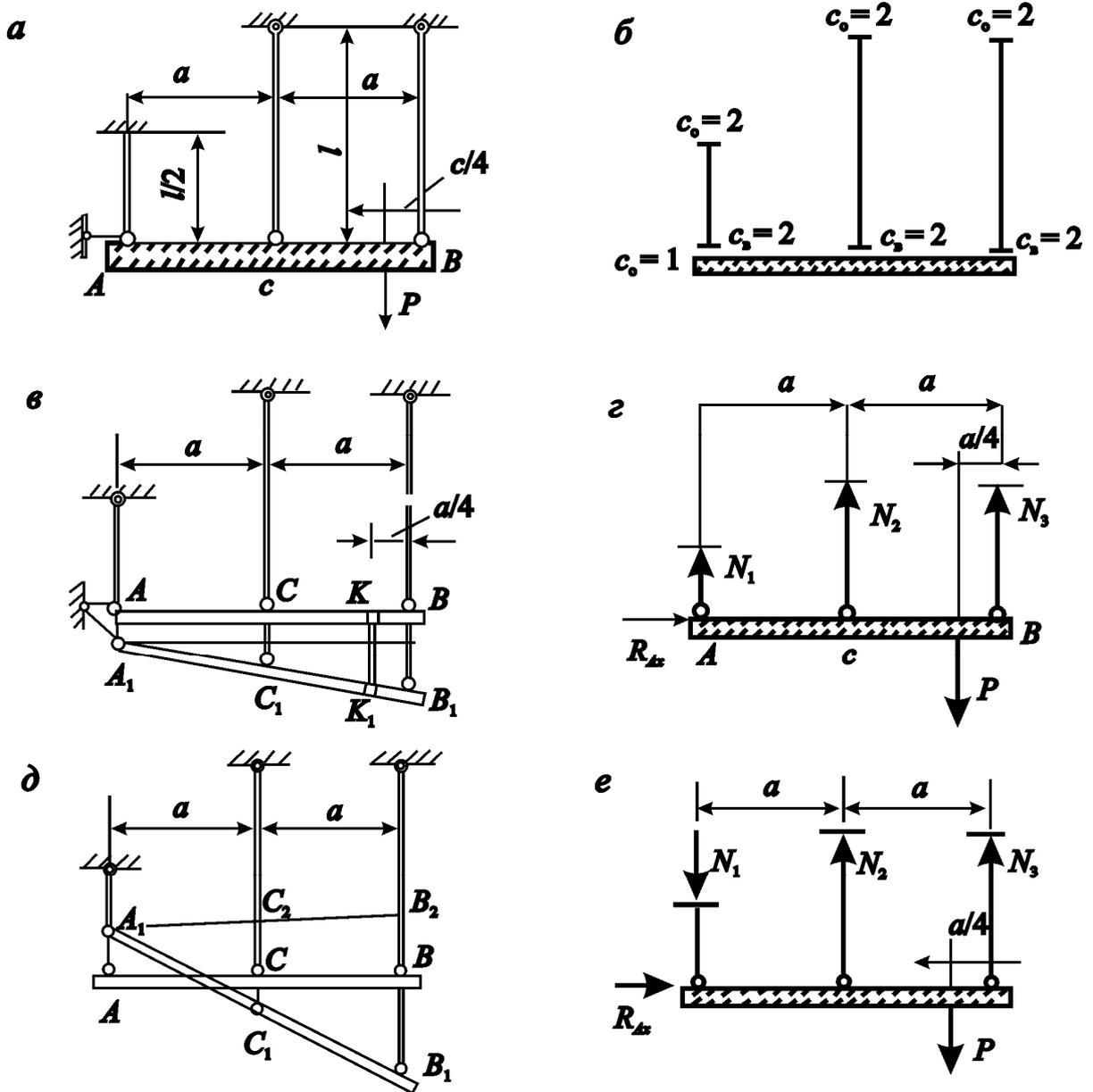


Рис. 2.2

следует помнить, что в самой исходной системе отброшена одна внешняя связь, т.е. значение c_0 необходимо величить на 1. На рис. 2.2, б показано расчленение системы на элементы ($c_0 = 7, c_b = 6, D = 4$).

$$m = 7 + 6 - 3 \cdot 4 = 1.$$

Система является один раз статически неопределимой. Для определения усилий в стержнях, необходимо кроме уравнений равновесия составить одно уравнение совместности деформаций. Прежде чем составлять уравнение, изобразим деформированную систему и расставим усилия в стержнях в соответствии с характером деформации стержней. Предположим, что все стержни растянуты. Брус AB опускается вниз и поворачивается по часовой стрелке. Точки A, C, B перемещаются по вертикали, т.к. вследствие малости перемещения по окружности заменяются перемещениями по касательной к окружности. Рассекаем стержни 1, 2 и 3, отбрасываем верхние их части, направляем усилия в стержнях, заменяющие действие отброшенных частей, направляем эти усилия в сторону отброшенных частей, что соответствует исходному предположению (рис. 2.2, в) о растяжении стержней. Следует отметить, что при решении задачи необходимо строго соблюдать соответствие исходного предположения о характере деформации стержней (рис. 2.2, в) и направлений усилий в стержнях (рис. 2.2, з).

Составим уравнения равновесия (статическая сторона задачи) (рис. 2.2, з)

$$\Sigma X = 0; R_{AX} = 0$$

$$\Sigma Y = 0; N_1 + N_2 + N_3 - P = 0;$$

$$\Sigma M_c = 0; -N_1 a + N_3 a - P \cdot \frac{3}{4} a = 0.$$

Составим уравнение совместности деформаций (геометрическая сторона задачи) (рис. 2.2, в).

Отрезок CC_1 как средняя линия трапеции равна полусумме оснований AA_1 и BB_1 , т.е.

$$CC_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2}; \Delta l_2 = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_3}{2}.$$

Заменим удлинения в уравнении совместности деформаций через усилия согласно закону Гука (физическая сторона задачи).

$$\frac{N_2 l}{EF} = \frac{N_1 \frac{l}{2} + \frac{N_3 l}{2}}{EF};$$

$$2N_2 = \frac{N_1}{2} + N_3 \quad \text{или} \quad N_1 - 4N_2 + 2N_3 = 0.$$

Решаем совместно уравнения равновесия и дополнительное уравнение, полученное на основании уравнения совместности деформаций.

В результате получаем

$$N_1 = -\frac{P}{22} = -4 \text{ кН}; \quad N_2 = \frac{7,5P}{22} = 30 \text{ кН}; \quad N_3 = \frac{15,5P}{22} = 62 \text{ кН}.$$

Знак минус для усилия N_1 свидетельствует о том, что исходное предположение о растяжении первого стержня не подтвердилось (стержень 1 – сжат).

При решении задачи можно было бы принять исходное предположение о сжатии первого стержня. Соответственно этому предположению деформированная система показана на рис. 2.2, *д*, а расстановка усилий на рис. 2.2, *е*. Усилие N_1 направлено со стороны отброшенной части, так как предполагаем сжатие первого стержня. В этом случае уравнения равновесия выглядят так (рис. 2.2, *е*)

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0; & R_{AX} &= 0; \\ \Sigma Y &= 0; & -N_1 + N_2 + N_3 - P &= 0; \\ \Sigma M_C &= 0; & N_1 a + N_3 a + -\frac{3}{4} P a &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение совместности деформаций (рис. 2.2, *д*). Из подобия треугольников $C_1C_2A_1$ и $B_1B_2A_1$ получим

$$\frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{A_1B_2}{A_1C_2}, \quad \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{\Delta l_1 + \Delta l_3} = \frac{1}{2}$$

или

$$2\Delta l_1 + 2\Delta l_2 = \Delta l_1 + \Delta l_3; \quad \Delta l_1 + 2\Delta l_2 - \Delta l_3 = 0.$$

Заменяя удлинения через усилия по закону Гука

$$\frac{N_1 l}{EF} + 2\frac{N_2 l}{EF} - \frac{N_3 l}{EF} = 0; \quad \text{или} \quad N_1 + 4N_2 - 2N_3 = 0.$$

Таким образом, система уравнений для совместного решения

$$\begin{aligned} -N_1 + N_2 + N_3 &= P; \\ N_1 + N_3 &= \frac{3}{4} P; \\ -N_1 - 4N_2 + 2N_3 &= 0; \end{aligned}$$

Сравнивая эту систему с ранее записанной для первого варианта, можем отметить, что они отличаются только знаками перед первым неизвестным в каждом уравнении. Следовательно, при решении этой системы получим $N_1 = \frac{P}{22} = 4 \text{ кН}; \quad N_2 = \frac{7,5P}{22} = 30 \text{ кН}; \quad N_3 = \frac{15,5P}{22} = 62 \text{ кН}$. Знак плюс подтверждает в этом случае исходное предположение о сжатии первого стержня.

Определим напряжения в стержнях.

Стержень 1:

первый вариант

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = -\frac{P}{22F} = \frac{-88 \cdot 10^3 \text{ Н}}{22 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -10 \text{ МПа};$$

Так как принято исходное предположение о растяжении, принимаем исходное выражение $\sigma_1 = N_1/F$ со знаком плюс, и подставляя усилие со знаком решения, получим отрицательное напряжение, что соответствует напряжению сжатия;

второй вариант

$$\sigma_1 = -\frac{N_1}{F} = \frac{-88 \cdot 10^3}{22 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = -10 \text{ МПа}.$$

Так как принято исходное предположение о сжатии первого стержня, записываем исходное выражение $\sigma_1 = -N_1/F$ со знаком минус. Подставляя усилие со знаком решения, получим также отрицательное или сжимающее напряжение.

$$\text{Стержень 2: } \sigma_2 = \frac{N_2}{F} = \frac{7,5 \cdot 88 \cdot 10^3}{22 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 75 \text{ МПа};$$

$$\text{Стержень 3: } \sigma_3 = \frac{N_3}{F} = \frac{15,5 \cdot 88 \cdot 10^3}{22 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 155 \text{ МПа}.$$

Определим перемещение точки приложения силы P (рис. 2.2, в)

$$\begin{aligned} KK_1 &= AA_1 + \frac{BB_1 - AA_1}{AB} AK = \Delta l_1 + \frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{2a} \cdot \frac{7}{4} a = \frac{N_1 l}{EF} - \frac{N_3 l}{2EF} - \frac{N_1 l}{2EF} \cdot \frac{7}{4} = \\ &= -\left(\frac{N_1}{2} - \frac{7N_2}{8} - \frac{7N_1}{16} \right) = \frac{l}{16EF} (N_1 + 14N_3) = \\ &= \frac{2 \cdot 10^3}{16 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} (-4 + 14 \cdot 62) = \frac{864 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 16} = 13,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 1,35 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Вычислим потенциальную энергию деформации стержней

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^m \frac{N_i^2 l_i}{2E_i F_i} = \frac{N_1^2 l}{2EF} + \frac{N_2^2 l}{2EF} + \frac{N_3^2 l}{2EF} = \\ &= \frac{l}{2EF} \left(\frac{N_1^2}{2} + N_2^2 + N_3^2 \right) = \frac{2 \cdot 10^6}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} \cdot (4 + 900 + 3844) = 59,4 \text{ Дж}. \end{aligned}$$

Вычислим работу внешней силы

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{P_i \Delta_i}{2} = \frac{1}{2} P \cdot KK_1 = \frac{1}{2} \cdot 88 \cdot 10^3 \cdot 1,35 \cdot 10^{-3} = 59,4 \text{ Дж}.$$

Как видим из полученных результатов $U = A$.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ БАЛКИ

В формулах сопротивления материалов используют моменты инерции относительно главных центральных осей. Рассмотрим задачу определения главных центральных моментов инерции сечения на следующем конкретном примере.

Для заданного поперечного сечения, состоящего из швеллера (1) №16а и прямоугольника (2) шириной $b_2 = 6$ см и высотой $h_2 = 2$ см (рис. 3.1), требуется:

- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) вычислить значения осевых и центробежного моментов инерции сечения относительно горизонтальной и вертикальной осей, проходящих через центр тяжести;
- 3) найти положение главных центральных осей инерции;
- 4) определить величины моментов инерции относительно главных центральных осей;
- 5) вычертить сечение в масштабе 1 : 2, обозначив на нем все оси и численные значения размеров.

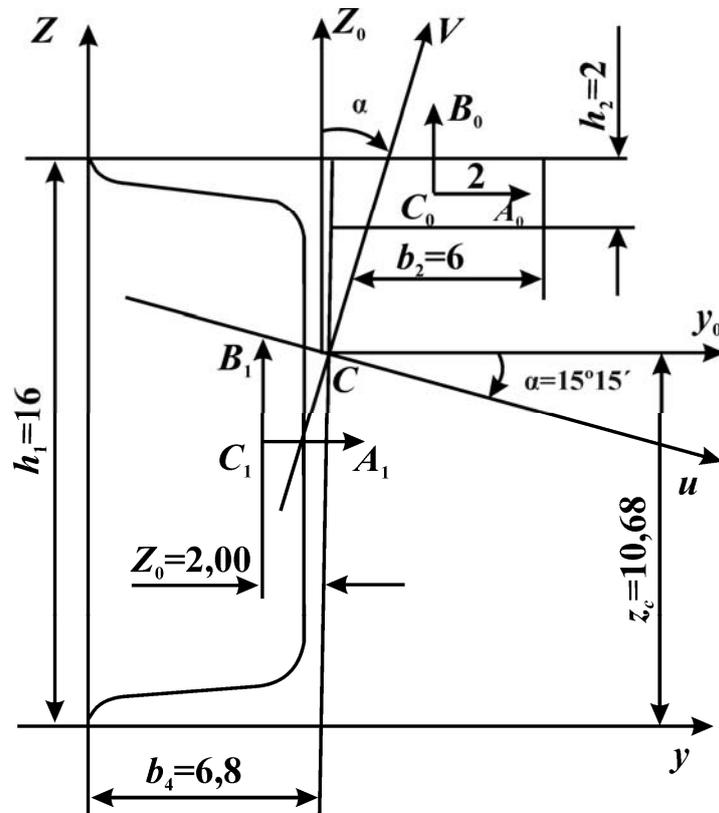


Рис. 3.1

Произвольные оси координат y и z выбираем так, чтобы все сечение размещалось в первой четверти. Размеры швеллера берем из ГОСТ 8240-56 и изображаем сечение в масштабе 1 : 2 (рис. 3.1). Определяем координаты центров тяжести швеллера c_1 и прямоугольника c_2 согласно рисунку по геометрическим соображениям (размеры на рис. 3.1 даны в см).

$$y_1 = b_1 - z_1 = 6,8 - 2,00 = 4,8 \text{ см};$$

$$z_1 = \frac{h_1}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ см};$$

$$y_2 = b_1 + \frac{b_2}{2} = 6,8 + \frac{6}{2} = 9,8 \text{ см}; \quad z_2 = h_1 - \frac{h_2}{2} = 16 - \frac{2}{2} = 15 \text{ см}.$$

Находим координаты центра тяжести сечения C .

$$y_c = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} = \frac{19,5 \cdot 4,8 + 6 \cdot 2 \cdot 9,8}{19,5 + 6 \cdot 2} = 6,71 \text{ см};$$

$$z_c = \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2}{F_1 + F_2} = \frac{19,5 \cdot 8 + 6 \cdot 2 \cdot 15}{19,5 + 6 \cdot 2} = 10,68 \text{ см}.$$

Площадь швеллера F_1 взята из ГОСТ 8240-56.

При вычислении моментов инерции относительно осей y_0 и z_0 , проходящих через центр тяжести сечения, используем формулы для определения моментов инерции фигур 1 и 2 относительно осей, параллельных их центральным осям:

$$J_{y_0} = J_{1A_1} + F_1 a_1^2 + J_{2A_2} + F_2 a_2^2;$$

$$J_{z_0} = J_{1B_1} + F_1 b_1^2 + J_{2B_2} + F_2 b_2^2;$$

$$J_{y_0 z_0} = J_{1A_1 B_1} + F_1 a_1 b_1 + J_{2A_2 B_2} + F_2 a_2 b_2.$$

Находим моменты инерции фигур 1 и 2 относительно своих центральных осей.

$$\text{По ГОСТ 8240-56 имеем } J_{1A_1} = 823 \text{ см}^4, \quad J_{1B_1} = 78,8 \text{ см}^4.$$

$J_{1A_1 B_1} = 0$, так как ось A_1 – ось симметрии. Для прямоугольника

$$J_{2A_2} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{6 \cdot 2^3}{12} = 4 \text{ см}^4; \quad J_{2B_2} = \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{2 \cdot 6^3}{12} = 36 \text{ см}^4;$$

$J_{2A_2 B_2} = 0$, так как ось A_2 и B_2 – оси симметрии.

По сортаменту $F_1 = 19,5 \text{ см}^2$, а для прямоугольника $F_2 = b_2 h_2 = 12 \text{ см}^2$.

Вычисляем расстояние между осями (координаты C_1 и C_2 в системе y_0z_0).

$$a_1 = z_1 - z_c = 8 - 10,68 = -2,68 \text{ см}; \quad a_2 = z_2 - z_c = 15 - 10,68 = 4,32 \text{ см};$$

$$b_1 = y_1 - y_c = 4,8 - 6,71 = -1,91 \text{ см}; \quad b_2 = y_2 - y_c = 9,8 - 6,71 = 3,09 \text{ см}.$$

Находим численные значения J_{y_0} , J_{z_0} , $J_{y_0z_0}$.

$$J_{y_0} = 823 + 19,5 \cdot (-2,68)^2 + 4 + 12 \cdot 4,32^2 = 1181,8 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_0} = 78,8 + 19,5 \cdot (-1,91)^2 + 36 + 12 \cdot 3,09^2 = 300,1 \text{ см}^4$$

$$J_{y_0z_0} = 19,5 \cdot (-2,68) \cdot (-1,91) + 12 \cdot (+4,32) \cdot (+3,09) = +259,6 \text{ см}^4.$$

Определяем положение главных центральных осей инерции сечения U и V по тангенсу двойного угла поворота осей y_0 , z_0 до положения осей U и V .

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{y_0z_0}}{J_{z_0} - J_{y_0}} = \frac{2(+259,6)}{300,1 - 1181,8} = -0,588;$$

$$2\alpha = -30^\circ 30'; \quad \alpha = -15^\circ 15'.$$

Поворачиваем оси y_0 , z_0 на угол $\alpha = 15^\circ 15'$ по часовой стрелке ($\alpha < 0$). Получаем положение осей U и V (рис. 3.1).

Вычисляем моменты инерции относительно главных центральных осей U и V .

$$J_{\begin{matrix} U \\ V \end{matrix}} = \frac{J_{y_0} + J_{z_0}}{2} \pm \frac{J_{y_0} - J_{z_0}}{2} \cos 2\alpha \mp J_{y_0z_0} \sin 2\alpha.$$

Верхние знаки берем при вычислении J_U , а нижние – при определении J_V . По тригонометрическим таблицам имеем

$$\cos(-30^\circ 30') = +0,860; \quad \sin(-30^\circ 30') = -0,508;$$

$$\begin{aligned} J_{\begin{matrix} U \\ V \end{matrix}} &= \frac{1181,6 + 300,1}{2} \pm \frac{1181,8 - 300,1}{2} (+0,860) \mp (+259,6)(-0,508) = \\ &= 740,95 + 379 + 132; \quad J_U = 1352 \text{ см}^4; \quad J_V = 230 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

4. КРУЧЕНИЕ БРУСА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим расчет на кручение на следующем примере.

Для стального вала круглого сплошного сечения заданной схемы (рис. 4.1) требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов;
- 2) подобрать диаметр вала из условия прочности при заданном значении допускаемого напряжения $[\tau]$ и из условия жесткости при заданном значении допускаемого угла закручивания $[\varphi]$ на 1 метре длины вала; из полученных двух значений диаметра обозначить больший;
- 3) построить эпюру касательных напряжений по длине вала;
- 4) приняв модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, определить углы закручивания всех участков вала и построить эпюру углов поворота по длине вала;
- 5) вычислить потенциальную энергию упругой деформации вала U и работу внешних сил A ; при расхождении этих величин более, чем на 1 % следует уточнить расчет или найти ошибки.

$$\begin{array}{lll} \text{Дано: } M_1 = 1,5 \text{ кНм;} & M_2 = 1,2 \text{ кНм;} & M_3 = 0,9 \text{ кНм,} \\ l_1 = 0,7 \text{ м;} & l_2 = 1 \text{ м;} & l_3 = 1,7 \text{ м,} \\ [\tau] = 40 \text{ МПа;} & [\varphi] = 1,6 \text{ град/м} = 2,792 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м.} \end{array}$$

Решение

Для построения эпюры крутящих моментов надо знать все внешние моменты, к которым относятся заданные моменты и момент в заделке.

Определяем момент в заделке (рис. 4.2, а)

$$\sum M_x = 0 \quad M_A - M_1 - M_2 + M_3 = 0.$$

Следует иметь в виду, что внешний момент считается положительным, если его направление совпадает с направлением кратчайшего поворота оси y к оси z .

$$M_A = M_1 + M_2 - M_3 = 1,8 \text{ кНм.}$$

Разобьем вал на участки и воспользуемся методом сечений (рис. 4.2, а). Определяем крутящие моменты.

$$\text{1-й участок: } M_{K_1} = -\sum M_x^{\text{лев.}} = -M_A = -1,8 \text{ кНм.}$$

$$\text{2-й участок: } M_{K_2} = -\sum M_x^{\text{лев.}} = -(M_A - M_1) = -0,3 \text{ кНм.}$$

$$\text{3-й участок: } M_{K_3} = \sum M_x^{\text{прав.}} = M_3 = 0,9 \text{ кНм.}$$

Строим эпюру крутящих моментов M_K .

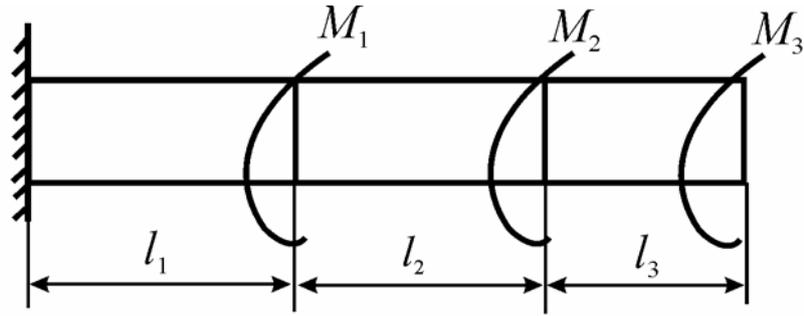


Рис. 4.1

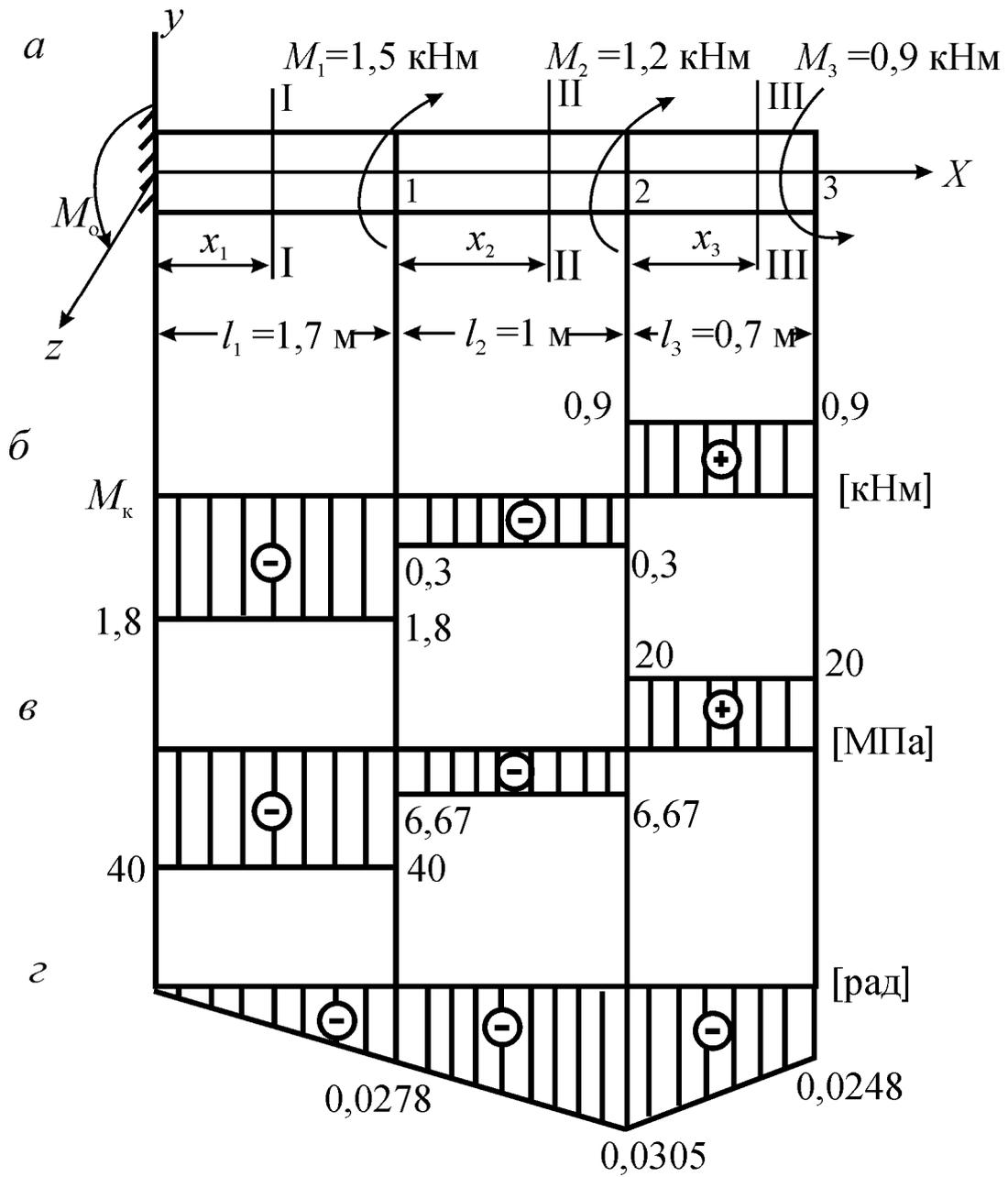


Рис. 4.2

Выбираем масштаб эпюры и откладываем на каждом участке полученные значения M_K , положительные – вверх, отрицательные – вниз. Эпюра M_K показана на рис. 4.2, б.

Подбираем диаметр вала d из условия прочности. Условие прочности при кручении записывается так:

$$\begin{aligned} & \tau_{\max} \leq [\tau] \\ \text{или} & \quad \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau] \end{aligned} \quad (4.1)$$

где W_p – полярный момент сопротивления.

$$\text{Для вала сплошного круглого сечения} \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Из (4.1) имеем $W_p \geq \frac{M_K}{[\tau]}$ или $\frac{\pi d^3}{16} \geq \frac{M_K}{[\tau]}$, откуда

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi[\tau]}}. \quad (4.2)$$

По эпюре M_K берем максимальный по абсолютной величине крутящий момент $M_{K_{\max}} = 1,8 \text{ кНм}$ и подставляем его значение в формулу (4.2)

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,8 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 6,12 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Подбираем диаметр вала из условия жесткости.

Условие жесткости при кручении записывается так: $\varphi \leq [\varphi]$

$$\text{или} \quad \frac{M_K \cdot 1\text{м}}{GJ_p} \leq [\varphi], \quad (4.3)$$

где $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ – полярный момент инерции.

Из (4.3) имеем $J_p \geq \frac{M_K}{G[\varphi]}$, или $\frac{\pi d^4}{32} \geq \frac{M_K}{G[\varphi]}$.

$$\text{Откуда} \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_K}{\pi G[\varphi]}} \quad (4.4)$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,8 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 2,792 \cdot 10^{-2}}} = 5,35 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Так как диаметр вала должен удовлетворять обоим условиям, окончательно принимаем $d = 6,12 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Определяем максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях вала.

Предварительно найдем W_p .

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14(6,12 \cdot 10^{-2})^3}{16} = 4,498 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3;$$

$$\text{1-й участок } \tau_{\max} = \frac{M_{k_1}}{W_p} = -\frac{1,8 \cdot 10^3}{4,498 \cdot 10^{-5}} = -40 \text{ МПа};$$

$$\text{2-й участок } \tau_{\max} = \frac{M_{k_2}}{W_p} = -\frac{0,3 \cdot 10^3}{4,498 \cdot 10^{-5}} = -6,67 \text{ МПа};$$

$$\text{3-й участок } \tau_{\max} = \frac{M_{k_3}}{W_p} = \frac{0,9 \cdot 10^3}{4,498 \cdot 10^{-5}} = -20 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям τ_{\max} строим эпюру τ_{\max} . Эпюра τ_{\max} показана на рис. 4.2, в.

Определяем углы закручивания всех участков вала.

$$\text{I-й участок: } \varphi_I = \varphi_{1-0} = \frac{M_{k_1} l_1}{GJ_p} = -\frac{1,8 \cdot 10^3 \cdot 1,7}{8 \cdot 10^{10} 1,376 \cdot 10^{-6}} = -0,0278 \text{ рад},$$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (6,12 \cdot 10^{-2})^4}{32} = 1,376 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$\text{II-й участок: } \varphi_{II} = \varphi_{2-1} = \frac{M_{k_2} l_2}{GJ_p} = -\frac{0,3 \cdot 10^3 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} 1,376 \cdot 10^{-6}} = -0,0027 \text{ рад};$$

$$\text{III-й участок: } \varphi_{III} = \varphi_{3-2} = \frac{M_{k_3} l_3}{GJ_p} = \frac{0,9 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{8 \cdot 10^{10} 1,376 \cdot 10^{-6}} = 0,0057 \text{ рад}.$$

Полный угол закручивания, т.е. угол поворота свободного конца вала относительно заделки будет равен:

$$\varphi_{3-0} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = (-0,0278 - 0,0027 + 0,0057) \text{ рад} = -0,0248 \text{ рад}.$$

Строим эпюру углов поворота $\varphi_{(x)}$ по длине вала.

Составим аналитические выражения $\varphi_{(x)}$ на каждом участке вала.

Угол поворота крайне левого сечения вала равен нулю, т.к. там жесткая заделка.

I-й участок: В пределах I участка проводим сечение 1–1 и обозначим его расстояние от заделки x_1 (рис. 4.2, а).

$$0 \leq x_1 \leq 1,7 \text{ м} \quad \varphi_{(x_1)} = \frac{M_{k_1} x_1}{GJ_p} \quad \text{при } x_1 = 0 \quad \varphi_{(x_1)} = 0$$

$$\text{при } x_1 = 1,7 \text{ м} \quad \varphi_{(x_1)} = \varphi_I = -0,0278 \text{ рад}.$$

II-й участок: В пределах II участка проводим сечение 2–2 и обозначим его расстояние от границы I и II участков x_2 (рис. 4.2, а)

$$0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м} \quad \varphi_{(x_2)} = \frac{M_{k_2} x_2}{GJ_p} \quad \text{при } x_2 = 0 \quad \varphi_{(x_2)} = \varphi_I = -0,0278 \text{ рад};$$

$$\text{при } x_2 = 1 \text{ м} \quad \varphi_{(x_2)} = \varphi_I + \varphi_{II} = -0,0305 \text{ рад}.$$

III-й участок: В пределах III участка проводим сечение 3–3 и обозначим его расстояние от границы II и III участков x_3 .

$$0 \leq x_3 \leq 0,7 \text{ м} \quad \varphi_{(x_3)} = \varphi_I + \varphi_{II} + \frac{M_{k_3} x_3}{GJ_p}$$

$$\text{при } x_3 = 0 \quad \varphi_{(x_3)} = \varphi_I + \varphi_{II} = -0,0305 \text{ рад};$$

$$\text{при } x_3 = 0,7 \text{ м} \quad \varphi_{(x_3)} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = -0,0248 \text{ рад}.$$

По полученным значениям $\varphi_{(x)}$ строим эпюру углов поворота $\varphi_{(x)}$. Из вышенаписанных аналитических выражений $\varphi_{(x)}$ видно, что $\varphi_{(x)}$ меняется линейно на каждом участке вала. На рис. 4.2, а показана эпюра $\varphi_{(x)}$.

Вычисляем потенциальную энергию упругой деформации вала U и работу внешних сил A . Так как в пределах каждого участка крутящий момент M_k и жесткость вала GJ_p постоянны, то потенциальную энергию деформации вычислим по следующей формуле:

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{M_{k_i}^2 l_i}{2GJ_{p_i}}; \quad \text{или} \quad U = \frac{M_{k_1}^2 l_1}{2GJ_p} + \frac{M_{k_2}^2 l_2}{2GJ_p} + \frac{M_{k_3}^2 l_3}{2GJ_p};$$

$$U = \frac{(-1,8 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,7 \text{ м} + (-0,3 \cdot 10^3)^2 \cdot 1}{2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1,376 \cdot 10^{-6}} + \frac{(0,9 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,7}{2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1,376 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 25 \text{ Дж} + 0,4087 \text{ Дж} + 2,575 \text{ Дж} = 27,984 \text{ Дж};$$

Работа внешних сил вычисляется по следующей формуле:

$$A = \sum_{j=1}^n \frac{M_j \varphi_j}{2};$$

где M_j – вращающий момент,

φ_j – угол поворота сечения, где приложен вращающий момент M_j .

Значение φ_j берется по эпюре $\varphi_{(x)}$.

$$A = \frac{(-1,5 \cdot 10^3 \text{ Нм})(-0,0278)}{2} + \frac{(-1,2 \cdot 10^3 \text{ Нм})(-0,0305)}{2} + \frac{(0,9 \cdot 10^3 \text{ Нм})(-0,0248)}{2} =$$

$$= 20,85 \text{ Дж} + 18,3 \text{ Дж} - 11,16 \text{ Дж} = 27,99 \text{ Дж}$$

Подсчитаем процент расхождения величин U и A .

$$\delta = \frac{27,99 - 27,984}{27,984} \cdot 100 \% = 0,02 \%$$

Так как меньше 1 %, задача решена верно.

5. РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРЯМОЙ ИЗГИБ

Под расчетом балок на прямой изгиб обычно подразумевают проверку прочности или подбор сечений балок и расчет на жесткость, связанный с ограничением максимальных значений прогибов. Обе эти задачи связаны с умением определять изгибающие моменты и поперечные силы. Поэтому расчет балок на прямой изгиб рассмотрим на следующих комплексных примерах.

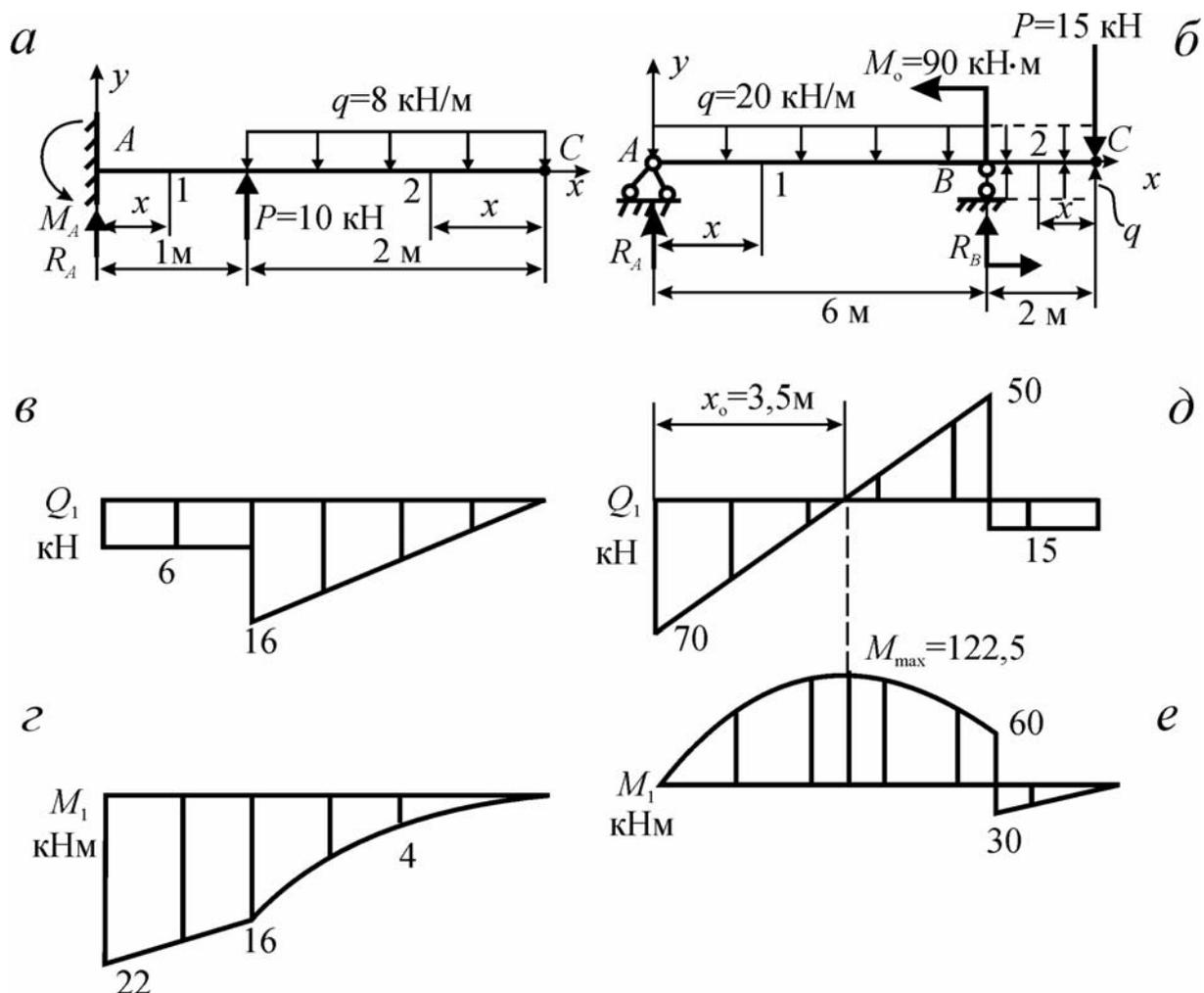


Рис. 5.1

Для заданных двух схем балок (рис. 5.1, а и 5.1, б) требуется:

1) написать выражения Q и M для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q и M , найти $|M|_{\max}$ и подобрать:

- для схемы «а» деревянную балку прямоугольного поперечного сечения с заданным отношением « k » высоты к ширине при $[\sigma] = 8$ МПа;
- для схемы «б» – стальную балку двутаврового поперечного сечения при $[\sigma] = 160$ МПа;

2) определить прогиб и угол поворота указанного на каждой схеме сечения C , приняв значения модулей упругости для стали $E = 2 \cdot 10^5$ Мпа и для древесины $E = 10^4$ Мпа.

Решаем задачу для схемы «а» (рис. 5.1, а). Определяем сначала реакции заделки А.

$$\Sigma Y = R_A + P - q \cdot 2 = 0; \quad R_A = q \cdot 2 - P = 8 \cdot 2 - 10 = 16 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_A = M_A + P \cdot 1 - q \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{2}{2}\right) = 0; \quad M_A = q \cdot 2 \cdot 2 - P \cdot 1 = 32 - 10 = 22 \text{ кНм.}$$

Для проверки реакции составляем не использованное в решении уравнение статики.

$$\begin{aligned} \Sigma M_c = M_A - R_A \cdot 3 - P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} &= 0; \\ 22 - 6 \cdot 3 - 10 \cdot 2 + 8 \cdot 2 \cdot 1 &= 0; \\ + 38 - 38 &= 0. \end{aligned}$$

Проверка удовлетворяется. Реакции определены верно. Допускается отличие суммы положительных слагаемых от суммы отрицательных до 1 %.

Строим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M . Для этого балку разбиваем на участки, границами которых являются начало и конец балки, точки приложения сосредоточенных сил и моментов, а также начало и конец распределенной нагрузки. Балка имеет два участка.

Первый участок: $0 \leq x \leq 1$ м. Отсчитываем x слева и учитываем силы левее сечения I.

$$Q = \Sigma Y_{\text{лев.}} = - (+R) = - R_A = -6 \text{ кН} = \text{const};$$

$$M = - \Sigma M_{\text{лев.}} = - (+M_A - R_A x) = -22 + 6x.$$

Получено уравнение прямой. Для построения эпюры M достаточно иметь две точки. При $x = 0$ имеем $M = -22$ кНм, а при $x = 1$ м получаем $M = -16$ кНм.

Второй участок: $0 \leq x \leq 2$ м. Отсчитываем x справа и учитываем силы правее сечения 2.

$$Q = + \Sigma Y_{\text{прав.}} = - qx = -8x.$$

Получено уравнение прямой. При $x = 0$ имеем $Q = 0$, а при $x = 2$ м получаем $Q = -16$ кН.

$$M = + \Sigma M_{2\text{прав.}} = -qx \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2} = -4x^2.$$

Получено уравнение квадратной параболы, имеющей математический максимум при $x = 0$. Вычисляем три значения M : при $x = 0$, $x = 1$ м, $x = 2$ м. Получаем соответственно $M = 0$, $M = -4$ кНм и $M = -16$ кНм.

По полученным результатам строим эпюры Q (рис. 5.1, в) и M (рис. 5.1, з).

Подбираем балку прямоугольного сечения при $k = \frac{h}{b} = 1,5$. Находим необходимый момент сопротивления сечения

$$W \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{22 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^6} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

С другой стороны по размерам сечения имеем

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{6k},$$

откуда $h \geq \sqrt[3]{6kW} = \sqrt[3]{6 \cdot 1,5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}} = 0,281 \text{ м} = 28,1 \text{ см}.$

По заданному соотношению $k = \frac{h}{b}$ получаем

$$b = \frac{h}{k} = \frac{28,1}{1,5} = 18,75 \text{ см}.$$

Округляем в сторону увеличения значения b и h , принимая $b = 20 \text{ см}$ и $h = 30 \text{ см}$. Сечение имеет момент инерции относительно нейтральной оси

$$J = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 45000 \text{ см}^4 = 0,00045 \text{ м}^4.$$

Решаем задачу для схемы «б» (рис. 5.1, б). Определяем реакции опор.

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= -6 \cdot q \cdot 3 + R_B \cdot 6 + M_0 - P \cdot 8 = 0 \\ -360 + 6R_B + 90 - 120 &= 0; \quad R_B = 65 \text{ кН} \\ \Sigma M_B &= -R_A \cdot 6 + q \cdot 6 \cdot 3 + M_0 - P \cdot 2 = 0; \\ -6R_A + 360 + 90 - 30 &= 0; \quad R_A = 70 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверяем правильность определения реакций.

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= R_A + R_B - q \cdot 6 - P = 0; \\ 70 + 65 - 120 - 15 &= 0; \quad +135 - 135 = 0. \end{aligned}$$

Реакции определены верно.

Строим эпюры Q и M . Балка имеет два участка. Первый участок: $0 \leq x \leq 6 \text{ м}$. Отсчитываем x слева и учитываем силы левее сечения I.

$$Q = \Sigma Y_{\text{лев.}} = -(R_A - qx) = -R_A + qx = -70 + 20x.$$

При $x = 0$ получаем $Q = -70 \text{ кН}$, а при $x = 6 \text{ м}$ имеем $Q = +50 \text{ кН}$. Поперечная сила Q обращается в 0 при $x_0 = \frac{70}{20} = 3,5 \text{ м}$. При этом значении

x изгибающий момент M имеет экстремальное значение, так как первая производная равна нулю.

$$M = -\Sigma M_{\text{лев.}} = -\left(-R_A x + \frac{qx^2}{2}\right) = R_A x - \frac{qx^2}{2} = 70x - 10x^2.$$

Получено уравнение квадратной параболы, имеющей максимум при $x = x_0 = 3,5$ м. Вычисляем 3 значения M : при $x = 0$, $x = x_0 = 3,5$ м и $x = 6$ м. Получаем соответственно $M = 0$, $M_{\max} = 122,5$ кНм и $M = 60$ кНм.

Второй участок: $0 \leq x \leq 2$ м. Отсчитываем x справа и учитываем силы правее сечения 2.

$$Q = +\Sigma Y_{\text{пр.}} = -P = -15 \text{ кН} = \text{const}.$$

$$M = +\Sigma M_{2\text{пр.}} = -Px = -15x.$$

При $x = 0$ имеем $M = 0$, а при $x = 2$ получаем $M = -30$ кНм.

По полученным результатам строим эпюры Q (рис. 5.1, д) и M (рис. 5.1, е).

Подбираем стальную балку двутаврового сечения. Необходимый момент сопротивления сечения

$$W \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{122,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,767 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 767 \text{ см}^3.$$

По сортаменту подбираем двутавр № 40, имеющий $W = 947 \text{ см}^3$ и $J = 18930 \text{ см}^4$ (относительно горизонтально расположенной нейтральной оси).

Определяем для схемы «а» прогиб и угол поворота сечения «С», используя универсальное уравнение изогнутой оси балки. Необходимо помнить, что в правой части универсального уравнения слагаемые, содержащие реакции опор и нагрузки, получены интегрированием выражения для изгибающего момента M , полученного по силам левее сечения с учетом знаков.

$$EJ_{\varphi} = EJ_{\varphi_0} = EJ_{\varphi_0} - M_A x + \frac{R_A x^2}{2} \Big|_1 + \frac{P(x-1)^2}{2} - \frac{q(x-1)^3}{6} \Big|_2;$$

$$EJ_y = EJ_{y_0} + EJ_{\varphi_0} x - \frac{M_A x^2}{2} + \frac{R_A x^3}{6} \Big|_1 + \frac{P(x-1)^3}{6} - \frac{q(x-1)^4}{24} \Big|_2.$$

Так как в заделке угол поворота $\varphi_0 = 0$ и прогиб $y_0 = 0$, то после подстановки численных значений и нагрузок имеем:

$$EJ_{\varphi} = -22x + 3x^2 \Big|_1 + 5(x-1)^2 - 1,333(x-1)^3 \Big|_2;$$

$$EJ_y = -11x^2 + x^3 \Big|_1 + 1,667(x-1)^3 - 0,333(x-1)^4 \Big|_2.$$

Для определения φ_0 и y в точке С в последние уравнения следует подставить $x = 3$ м и, поскольку точка С расположена на втором участке, то следует учесть все слагаемые в правой части уравнений.

$$EJ_{\varphi_c} = -22 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 2^2 - 1,333 \cdot 2^3 = -29,67 \text{ кНм}^2;$$

$$EJ_{y_c} = -11 \cdot 3^3 + 1,667 \cdot 2^3 - 0,333 \cdot 2^4 = -64 \text{ кНм}^3.$$

Находим φ_c и y_c .

$$\varphi_c = \frac{-29,67 \text{кНм}^2}{EJ} = -\frac{29,67 \cdot 10^3}{10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,00045} = -0,00659;$$

$$y_c = \frac{-64 \text{кНм}^3}{EJ} = \frac{-64 \cdot 10^3}{10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,00045} = -0,01425 \text{м} = -1,425 \text{см}.$$

Угол поворота φ_c , судя по знаку, направлен по часовой стрелке, а прогиб y_c – вниз.

Определяем прогиб y_c и угол поворота φ_c для схемы «б».

Универсальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид:

$$EJ_{\varphi} = EJ_{\varphi_0} + \frac{R_A x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} \Big|_1 + R_B \frac{(x-6)^2}{2} - M_0 x + \frac{q(x-6)^3}{6} \Big|_2;$$

$$EJ_y = EJ_{y_0} + EJ_{\varphi_0} + \frac{R_A x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} \Big|_1 + \frac{R_B (x-6)^3}{6} - \frac{M_0 x^2}{2} + \frac{q(x-6)^4}{24} \Big|_2.$$

Учтем, что прогиб в начале координат в точке A (на опоре) равен 0, следовательно $y_0 = 0$. Кроме того, прогиб на опоре B (при $x = 6$ м) также равен 0, следовательно

$$EJ_{y_{x=6\text{м}}} = EJ_{\varphi_0} \cdot 6 + \frac{70 \cdot 6^3}{6} - \frac{20 \cdot 6^4}{24} = 0.$$

Получаем $EJ_{\varphi_0} = -240 \text{кНм}^2$.

Находим угол поворота и прогиб в точке C , то есть на втором участке при $x = 8$ м. Получаем

$$EJ_{\varphi_c} = EJ_{\varphi_{x=8\text{м}}} = -240 + \frac{70 \cdot 8^2}{2} - \frac{20 \cdot 8^3}{6} + \frac{65 \cdot 2^2}{2} - 90 \cdot 2 + \frac{20 \cdot 2^3}{6} = +270 \text{кНм}^2;$$

$$EJ_{y_c} = EJ_{y_{x=8\text{м}}} = -240 \cdot 8 + \frac{70 \cdot 8^3}{6} - \frac{20 \cdot 8^4}{24} + \frac{65 \cdot 2^3}{6} - \frac{90 \cdot 2^2}{2} + \frac{20 \cdot 2^4}{24} = +560 \text{кНм}^3.$$

Находим φ_c и y_c .

$$\varphi_c = \frac{+270 \text{кНм}^2}{EJ} = \frac{+270 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 18930 \cdot 10^{-8}} = +0,00712;$$

$$y_c = \frac{+560 \text{кНм}^3}{EJ} = \frac{+560 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 18930 \cdot 10^{-8}} = +0,0148 \text{м} = +1,48 \text{см}.$$

Судя по знакам, угол поворота φ_c направлен против часовой стрелки, а прогиб y_c – вверх.

6. КОСОЙ ИЗГИБ

Рассмотрим расчет на косоу изгиб на следующем примере.

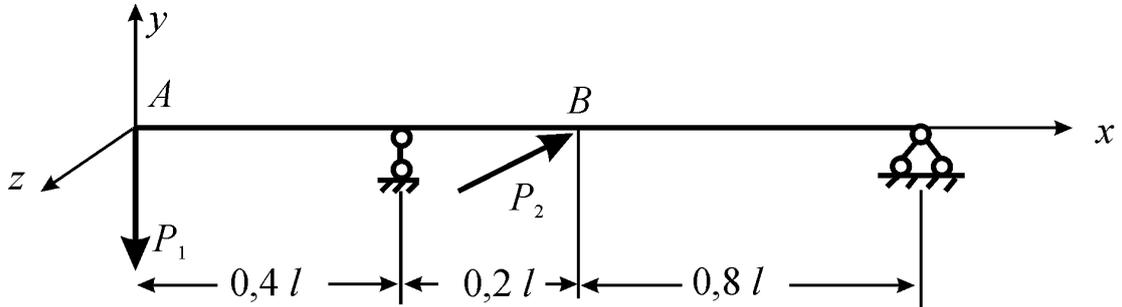
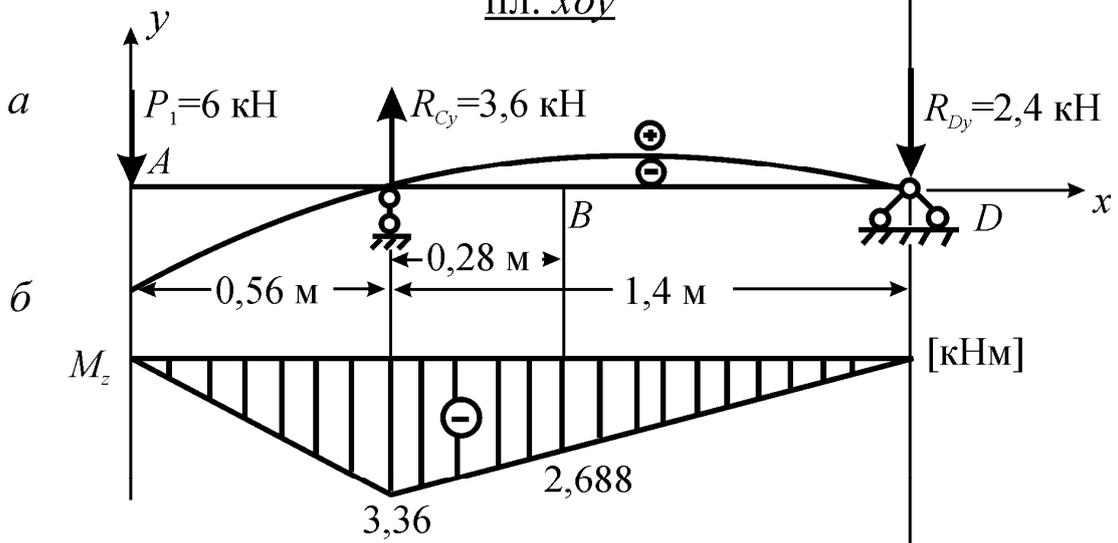


Рис. 6.1

Пл. xOy



Пл. xOz

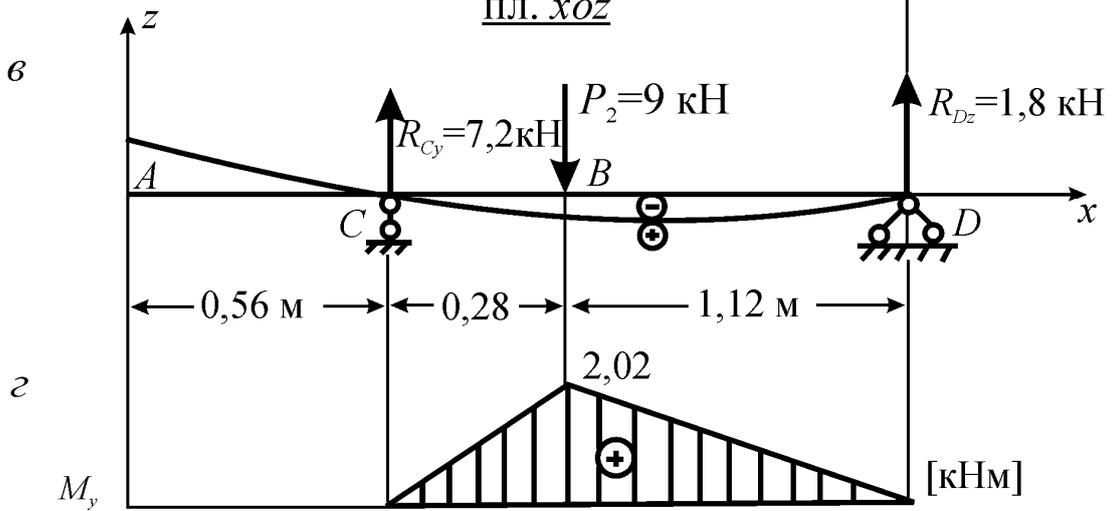


Рис. 6.2

Деревянная балка (рис. 6.1) прямоугольного поперечного сечения с шириной b и высотой h нагружена направленной вниз силой P_1 , в точке A и горизонтальной силой P_2 (если смотреть с левого торца балки) в точке B . Точки A и B расположены на оси балки. На опорах балки могут возникнуть как вертикальные, так и горизонтальные реакции, направленные перпендикулярно плоскости чертежа.

Требуется:

1) построить эпюры изгибающих моментов в вертикальной M_v и горизонтальной M_r плоскостях и установить положение опасного сечения;

2) подобрать размеры поперечного сечения b и h при допуске напряжении $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$;

3) определить положение нейтральной линии в опасном сечении балки и построить для этого сечения эпюру нормальных напряжений в аксонометрии.

Примечание: Для большей наглядности действующие на балку силы на рис. 6.1 показаны в аксонометрии.

$$\text{Дано: } P_1 = 6 \text{ кН; } P_2 = 9 \text{ кН; } l = 1,4 \text{ м; } \frac{h}{b} = 1,8$$

Имеем случай пространственного косоугольного изгиба.

Строим эпюры изгибающих моментов M_z , M_y в главных плоскостях (пл. xoy (вертикальная) и пл. xoz (горизонтальная)). Расчетные схемы балки и эпюры изгибающих моментов в главных плоскостях показаны на рис. 6.2, a , b , $в$, $г$.

Как видно из эпюр M_z и M_y (рис. 6.2, b , $г$), опасным сечением может оказаться как сечение C , так и сечение B .

Условие прочности при косоугольном изгибе для балок прямоугольного сечения записывается так:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma], \quad (6.1)$$

Откуда

$$W_z \geq \frac{|M_z| + |M_y| \cdot c}{[\sigma]}, \quad (6.2)$$

где $W_z = \frac{bh^2}{6}$ – момент сопротивления сечения относительно оси z ;

$$c = \frac{h}{b}.$$

В сечении C : $M_z = 3,36$ кНм, $M_y = 0$. Найдем W_z . По формуле (6.2) имеем

$$W_z = \frac{|M_z|}{[\sigma]} = \frac{3,36 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^6} = 0,42 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

В сечении B : $M_z = 2,688$ кНм, $M_y = 2,02$ кНм. Найдем W_z . По формуле (6.2) имеем

$$W_z = \frac{(2,688 \cdot 10^3 + 2,02 \cdot 10^3 \cdot 1,8)}{8 \cdot 10^6} = 0,7905 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Как видим, M_z в сечении B больше, чем M_z в сечении C . Следовательно, опасным будет сечение B .

Подбираем размеры поперечного сечения балки

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(1,8b)^2}{6} = 0,54b^3,$$

Откуда

$$b = \sqrt[3]{\frac{0,7905 \cdot 10^{-3}}{0,54}} = 0,1135 \text{ м} = 11,35 \text{ см};$$

$$h = 1,8b = 20,44 \text{ см}.$$

Определяем положение нейтральной линии в опасном сечении балки. Нейтральная линия при косом изгибе проходит через центр тяжести поперечного сечения балки. Ее направление определяется угловым коэффициентом:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y}, \quad (6.3)$$

где β – угол наклона нейтральной линии к оси Z .

$$\text{Но } J_z = \frac{bh^3}{12}, \quad J_y = \frac{hb^3}{12}, \quad \frac{J_z}{J_y} = \frac{h^2}{b^2} = \left(\frac{h}{b}\right)^2;$$

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{2,02}{(-2,688)} \cdot 1,8^2 = 2,435,$$

Откуда $\angle \beta = 67^\circ 40'$.

Откладываем $\angle \beta$ от оси Z против часовой стрелки. Положение нейтральной линии в опасном сечении показано на рис. 6.3. Из рис. 6.3 видно:

1) опасными точками сечения будут точки 1 и 3, как наиболее удаленные от нейтральной линии;

2) в точках 1 и 4 нормальные напряжения будут одного знака, в точках 2 и 3 – другого знака.

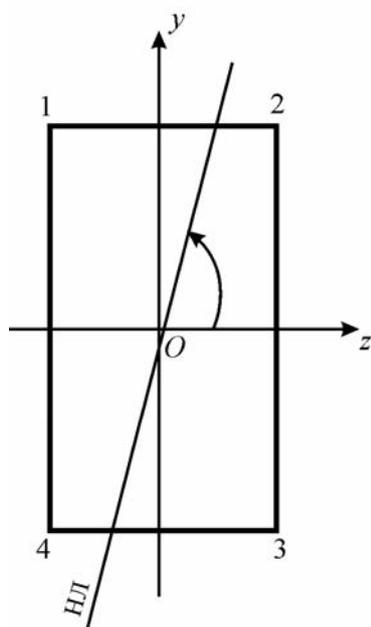


Рис. 6.3

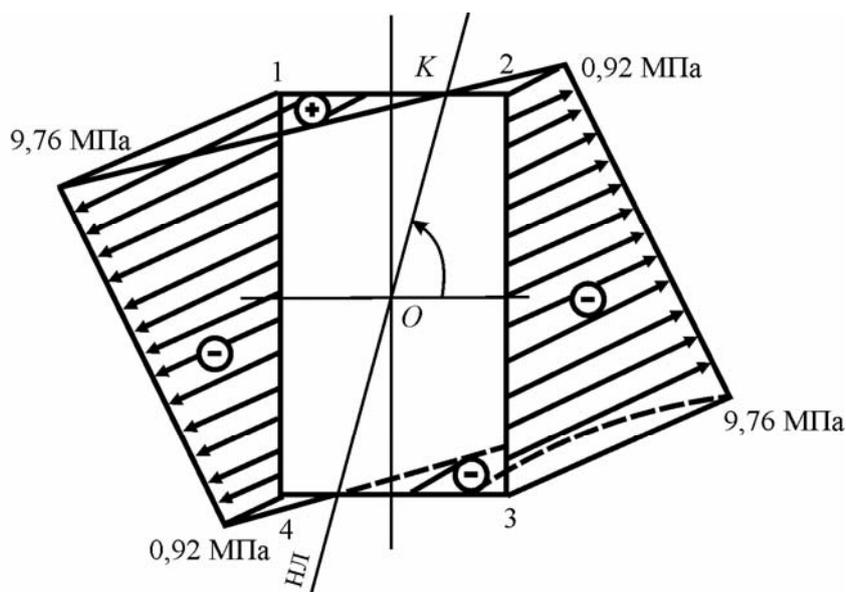


Рис. 6.4

Строим эпюру нормальных напряжений в аксонометрии.

Найдем напряжения в угловых точках опасного сечения. Нормальные напряжения при косом изгибе в угловых точках прямоугольного сечения определяются по следующей формуле:

$$\sigma_{1,2,3,4} = \pm \frac{|M_z|}{W_z} \pm \frac{|M_y|}{W_y}; \quad (6.4)$$

Вычислим W_z и W_y .

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{11,35 \cdot 20,44^2}{6} = 790,326 \text{ см}^3 = 790,326 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{20,44 \cdot 11,35^2}{6} = 438,855 \text{ см}^3 = 438,855 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Знаки напряжений в каждой угловой точке установим по характеру деформации балки. Рассмотрим изгиб балки в пл. XOY (вертикальной) силой P_1 (рис. 6.2, а). Верхние слои балки растянуты, нижние сжаты. Точки 1 и 2 принадлежат верхнему слою (рис. 6.3), следовательно от изгибающего момента M_z в них возникнут напряжения растяжения. Точки 3 и 4 принадлежат нижнему слою, следовательно, в них от изгибающего момента M_z возникнут напряжения сжатия. Рассмотрим изгиб балки в пл. XOZ (горизонтальной) силой P_2 (рис. 6.2, в). Верхние слои балки сжаты, нижние растянуты. Точки 2 и 3 принадлежат верхнему слою, точки 1 и 4 – нижнему слою (рис. 6.3). Значит от изгибающего момента M_y в точках 2 и 3 будут

возникать напряжения сжатия, в точках 1 и 4 – напряжения растяжения. В результате будем иметь:

$$\sigma_1 = \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{2,688 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{790,326 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} + \frac{2,02 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{438,855 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3};$$

$$\sigma_1 = 4,42 \text{ МПа} + 5,34 \text{ МПа} = 9,76 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{|M_z|}{W_z} - \frac{|M_y|}{W_y} = (4,42 - 5,34) \text{ МПа} = -0,92 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = -\frac{|M_z|}{W_z} - \frac{|M_y|}{W_y} = (-4,42 - 5,34) \text{ МПа} = -9,76 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = -\frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} = (-4,42 + 5,34) \text{ МПа} = 0,92 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру σ в аксонометрии. Вычертим балку в аксонометрии, показав в определенном масштабе ее поперечное сечение. Обозначим угловые точки поперечного сечения также, как на рис. 6.3 – 1, 2, 3, 4. Отложим в определенном масштабе по направлению ребер параллелепипеда величины напряжений в каждой точке соответственно. Концы полученных отрезков соединим последовательно прямыми линиями (рис. 6.4). Как видно из рис. 6.4 наибольшее напряжение растяжения будет в точке 1, наибольшее напряжение сжатия – в точке 3, как это и предполагалось по рис. 6.3. В точках K и L напряжение равно нулю. Эти точки лежат на нейтральной линии. Соединив точки K и L прямой, получим нейтральную линию, которая должна пройти через центр тяжести поперечного сечения.

7. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Вал редуктора делает n оборотов в минуту и передает мощность N кВт. На вал насажены два прямозубых зубчатых колеса диаметрами D_1 и D_2 (рис. 7.1). На каждое колесо действует окружное усилие P_0 (направленное по касательной к окружности колеса) и радиальное P_R (направленное по радиусу к центру окружности колеса), причем известно, что $P_R = P_0 \operatorname{tg} 20^\circ = 0,364 P_0$. Углы наклона окружных усилий к горизонту α для усилия P_{10} и β для усилия P_{20} .

Требуется:

- 1) определить моменты, приложенные к зубчатым колесам, по мощности и числу оборотов вала;
- 2) построить эпюру крутящих моментов M_k ;
- 3) определить окружные усилия, действующие на зубчатые колеса по найденным моментам и заданным диаметрам колес D_1 и D_2 ;
- 4) определить радиальные усилия по найденным окружным;
- 5) определить силы, изгибающие вал в вертикальной и горизонтальной плоскостях (вес колес и вала не учитывать);
- 6) построить эпюры изгибающих моментов от вертикальных M_B и от горизонтальных сил M_T ;
- 7) построить эпюру суммарных изгибающих моментов;
- 8) рассматривая эпюру M_k и M_n , найти опасное сечение и определить величину максимального расчетного момента по третьей теории прочности;
- 9) по полученному расчетному моменту подобрать диаметр вала d при $[\sigma] = 70$ МПа.

Дано: $N = 20$ кВт; $n = 450$ мин⁻¹; $l = 1,15$ м;

$D_1 = 16$ см; $D_2 = 36$ см; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 80^\circ$.

Определяем моменты, приложенные к зубчатым колесам.

$$M = \frac{N}{\omega}; \quad \omega = \frac{\pi n}{30};$$

$$M = \frac{30N}{\pi n} = 9,554 \frac{N}{n} \text{ кНм}; \quad M_1 = 9,554 \frac{20}{450} = 0,424 \text{ кНм}$$

Так как вал вращается равномерно $M_2 = M_1 = 0,424$ кНм.

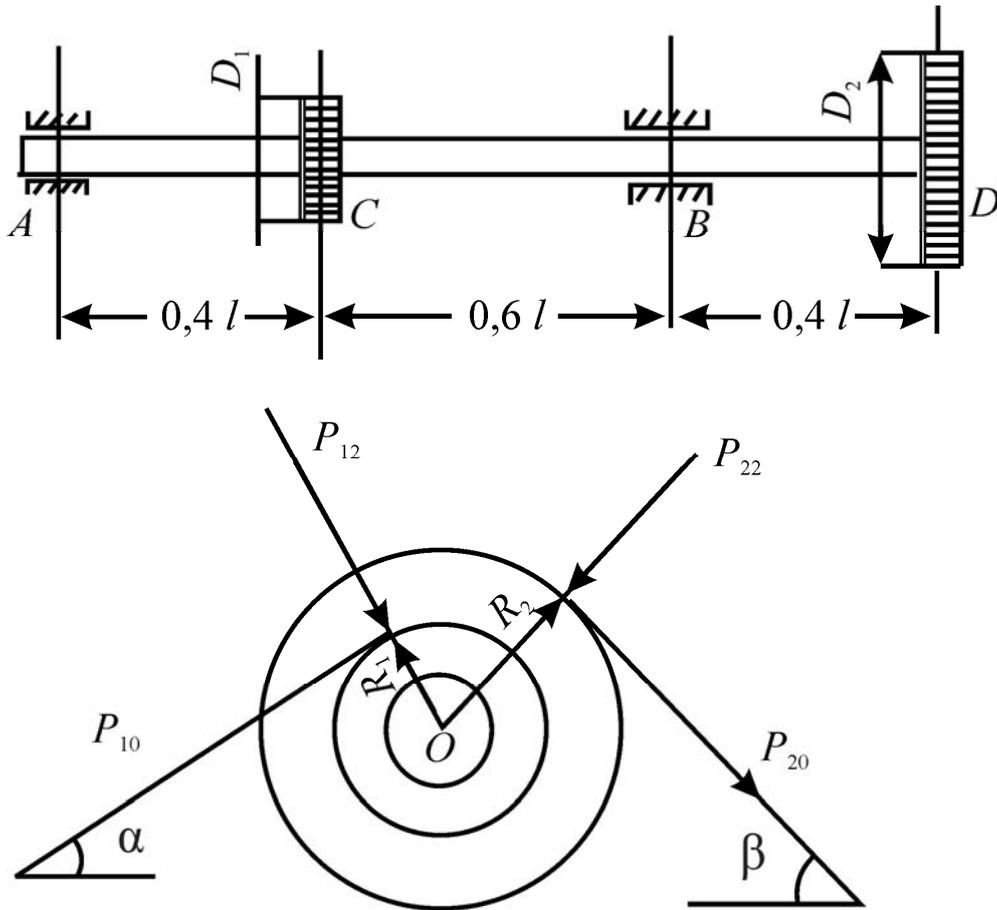


Рис. 7.1

Строим эпюру крутящих моментов. Применяем метод сечений. Из рис. 7.2, а видно, что для построения эпюры M_k следует рассмотреть два участка.

$$\text{I участок: } M_{k_1} = -\sum M_x^{\text{лев.}} = 0;$$

$$\text{II участок: } M_{k_2} = -\sum M_x^{\text{лев.}} = M_1 = 0,424 \text{ кНм.}$$

Эпюра M_k показана на рис. 7.2, б.

Определяем окружные усилия, действующие на зубчатые колеса (рис. 7.1)

$$M_k = P_{10} \cdot \frac{D_1}{2}, \text{ откуда } P_{10} = \frac{M_k \cdot 2}{D_1} = \frac{2 \cdot 0,424}{0,16} = 5,3 \text{ кН};$$

$$M_k = P_{20} \cdot \frac{D_2}{2}, \text{ откуда } P_{20} = \frac{M_k \cdot 2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,424}{0,36} = 2,356 \text{ кН.}$$

Определяем радиальные усилия.

$$P_{1R} = P_{10} \cdot \text{tg}20^\circ = 5,3 \cdot 0,364 = 1,929 \text{ Н};$$

$$P_{2R} = P_{20} \cdot \text{tg}20^\circ = 2,356 \cdot 0,364 = 0,858 \text{ Н.}$$

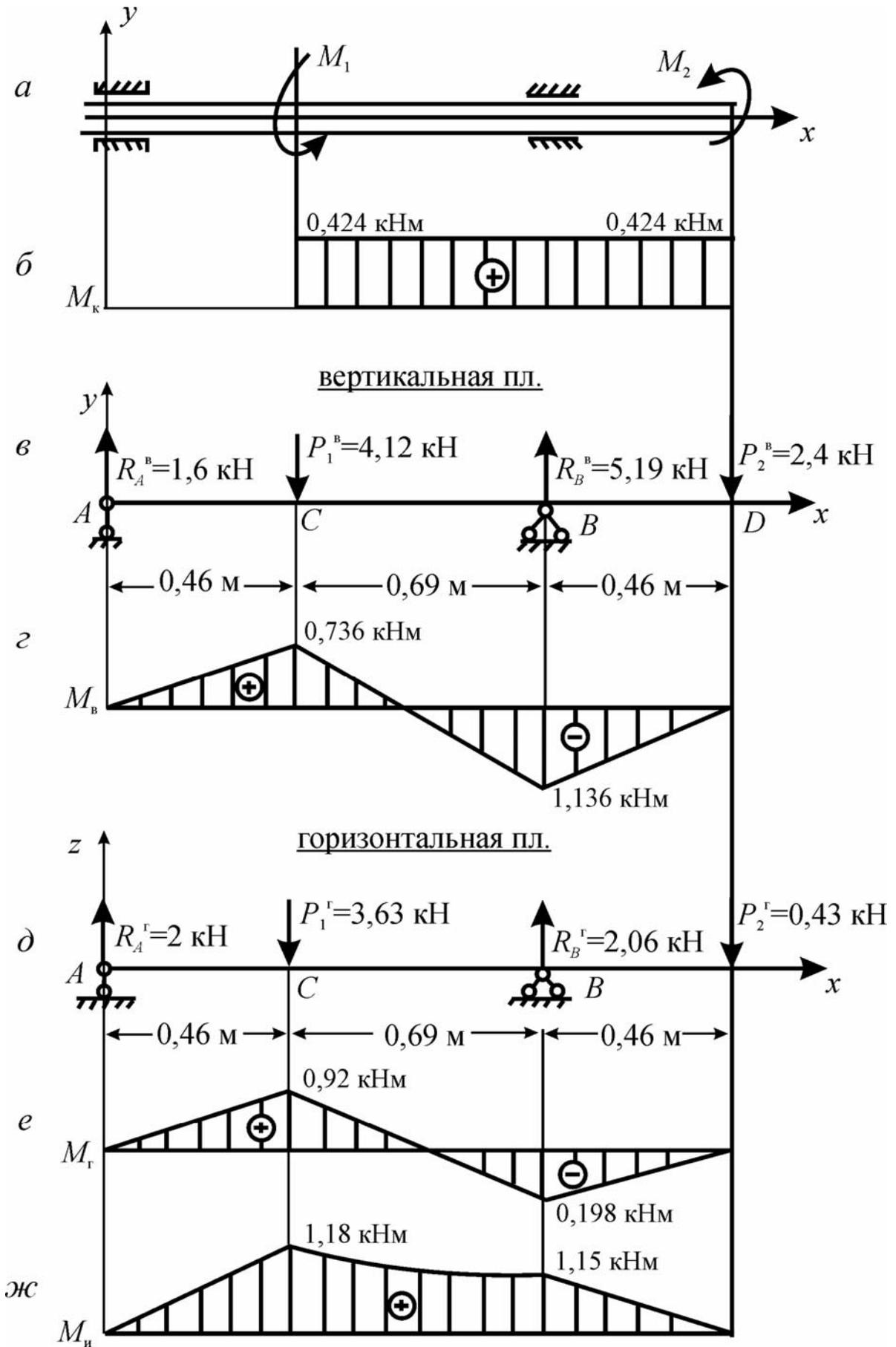


Рис. 7.2

Определяем силы, изгибающие вал в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис. 7.3, а, б).

В сечении, где насажено первое зубчатое колесо, на вал действуют силы P_{10} , P_{1R} . В сечении, где насажено второе зубчатое колесо – силы P_{20} , P_{2R} . Разложим эти силы на составляющие в вертикальном (по оси y) и горизонтальном (по оси z) направлении (рис. 7.3).

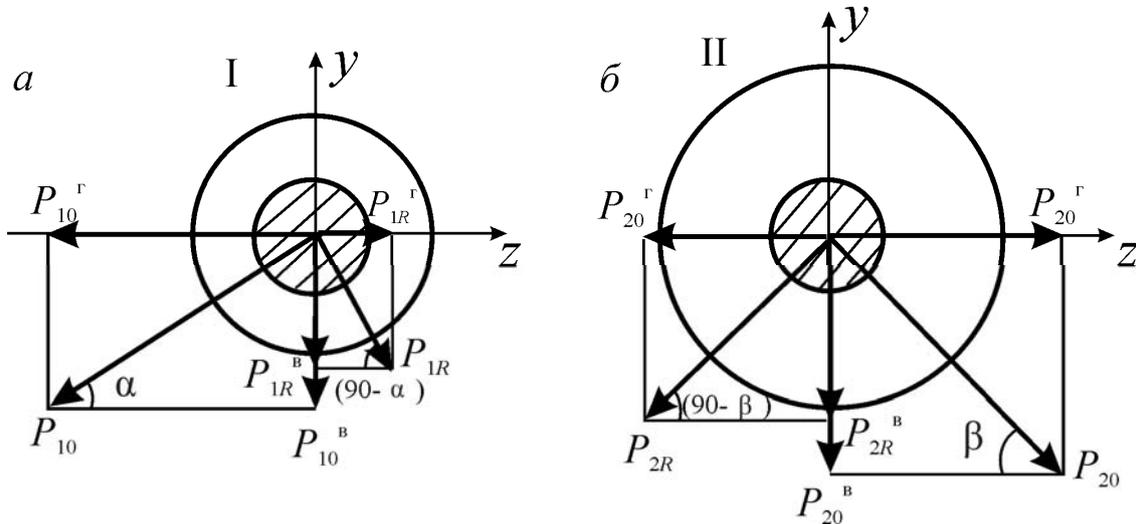


Рис. 7.3

В результате будем иметь:

$$P_1^B = -P_{1R} \cos \alpha - P_{10} \sin \alpha = -1,929 \cdot \cos 30^\circ - 5,3 \sin 30^\circ = -4,32 \text{ кН};$$

$$P_2^B = -P_{2R} \cos \beta - P_{20} \sin \beta = -0,858 \cdot \cos 80^\circ - 2,35 \sin 80^\circ = -2,469 \text{ кН};$$

$$P_1^r = P_{1R} \sin \alpha - P_{10} \cos \alpha = 1,929 \sin 30^\circ - 5,3 \cos 30^\circ = -3,626 \text{ кН};$$

$$P_2^r = -P_{2R} \sin \beta + P_{20} \cos \beta = -0,858 \sin 80^\circ + 2,356 \cos 80^\circ = -0,435 \text{ кН}.$$

Строим эпюры изгибающих моментов от вертикальных и от горизонтальных сил.

Расчетные схемы вала в вертикальной и горизонтальной плоскости и эпюры изгибающих моментов M_B и M_r показаны на рис. 7.2, з, е.

Строим эпюру суммарных изгибающих моментов.

Для бруса круглого поперечного сечения можно найти суммарный изгибающий момент как геометрическую сумму изгибающих моментов, действующих в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

$$M_{\text{и}} = \sqrt{M_B^2 + M_r^2}, \quad (7.1)$$

Найдем $M_{\text{и}}$ в сечениях C и B .

$$M_{\text{и}(C)} = \sqrt{0,736^2 + 0,92^2} = 1,18 \text{ кНм};$$

$$M_{\text{и}(B)} = \sqrt{1,136^2 + 0,198^2} = 1,15 \text{ кНм}.$$

В сечениях A и D M_n равен нулю. Эпюра M_n показана на рис. 7.2, *ж*. Находим опасное сечение.

На эпюре M_k (рис. 7.2, *б*) и эпюре M_n (рис. 7.2, *ж*) видно, что опасным будет сечение C . В этом сечении изгибающий момент и крутящий момент достигают наибольших значений.

Проверка прочности производится в опасных точках опасного сечения. Опасными являются точки, лежащие на контуре сечения. Элемент вала у опасной точки находится в плоском напряженном состоянии. Поэтому проверку прочности производят с применением теории прочности. Условие прочности записывается так:

$$\frac{M_p}{W} \leq [\sigma], \quad (7.2)$$

где M_p – расчетный момент;

W – осевой момент сопротивления поперечного сечения

$$W = \frac{\pi d^3}{32}, \text{ где } d \text{ – диаметр вала.}$$

Величина расчетного момента M_p зависит от принятой теории прочности. Обычно при расчете валов применяют четвертую теорию прочности (энергетическую) или третью теорию прочности (теорию наибольших касательных напряжений). По третьей теории прочности

$$M_{pIII} = \sqrt{M_n^2 + M_k^2}. \quad (7.3)$$

По четвертой теории прочности

$$M_{pIV} = \sqrt{M_n^2 + 0,75M_k^2}, \quad (7.4)$$

В сечении C : $M_k = 0,424$ кНм, $M_n = 1,18$ кНм. Максимальный расчетный момент по третьей теории прочности найдем по формуле (7.3).

$$M_{pIII} = \sqrt{1,18^2 + 0,424^2} = 1,254 \text{ кНм.}$$

Подбираем диаметр вала. Диаметр вала можно найти из условия прочности (7.2):

$$W \geq \frac{M_p}{[\sigma]} \quad \text{или} \quad \frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{M_p}{[\sigma]},$$

откуда

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_p}{\pi[\sigma]}}. \quad (7.5)$$

По формуле (7.5) будем иметь

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,254 \cdot 10^3}{70 \cdot 10^6 \cdot 3,14}} = 5,67 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad d = 56,7 \text{ мм}$$

8. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ

Рассмотрим расчет на внецентренное сжатие на следующем примере.

Чугунный короткий стержень сжимается силой P , приложенной в точке A и направленной параллельно оси стержня (рис. 8.1). На рис. 8.2 показано поперечное сечение стержня и точка приложения силы P – точка A .

Требуется:

1) вычислить главные центральные моменты инерции сечения и квадраты главных радиусов инерции;

2) найти отрезки, отсекаемые нулевой линией на главных центральных осях инерции;

3) вычертить в масштабе сечение, показать на чертеже нулевую линию и установить точки сечения, в которых действуют наибольшие напряжения растяжения и сжатия;

4) определить эти напряжения, выразив их через P и геометрические характеристики сечения;

5) найти допускаемую нагрузку $[P]$ при заданных допускаемых напряжениях для чугуна на растяжение $[\sigma_p]$ и на сжатие $[\sigma_c]$;

6) вычислить напряжение в точке B от действия допускаемой нагрузки.

Дано: $a = 12$ см; $b = 12$ см;

$[\sigma_p] = 30$ МПа $[\sigma_c] = 150$ МПа.

Прежде всего необходимо найти главные центральные оси инерции поперечного сечения стержня. Определяем положение центра тяжести сечения. Вычертим в масштабе поперечное сечение стержня (рис. 8.3). Возьмем произвольную систему осей y, z_0 . Координаты центра тяжести будут равны:

$$z_c = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = \frac{S_{z_0}}{F}.$$

где S_y, S_{z_0} – статические моменты поперечного сечения относительно осей y, z_0 ;
 F – площадь поперечного сечения.

Так как сечение симметрично относительно оси y , достаточно определить одну координату y_c . Найдем S_{z_0} .

$$S_{z_0} = S_{z_0}^I + S_{z_0}^II; \quad S_{z_0}^I = F^I \cdot y_{c_1}; \quad S_{z_0}^II = F^II \cdot y_{c_2}.$$

где $S_{z_0}^I, S_{z_0}^II$ – статические моменты двух прямоугольников I и II (рис. 8.3);

y_{c_1}, y_{c_2} – координаты центров тяжести этих прямоугольников;

F^I, F^II – площади прямоугольников.

$$F^I = 12 \cdot 24 = 288 \text{ см}^2; \quad F^II = 12 \cdot 36 = 432 \text{ см}^2; \quad F = F^I + F^II = 720 \text{ см}^2;$$

$$S_{z_0} = 288 \cdot 24 + 432 \cdot 6 = 9504 \text{ см}^3; \quad y_{c_2} = \frac{9504 \text{ см}^3}{720 \text{ см}^2} = 13,2 \text{ см}.$$

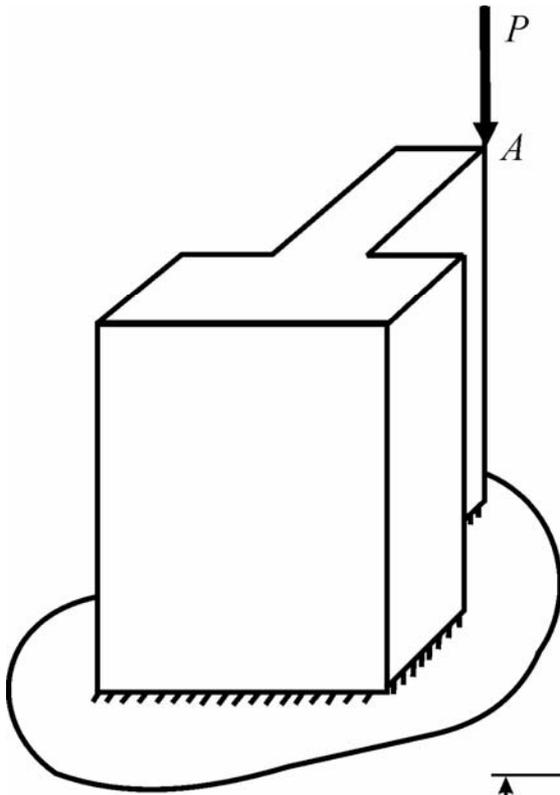


Рис. 8.1

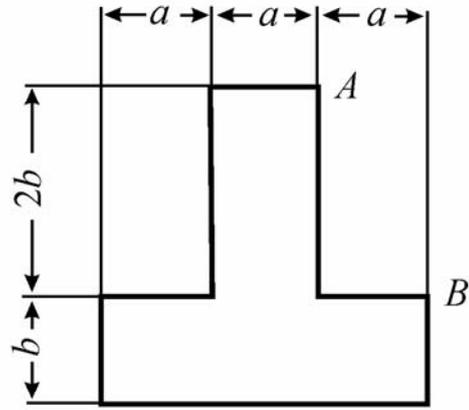


Рис. 8.2

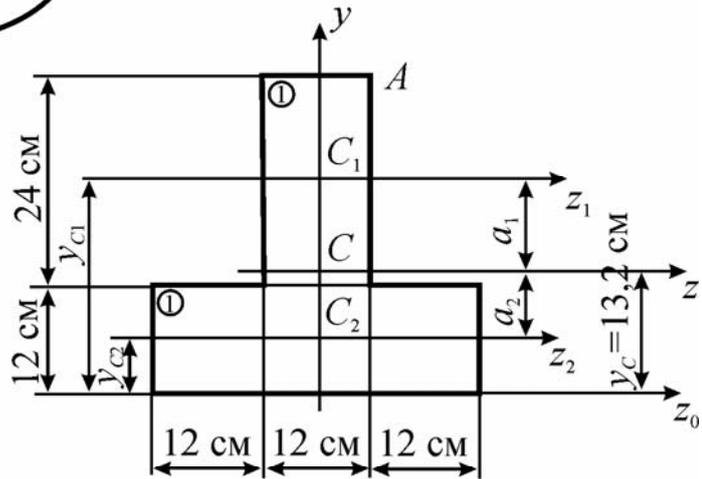


Рис. 8.3

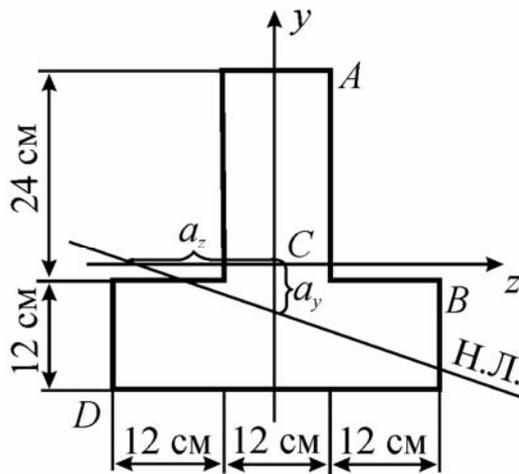


Рис. 8.4

Покажем на рис. 8.3 центр тяжести (точка C) и проведем горизонтальную центральную ось z .

Оси z , y – главные центральные оси инерции сечения, так как ось y – ось симметрии, а ось z ей перпендикулярна и проходит через центр тяжести сечения.

Вычисляем главные центральные моменты инерции сечения и квадраты главных радиусов инерции.

$$J_z = J_z^I + J_z^{II}.$$

Ось z не проходит через центры тяжести C_1 , C_2 прямоугольников, поэтому проводим через центры тяжести C_1 , C_2 оси z_1 , z_2 , параллельные оси z (рис. 8.3), и будем иметь

$$J_z^I = J_{z_1}^I + F^I \cdot a_1^2; \quad J_z^{II} = J_{z_2}^{II} + F^{II} \cdot a_2^2;$$

$$J_z^I = \frac{12 \cdot 24^3}{12} + 288 \cdot 10,8^2 = 47,416 \text{ см}^4;$$

$$J_z^{II} = \frac{36 \cdot 12^3}{12} + 432 \cdot 7,2^2 = 27,579 \text{ см}^4;$$

$$J_z = 47,416 \text{ см}^4 + 27,579 \text{ см}^4 = 74,995 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_y^I + J_y^{II}.$$

Ось y проходит через центры тяжести C_1 , C_2 обоих прямоугольников, поэтому

$$J_y^I = \frac{24 \cdot 12^3}{12} = 3456 \text{ см}^4; \quad J_y^{II} = \frac{12 \cdot 36^3}{12} = 46656 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 3456 \text{ см}^4 + 46656 \text{ см}^4 = 50112 \text{ см}^4.$$

Вычислим квадраты главных радиусов инерции

$$i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{74995}{720} = 104 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{50112}{720} = 69,6 \text{ см}^2.$$

Находим отрезки, отсекаемые нулевой линией на главных осях инерции.

При внецентренном сжатии или растяжении нулевая линия не проходит через центр тяжести поперечного сечения бруса. Положение нулевой линии определяется отрезками, отсекаемыми на главных осях y и z :

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_p}; \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_p}, \quad (8.1)$$

где y_p , z_p – координаты точки приложения силы.

Координаты точки приложения силы (рис. 8.3) равны

$$y_p = 22,8 \text{ см}; \quad z_p = 6 \text{ см}.$$

По формуле (8.1) имеем:

$$a_z = -\frac{69,6}{6} = -11,6 \text{ см}; \quad a_y = -\frac{104}{22,8} = -4,56 \text{ см}.$$

Вычертим в масштабе поперечное сечение и покажем нулевую линию (рис. 8.4). Для этого отложим в этом же масштабе отрезки a_z и a_y на осях z и y и соединим концы этих отрезков прямой. Это и будет нулевая линия. Как видно на рис. 8.4, опасными точками сечения будут: точка A (наибольшее напряжение сжатия) и точка D (наибольшее напряжение растяжения).

Определяем напряжения в опасных точках сечения.

Напряжения в поперечном сечении бруса при внецентренном сжатии определяется по следующей формуле:

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z}{i_y^2} \right), \quad (8.2)$$

где y, z – координаты точки, в которой определяется напряжение.

По формуле (8.2) будем иметь:

$$\sigma_A = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p \cdot y_A}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z_A}{i_y^2} \right);$$

$$\sigma_A = -\frac{P}{720 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \left(1 + \frac{6 \cdot 6}{69,6} + \frac{22,8 \cdot 22,8}{104} \right) = -90,472 \cdot P \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right];$$

$$\sigma_D = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p \cdot y_D}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z_D}{i_y^2} \right)$$

$$\sigma_D = -\frac{P}{720 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \left(1 + \frac{6 \cdot (-18)}{69,6} + \frac{22,8 \cdot (-13,2)}{104} \right) = 47,854 \cdot P \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right].$$

Найдем допускаемую нагрузку при заданных допускаемых напряжениях для чугуна на растяжение и сжатие.

Из условия прочности на сжатие будем иметь:

$$\sigma_A \leq [\sigma_c] \text{ или } 90,472 \cdot P \leq [\sigma_c], \text{ откуда } [P] = \frac{[\sigma_c]}{90,472} = \frac{150 \cdot 10^6}{90,472} = 1,658 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$

Из условия прочности на растяжение будем иметь:

$$\sigma_D \leq [\sigma_p] \text{ или } 47,854 \cdot P \leq [\sigma_p], \text{ откуда } [P] = \frac{[\sigma_p]}{47,854} = \frac{30 \cdot 10^6}{47,854} = 0,627 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$

Окончательно $[P] = 0,627 \cdot 10^6 \text{ Н} = 627 \text{ кН}$.

Вычисляем напряжение в точке B от допускаемой нагрузки.

$$\sigma_B = -\frac{[P]}{F} \left(1 + \frac{y_p \cdot y_B}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z_B}{i_y^2} \right);$$

$$\sigma_B = -\frac{627 \cdot 10^3 \text{ Н}}{720 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \left(1 + \frac{6 \cdot 18}{69,6} + \frac{22,8 \cdot (-1,2)}{104} \right) = -11,22 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = -11,22 \text{ МПа.}$$

9. ПОДБОР СЕЧЕНИЯ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ КОЭФФИЦИЕНТА УСТОЙЧИВОСТИ

Пусть требуется подобрать сечение стального стержня, представленного на рис. 9.1, если $P = 3000$ кН; $l = 3$ м; $[\sigma] = 160$ МПа (сталь 3).

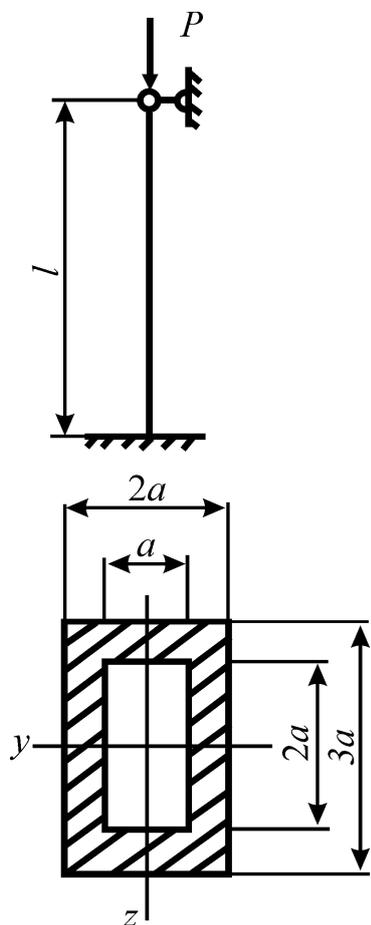


Рис. 9.1

Для подбора сечения используем условие

$$F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]}.$$

Применяем метод последовательных приближений, так как в одном условии имеем два неизвестных F и φ .

При **первом приближении** принимаем $\varphi_{01} = 0,5$;

$$F \geq \frac{300 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 37,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Согласно условию задачи (рис. 9.1)

$$F = 3a \cdot 2a - 2a \cdot a = 4a^2, \quad \text{отсюда}$$

$$a = \sqrt{\frac{F}{4}} = \sqrt{\frac{37,5}{4} \cdot 10^{-4}} = 3,06 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Минимальный момент инерции равен

$$J_{\min} = J_z = \frac{3a8a^3}{12} - \frac{2a \cdot a^3}{12}.$$

Минимальный радиус инерции сечения равен

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{3a8a^3}{12} - \frac{2a \cdot a^3}{12}}{4a^2}} = 0,68a;$$

$$i_{\min} = 0,68 \cdot 3,06 \cdot 10^{-2} = 2,08 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Гибкость стержня равна

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 3}{2,08 \cdot 10^{-2}} = 101.$$

Таблица 9.1

Значение коэффициентов φ и α

Гибкость	Ст. 0, ст. 2, ст. 3, ст. 4		Ст. 5	
	φ	$\alpha \cdot 10^{-3}$	φ	$\alpha \cdot 10^{-3}$
0	1,00	0,00	1,0	0,00
10	0,99	0,10	0,98	0,10
20	0,96	0,42	0,95	0,42
30	0,94	0,96	0,92	0,98
40	0,92	1,74	0,89	1,80
50	0,89	2,81	0,86	2,91
60	0,86	4,19	0,82	4,39
70	0,81	6,05	0,76	6,45
80	0,75	8,55	0,70	9,14
90	0,69	11,90	0,62	13,10
100	0,60	16,70	0,51	19,10
110	0,52	23,30	0,43	28,10
120	0,45	32,00	0,36	40,00
130	0,40	42,30	0,33	51,20
140	0,36	54,5	0,29	67,90
150	0,32	70,40	0,26	86,50
160	0,29	88,30	0,24	106,60
170	0,26	111,20	0,21	137,60
180	0,23	140,90	0,19	170,50
190	0,21	171,90	0,17	212,40
200	0,19	210,50	0,16	250,00

По таблице 9.1 имеем $\varphi_1 = 0,6 - \frac{0,6 - 0,52}{10} \cdot 1 = 0,592$.

Проверяем подобранное сечение

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{300 \cdot 10^3}{37,5 \cdot 10^{-4}} = 80 \leq \varphi_1 [\sigma] = 0,592 \cdot 160 = 94,72 \text{ МПа}$$

Отклонение $P > 5 \%$.

Второе приближение.

$$\text{Принимаем } \varphi_{02} = \frac{\varphi_{01} + \varphi_1}{2} = \frac{0,5 + 0,592}{2} = 0,546;$$

$$F \geq \frac{300 \cdot 10^3}{0,546 \cdot 160 \cdot 10^6} = 34,34 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$a = \sqrt{\frac{34,34 \cdot 10^{-4}}{4}} = 2,93 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$i_{\min} = 0,68 \cdot 2,93 \cdot 10^{-2} = 1,99 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\lambda = \frac{0,7 \cdot 3}{1,99 \cdot 10^{-2}} = 106;$$

$$\text{По таблице 9.1} - \varphi_2 = 0,6 - \frac{0,6 - 0,52}{10} \cdot 6 = 0,552;$$

$$\sigma = \frac{300 \cdot 10^3}{34,34 \cdot 10^{-4}} = 87,36 \leq \varphi_2 [\sigma] = 0,552 \cdot 160 = 88,32 \text{ МПа}$$

$$P < 5 \text{ \%}.$$

Если отклонение превышало бы 5 % необходимо было осуществить третье приближение. В качестве исходного значения φ в третьем приближении принимается $\varphi_{03} = \frac{\varphi_{02} + \varphi_2}{2}$ и расчеты повторяются.

Применим метод непосредственного подбора с использованием вспомогательных коэффициентов.

Для получения расчетной формулы преобразуем основное условие

$$F \geq \frac{P}{\varphi [\sigma]} \quad \text{или} \quad \varphi \geq \frac{P}{[\sigma] F}.$$

Разделим λ^2 на левую и правую части неравенства

$$\frac{\lambda^2}{\varphi} \leq \frac{\lambda^2 [\sigma]}{P} F.$$

$$\text{Обозначим} \quad \frac{\lambda^2}{\varphi} = \alpha, \quad \frac{\lambda^2}{P} \cdot [\sigma] \cdot F = c$$

$$\text{тогда} \quad c = \frac{\lambda^2 \cdot [\sigma] \cdot F}{P} = \frac{(\mu \cdot l)^2}{P} [\sigma] \frac{F}{i_{\min}^2} = \frac{(\mu \cdot l)^2}{P} [\sigma] \frac{F^2}{J_{\min}}$$

$$\text{или} \quad c = \frac{(\mu \cdot l)^2}{P} [\sigma] \cdot k_{\varphi},$$

где $k_\phi = \frac{F^2}{J_{\min}}$ – безразмерная величина, коэффициент формы.

Методика решения задачи методом непосредственного подбора:

а) определяем коэффициент формы $k_\phi = \frac{F^2}{J_{\min}}$;

б) вычисляем коэффициент $c = \frac{(\mu \cdot l)^2}{P} [\sigma] \cdot k_\phi$;

в) принимаем $\alpha = c$ и по таблице определяем ϕ ;

г) определяем площадь сечения и размеры сечения $F \geq \frac{P}{\phi [\sigma]}$

Подберем сечение стойки, представленной на рис. 9.1, методом непосредственного подбора

$$\text{а) } k_\phi = \frac{F^2}{J_{\min}} = \frac{(3a \cdot 2a - 2a^2)^2}{\frac{3a(2a)^3}{12} - \frac{2aa^3}{12}} = 8,727;$$

$$\text{б) } c = \frac{(0,7 \cdot 3)^2}{300 \cdot 10^3} 160 \cdot 10^6 \cdot 8,727 = 20526;$$

в) $\alpha = c = 20533$, по таблице 9.1 имеем

$$\phi = 0,6 - \frac{0,6 - 0,52}{6600} \cdot 3826 = 0,553;$$

$$\text{г) } F \geq \frac{300 \cdot 10^3}{0,553 \cdot 100 \cdot 10^6} = 33,91 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$a = \sqrt{\frac{33,91 \cdot 10^{-4}}{4}} = 2,91 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Ранее получено $a = 2,93 \cdot 10^{-2}$ м. В этом случае напряжение получено на 1,2 % меньше допускаемого.

При условии, что напряжение, равно допускаемому $a = 2,91 \cdot 10^{-2}$ м. Этот результат получен непосредственным подбором.

10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ БАЛОК И СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ ПО ВЕРЕЩАГИНУ

В расчете балок и рам на жесткость требуется уметь определять перемещения, так как значения последних ограничиваются соответствующими нормами. Решим задачу определения перемещений балки и рамы на следующих примерах.

Для заданных схем балки (рис. 10.1, *a*), повторяющей схему «б» на рис. 5.1 и статически определяемой рамы (рис. 10.2, *a*) требуется:

- 1) построить эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки;
- 2) подобрать из расчета на изгиб при $[\sigma] = 160$ МПа стальной двутавр;
- 3) определить по Верещагину прогиб и угол поворота сечения балки в точке *C*, а для рамы – угол поворота сечения «*C*» и вертикальное и горизонтальное перемещение точки *D*; значение модуля упругости принять равным $2 \cdot 10^5$ МПа, а величину момента инерции взять для выбранного двутавра из сортамента.

Схема балки и построенная грузовая эпюра M_p представлены на рис. 10.1, *a* и на рис. 10.1, *б*.

Для определения перемещений по Верещагину эпюру M_p на левом участке удобно представить как сумму симметричной квадратной параболы с максимальной ординатой в середине пролета, равной $h = \frac{ql^2}{8} = \frac{206^2}{8} = 90$ кНм, и треугольника с ординатой 60 кНм. Суммируемые эпюры M_p представлены на рис. 10.1, *в* и на рис. 10.1, *г*.

Для определения по Верещагину угла поворота сечения «*C*» прикладываем в точке *C* безразмерный момент $M_1 = 1$ (рис.10.1, *д*), определяем реакции опор от его воздействия на балку и строим единичную эпюру \bar{M}_1 (рис.10.1, *е*). При вычислении угла поворота φ_c умножаем площади грузовой эпюры M_p на ординаты единичной эпюры \bar{M}_1 , взятые в том сечении балки, в котором расположены центры тяжести грузовых эпюр M_p . Получаем

$$EJ_{\varphi_c} = EJ_{\Delta_{ip}} = -\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 90 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot 1 = -270 \text{ кНм}^2;$$

$$-180 - 120 + 30 = -270;$$

$$\varphi_c = \frac{-270 \text{ кНм}^2}{EJ} = \frac{-270 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 18930 \cdot 10^{-8}} = -0,00712.$$

Знак минус показывает, что φ_c направлен навстречу $M_1 = 1$, то есть против часовой стрелки. Как и следовало ожидать, этот результат совпадает с полученным ранее в пункте 5 значением угла поворота φ_c .

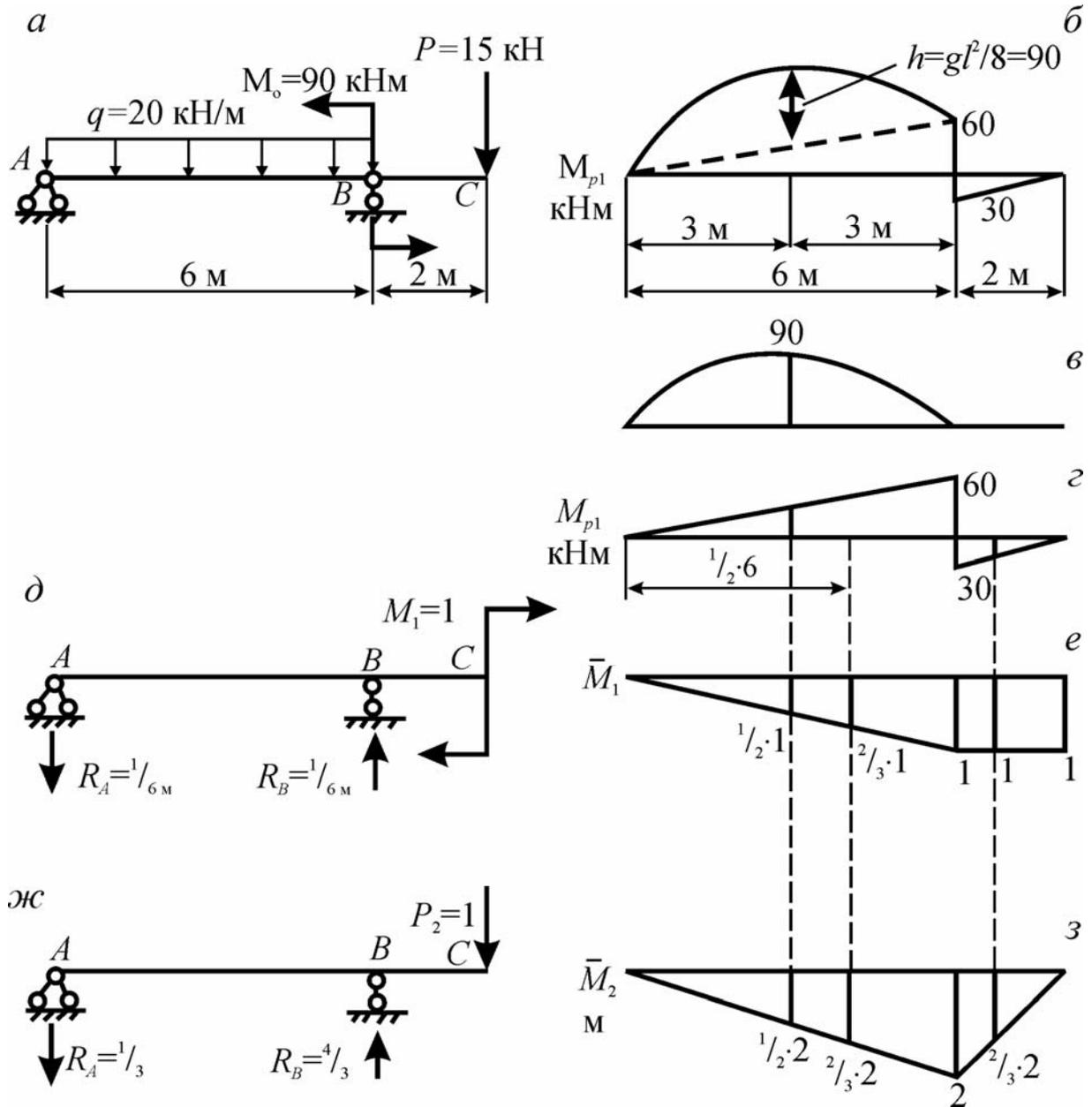


Рис. 10.1

Для определения прогиба в точке C прикладываем в этой точке в направлении определяемого перемещения, т.е. вертикально, безразмерную единичную силу $P_2 = 1$ (см. рис.10.1, ж), определяем реакции опор от ее воздействия на балку и строим единичную эпюру моментов \bar{M}_2 (см. рис.10.1, з). При вычислении прогиба u_c умножаем площади грузовой эпюры M_p на ординаты единичной эпюры \bar{M}_2 , взятые в том сечении балки, в котором расположены центры тяжести эпюры M_p .

$$EJ_{y_c} = EJ_{\Delta_{2p}} = -\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 90 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = -560 \text{ кНм}^3$$

$$y_c = \frac{-560 \text{ кНм}^3}{EJ} = \frac{-560 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 18930 \cdot 10^{-8}} = -0,0148 \text{ м} = -1,48 \text{ см}.$$

Знак минус показывает, что прогиб y_c направлен навстречу силе $P_2 = 1$, т.е. вверх. Численное значение прогиба также совпадает с полученным ранее в пункте 5 результатом.

Можно заметить, однако, что определение перемещений по Верещагину значительно проще, чем по универсальному уравнению изогнутой оси балки.

Рассмотрим теперь статически определимую раму, нагруженную распределенной нагрузкой с интенсивностью q и моментом M_0 . Расчетная схема рамы представлена на рис. 10.2, а.

Необходимо построить грузовую эпюру M_p , для чего сначала вычислим реакции опор.

$$\Sigma M_A = -R_D \cdot 1,5 + q \cdot 3 \cdot 1,5 - M_0 = 0;$$

$$-1,5 R_D + 36 - 12 = 0; \quad R_D = 16 \text{ кН};$$

$$\Sigma X = -R_D + R_{Ar} = 0; \quad R_{Ar} = R_D = 16 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = -q \cdot 3 + R_{Av} = 0; \quad R_{Av} = q \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24 \text{ кН}.$$

Помещаем наблюдателя, как показано на рис. 10.2, а и поворачиваем чертеж так, чтобы первый участок (с сечением I) занял горизонтальное положение. $0 \leq x \leq 1,5$ м. Учтем нагрузки левее сечения.

$$M = -\Sigma M_{1\text{лев.}} = -(-R_D x) = +R_D x = +16x.$$

Получено уравнение прямой. При $x = 0$ имеем $M = 0$, а при $x = 1,5$ м получаем $M = +24$ кНм.

Второй участок. $0 \leq x \leq 3$ м. Учтем также силы левее сечения 2 с учетом нагрузки на вертикальный элемент рамы.

$$M = -\Sigma M_{2\text{лев.}} = -(-R_D \cdot 1,5 + \frac{qx^2}{2}) = +R_D \cdot 1,5 - \frac{qx^2}{2} = +16 \cdot 1,5 - \frac{8x^2}{2} = +24 - 4x^2.$$

Получено уравнение квадратной параболы с экстремальным значением момента при $x = 0$. При значении $x = 0$; $x = 1,5$ м и $x = 3$ м получаем соответственно значения моментов $M = 24$ кНм; $M = 15$ кНм; $M = -12$ кНм.

По найденным результатам строим эпюру M_p (см. рис. 10.2, б).

Подбираем стальной двутавр из расчета на изгиб, пренебрегая наличием продольных сил.

Необходимый момент сопротивления

$$W = \frac{|M_p|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{24 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 150 \text{ см}^3.$$

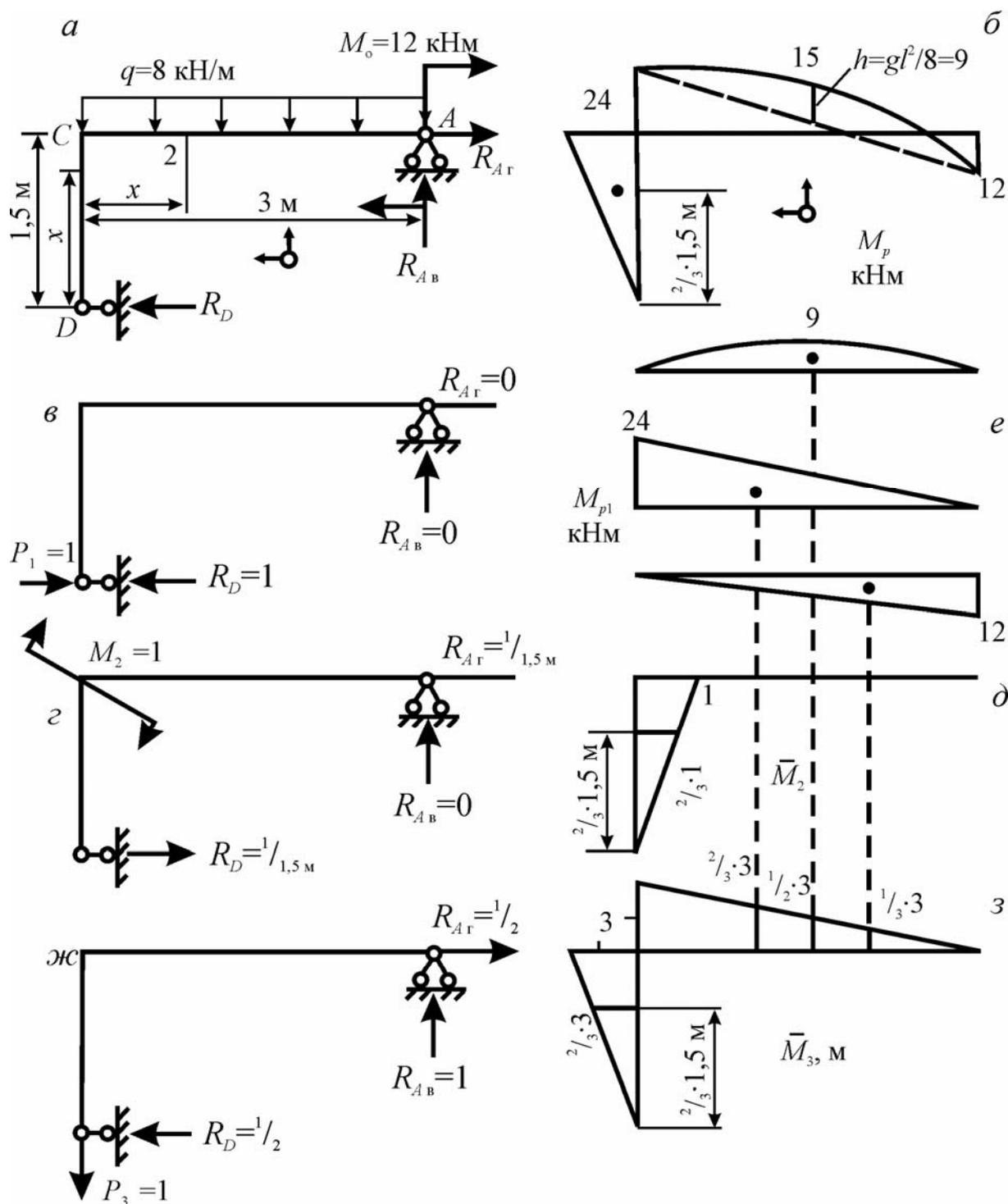


Рис. 10.2

Подбираем по сортаменту двутавр № 18а с моментом сопротивления $W = 159 \text{ см}^3$ и моментом инерции $J = 1430 \text{ см}^4$.

Для определения горизонтального перемещения точки D. Формально прикладываем в этой точке горизонтально направленную силу $P_1 = 1$ и определяем вызванные ею реакции опор (рис. 10.2, в). Так как P_1 и R_D действуют в одной точке и уравновешивают друг друга, эпюра \bar{M}_1 на обоих

участках, очевидно, равна нулю. Следовательно, результат перемножения эпюр M_p и \bar{M}_1 тоже равен нулю, поэтому горизонтальное перемещение точки D равно нулю. Последнее, впрочем, очевидно и без приведенных рассуждений, так как перемещение в направлении абсолютно жесткой опоры D , безусловно, равно нулю.

Для определения угла поворота сечения C прикладываем в этом сечении момент $M_2 = 1$ (рис. 10.2, *з*) находим реакции опор и аналогично изложенному выше строим единичную эпюру \bar{M}_2 (рис. 10.2, *д*). Для удобства перемножения эпюры M_p с единичными разбиваем эпюру M_p на горизонтальном участке на простые, как показано на рис. 10.2, *е*.

$$EJ\varphi_c = EJ\Delta_{2p} = -\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -12 \text{ кНм}^2.$$

$$\varphi_c = \frac{-12 \text{ кНм}^2}{EJ} = -\frac{12 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = -0,0042.$$

Знак минус показывает, что φ_c направлен навстречу $M_2 = 1$, т.е. против часовой стрелки.

Для определения вертикального перемещения точки D прикладываем в этой точке вертикальную единичную силу $P_3 = 1$ (рис. 10.2, *ж*), определяем реакции опор и строим единичную эпюру \bar{M}_3 (рис. 10.2, *з*).

$$EJ\Delta_{D \text{ верт.}} = EJ\Delta_{3p} = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + \\ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = +117 \text{ кНм}^3$$

$$\Delta_{D \text{ верт.}} = \frac{117 \text{ кНм}^3}{EJ} = \frac{117 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = 0,0605 \text{ м} = 6,05 \text{ см}$$

Положительный результат означает, что перемещение точки D направлено так же, как сила $P_3 = 1$, т.е. вниз.

При перемножении эпюр M_p и M_3 на горизонтальном участке рамы можно обойтись без разбивки трапеции на два треугольника, а использовать формулу перемножения двух трапеций: грузовой с ординатами $a = 24$, $b = -12$ и единичной с ординатами $c = 3$, $d = 0$.

В этом случае получаем

$$EJ\Delta_{D \text{ верт.}} = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + \\ + \frac{3[2 \cdot 24 \cdot 3 + 2 \cdot (-12) \cdot 0 + 24 \cdot 0 + (-12) \cdot 3]}{6} = +117 \text{ кНм}^3.$$

Результат, как и следовало ожидать, тот же, что и полученный ранее при разбивке трапеции на два треугольника.

11. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ

Рассмотрим методику расчета статически неопределимой стержневой системы методом сил на примере расчета плоской статически неопределимой рамы, представленной на рис. 11.1, *a*.

Для заданной статически неопределимой рамы, у которой жесткость элемента AB равна $2EJ$, а элементов KC и CD – EJ (рис. 11.1, *a*), требуется:

- 1) установить степень статической неопределимости;
- 2) выбрать основную систему;
- 3) написать канонические уравнения;
- 4) построить эпюры изгибающих моментов от единичных неизвестных и от заданной нагрузки и вычислить по Верещагину все перемещения, входящие в канонические уравнения;
- 5) решить канонические уравнения, определить величины неизвестных;
- 6) построить окончательные эпюры M , Q , N .
- 7) проверить правильность построения окончательной эпюры M , умножив ее на каждую из единичных эпюр.

Определяем степень статической неопределимости рамы. Для оценки степени статической неопределимости можно воспользоваться формулой

$$m = c_o + c_v - 3D, \quad (11.1)$$

где c_o , c_v – количество освобожденных внешних и внутренних связей при расчленении системы на элементы;

D – количество элементов системы после расчленения.

Для рамы, представленной на рис. 11.1, *a* в точке A освобождаем три внешних связи ($c_o = 3$), а в точке B – две ($c_o = 2$), раму рассмотрим как один элемент ($D = 1$) без расчленения ($c_o = 0$), следовательно

$$m = 5 + 0 - 3 \cdot 1 = 2.$$

Для контроля правильности оценки степени статической неопределимости рекомендуется использовать формулу

$$m = 3k - ш_1 - 2ш_2 - 3ш_3 - \dots - nш_n. \quad (11.2)$$

где k – количество замкнутых контуров рамы;

$ш_1, ш_2, 3ш_3, \dots, nш_n$ – количество шарниров соответственно первого, второго, третьего, ..., n -го рода.

Для рамы, представленной на рис. 11.1, *a*, имеем два замкнутых контура (отмечены цифрами 1 и 2). Шарнирнонеподвижная опора в точке B представлена как сочетание двух стержней, связанных с основанием двумя

шарнирами первого рода ($\psi_1 = 2$), а между собой и с правой стойкой шарниром второго рода ($\psi_2 = 1$), остальные шарниры отсутствуют.

Следовательно, $m = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2$.

При использовании обеих формул (11.1) и (11.2) получили одинаковый результат: система является дважды статически неопределимой, имеем две «лишних» связи.

Выбираем основную (расчетную) систему.

Основной (расчетной) системой для заданной будет являться статически определимая система, которую можно получить, если отбросить в исходной системе «лишние» связи. Необходимо следить за тем, чтобы выбранная основная (расчетная) система была бы геометрически неизменяемой. Из бесконечного числа вариантов основной (расчетной) системы рекомендуется выбрать вариант, который позволит решить задачу с меньшим объемом вычислений. В нашем примере необходимо отбросить две связи, заменив их реакциями X_1 и X_2 , величины которых пока неизвестны, но должны быть такими, чтобы перемещения, соответствующие этим силам от действия всех нагрузок, включая и «лишние» неизвестные X_1 и X_2 , были бы равны нулю. В этом случае изображенная на рис. 11.1, б система будет эквивалентной исходной статически неопределимой системе.

Составляем систему канонических уравнений метода сил.

Эти уравнения составляются исходя из условий, что перемещения, соответствующие каждому «лишнему» неизвестному от действия всех сил, включая и «лишние» неизвестные, равны нулю. Для системы, показанной на рис. 11.1, б, имеем

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0, \end{aligned} \quad (11.3)$$

где δ_{11} – перемещение, соответствующее X_1 , от действия $X_1 = 1$;

δ_{12} – соответствующее X_1 , от действия $X_2 = 1$;

δ_{21} – соответствующее X_2 , от действия $X_1 = 1$;

δ_{22} – соответствующее X_2 , от действия $X_2 = 1$;

Δ_{1p} , Δ_{2p} – перемещения, соответствующие X_1 и X_2 , от действия заданной нагрузки;

$\delta_{11}X_1$, $\delta_{12}X_2$ – перемещения, соответствующие X_1 , от действия X_1 и X_2 ;

$\delta_{21}X_1$, $\delta_{22}X_2$ – перемещения, соответствующие X_2 , от действия X_1 и X_2 .

Определяем коэффициенты, входящие в уравнения (11.3), т.е. определяем единичные и грузовые перемещения.

Так как все элементы рамы имеют прямолинейные оси применяем для определения перемещений способ Верещагина.

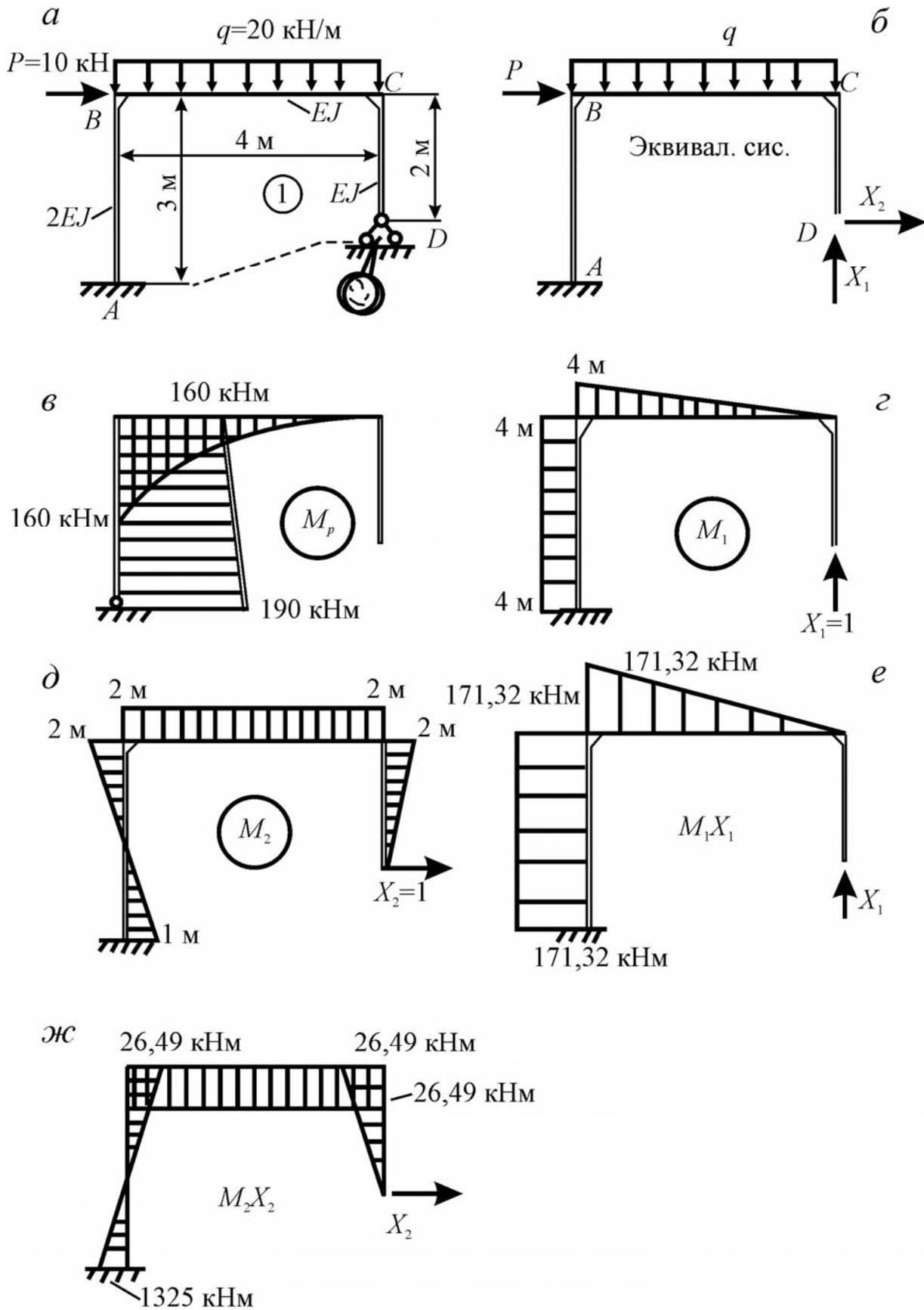


Рис. 11.1

Для определения перемещений способом Верещагина построим эпюры изгибающих моментов от действия заданной нагрузки и единичных сил.

На рис. 11.1, в представлена грузовая эпюра, т.е. эпюра изгибающих моментов в основной системе от заданной нагрузки (q и P). На рисунках 11.1, з и 11.1, д показаны единичные эпюры или эпюры изгибающих моментов от действия соответственно $X_1 = 1(M_1)$ и $X_2 = 1(M_2)$ в основной системе.

Определяем грузовые перемещения Δ_{1p} , Δ_{2p} , умножая грузовую эпюру (M_p) последовательно на первую (M_1) и вторую (M_2) единичные эпюры.

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{3} \cdot 160 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 \right) + \frac{1}{2EJ} \left[-\frac{1}{2} (160 + 190) \cdot 3 \cdot 4 \right] = \frac{-640 - 1050}{EJ} = -\frac{1690}{EJ};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2p} &= \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{3} \cdot 160 \cdot 4 \cdot 2 \right) + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{3}{6} (2 \cdot 1 \cdot 190 - 2 \cdot 2 \cdot 160 - 190 \cdot 2 + 160 \cdot 1) = \\ &= \frac{-1280 - 360}{3EJ} = -\frac{1640}{3EJ}. \end{aligned}$$

Единичные перемещения определяем, перемножая между собой эпюры изгибающих моментов от единичных сил, имеющих индексы, соответствующие определенным перемещениям.

Умножая M_1 на M_1 , получим

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EJ} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = \frac{64 + 72}{3EJ} = \frac{136}{3EJ};$$

M_1 на M_2 –

$$\delta_{12} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{16 + 3}{EJ} = \frac{19}{EJ};$$

M_2 на M_2 –

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{EJ} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{3}{6} (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = \\ &= \frac{16 + 96 + 9}{6EJ} = \frac{121}{6EJ}; \end{aligned}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{19}{EJ} \text{ (теорема о взаимности перемещений).}$$

Решаем систему канонических уравнений метода сил, определяем «лишние» неизвестные X_1 и X_2 .

Подставляя найденные в п. 4 перемещения в систему уравнений (11.3), имеем:

$$\frac{136}{3EJ} X_1 + \frac{19}{EJ} X_2 - \frac{1690}{EJ} = 0;$$

$$\frac{19}{EJ} X_1 + \frac{121}{6EJ} X_2 - \frac{1640}{3EJ} = 0.$$

Умножив все члены уравнений на EJ , получим

$$\frac{136}{3}X_1 + 19X_2 - 1690 = 0;$$

$$19X_1 + \frac{121}{6}X_2 - \frac{1640}{3} = 0.$$

Значения «лишних» неизвестных X_1 и X_2 равны

$$X_1 = D_1/D; \quad X_2 = D_2/D.$$

Здесь

$$D = \begin{vmatrix} \frac{136}{3} & 19 \\ 19 & \frac{121}{6} \end{vmatrix}; \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1690 & 19 \\ 1640 & \frac{121}{6} \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{136}{3} & 1690 \\ 19 & \frac{1640}{3} \end{vmatrix};$$

$$D = 553,22; \quad D_1 = 23695; \quad D_2 = -7328.$$

Подставляя значения D , D_1 , и D_2 получим

$$X_1 = \frac{23695}{553,22} = 42,831 \text{ кН}; \quad X_2 = -\frac{7328}{553,22} = -13,246 \text{ кН}.$$

После определения величин «лишних» неизвестных X_1 и X_2 будем считать их в дальнейшем известными силами или нагрузками в эквивалентной системе (рис. 11.1, б).

Строим эпюру изгибающих моментов от действия заданной нагрузки и определенных ранее «лишних» неизвестных в эквивалентной системе.

Согласно принципу суперпозиции изгибающий момент в любом сечении от действия заданной нагрузки и «лишних» неизвестных X_1 и X_2 равен сумме изгибающих моментов от действия каждой нагрузки в отдельности.

$$M = M_1X_1 + M_2X_2 + M_p, \quad (11.4)$$

где M_1X_1 – изгибающий момент от действия силы X_1 ;

M_2X_2 – то же от действия силы X_2 ;

M_p – то же от действия заданной нагрузки.

На рис. 11.1, е и 11.1, ж представлены эпюры изгибающих моментов от действия соответственно сил X_1 и X_2 . Эти эпюры получены путем умножения ординат эпюр M_1 и M_2 на соответствующие значения X_1 и X_2 . Так как X_2 имеет отрицательное значение, ординаты эпюры M_2X_2 направлены в сторону, противоположную направлению ординат эпюры M_2 .

На участках, где все три складываемые эпюры M_1X_1 , M_2X_2 и M_p имеют линейные очертания, рекомендуется графическое сложение. На участке, где эпюра M_p криволинейная, целесообразно провести аналитическое сложение, получить выражение $M(x)$ и построить эпюру по полученному выражению.

Отсчитывая на участке BC переменное расстояние x от правого конца (точка C) (рис. 11.1, б), получим

$$M_1 X_1 = X_1 x = 42,831x;$$

$$M_2 X_2 = X_2 \cdot 2 = -13,246 \cdot 2 = -26,49 \text{ кНм};$$

$$M_p = -\frac{qx^2}{2} = -10x^2.$$

Складывая отдельные выражения получим

$$M = 42,831x - 26,49 - 10x^2;$$

$$M(c) = -26,49 \text{ кНм}; \quad M(4) = -15,17 \text{ кНм};$$

$$M'(x) = 42,831 - 20x;$$

$$\text{при } x^* = 2,14 \text{ м}, \quad M'(x^*) = 0;$$

$$M(2,14) = M_{\max} = 19,34 \text{ кНм}.$$

На рис. 11.2, а показана окончательная эпюра изгибающих моментов от действия заданной нагрузки в заданной системе.

Кинематическая проверка.

Для проведения кинематической проверки необходимо умножить окончательную эпюру изгибающих моментов M на каждую единичную эпюру M_1 и M_2 (рис. 11.1, в д). Результат перемножения должен равняться нулю, т.к. в этом случае мы вычисляем перемещения по направлению освобожденных связей, которые должны быть равны нулю.

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{M \times M_1}{EJ} \right)_i = \frac{1}{2EJ} \left[-4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} (15,17 + 5,43) \right] +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \cdot \frac{4}{6} (-2 \cdot 4 \cdot 15,17 - 26,49 \cdot 4) + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{20 \cdot 4^3}{12} \cdot 2 = 0;$$

$$-15,45 + 15,45 = 0$$

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{M \times M_2}{EJ} \right)_i = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{3}{6} (2 \cdot 1 \cdot 5,43 - 2 \cdot 15,17 \cdot 2 - 5,43 \cdot 2 + 15,17 \cdot 1) +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{2} (15,17 + 26,49) \cdot 4 \cdot 2 \right] + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{20 \cdot 4^3}{12} \cdot 2 + \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 26,49 \cdot 2 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 0$$

$$-213,3 + 213,3 = 0.$$

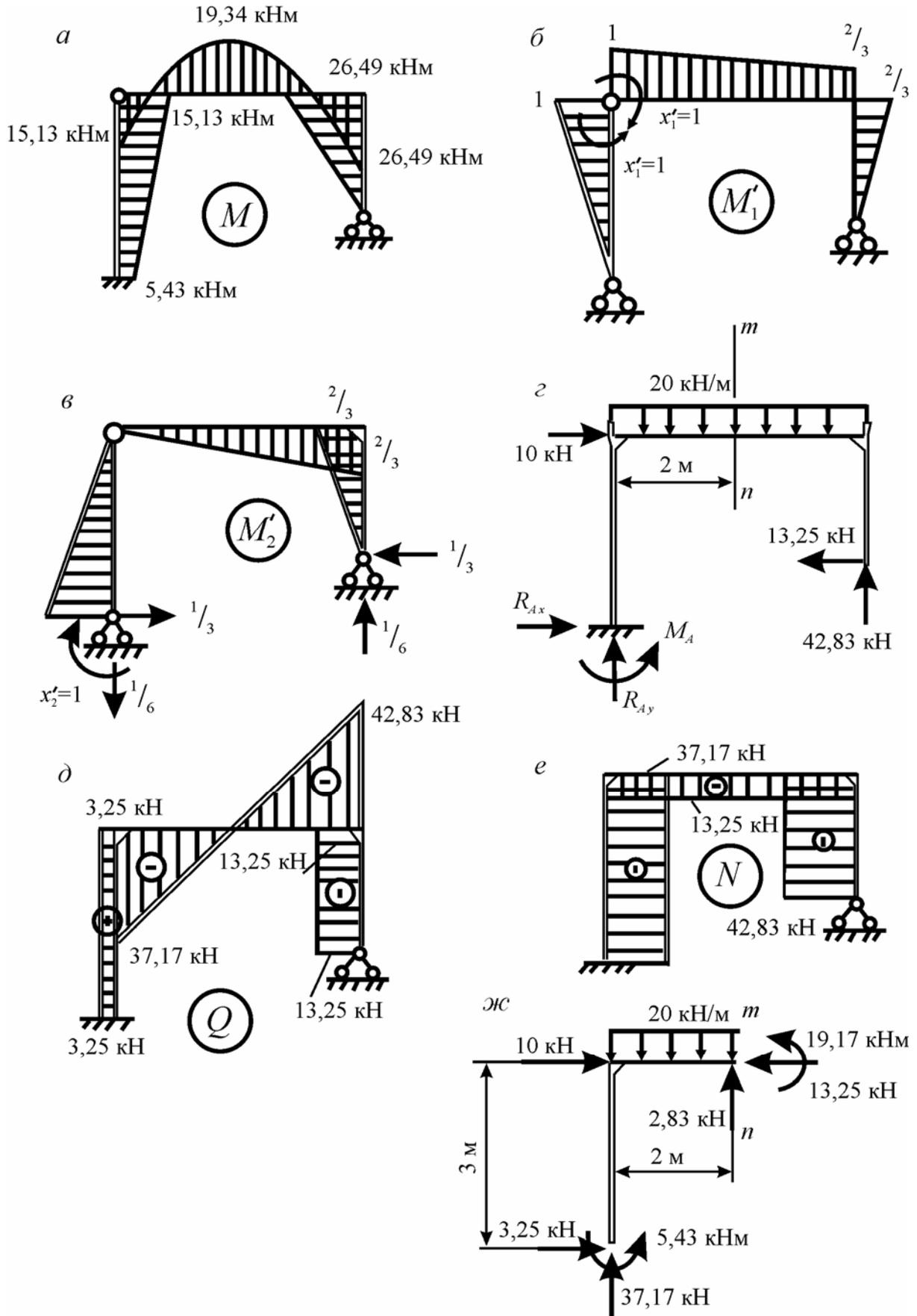


Рис. 11.2

Покажем на примере, что при правильном решении задачи, результаты перемножения эпюры M на каждую из двух единичных эпюр M'_1 и M'_2 , построенных в новой основной системе, также равны нулю.

На рис. 11.2, б показаны новая основная система, которая получена в результате освобождения угловых связей в точках A и B , и единичная эпюра M'_1 ; на рис. 11.2, в представлена единичная эпюра M'_2 в той же системе.

Умножаем эпюру M на M'_1 –

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left(\frac{M \times M'_1}{EJ} \right)_i &= \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{3}{6} (-2 \cdot 1 \cdot 15,17 - 5,43 \cdot 1) + \\ &+ \frac{1}{EJ} \cdot \frac{4}{6} \left(-2 \cdot 15,17 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 26,49 - 26,49 \cdot 1 - 15,17 \cdot \frac{2}{3} \right) + \\ &+ \frac{1}{EJ} \cdot \frac{20 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 26,49 \cdot 2 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0; \end{aligned}$$

$$- 88,888 + 88,888 = 0;$$

M на M'_2 –

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left(\frac{M \times M'_2}{EJ} \right)_i &= \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{3}{6} (-2 \cdot 1 \cdot 5,43 - 15,17 \cdot 1) + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{4}{6} \left(2 \cdot 26,49 \cdot \frac{2}{3} + 15,17 \cdot \frac{2}{3} \right) + \\ &+ \frac{1}{EJ} \left(-\frac{20 \cdot 4^3}{12} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 26,49 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 0 \end{aligned}$$

$$- 42,063 + 42,063 = 0.$$

Как видим из полученных результатов, проверка удовлетворяет как в первом, так и во втором случаях.

Строим эпюры Q и N .

Рассмотрим эквивалентную систему (рис. 11.1, б). Предварительно определим опорные реакции в точке A

$$\Sigma X = 0; \quad R_{AX} + 10 - 13,25 = 0; \quad R_{AX} = 3,25 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0; \quad R_{AY} - 20 \cdot 4 + 42,83 = 0; \quad R_{AY} = 37,17 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad M_A - 10 \cdot 3 - 20 \cdot 4 \cdot 2 + 13,25 \cdot 1 + 42,83 \cdot 4 = 0; \quad M_A = 5,43 \text{ кНм}.$$

Участок AB :

$$Q = -\Sigma P_y^{\text{лев.}} = R_{AX} = 3,25 \text{ кН};$$

$$N = -\Sigma P_x^{\text{лев.}} = -R_{AY} = -37,17 \text{ кН}.$$

Участок BC :

$$Q = -\Sigma P_y^{\text{лев.}} = -37,17 + 20x;$$

$$Q(2) = -37,17 \text{ кН}; \quad Q(4) = 42,83 \text{ кН};$$

$$N = -\Sigma P_x^{\text{лев.}} = -3,25 - 10 = -13,25 \text{ кН}.$$

Участок CD :

$$Q = \Sigma P_y^{\text{пр.}} = -13,25 \text{ кН};$$

$$N = \Sigma P_x^{\text{пр.}} = -42,83 \text{ кН}.$$

Эпюры Q и N представлены на рис. 11.2, d , e .

Статическая проверка.

Рассмотрим равновесие левой части рамы, отсеченной сечением $m-n$ (11.2, $ж$). Согласно эпюрам M , Q и N в сечении $m-n$

$$Q = -37,17 + 20 \cdot 2 = 2,83 \text{ кН}$$

$$N = -13,25 \text{ кН};$$

$$M = 42,83 \cdot 2 - 26,49 - 10 \cdot 2^2 = 19,17 \text{ кНм}.$$

Составим три уравнения равновесия отсеченной части рамы

$$\Sigma X = 0; \quad 10 + 3,25 - 13,25 = 0; \quad 0 \equiv 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad 37,17 - 20 \cdot 2 + 2,83 = 0; \quad 0 \equiv 0;$$

$$\Sigma M_c = 0; \quad 5,43 - 10 \cdot 3 - 20 \cdot 2 \cdot 1 + 2,83 \cdot 2 + 13,25 \cdot 3 + 19,17 = 0;$$

$$-70 + 70,01 = 0, \quad P < 0,1 \text{ \%}.$$

12. РАСЧЕТ БАЛОК НА ДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ НАГРУЗКИ

Действие ударной нагрузки на балку рассмотрим на примере следующей задачи.

На деревянную балку прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой $h = 1,5b$ падает груз P , ударяя по резиновой подушке, лежащей на балке (рис. 12.1, а). Подушка толщиной δ имеет в плане форму квадрата размерами $b \times b$. Модуль упругости резины $E = 10$ МПа, а древесины $E_d = 10^4$ МПа. Допускаемое напряжение для материала балки $[\sigma] = 10$ МПа.

Требуется определить допускаемую высоту H падения заданного груза в двух случаях:

- а) при наличии подушки и
- б) при ее отсутствии.

Принимаем следующие исходные данные:

$$P = 0,3 \text{ кН}; \quad l = 2,4 \text{ м}; \quad k = 0,5; \quad b = 10 \text{ см} \quad h = 15 \text{ см}; \quad \delta = 15 \text{ см}.$$

Сначала строим эпюру изгибающих моментов при статическом приложении силы P (см. рис. 12.1, б и рис. 12.1, в).

Согласно эпюре M_{pc} имеем расчетный момент $M_{pc} = 0,36$ кНм.

Определяем момент сопротивления сечения

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{10 \cdot 15^2}{6} = 375 \text{ см}^3;$$

момент инерции

$$J = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 15^3}{12} = 2810 \text{ см}^4.$$

Статическое напряжение от действия силы P

$$\sigma_c = \frac{M_{cp}}{W} = \frac{0,36 \cdot 10^3}{375 \cdot 10^{-6}} = 0,96 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 0,96 \text{ МПа}.$$

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_d = k_d \sigma_c \leq [\sigma],$$

откуда значение динамического коэффициента

$$k_d \leq \frac{[\sigma]}{\sigma_c} = \frac{10}{0,96} = 10,4.$$

Как известно, k_d определяется по формуле

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}.$$

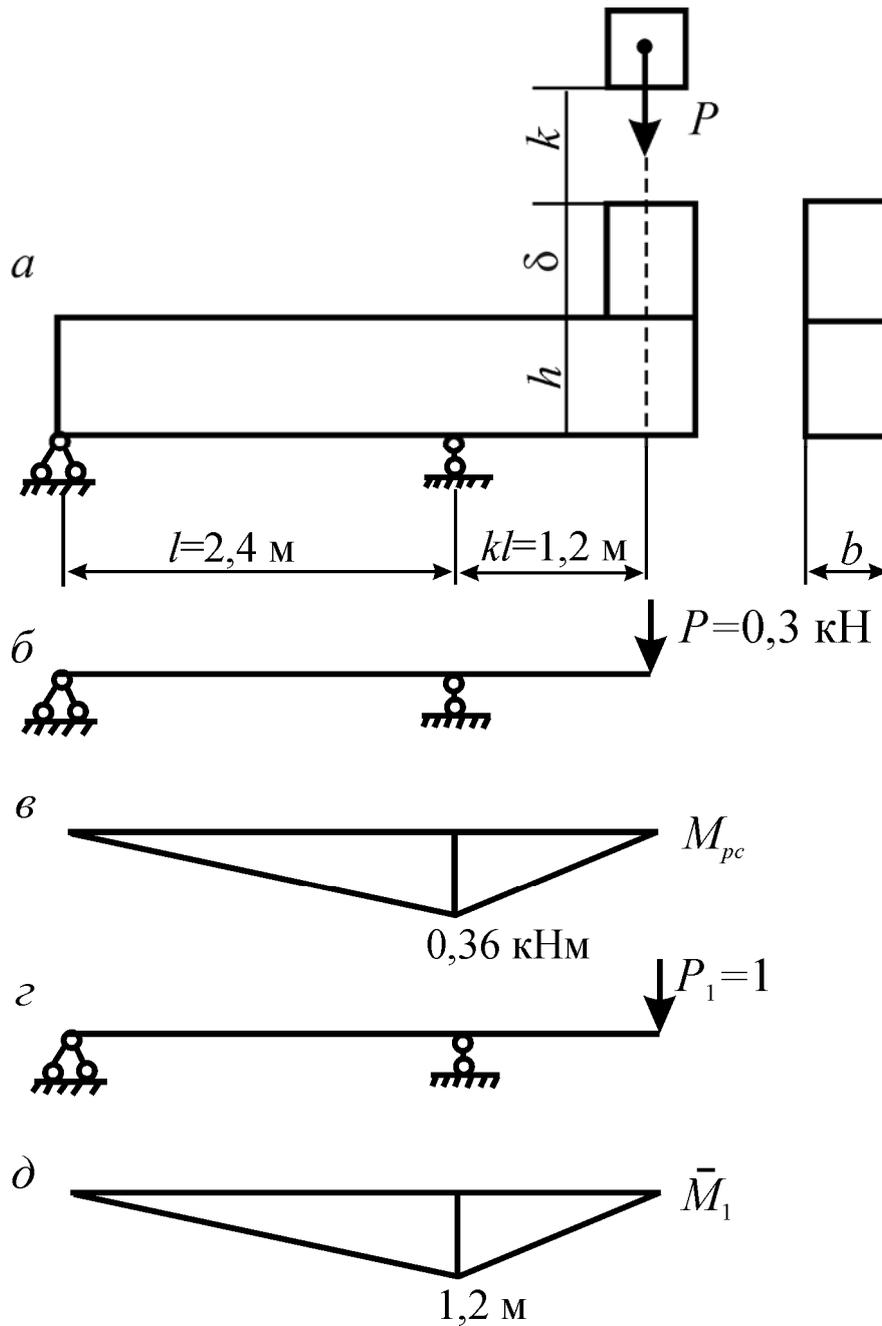


Рис. 12.1

Отсюда получаем допускаемую высоту падения груза

$$H = \frac{[(k-1)^2 - 1] \delta_c}{2}.$$

Для определения допустимого значения H необходимо знать статическое перемещение δ_c от действия груза P в точке его приложения. При определении δ_c по Верещагину строим в дополнение к имеющейся грузовой эпюре M_{pc} единичную эпюру \bar{M}_1 от действия $P_1 = 1$, приложенной вер-

тикально в точке удара (см. рис. 12.1, *з* и 12.1, *д*). Находим δ_c перемножением эпюр M_{pc} и \bar{M}_1 .

$$EJ\delta_c = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 0,36 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 + \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 0,36 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 = 0,5184 \text{ кНм}^3;$$

$$\delta_c = \frac{0,5184 \text{ кНм}^3}{EJ} = \frac{0,5184 \cdot 10^3}{10^4 \cdot 10^6 \cdot 2820 \cdot 10^{-8}} = 0,184 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,0184 \text{ см}.$$

Этот результат получен только за счет деформации изгиба, следовательно, он верен лишь при отсутствии резиновой подушки.

При наличии подушки необходимо еще добавить деформацию статического сжатия ее

$$\Delta l = \frac{P\delta}{E_p F_p} = \frac{P\delta}{E_p b^2} = \frac{0,3 \cdot 10^3 \cdot 15 \cdot 10^{-2}}{10 \cdot 10^6 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4}} = 0,45 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,0045 \text{ см}.$$

Суммарное статическое перемещение при наличии подушки

$$\delta_c = 0,0184 + 0,0045 = 0,0229 \text{ см}.$$

Допускаемая высота падения груза при отсутствии подушки

$$H = \frac{\left[(k_d - 1)^2 \right] \delta_c}{2} = \frac{\left[(10,4 - 1)^2 - 1 \right] \cdot 0,0184}{2} = 0,988 \text{ см}.$$

При наличии подушки получаем:

$$H = \frac{\left[(k_d - 1)^2 \right] \delta_c}{2} = \frac{\left[(10,4 - 1)^2 - 1 \right] \cdot 0,0229}{2} = 1,23 \text{ см}.$$

По результатам вычислений видно, что при наличии резиновой подушки допускаемая высота падения груза несколько больше, чем при ее отсутствии (подушка смягчает удар).

13. РАСЧЕТ БАЛОК НА «ОТСТРОЙКУ» ОТ РЕЗОНАНСА С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Рассмотрим следующий пример.

На двух одинаковых деревянных балках прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой $h = 1,5b$ укреплен двигатель весом Q , делающий n об/мин (рис. 13.1, *a*). Модуль упругости древесины $E = 10^4$ МПа. Центробежная сила инерции, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся частей двигателя, равна H . Собственный вес балок и силы сопротивления можно не учитывать.

Требуется:

1) подобрать сечение балок так, чтобы частота собственных колебаний двигателя на балках была на 30 % больше частоты изменения возмущающей силы;

2) определить наибольшее нормальное напряжение в балках выбранного сечения.

Принимаем следующие исходные данные:

$$Q = 1,0 \text{ кН}; \quad H = 0,5 \text{ кН}; \quad l = 1,5 \text{ м}; \quad k = 0,4; \quad n = 1200 \text{ мин}^{-1}.$$

Круговая частота изменения возмущающей силы

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 1200}{30} = 125,6 \text{ с}^{-1}.$$

Круговая частота собственных колебаний двигателя на балках (рис. 13.1, *б*) определяется по формуле

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\delta_{11} m}} = \sqrt{\frac{g}{Q \delta_{11}}},$$

где g – ускорение земного тяготения;

δ_{11} – единичное перемещение в направлении колебаний в точке расположения двигателя.

Прикладываем в этой точке единичную силу P_1 (рис. 13.1, *в*) и строим единичную эпюру \bar{M}_1 (рис. 13.1, *г*).

Единичное перемещение δ_{11} определяем по Верещагину, умножая эпюру \bar{M}_1 саму на себя

$$\delta_{11} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 0,36 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,36}{EJ} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot 0,36 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,36}{EJ} = \frac{0,0646 \text{ м}^3}{EJ}.$$

По условию задачи $\varphi = 1,3$ $\omega = 1,3 \cdot 125,6 = 163,2 \text{ c}^{-1}$.

$$\text{С другой стороны } \varphi = \sqrt{\frac{g}{Q\delta_{11}}},$$

откуда получаем

$$\delta_{11} = \frac{g}{Q\varphi^2} = \frac{9,81}{1 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 163,2} = 3,71 \cdot 10^{-7} \frac{\text{М}}{\text{Н}}.$$

Приравнивая правые части последних двух выражений для определения δ_{11} , получаем

$$\frac{0,0646 \text{ м}^3}{EJ} = 3,71 \cdot 10^{-7} \frac{\text{М}}{\text{Н}},$$

откуда имеем момент инерции сечения балок

$$J = \frac{0,0646}{E \cdot 3,71 \cdot 10^{-7}} = \frac{0,0646}{10^4 \cdot 10^6 \cdot 3,71 \cdot 10^{-7}} = 1760 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Учитывая, что

$$J = 2 \cdot \frac{bh^3}{12} = \frac{bh^3}{6} = \frac{h^4}{1,5 \cdot 6} = \frac{h^4}{9},$$

получаем размеры сечения b и h

$$h = \sqrt[4]{9J} = \sqrt[4]{9 \cdot 1760 \cdot 10^{-8}} = 11,2 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 11,2 \text{ см};$$

$$b = \frac{h}{1,5} = \frac{11,2}{1,5} = 7,48 \text{ см}.$$

Сечение обеих балок имеет суммарный момент сопротивления изгибу

$$W = 2 \frac{bh^2}{6} = \frac{bh^2}{3} = \frac{7,48 \cdot 11,2^2}{3} = 314 \text{ см}^3.$$

Коэффициент динамичности k_d (коэффициент нарастания колебаний) при отсутствии сил сопротивления определяем по формуле

$$k_d = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\varphi^2}} = \frac{1}{1 - \frac{125,6^2}{163,2^2}} = 1,645.$$

Расчетный изгибающий момент от веса двигателя

$$M_Q = \bar{M}_1 \cdot Q = 0,36 \text{ м} \cdot 1,0 \text{ кН} = 0,36 \text{ кНм}.$$

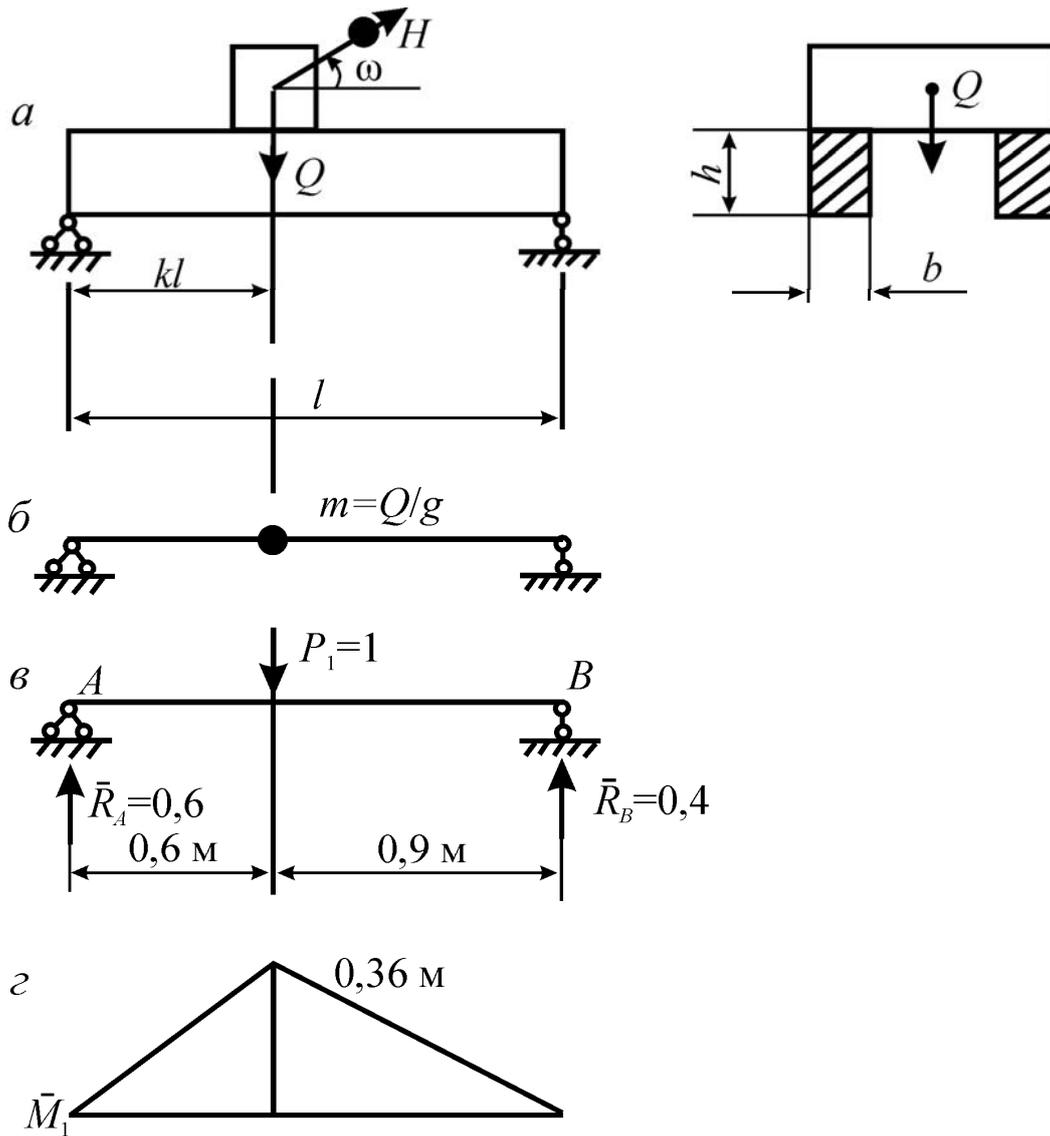


Рис. 13.1

Напряжение изгиба от веса двигателя

$$\sigma_Q = \frac{M_Q}{W} = \frac{0,36 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{314 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 1,15 \text{ МПа}.$$

Напряжение от статически приложенной силы H

$$\sigma_H = \frac{H \cdot \bar{M}_1}{W} = \frac{0,5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 0,36 \text{ м}}{314 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 0,575 \text{ МПа}.$$

Определяем наибольшее нормальное напряжение, возникающее в процессе вынужденных колебаний

$$\sigma_{\max} = \sigma_Q + \sigma_H \cdot k_d = 1,15 + 0,575 \cdot 1,645 = 2,095 \text{ МПа}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
I. Расчет на растяжение, сжатие.....	4
2. Статически неопределимые задачи при растяжении и сжатии.....	8
3. Определение главных центральных моментов инерции сечения балки.....	13
4. Кручение бруса круглого сечения.....	16
5. Расчет балок на прямой изгиб.....	21
6. Косой изгиб.....	26
7. Изгиб с кручением бруса круглого поперечного сечения.....	31
8. Внецентренное сжатие.....	36
9. Подбор сечения сжатого стержня с учетом коэффициента устойчивости.....	40
10. Определение перемещений балок и статически определимых рам по Верещагину.....	44
11. Расчет статически неопределимой рамы методом сил.....	49
12. Расчет балок на действие ударной нагрузки.....	58
13. Расчет балок на «отстройку» от резонанса с определением динамических напряжений.....	61