# Математические модели систем управления. передаточная матрица и уравнения состояния

**Задание.** Дана схема линейной электрической цепи и параметры ее элементов (Таблица 1.1). Требуется найти передаточную функцию с помощью операторной схемы замещения при нулевых начальных условиях и по ней записать ДУ, связывающее входное *u*1 и выходное *u*2 напряжения. Создать в MatLab модели TF и ZPK и построить полюсно-нулевую диаграмму. Создать в MatLab каноническую SS модель и по ней вручную определить ПФ цепи (см. пример выполнения задания).

*Таблица 1.1.* Таблица параметров

|  |
| --- |
| Параметры |
|
| R1, Ом | 14 |
| R2, Ом | 18 |
| R3, Ом | 15 |
| Rн, Ом | 10 |
| L, Гн | 0,15 |
| C, мкФ | 25 |



*Рис. 1.4.* Электрическая схема для выполнения домашнего задания

**Пример выполнения задания.**

Задана электрическая схема (Рис. 1.7) и параметры элементов. Требуется найти передаточную функцию и по ней записать ДУ. Затем получить в MatLab модальную форму канонической модели и по ней расченым путем ПФ. Входной величиной является напряжение на входе схемы, выходной – напряжение на сопротивлении.

Исходные данные:   .



*Рис. 1.7.* Схема к примеру выполнения домашнего задания

**Решение**. Составим операторную схему замещения (Рис. 1.8) и для получения ПФ воспользуемся методом контурных токов.



*Рис. 1.8.* Операторная схема замещения к примеру

Контурные сопротивления операторной схемы – собственные и общие и контурные ЭДС:

; ;

; ; .

Главный определитель контурных уравнений:



.

Второй вспомогательный определитель (первый не понадобится):

.

Второй контурный ток и напряжение на выходе:

;



ПФ цепи:

.

Теперь по ПФ запишем операторное уравнение

,

а затем восстановим ДУ:



или

.

Используя ПФ, составим с помощью MatLab каноническую модель в пространстве состояний в модальной форме:

%Исходные данные

R=40;Rn=100;C=1e-4;

%Передаточная функция

W=tf([1 0 0],[1 450 25000])

%Создание SS модели

Wcan=canon(W,'modal')

%Создание ZPK модели

Wz=zpk(Wcan)

**В командном окне**

Transfer function:

s^2

-------------------

s^2 + 450 s + 25000

a = x1 x2

x1 -385.1 0

x2 0 -64.92

b = u1

x1 -38.62

x2 -7.234

c = x1 x2

y1 11.99 -1.82

d = u1

y1 1

Zero/pole/gain:

(s^2 + 1.41e-012)

-------------------

(s+385.1) (s+64.92)

Выпишем матрицы уравнений состояния:



Сформируем ПФ.

Составим матрицу (*p***Е**–**A)**:

.

Найдем алгебраические дополнения полученной матрицы:

; ; ; .

Союзная матрица::

.

Перемножим матрицы, стоящие в числителе формулы для ПФ:



.

Определитель матрицы (*p***Е**–**A**):

.

Передаточная функция цепи:

**W**(*p*)=.

**Примечание**.

Имеются две особые формы записи моделей в пространстве состояний, которые называются *каноническими*. Наличие TF, ZPK или SS моделей позволяет в MATLAB получить эти два типа канонической модели в пространстве состояний с помощью команды **canon** в следующей записи:

csys = canon(sys,'type')

Команда **canon**поддерживает два типа канонических форм: Modal Form и Companion Form.

В *модальной форме* ('modal') действительные собственные числа матрицы **A** (корни характеристического уравнения) появляются на главной диагонали матрицы коэффициентов, а в случае комплексных собственных чисел матрицы действительные части располагаются на главной диагонали, а мнимые – справа и слева от них.

Модальная форма для ПФ рассматриваемого примера приведена выше. В канонической форме 'companion' коэффициенты приведенного характеристического полинома, взятые с обратным знаком, появляются в крайнем справа столбце матрицы, а на диагонали, которая располагается под главной, стоят единицы. Для системы с характеристическим полиномом



соответствующая матрица имеет вид:

.

Составим и эту модель.

%Исходные данные

R=40;Rn=100;C=1e-4;

%Передаточная функция

W=tf([1 0 0],[1 450 25000])

Hcan=canon(W,'companion')

В командном окне

a = x1 x2

x1 0 -2.5e+004

x2 1 -450

b = u1

x1 1

x2 0

c = x1 x2

y1 -450 1.775e+005

d = u1

y1 1

Из этой модели, как и модальной, можно получить передаточную функцию (вручную или в MatLab).

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2. Расчет переходных и частотных характеристик простейшей замкнутой системы регулирования**

большинство систем автоматического регулирования являются замкнутыми системами, т.е. системами, использующими принцип управления с обратной связью (ОС).

*В системе с ОС производится непрерывное измерение выходной (регулируемой) величины. Управляющее воздействие на объект регулирования формируется путем вычисления и математической обработки разности между заданным и фактическим (измеренным) значениями регулируемой величины.*

Устройство для измерения физической величины называется *измерительным преобразователем (ИП)*. Например, в робототехнических системах применяются ИП положения (потенциометры, поворотные шифраторы), на тепловых станциях и в промышленности – ИП давления, уровня, температуры и т.д.

Устройство, непосредственно оказывающее воздействие на объект, называется *исполнительным механизмом (ИМ)*. В робототехнических системах это электро-, пневмо- и гидроприводы кинематических пар, на тепловых станциях и в промышленности – нагревательные элементы, регулирующие клапаны, заслонки и задвижки с их приводами, другие механизмы.

И, наконец, устройства, производящие математическую обработку входных сигналов (в том числе сигнала ОС) и формирующие выходные сигналы (в том числе сигналы управления ИМ) называются *управляющими устройствами* *(УУ)* . В частном случае, когда УУ выполняет исключительно функции регулирования, их называют *регуляторами*. В настоящее время большинство УУ строится на базе микропроцессорной техники и обрабатывают сигналы в цифровом виде.

Для анализа систем управления используются их временные и частотные характеристики. Эти характеристики получаются непосредственно по передаточной функции замкнутой системы:

.

где *Wпр(p)* – передаточная функция прямого канала, *Wраз(p)* - передаточная функция разомкнутой системы (под разомкнутой системой понимается последовательное соединение элементов прямого канала и элементов ОС).

В большинстве случаев при анализе и синтезе систем их описание приводится к структуре с единичной ОС, тогда

.

1. **Временные характеристики систем**

Рассмотрим ряд примеров, в которых определяются переходная или импульсная характеристики.

Пример 1. Определить переходную характеристику системы, структурная схема которой представлена на рис. 9.1:



*Рис. 1.* Структурная схема системы

Передаточная функция системы

 (1)

Изображение переходной характеристики

 (2)

Представим *h*(*p*) в виде суммы

 (3)

Определим A1, A2, A3 и А4 из условия:

 (4)

Получим:

 (5)

Решая эти уравнения совместно, получим значения коэффициентов:

*A*1 = 1, *A*2 = −0.1318, *A*3 = −0.8682, *А*4 = −0.0754.

Подставим *A*3 и *A*4 в последнее слагаемое (9.3) и представим его в виде

 (6)

Из (9,6) найдем:

*С*2 = −0,8682,

.

Окончательно запишем:

 (7)

Оригинал *h*(p):

 (8)

Найдем оригинал также с помощью теоремы разложения.

Если в составе знаменателя есть множитель *p*, т.е. знаменатель имеет один нулевой корень, то изображение можно записать в виде:

,

где в составе *D*(*p*) уже нет множителя *p*. Предполагая, что уравнение *D*(*p*)=0 имеет *n* различных и не равных нулю корней *pk* (*k* = 1,2, …, *n*), получим одну из форм записи теоремы разложения:

.

Здесь – производная знаменателя по *p*, в выражение которой подставлено значение *k*-го корня.

Применим теорему разложения к изображению переходной характеристики



где и ,

1) Определяем корни полинома *D(p)*:

D=[5 1.5 0.101 0.01 ];

R=roots(D)

p1=R(1);p2=R(2);p3=R(3);

p1 = -0.2513

p2 = -0.0244 + 0.0858i

p3 = -0.0244 - 0.0858i

Итак, полином *D(p)* имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня:

; ;

.

2) Находим производную полиномапо *p*:

.

3). Подставляем корни в числитель изображения и производную полинома и найдем *N*(0) и *D*(0):



;

;









4) Находим оригинал:

















С помощью MatLab построим переходную характеристику и определим перерегулирование (overshoot) и время установления колебаний (Settling Time):

s=tf('s')

H=(0.001\*s+0.01)/(5\*s^3+1.5\*s^2+0.101\*s+0.01)

step(H)

Первый максимум *hm* = 1.38 наступает при t = 40.4 с, перерегулирование составляет σ = 38.3%, время установления колебаний *tу* = 159 с.



Рис. *2*. Переходная характеристика системы

Пример 9.2. Определить импульсную характеристику СУ (рис. 3)



*Рис. 3.* Структурная схема замкнутой САУ

Передаточные функции блоков структурной схемы:

; ; .

ПФ разомкнутой систем:

.

ПФ по заданию замкнутой системы:



Для получения ИХ нужно найти оригинал ПХ. Найдем корни знаменателя:

P=[1 1020 20000 50000];

R=roots(P);

p1=R(1),p2=R(2),p3=R(3)

p1 = -1.0001e+003

p2 = -17.0096

p3 = -2.9394

ПФ замкнутой системы запишем в виде



Для получения первого коэффициента умножим обе части выражения на полином (*p*+1000) и подставим в полученное выражение значение первого корня. Тогда в правой части останется только *A1*, а в левой – этот полином сократится. В результате получим:



Аналогично найдем остальные коэффициенты:





Следовательно:



Проверка правильности разложения:

P=[1 1020 20000 50000];

N=50000;

[r,p,k]=residue(N,P)

a = 0.0510

-3.6149

3.5639

p = 1.0e+003 \*

-1.0001

-0.0170

-0.0029

k = []

Запишем оригинал, т.е. импульсную характеристику:



Построим график ИХ в Matlab:

N=50000;P=[1 1020 20000 50000];

T=tf(N,P)

impulse(T,1.2)grid



*Рис.4.* Импульсная характеристика замкнутой САУ

1. **Частотные характеристики**

Рассмотрим пример, в котором определяются характеристики в частотной области.

Пример 9.3. Построить ВЧХ, МЧХ и годограф КЧХ системы из примера 9.1.

КЧХ (АФЧХ) системы:

 (9)

Вещественная частотная характеристика:

 (10)

Мнимая частотная характеристика:

 (11)

Задаваясь частотами в диапазоне от 0 до 0,5 рад/сек, рассчитаем *P*(ω) и *Q*(ω) и построим АФЧХ как зависимость *Q*(ω) от *P*(ω) (рис.3)



*Рис. 3.* АФЧХ системы

АЧХ и ФЧХ системы рассчитаем и построим по известным уравнениям

, (12)

 (13)

используя ранее полученные значения P(ω) и Q(ω) (рис. 9.4, 9.5).



*Рис.9.4.* АЧХ системы.



*Рис.5*. ФЧХ системы

При расчете ФЧХ формулу (9,13) следует применять с учетом периодичности функции *arctg*. Так, например, в нашем случае при *P(ω) < 0* и *Q(ω) < 0* АФЧХ лежит в третьем квадранте и *−90° >* ϕ(ω) *> −180°.* Однако расчет по формуле (13) дает положительное значение ϕ(ω).

Для того, чтобы не ошибиться в определении ФЧХ, следует ориентироваться на график АФЧХ, корректируя полученные по (13) значения ϕ(ω) на величину, кратную −180°.

**Задание**. Дана передаточная функция системы одного из трех видов

; .

Значения постоянных времени и номер ПФ заданы в таблице

Таблица. Данные для домашнего задания

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № Варианта | *T*1*,* с | τ2*,* с | *T*3*,* с | Номер ПФ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8 | 0,108 | 0,042 | 0,024 | *W*1(*p*) |

Получить ПФ замкнутой системы с единичной ООС и построить для нее временные и частотные характеристики (АЧХ, ФЧХ и годограф КЧХ). Переходную характеристику найти операторным методом, а импульсную – путем дифференцирования переходной характеристики.

**Практическая работа 3. Определение относительной устойчивости замкнутых систем управления**

1. **Запасы устойчивости систем управления**

Система управления должна быть не только устойчивой, но и обладать некоторым запасом устойчивости, чтобы незначительные отклонения ее параметров не перевели ее в область неустойчивой работы. В связи с этим введено понятие относительной устойчивости системы – количественной меры запаса устойчивости. Такой мерой может служить близость годографа Найквиста к точке (–1, *j*0) на комплексной плоскости. На рис. 5.1 показан годограф Найквиста САР с ПФ

 ,

комплексная частотная характеристика которой определяется выражением

.

Годограф построен для двух значений *K =* 6и *K =* 8. Передаточные функции обозначены соответственно через *H*1(*p*) и *H*2(*p*):

H1=tf(6,[1 2 4 0]),H2=tf(8,[1 2 4 0])

nyquist(H1,{0.4,5}),hold on

nyquist(H2,{0.5,5}),hold off

При *K* = *K*1 = 6 система устойчива. При увеличении *K* годограф приближается к точке (–1; *j*0) и при *K* = *Kкр*= 8 проходит через эту точку: система на границе устойчивости. При *K* > 8 годограф охватывает точку Найквиста: система неустойчива.

При *K* = 6 годограф пересекает вещественную ось в точке . Если умножить коэффициент передачи системы на , то получим его критическое значение, т.е. значение, при котором система окажется на границе устойчивости: .

Nyquist Diagram

Real Axis

Imaginary Axis

-1.4

-1.2

-1

-0.8

-0.6

-0.4

-0.2

0

-4

-3.5

-3

-2.5

-2

-1.5

-1

-0.5

0

0.5

1

System: H1

Real: -0.75

Imag: -0.00388

Frequency (rad/sec): 2

System: H1

Real: -0.955

Imag: -0.361

Frequency (rad/sec): 1.68

K=6

K=8

*Рис. 1.* Диаграммы Найквиста при различных *K*

*Первым показателем* относительной устойчивости является *запас по модулю* (*gain margin*)и определяется как величина, обратная модулю ПФ разомкнутой системы на частоте, при которой фазовый сдвиг равен –1800:

,

где *d* – расстояние (положительное *число*) от начала координат до точки пересечения годографом Найквиста вещественной оси.

Представим модуль ПФ разомкнутой системы следующим образом:

,

где  – модуль АЧХ передаточной ПФ разомкнутой системы с единичным коэффициентом.

Тогда при *K* = *K*1 ифазовом сдвиге –1800получим модуль, равный *d*:

.

При *K* = *Kкр*модуль равен 1:

.

Разделим второе уравнение на первое и получим формулу для определения критического коэффициента усиления:

 или .

Запас по модулю можно выразить в **децибелах**:

.

В нашем примере запас по модулю равен  или  дБ. Он показывает, что коэффициент усиления системы нужно увеличить в 4/3 раза (или на 2,5 дБ), чтобы она оказалась на границе устойчивости. В связи с этим можно привести следующее определение.

**Запас по модулю – это *число*, на которое нужно умножить коэффициент усиления разомкнутой системы, чтобы замкнутая система вышла на границу устойчивости.**

Запас по модулю часто также определяют как расстояние (положительное *число*) от точки Найквиста до точки пересечения годографом действительной оси:

,

где ω1 – частота, соответствующая фазовому сдвигу –1800.

*Вторым* часто используемым *показателем* относительной устойчивости является *запас по фазе* (*phase margin)*.

**Запас по фазе определяется наименьшей величиной угла, на который надо повернуть годограф Найквиста, чтобы он прошел через критическую точку (–1, *j*0).**

На рис. 2 запас по фазе обозначен как угол *Pm*. Он определяется на частоте ω2, при которой модуль ПФ разомкнутой системы равен единице:

.



*Рис. 2.* Запасы устойчивости

Функция marginвычисляет запасы устойчивости по амплитуде (усилению) и фазе, а также соответствующие им частоты по ПФ разомкнутой SISO системы. Для этого margin вызывается с выходными аргументами:

[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(sys)

Определим относительную устойчивость системы из последнего примера. Передаточная функция разомкнутой системы:

 .

W=tf(6,[1 2 4 0])

[Gm,Pm,w1,w2]=margin(W)

Gm = 1.3333

Pm = 19.0808

w1 = 2.0000

w2 = 1.6838

Запас по амплитуде составляет *Gm*=1,3333 и определяется на частоте ω1=2 рад/с. Запас по фазе *Pm* = 19,080 определяется на частоте ω2=1,68 рад/с.

На диаграмме на частоте ω2=1,68 рад/с указаны вещественная и мнимая части КЧХ. Найдем ее модуль и аргумент на указанной частоте:

W\_jw2=-0.955-0.361j

A=abs(W\_jw2)

arg=angle(W\_jw2)\*180/pi

A = 1.0210

arg = -159.2929

Действительно, модуль приблизительно равен 1, а запас по фазе составляет , т.е. почти . Небольшое отличие объясняется тем, что на диаграмме Найквиста трудно установить маркер в точке, соответствующей заданной частоте ω2.

Запасы устойчивости по амплитуде и фазе удобнее определять по диаграмме Боде, тем более, что функция bode автоматически их рассчитывает. На рис. 3 изображена диаграмма Боде для системы с передаточной функцией

 .



*Рис. 3.* Диаграмма Боде и запасы устойчивости

Для определения запасов устойчивости можно использовать функцию margin(sys), вызывая ее без левосторонних (выходных) аргументов. Она строит диаграмму Боде и показывает запасы на графике.

**Пример 1**. ПФ разомкнутой системы имеет вид:

 .

Требуется проверить замкнутую систему с единичной ООС на устойчивость, определить запасы устойчивости и построить переходную характеристику при значении коэффициента усиления разомкнутого контура *K* =10.

**Решение.** Решим задачу в MATLAB. Построим диаграммы Найквиста и Боде, а также переходную характеристику:

s=tf('s')

W=10\*(s+2)/((s+1)\*(s^2+2\*s+4))

figure(1)

nyquist(W,'k')

figure(2)

bode(W,'k'),grid

[Gm,Pm,w1,w2]=margin(W)

figure(3)

T=feedback(W,1)

step(T,'k'),grid

>>

Gm = Inf

Pm = 26.0559

w1 = Inf

w2 = 3.5354



*Рис.4.* Диаграмма Найквиста для примера

Так как разомкнутая система состоит из устойчивых звеньев, то она устойчива. Годограф Найквиста не охватывает точку (–1, *j*0), поэтому замкнутая система устойчива.

Рассмотрим диаграмму Боде. Так как ЛФЧХ не пересекает ось –1800, то система обладает бесконечно большой устойчивостью (*Gm* = Inf). Запас по фазе составляет *Pm*=26,060 при частоте ω2=3,53 рад/с.



*Рис.5.* Диаграмма Боде и запасы устойчивости

Многочисленные исследования показывают, что запас по модулю 8 дБ и более обычно является достаточным, тогда как запас менее 5 дБ явно недостаточен. Аналогично, запас по фазе 500 и более обычно является приемлемым, запас же менее 300 обычно недопустим.

**Задание**

1. Для схемы на рис. 6, по данным таблицы 1 определить по критерию Гурвица критический коэффициент передачи замкнутой системы. Найти значение коэффициента передачи, обеспечивающее запас устойчивости по модулю .

2. Построить годограф Найквиста при  и при найденном значении коэффициента передачи.

Структурная схема САУ с единичной обратной связью:



*Рис. 6.* Структурная схема замкнутой системы

Передаточные функции звеньев:

, , ,

где , , , , .

Значения коэффициентов *a*0, *a*1 и *b*0 берутся из таблицы 1.

*Таблица 1..* Таблица коэффициентов полиномов

| № варианта | *b*0 | *a*1 | *a*0 |
| --- | --- | --- | --- |
| 8 | 450 | 12 | 225 |

# Точность систем управления в установившихся режимах

## Общие сведения

Проектируемая САР должна удовлетворять заданным показателям качества. Одним из таких показателей является точность в установившихся режимах.

САР может находиться в одном из двух режимов: *стационарном* (установившемся) и *переходном*. В свою очередь, стационарные режимы подразделяются на статические (статика) и динамические. Состояние системы, в котором управляемая (выходная) величина не изменяется во времени, называется *статическим стационарным режимом*. Статический режим имеет место при постоянных во времени входных воздействиях. Связь между входами и выходами системы в статическом режиме описывается алгебраическими уравнениями. Для линейных систем эти уравнения линейны. Коэффициент пропорциональности *k*, связывающий некоторую входную и некоторую выходную величины системы в статическом режиме называется *коэффициентом передачи*. Для получения коэффициента передачи необходимо в передаточную функцию, связывающую эти величины, подставить *p* = 0. Это соответствует равенству нулю производных сигналов, т.е. их постоянству.

*Динамический стационарный режим* характеризуется непрерывным изменением управляемой величины во времени по определенному закону. При этом оценивается качество вынужденной составляющей движения.

Рассмотрим замкнутую систему регулирования с двумя входными воздействиями: задающим g(*t*) и возмущающим *f*(*t*), рис. 1.



*Рис.1.* Схема замкнутой системы управления

На рисунке обозначено: *W*р(*p*) – ПФ регулятора, *W*об(*p*) – ПФ объекта.

ПФ разомкнутой системы:

*W*(*p*) = *W*р(*p*)*W*об(*p*),

Далее будем использовать четыре передаточные функции.

1) ПФ канала задание → выходная величина:

.

2) ПФ канала возмущение → выходная величина:

.

3) ПФ канала задание → ошибка регулирования:

.

4) ПФ канала возмущение → ошибка регулирования:

.

Выходная величина и входные воздействия связаны операторным уравнением:

.

Аналогичное уравнение для ошибки регулирования:



Ошибка имеет две составляющие. Одна связана с задающим воздействием (*ошибка слежения*), другая – с возмущением:

.

## Статическая точность

Значения составляющих ошибки в установившемся режиме (при *g* = const и *f* = const) можно найти с помощью теоремы о конечном значении оригинала:

;

.

Передаточные функции  и  могут иметь нулевые полюса или не иметь их.

Системы, у которых и  не имеют нулевых полюсов, называются *статическими*. В статических системах объект и регулятор являются статическими элементами:

,

.

Уравнения статики статической системы:



.

*Точность статической системы тем выше, чем больше коэффициент передачи разомкнутого контура* .

Точность воспроизведения сигнала задания в статической системе характеризуется *коэффициентом статизма*:

.

Точность статической системы считается удовлетворительной, если коэффициент статизма составляет . Это значит, что общий коэффициент передачи разомкнутого контура должен находиться в диапазоне 10..100.

**Пример 1**. Рассмотрим систему регулирования температуры в помещении путем изменения степени открытия вентиля на линии подачи пара в радиаторы отопления. Выходной величиной объекта является температура, измеряемая в определенной точке комнаты (в градусах Цельсия). Передаточная функция объекта:



Пусть выбран регулятор пропорционального типа, т.е. , тогда передаточная функция разомкнутой системы:

.

При задании *g* = , коэффициенте передачи регулятора  и в отсутствие возмущений установившаяся ошибка составит

.

Следовательно, в комнате установится температура

.

В большинстве случаев статическая зависимость выходной величины от возмущений является нежелательной. Полного устранения статической ошибки путем увеличения коэффициента передачи добиться невозможно. Увеличивая коэффициент передачи регулятора, можно уменьшить ошибку до приемлемого значения, однако динамические характеристики системы при этом ухудшаются. Часто система с пропорциональным регулятором практически не работоспособна, поскольку при коэффициенте, обеспечивающим заданную точность, она становится недопустимо колебательной или вообще теряет устойчивость.

Имеются два пути устранения статической ошибки: введение в систему интегрирующего звена, и компенсация возмущения специальным устройством (или алгоритмическим блоком).

Системы, у которых и  имеют нулевые полюсы, называются *астатическими*. Интегрирующие звенья, которые и дают эти полюсы, могут находиться как в составе управляющего устройства (регулятора), так и в составе объекта. Рассмотрим оба случая.

1*. Астатическое управляющее устройство (регулятор).*

Передаточная функция регулятора:

.

Передаточные функции составляющих ошибки будут иметь вид:

 

Подставив в эти выражения *p* = 0, получим:

; .

Таким образом, *если астатическим является регулятор, то все возмущения, приложенные к объекту, не будут создавать статического отклонения его выходной величины. Устраняется и ошибка, вызванная задающим воздействием.*

**Пример 72**. Рассмотрим ту же систему регулирования температуры, что и в примере 1, но в качестве регулятора выберем пропорционально-интегральный регулятор или ПИ-регулятор, передаточную функцию которого можно представить в виде:

.

Структурная схема системы с ПИ-регулятором представлена на рис. 2.



*Рис. 2.* Схема системы с ПИ-регулятором к примеру 2

ПФ ошибки по возмущению имеет вид:



Передаточная функция разомкнутой системы:

.

Передаточные функции составляющих ошибки:

;

.

Подставив в эти выражения *p* = 0, получим:

, .

Таким образом, ошибка при постоянном входном воздействии и постоянном возмущении равна нулю вне зависимости от параметров системы.

2. *Астатический объект управления.*

Объект имеет передаточную функцию

.

Передаточные функции составляющих ошибки:



.

Подставив в эти выражения *p* = 0, получим:

; .

Ошибка по возмущению:

.

Таким образом, *возмущения, приложенные к входу* *астатического объекта управления, будут создавать статическое отклонение его выходной величины. Ошибка, вызванная задающим воздействием, устраняется.*

## Динамическая точность

*Динамические стационарные режимы* имеют место в системе, когда внешние воздействия изменяются по определенному установившемуся закону, а переходной процесс окончен.

Качество этих режимов принято оценивать при типовых воздействиях, в частности при гармоническом воздействии и воздействиях, изменяющихся с постоянными скоростью и ускорением (в общем случае – *с постоянной k-ой производной*).

Качество динамического стационарного режима при гармоническом воздействии определяется по частотным характеристикам системы.

При исследовании точности в установившихся динамических режимах, вызванных воздействиями, изменяющимися с постоянной k-ой производной, важными являются следующие понятия: *порядок астатизма* и *порядок воздействия*.

Количество интегрирующих звеньев, т.е. число свободных интеграторов в составе системы, называют порядком астатизма или *типом системы*. Порядок фиксированной производной называют порядком воздействия. Так, если входное воздействие изменяется по линейному закону, т.е. *g*(*t*)=*vt*, то первая производная этого воздействия постоянна (фиксирована), и воздействие имеет первый порядок. Воздействие второго порядка изменяется с постоянным ускорением *g*(*t*) = a*t*2/2, т.к. именно его вторая производная является фиксированной. Естественно, постоянное во времени воздействие имеет нулевой порядок. Таким образом, порядок воздействия – это показатель степени при *t* в формуле входного воздействия вида .

Операторное изображение входного воздействия:

.

Если *k*=0, то . Если *k*=1, то , и воздействие имеет первый порядок. И так далее.

Установившуюся ошибку по задающему воздействию, или ошибку слежения *e*g(*t*) можно найти с помощью теоремы о конечном значении оригинала:

.

Пусть *N* – порядок астатизма. В этом случае ПФ разомкнутой системы можно записать в виде:

.

Тогда для установившейся ошибки можно получить формулу:

.

Используя эту формулу, можно вычислить установившуюся ошибку для трех видов входных воздействий.

1) Реакция на ступенчатое воздействие

Изображение единичного ступенчатого воздействия , поэтому установившаяся ошибка

,

где

.

В случае если в этом выражении , коэффициент *Ks* бесконечно велик и установившаяся ошибка равна нулю. Таким образом, для системы с порядком астатизма *N* = 1 и выше установившаяся ошибка при нулевом порядке воздействия равна нулю. Для системы с порядком астатизма *N* = 0, т.е. для статической системы, установившаяся ошибка постоянна и определяется выражением:

,

где *K*раз – коэффициент передачи разомкнутой системы.

Если к системе приложено ступенчатое воздействие величиной *A*, то установившаяся ошибка равна:

.

2) Реакция на линейно изменяющееся воздействие

Изображение линейно возрастающего воздействия :

.

Установившаяся ошибка:





где

.

Для системы с порядком астатизма  и выше коэффициент *Kv* бесконечно велик и установившаяся ошибка, вызванная линейным воздействием, равна нулю. Для системы типа *N* = 1 установившаяся ошибка конечна, отлична от нуля и определяется выражением:

,

где 

Для статической системы (*N* = 0) коэффициент *Kv* равен нулю, что говорит о бесконечно большой ошибке. Фактически ошибка линейно возрастает во времени.

Если входное воздействие изменяется со скоростью *A*, то установившаяся ошибка будет равна:

.

3) Реакция на воздействие, изменяющееся с постоянным ускорением

Изображение воздействия вида :

,

Установившаяся ошибка



где

.

Для системы с порядком астатизма  и выше коэффициент *Ka* бесконечно велик и установившаяся ошибка равна нулю. Для системы с порядком астатизма *N* = 2 установившаяся ошибка конечна, отлична от нуля и определяется выражением:

,

где 

Для систем с порядками астатизма *N* = 0 и *N* = 1 ошибка неограниченно возрастает.

Полученные результаты для удобства сведем в таблице 1.

*Таблица 1.* Значения установившейся ошибки

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип системы  N | Воздействия | | | Коэффициенты ошибок |
| *t*0 | *t*1 | 0,5*t*2 |
| 1/*p* | 1/*p*2 | 1/*p*3 |
| 0 |  | ∞ | ∞ |  |
| 1 | 0 |  | ∞ |  |
| 2 | 0 | 0 |  |  |

Из таблицы следует, что чем выше порядок астатизма системы, тем большей точностью она обладает в установившемся режиме. Однако системы с порядком астатизма 2 и выше требуют специальных мер для обеспечения устойчивости и качества переходных процессов.

Более общим методом расчета установившихся значений сигнала ошибки является *метод коэффициентов ошибок*. С помощью этого метода можно определить возрастающие во времени вынужденные составляющие сигнала ошибки.

Если входной сигнал *g*(*t*) изменяется достаточно медленно, то установившаяся ошибка воспроизведения задающего воздействия может быть представлена в виде ряда



Коэффициенты ошибки  и т.д. вычисляются по передаточной функции для ошибки слежения и ее производным по *p* при *p*=0:

; ; ; . . .

Коэффициент *C*0принято называть коэффициентом статической или позиционной ошибки; коэффициент *C*1 – коэффициентом скоростной ошибки; коэффициент *C*2 – коэффициентом ошибки от ускорения.

В статических системах коэффициент *C*0отличен от нуля. В системах с астатизмом первого порядка , . В системах с астатизмом второго порядка , .

Этот метод применим и для оценки точности системы при наличии возмущения *f*(*t*).

Вычисление коэффициентов ошибки по приведенным формулам представляет собой непростую задачу, так как ПФ по ошибке слежения имеет сложное выражение. Поэтому учеными была проделана предварительная работа по нахождению первых четырех коэффициентов ошибки по *ПФ разомкнутой системы* и результаты сведены в таблицу. Приведем таблицу 2 для определения первых трех коэффициентов по ПФ разомкнутой системы.

По ПФ ошибки от возмущения *Tef* могут быть вычислены коэффициенты ошибки от возмущения:

; ; ; . . .

Эти коэффициенты позволяют определить установившееся значение ошибки от возмущения, если оно является достаточно медленно изменяющейся функцией времени:



Формулы для вычисления коэффициентов  по ПФ системы для ошибки приведены в таблице 3. Эти формулы могут быть использованы как для вычисления , , , так и для вычисления , , .

*Таблица 2.* Формулы для определения коэффициентов ошибки слежения по ПФ разомкнутой системы

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| №  п/п | Передаточная функция разомкнутой системы W | Коэффициенты ошибки | | |
| *C*0 | *C*1 | *C*2 |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  | 0 |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  | 0 |  |  |

*Таблица.3.* Формулы для определения коэффициентов ошибки по ПФ замкнутой системы для ошибки

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| №  п/п | Передаточная функция замкнутой системы для ошибки *W*ε | Коэффициенты ошибки | | |
| *C*0 | *C*1 | *C*2 |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  | 0 |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  | 0 |  |  |

**Примечание**. В первых двух строчках таблицы приведены общие формулы для коэффициентов двух типов ПФ *n*- порядка, а в третьей и четвертой – формулы для коэффициентов ПФ третьего порядка

**Пример 3**. Система управления транспортным средством на предприятии содержит регулятор, объект и датчик. Заданы ПФ элементов структурной схемы, задающее воздействие *g*(*t*) и возмущение *f*(*t*):

; ; ;

; .

Вычислить установившееся значение ошибки.

**Решение**. Передаточная функция разомкнутой системы:





Применяя функцию minreal (минимальная реализация) в Matlab, можно получить ПФ с приведенным полиномом в знаменателе:

.

Система относится к типу 1, т.е. имеет астатизм первого порядка, поэтому при входном воздействии, изменяющемся с постоянной скоростью *g*0, коэффициент ошибки по скорости имеет значение

,

а система будет обладать установившейся ошибкой по управлению

.

Далее воспользуемся для этой цели методом коэффициентов ошибки, для чего определим ПФ по ошибке слежения и найдем ее первую производную:





.

Коэффициенты ошибки:

=0; .

Установившаяся ошибка воспроизведения задающего воздействия:

,

где .

И, наконец, воспользуемся формулой поз.4 таблицы 2. Т.к. ПФ разомкнутой системы





то коэффициенты ПФ имеют значения:

; ; ; ; .

Коэффициенты ошибки:

 .

В данном случае третий коэффициент не понадобится.

Теперь найдем составляющую ошибки по возмущению, для чего составим ПФ для ошибки от возмущения (после применения minreal):



.

Далее воспользуемся формулой поз.3 таблицы 3, в которой приводится ПФ замкнутой системы для ошибки в виде:

.

Коэффициенты этой ПФ имеют значения:

; ; ; ; ; .

Первые три коэффициента ошибки:





Первая и вторая производные сигнала возмущения:

;

.

Установившееся значение ошибки от возмущения:





.

Суммарное значение установившейся ошибки:

.

## Задание

Система управления (рис. 3) содержит П-регулятор, динамическое звено c ПФ *W*(*p*) и интегратор. Задающее воздействие *g*(*t*) и возмущение *f*(*t*) изменяются по закону:

; .

Передаточная функция динамического звена задается преподавателем. *ПФ для выполнения : W(p)=10/(3p2+40p+1)*



*Рис. 3.* Схема астатической системы для домашнего задания

Требуется:

1. Определить критический коэффициент передачи системы и подобрать такое значение *K*, при котором запас устойчивости по модулю составлял бы 6,02 дБ;

2. Вычислить установившееся значение ошибки.

.