МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИЖЕВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

ФАКУЛЬТЕТ НЕПРЕРЫВНОГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические материалы
для студентов факультета непрерывного профессионального образования
экономических профилей бакалавриата

Составитель:
старший преподаватель кафедры высшей
математики
Кузнецова О.В.

Ижевск
ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА
2016

СОДЕРЖАНИЕ

ТАБЛИЦЫ ВАРИАНТОВ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра. При этом если предпоследняя цифра его учебного шифра есть число нечётное (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 1; если предпоследняя цифра учебного шифра есть число чётное (0, 2, 4, 6, 8), то номера задач даны в таблице 2.

Таблица № 1.

Номер варианта	**Номера задач для контрольных работ**		
	КР № 1	**КР № 2**	**КР № 3**
1	1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1	6.1, 7.1, 8.1, 9.1, 10.1	11.1, 12.1, 13.1, 14.1, 15.1
2	1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2	6.2, 7.2, 8.2, 9.2, 10.2	11.2, 12.2, 13.2, 14.2, 15.2
3	1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3	6.3, 7.3, 8.3, 9.3, 10.3	11.3, 12.3, 13.3, 14.3, 15.3
4	1.4, 2.4, 3.4, 4.4, 5.4	6.4, 7.4, 8.4, 9.4, 10.4	11.4, 12.4, 13.4, 14.4, 15.4
5	1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5	6.5, 7.5, 8.5, 9.5, 10.5	11.5, 12.5, 13.5, 14.5, 15.5
6	1.6, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6	6.6, 7.6, 8.6, 9.6, 10.6	11.6, 12.6, 13.6, 14.6, 15.6
7	1.7, 2.7, 3.7, 4.7, 5.7	6.7, 7.7, 8.7, 9.7, 10.7	11.7, 12.7, 13.7, 14.7, 15.7
8	1.8, 2.8, 3.8, 4.8, 5.8	6.8, 7.8, 8.8, 9.8, 10.8	11.8, 12.8, 13.8, 14.8, 15.8
9	1.9, 2.9, 3.9, 4.9, 5.9	6.9, 7.9, 8.9, 9.9, 10.9	11.9, 12.9, 13.9, 14.9, 15.9
0	1.10, 2.10, 3.10, 4.10, 5.10	6.10, 7.10, 8.10, 9.10, 10.10	11,10, 12.10, 13.10, 14.10, 15.10

Таблица № 2.

Номер варианта	**Номера задач для контрольных работ**		
	КР № 1	**КР № 2**	**КР № 3**
1	1.11, 2.11, 3.11, 4.11, 5.11	6.11, 7.11, 8.11, 9.11, 10.11	11.11, 12.11, 13.11, 14.11, 15.11
2	1.12, 2.12, 3.12, 4.12, 5.12	6.12, 7.12, 8.12, 9.12, 10.12	11.12, 12.12, 13.12, 14.12, 15.12
3	1.13, 2.13, 3.13, 4.13, 5.13	6.13, 7.13, 8.13, 9.13, 10.13	11.13, 12.13, 13.13, 14.13, 15.13
4	1.14, 2.14, 3.14, 4.14, 5.14	6.14, 7.14, 8.14, 9.14, 10.14	11.14, 12.14, 13.14, 14.14, 15.14
5	1.15, 2.15, 3.15, 4.15, 5.15	6.15, 7.15, 8.15, 9.15, 10.15	11.15, 12.15, 13.15, 14.15, 15.15
6	1.16, 2.16, 3.16, 4.16, 5.16	6.16, 7.16, 8.16, 9.16, 10.16	11.16, 12.16, 13.16, 14.16, 15.16
7	1.17, 2.17, 3.17, 4.17, 5.17	6.17, 7.17, 8.17, 9.17, 10.17	11.17, 12.17, 13.17, 14.17, 15.17
8	1.18, 2.18, 3.18, 4.18, 5.18	6.18, 7.18, 8.18, 9.18, 10.18	11.18, 12.18, 13.18, 14.18, 15.18
9	1.19, 2.19, 3.19, 4.19, 5.19	6.19, 7.19, 8.19, 9.19, 10.19	11.19, 12.19, 13.19, 14.19, 15.19
0	1.20, 2.20, 3.20, 4.20, 5.20	6.20, 7.20, 8.20, 9.20, 10.20	11.20, 12.20, 13.20, 14.20, 15.20

Контрольная работа №1

1. Даны вершины треугольника ABC. Найти:

1) длину стороны AB;
2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;
3) угол A;
4) уравнение высоты CD и её длину;
5) уравнение окружности, для которой высота CD является диаметром.

1.1. A(–5; 0), B(7; 9), C(5; –5).

1.2. A(–7; 2), B(5; 11), C(3; –3).

1.3. A(–5; –3), B(7; 6), C(5; –8).

1.4. A(–6; –2), B(6; 7), C(4; –7).

1.5. A(–8; –4), B(4; 5), C(2; –9).

1.6. A(0; –1), B(12; 8), C(10; –6).

1.7. A(–6; 1), B(6; 10), C(4; –4).

1.8. A(–2; –4), B(10; 5), C(8; –9).

1.9. A(–3; 0), B(9; 9), C(7; –5).

1.10. A(–9; –2), B(3; 7), C(1; –7).

1.11. A(–5; 2), B(7; –7), C(5; 7).

1.12. A(–7; 5), B(5; –4), C(3; 10).

1.13. A(–7; 1), (5; –8), C(3; 6).

1.14. A(0; 3), B (12; –6), C(10; 8).

1.15. A (–8; 4), B (4; –5), C (2; 9).

1.16. A (–2; 2), B (10; –7), C (8; 7).

1.17. A (1; 2), B (13; –7), C (11; 7).

1.18. A (–4; 1), B (8; –8), C (6; 6).

1.19. A (–7; –1), B (5; –10), C (3; 4).

1.20. A (–3; 3), B (9; –6), C (7; 8).

2. Определить тип заданной кривой и построить её (для окружности указать центр, для эллипса и гиперболы – фокусы и эксцентриситет, для параболы – фокус и директрису).

2.1. $4x^2+25y^2=100$.	**2.2.** $x^2+y^2–4x+2y–4 = 0$.
2.3. $y^2=2x+2$.	**2.4.** $9x^2–16y^2=144$.
2.5. $x^2= –2y+2$.	**2.6.** $16x^2+25y^2=400$.
2.7. $x^2+y^2+2x–4y–4=0$.	**2.8.** $y^2= –4x+4$.
2.9. $16x^2–9y^2=144$.	**2.10.** $x^2=4y+4$.
2.11. $x^2+4y^2=64$.	**2.12.** $x^2+y^2+4x–6y+9 = 0$.
2.13. $y^2=2x+6$.	**2.14.** $4x^2–y^2=64$.
2.15. $x^2= –4y+12$.	**2.16.** $x^2+9y^2=36$.
2.17. $x^2+y^2–6x+4y+4=0$.	**2.18.** $y^2=6x–12$.
2.19. $16x^2–25y^2=400$.	**2.20.** $x^2= –2y+6$.

3. Даны координаты точек A, B, C. Требуется:

1) записать векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ в системе орт и найти их модули;

2) найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

3) составить уравнение плоскости, проходящей через точку C перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$.

3.1. A(7; –4; 1), B(12; –3; 1), C(10; 1; 5).
3.2. A(0; –3; 3), B(5; –2; 3), C(3; 2; 7).
3.3. A(–2; –1; –2), B(3; 0; –2), C(1; 4; 2).
3.4. A(–6; 0; 0), B(–1; 1; 0), C(–3; 5; 4).
3.5. A(–2; –3; –8), B(3; –2; –8), C(1; 2; –4).
3.6. A(1; 0; –1), B(6; 1; –1), C(4; 5; 3).
3.7. A(–1; 4; 1), B(4; 5; 1), C(2; 9; 5).
3.8. A(3; –6; –3), B(8; –5; –3), C(6; –1; 1).
3.9. A(1; 0; 0), B(6; 1; 0), C(4; 5; 4).
3.10. A(2; –8; –2), B(7; –7; –2), C(5; –3; 2).
3.11. A(2; –3; 1), B(10; –5; 3), C(11; -1; 4).
3.12. A(–6; 1; 5), B(2; 3; –5), C(1; 0; 4).
3.13. A(1; –2; –3), B(6; 8; –1), C(5; 2; 1).
3.14. A(–5; 1; 3), B(–2; 0; 5), C(–4; 1; 3).
3.15. A(–3; –1; –6), B(5; –4; –2), C(0; 1; –3).
3.16. A(7; 6; –2), B(4; 3; –2), C(2; 9; 1).
3.17. A(–3; 5; 2), B(9; 2; 3), C(1; 0; 4).
3.18. A(2; –2; –1), B(7; –6; –1), C(5; –2; 6).
3.19. A(5; 2; 0), B(3; 0; 1), C(7; 2; 3).
3.20. A(5; –2; –6), B(4; –6; –1), C(5; –2; 6).

4. Решить систему уравнений методом Крамера (с помощью определителей).

4.1. $\begin{cases} x+y-3z=0, \\ 3x+2y+2z=-1, \\ x-y+5z=-2. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} 2x+3y+z=1, \\ x+y-4z=0, \\ 4x+5y-3z=1. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} 3x+2y-z=-5, \\ x+3y+2z=2, \\ 5x-2y+4z=-7. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} x-4y+2z=-5, \\ 4x+y-3z=-3, \\ 2x+3y+4z=1. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} 2x+4y-3z=2, \\ x+y+2z=0, \\ 3x-2y+z=-5. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} x+2y-3z=1, \\ 2x-3y-z=-7, \\ 4x+y-2z=0. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} 3x-y+4z=2, \\ x+2y+3z=7, \\ 5x+3y+2z=8. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} 3x-3y+2z=-4, \\ 2x+y-3z=-1, \\ x-2y+5z=1. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} 4x-y+3z=1, \\ 3x+2y+4z=8, \\ 2x-2y+4z=0. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ x-2y-5z=-9, \\ 4x+3y-2z=4. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} 2x+4y-3z=-10, \\ -x+5y-2z=5, \\ 3x-2y+4z=3. \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} -x+y+z=4, \\ -2x-y+3z=7, \\ -2y-5z=-12. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 2x-5y+5z=4, \\ 3x-9y+8z=5, \\ 2x-y+z=-4. \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} -x+y-z=0, \\ -2x-3z=-8, \\ 3x-4y+3z=-1. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} -x+2z=5, \\ 2x+2y+5z=10, \\ 3x-2y+2z=-1. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} x+4y-z=1, \\ 2x-3y+5z=8, \\ -3x+5y-6z=-5. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} x+y+3z=6, \\ -x+3z=7, \\ 2x-y+z=-1. \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} 2x-y-6z=-15, \\ 3x-y+z=-2, \\ -x+3z=7. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 2x-y+3z=7, \\ x+3y-2z=0, \\ 2y-z=2. \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} 3x-2y-4z=3, \\ x+2y+5z=0, \\ 6x-3y-z=1. \end{cases}$

5. Найти указанные пределы.

5.1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2+x-2}$.

5.2. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{(x-7)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+7}{3x^2+2x+5}$.

5.3. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{5x^2+4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-x^2}{4x^2-5x+2}$.

5.4. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3}{4x^3+5x}$.

5.5. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+8}{4x+3}$.

5.6. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+2x}{3x+1}$.

5.7. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x+6}{2x^3+4x}$.

5.8. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+5x^2}{x^2+6x+8}$.

5.9. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+4}{2x^2+x+3}$.

5.10. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+1}{4x+2x^3}$.

5.11. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x^2+3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x+5}{x^2+3x+6}$.

5.12. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-4}{x+\sqrt[3]{x}}$.

5.13. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-6x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+x^2+5}{3x+1}$.

5.14. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{2x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+4x^2}{6x^2+7x+2}$.

5.15. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+6x-8}{x^2-16}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+2}{6x^3+7x}$.

5.16. а) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{5x^2-51x+10}{2x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+2x+3x^2}{x^2+4x+2}$.

5.17. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{6x+8}$.

5.18. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+3x+2x^2}{x^3+4x+3}$.

5.19. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x^2-7x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2-5x+2}$.

5.20. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8+2x-x^2}{x^2-16}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x^3+2x^2-1}$.

Контрольная работа № 2

6. Провести полное исследование заданной функции и построить её график.

6.1. $y=\frac{x^3}{3}+x^2-3x+3.$

6.2. $y=\frac{4}{27}x^3+\frac{7}{6}x^2-2x-10.$

6.3. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+8.$

6.4. $y=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{8}x^2+3x-6.$

6.5. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{7}{4}x^2-2x-11.$

6.6. $y=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x-2.$

6.7. $y=\frac{x^3}{4}-\frac{5}{4}x^2-2x+7.$

6.8. $y=\frac{x^3}{5}-\frac{9}{5}x^2+3x+3.$

6.9. $y=\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-3x-8.$

6.10. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2-4x+10.$

6.11. $y=-x^3-\frac{5}{2}x^2+2x+4.$

6.12. $y=\frac{x^3}{9}-\frac{2}{3}x^2+x+5.$

6.13. $y=-\frac{5}{6}x^3-\frac{13}{4}x^2+3x+10.$

6.14. $y=-\frac{x^3}{6}+\frac{3}{2}x^2-4x+3.$

6.15. $y=-x^3-\frac{x^2}{2}+10x+4.$

6.16. $y=-\frac{x^3}{12}+x^2-\frac{15}{4}x+2.$

6.17. $y=-\frac{2}{9}x^3+\frac{5}{6}x^2+x+1.$

6.18. $y=\frac{x^3}{12}-\frac{3}{4}x^2+2x+4.$

6.19. $y=-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{4}x^2+6x-14.$

6.20. $y=-\frac{x^3}{6}+\frac{5}{2}x^2-12x+10.$

7. Исследовать на экстремум функцию $z=f(x,y)$.

7.1. $z=3x+3y-x^2-xy-y^2+6$.

7.2. $z=7x+8y-x^2-xy-y^2-10$.

7.3. $z=8x-4y+x^2-xy+y^2+15$.

7.4. $z=x^2+y^2-6x-8y+12$.

7.5. $z=2x-8y-x^2-y^2-9$.

7.6. $z=x^2+xy-6x-2y+2$.

7.7. $z=x^2+4xy-y^2-5$.

7.8. $z=x^2+y^2-10x-2y+15$.

7.9. $z=x^2-2xy+4x-4y+7$.

7.10. $z=x^2+2y^2+4xy+2x+4y+2$.

7.11. $z=2x+4y-x^2+xy+1.$

7.12. $z=8x+7y-xy+y^2-12.$

7.13. $z=3x-5y+x^2-xy+y^2+10.$

7.14. $z=2x^2+y^2-4x+7y+15.$

7.15. $z=5x+6y-x^2-y^2-7.$

7.16. $z=x^2+2xy-4x-2y+2.$

7.17. $z=x^2+3xy-2y^2+4.$

7.18. $z=x^2+y^2-9x+3y+8.$

7.19. $z=x^2-3xy+5x-2y+3.$

7.20. $z=x^2+2y^2+xy-2x-y+1.$

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертёж.

8.1. $y = x^3; \quad y = \sqrt{x}$.

8.2. $y = \dfrac{5}{x}; \quad y = 6 - x$.

8.3. $y = \dfrac{1}{2}x^2; \quad y = 4 - x$.

8.4. $y = x^2 + 2; \quad y = 4 - x^2$.

8.5. $y = -x^2 + 1; \quad y = x - 1$.

8.6. $y = x^2 - 4x + 4; \quad y = x$.

8.7. $y = \dfrac{1}{4}x^2; \quad y^2 = 4x$.

8.8. $y = \dfrac{6}{x}; \quad y = 7 - x$.

8.9. $y = 3x^2 + 1; \quad y = 3x + 7$.

8.10. $y = 2x - x^2; \quad y = -x$.

8.11. $y = x^2 - 2x - 1, \ y = x - 1.$

8.12. $y = \sqrt{x-2}, \ y = \dfrac{(x-2)^2}{8}.$

8.13. $y = 3^x, \ y = 4 - x^2, \ x = 0.$

8.14. $y = \dfrac{1}{3}x^2 + 2x + 3, \ y - x = 3.$

8.15. $y = \dfrac{4}{x}, \ x = 4, \ y = \dfrac{x^2}{2}.$

8.16. $y = \dfrac{(x-6)^2}{4}, \ y = x^2, \ x = 0.$

8.17. $y = \dfrac{(x-5)^2}{3}, \ 2x - y - 10 = 0.$

8.18. $y = \dfrac{3}{x}, \ y = 3x^2, \ x = 2.$

8.19. $y = x^2 + 2x, \ x - y + 2 = 0.$

8.20. $y = \sqrt{1-x}, \ y = (x-1)^2.$

9. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

9.1. $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = -1.$

9.2. $y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3.$

9.3. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$

9.4. $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

9.5. $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

9.6. $y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$

9.7. $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$

9.8. $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$

9.9. $y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

9.10. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2.$

9.11. $y'' + 36y = 0, \ y(0) = 0, y'(0) = 1.$

9.12. $y'' + 25y = 0, \ y(0) = 1, y'(0) = 1.$

9.13. $y'' + 8y' + 15y = 0, \ y(0) = 2, y'(0) = 0.$

9.14. $y'' - 4y' + 13y = 0,\ y(0) = -1, y'(0) = 0.$

9.15. $y'' - 16y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 0.$

9.16. $y'' - 8y' + 12y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = -1.$

9.17. $y'' - 6y' + 10y = 0,\ y(0) = -1, y'(0) = 0.$

9.18. $y'' + 64y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1.$

9.19. $y'' + 10y' + 24y = 0,\ y(0) = -1, y'(0) = 1.$

9.20. $y'' + 7y' = 0,\ y(0) = 3, y'(0) = 0.$

10. Дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n x^n}{b^n \sqrt[3]{n+1}}$. При заданных значениях a и b написать первые три члена ряда, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

10.1. $a = 2, \quad b = 3.$

10.2. $a = 3, \quad b = 5.$

10.3. $a = 4, \quad b = 7.$

10.4. $a = 5, \quad b = 9.$

10.5. $a = 7, \quad b = 6.$

10.6. $a = 2, \quad b = 5.$

10.7. $a = 3, \quad b = 2.$

10.8. $a = 4, \quad b = 3.$

10.9. $a = 5, \quad b = 2.$

10.10. $a = 6, \quad b = 4.$

10.11. $a = 3, \quad b = 7.$

10.12. $a = 4, \quad b = 5.$

10.13. $a = 8, \quad b = 3.$

10.14. $a = 7, \quad b = 4.$

10.15. $a = 5, \quad b = 7.$

10.16. $a = 2, \quad b = 6.$

10.17. $a = 3, \quad b = 4.$

10.18. $a = 7, \quad b = 5.$

10.19. $a = 5, \quad b = 8.$

10.20. $a = 2, \quad b = 4.$

Контрольная работа № 3

11.1. В читальном зале имеется 6 учебников по теории вероятностей, из которых 3 в мягком переплете. Библиотекарь взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в мягком переплете.

11.2. Студент знает ответы на 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что он знает ответы на предложенные ему экзаменатором три вопроса.

11.3. Для некоторой местности в июле шесть пасмурных дней. Найти вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.

11.4. Из 200 рабочих норму выработки не выполняют 15 человек. Найти вероятность того, что два случайно выбранных рабочих не выполняют норму.

11.5. В ящике лежат 20 электрических лампочек, из которых 2 нестандартные. Найти вероятность того, что взятые одна за другой две лампочки окажутся стандартными.

11.6. В урне 8 белых и 7 чёрных шаров. Наудачу взяли два шара. Какова вероятность, что они оба чёрные?

11.7. Из колоды в 36 карт извлекаются наудачу 4 карты. Какова вероятность того, что все карты бубновой масти?

11.8. Одновременно подбрасываются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 10?

11.9. Студент знает первый вопрос на 95 %, второй – на 50 %, третий – лишь на 20 %. Какова вероятность получения зачёта студентом, если для этого достаточно ответить хотя бы на один вопрос?

11.10. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,6, вторым – 0,7, третьим – 0,8. Найти вероятность того, что при одном выстреле попадут в цель: а) все три стрелка; б) хотя бы один из них.

11.11. Одновременно бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что на каждой кости появится нечетное количество очков.

11.12. Из заготовленной для посева пшеницы зерно первого сорта составляет 40%, второго сорта – 50%, третьего сорта – 10%. Вероятность того, что взойдет зерно первого сорта равна 0,8, второго – 0,5, третьего – 0,3. Найти вероятность того, что взойдет наугад взятое зерно.

11.13. В магазин поступили телевизоры из трех заводов. Вероятность того, что телевизор изготовлен на первом заводе, равна 0,3, на втором – 0,2, на третьем – 0,5. Вероятность того, что телевизор окажется бракованным, для первого завода равна 0,01, для второго – 0,02, для третьего – 0,03. Найти вероятность того, что наугад взятый телевизор окажется небракованным.

11.14. В мастерской на трех станках изготавливаются однотипные детали. При этом первый станок изготавливает половину всех деталей, второй – 40 %, и третий – 10 %. Вероятность изготовления бракованной детали на первом станке равна 0,01, на втором – 0,03, на третьем – 0,05. Найти вероятность того, что наугад выбранная деталь окажется стандартной.

11.15. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Производится 4 выстрела. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) три раза; б) не более двух раз.

11.16. Вероятность всхожести пшеницы равна 0,8. Какова вероятность того, что из 5 семян взойдет не менее 3-х?

11.17. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах будет не менее 3-х попаданий.

11.18. Всхожесть семян пшеницы составляет 90 %. Определить наиболее вероятное число всходов из 200 посеянных семян.

11.19. Семена пшеницы содержат 0,2 % сорняков. Найти вероятность того, что в 1000 семян будет 6 семян сорняков.

11.20. Вероятность ошибки при наборе текста равна 0,004. Найти вероятность того, что при наборе 500 знаков будет сделано 3 ошибки.

12. Дана вероятность *p* того, что семя злака прорастёт. Найти вероятность того, что из *n* посеянных семян прорастёт ровно k семян.

12.1. n=900, p=0,1, k=95.
12.2. n=800, p=0,2, k=150.
12.3. n=700, p=0,3, k=220.
12.4. n=600, p=0,4, k=250.
12.5. n=500, p=0,5, k=240.
12.6. n=400, p=0,6, k=250.
12.7. n=300, p=0,7, k=200.
12.8. n=200, p=0,8, k=150.
12.9. n=100, p=0,9, k=85.
12.10. n=50, p=0,5, k=20.

Дана вероятность *p* появления события *A* в каждом из *n* независимых испытаний. Найти вероятность того, что в этих испытаниях событие *A* появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз.

12.11. n=50, p=0,9, k_1=35, k_2=46.
12.12. n=150, p=0,8, k_1=100, k_2=130.
12.13. n=250, p=0,7, k_1=150, k_2=180.
12.14. n=350, p=0,6, k_1=200, k_2=240.
12.15. n=450, p=0,5, k_1=200, k_2=230.
12.16. n=550, p=0,4, k_1=210, k_2=250.
12.17. n=650, p=0,3, k_1=180, k_2=200.
12.18. n=750, p=0,4, k_1=290, k_2=340.
12.19. n=850, p=0,5, k_1=400, k_2=480.
12.20. n=950, p=0,6, k_1=550, k_2=630.

13. Задан закон распределения дискретной случайной величины *X* (в первой строке указаны возможные значения величины *X*, во второй строке даны вероятности *p* этих значений). Найти: 1) математическое ожидание M(X); 2) дисперсию D(X); 3) среднее квадратическое отклонение σ(X).

13.1.	*X*	4	6	9	15
	P	0,1	0,3	0,2	0,4

13.2.	*X*	32	37	40	43
	P	0,1	0,3	0,4	0,2

13.3.	*X*	5	8	9	15
	P	0,1	0,3	0,2	0,4

13.4.	*X*	41	42	46	50
	P	0,3	0,3	0,2	0,2

13.5.	*X*	3	6	10	15
	P	0,1	0,3	0,2	0,4

13.6.	*X*	11	15	17	21
	P	0,2	0,5	0,2	0,1

13.7.	*X*	50	54	57	60
	P	0,1	0,4	0,3	0,2

13.11.	*X*	3	8	14	22
	P	0,1	0,3	0,2	0,4

13.12.	*X*	23	25	27	29
	P	0,2	0,1	0,3	0,4

13.13.	*X*	3	7	10	21
	P	0,1	0,3	0,2	0,4

13.14.	*X*	32	40	47	51
	P	0,1	0,3	0,4	0,2

13.15.	*X*	40	41	43	49
	P	0,3	0,3	0,2	0,2

13.16.	*X*	15	18	20	26
	P	0,2	0,5	0,2	0,1

13.17.	*X*	7	11	17	24
	P	0,1	0,4	0,3	0,2

13.8.	X	20	24	27	32
	P	0,5	0,2	0,2	0,1

13.9.	X	30	33	35	41
	P	0,2	0,4	0,3	0,1

13.10.	X	30	34	47	52
	P	0,3	0,2	0,2	0,3

13.18.	X	14	15	21	35
	P	0,5	0,2	0,2	0,1

13.19.	X	51	55	65	69
	P	0,2	0,4	0,3	0,1

13.20.	X	10	12	24	31
	P	0,3	0,2	0,2	0,3

14.1. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально. Математическое ожидание размера детали равно 200 мм, среднее квадратическое отклонение равно 0,25 мм. Стандартными считаются детали, размер которых заключен между 199,5 мм и 200,5 мм. Найти процент стандартных деталей.

14.2. Средний диаметр стволов деревьев на некотором участке равен 25 см, среднее квадратическое отклонение равно 5 см. Считая диаметр ствола случайной величиной, распределенной нормально, найти процент деревьев, имеющих диаметр свыше 20 см.

14.3. Размер плода имеет нормальное распределение со средним значением 16 см и средним квадратическим отклонением 2 см. Найти процент плодов, размер которых находится в пределах от 12 см до 19 см.

14.4. Среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины равно 0,5. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине не превосходит 1.

14.5. Длина детали представляет собой нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием 150 мм и средним квадратическим отклонением 0,5 мм. Найти процент деталей, размер которых отклоняется от среднего менее чем на 0,2 мм.

14.6. Средний вес зерна равен 0,2 г, среднее квадратическое отклонение равно 0,05 г. Определить вероятность того, что вес наудачу взятого зерна окажется в пределах от 0,16 г до 0,22 г.

14.7. Норма высева семян на 1 га равна 200 кг. Фактический расход семян на 1 га имеет нормальное распределение и колеблется около этого значения со средним квадратическим отклонением 10 кг. Найти вероятность того, что расход семян на 1 га будет не более 220 кг.

14.8. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально. Математическое ожидание размера детали равно 195 мм, среднее квадратическое отклонение равно 0,35 мм. Найти процент деталей, размер которых менее 195,5 мм.

14.9. Масса яблока, средняя величина которой равна 150 г, является нормально распределенной случайной величиной со средним квадратическим отклонением 20 г. Найти вероятность того, что масса наугад взятого яблока будет заключена в пределах от 130 г до 180 г.

14.10. Масса животного распределена по нормальному закону со средним значением 125 кг и средним квадратическим отклонением 7 кг. Найти процент животных, масса которых отклоняется от средней менее чем на 10 кг.

14.11. Диаметр яблока имеет нормальное распределение со средним значением 7 см и средним квадратическим отклонением 1,5 см. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятого яблока будет заключён в пределах от 6 см до 9 см.

14.12. Рост человека имеет нормальное распределение со средним значением 172 см и средним квадратическим отклонением 9 см. Найти процент людей, рост которых более 180 см.

14.13. Случайная величина имеет нормальное распределение со средним значением 28 и средним квадратическим отклонением 13. Найти процент положительных значений величины.

14.14. Длина детали представляет собой нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием 220 мм и средним квадратическим отклонением 0,4 мм. Найти процент деталей, размер которых отклоняется от среднего менее чем на 0,5 мм.

14.15. Среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины равно 5. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания по абсолютной величине не превзойдёт 7.

14.16. Масса животного распределена по нормальному закону со средним значением 95 кг и средним квадратическим отклонением 4 кг. Найти процент животных, масса которых заключена в пределах от 80 кг до 100 кг.

14.17. Случайная величина имеет нормальное распределение со средним значением 18 и средним квадратическим отклонением 3. Найти процент значений величины, принадлежащих интервалу (15;20).

14.18. Средняя дневная температура воздуха в июле равна 29^{o}. Найти вероятность того, что в случайно взятый июльский день будет не менее 25^{o}, если температура воздуха имеет нормальное распределение со средним квадратическим отклонением 3^{o}.

14.19. Случайная величина имеет нормальное распределение со средним значением 12 и средним квадратическим отклонением 9. Найти процент положительных значений величины.

14.20. Вес зерна имеет нормальное распределение со средним значением 0,2 г и средним квадратическим отклонением 0,04 г. Найти процент зёрен, вес которых не менее 0,3 г.

15.1–15.10. На 60 сортоиспытательных участках определена урожайность пшеницы (ц/га). Постройте интервальный ряд распределения участков по урожайности. Постройте гистограмму распределения. Вычислите среднюю, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

15.1	23,9	22,4	23,1	16,3	21,8	21,6	20,5	20,4	20,6	21,3	25,1	21,7	21,3	20,2	21,0
	18,2	20,2	25,1	19,6	24,0	22,5	23,2	16,4	21,9	21,7	20,6	20,5	20,7	21,2	25,0
	21,6	21,2	20,9	20,6	18,1	19,5	20,1	25,0	21,6	20,5	20,4	20,6	21,3	25,1	21,7
	21,3	20,2	22,9	23,4	22,1	17,3	20,8	22,6	19,5	21,4	19,6	22,3	24,1	22,7	20,3

15.2	22,9	21,4	22,1	15,3	22,8	20,6	21,5	21,4	21,6	20,3	24,1	20,7	20,3	19,2	20,0
	17,2	19,2	24,1	18,6	23,0	21,5	22,2	15,4	20,9	20,7	19,6	19,5	19,7	20,2	24,0
	20,6	20,2	19,9	19,6	17,1	18,5	19,1	24,0	20,6	19,5	19,4	19,6	20,3	24,1	20,7
	20,3	19,2	21,9	22,4	21,1	16,3	19,8	21,6	18,5	20,4	18,6	21,3	23,1	21,7	19,3

15.3	24,0	22,5	23,2	16,4	21,9	21,7	20,6	20,5	20,7	21,4	25,2	21,8	21,4	20,3	21,1
	18,3	20,3	25,3	19,7	24,1	22,6	23,3	16,5	22,0	21,8	20,7	20,6	20,8	21,3	25,1
	21,7	21,3	21,0	20,7	18,2	19,6	20,2	25,1	21,7	20,6	20,5	20,7	21,4	25,2	21,8
	21,4	20,3	23,0	23,5	22,2	17,4	20,9	22,7	19,6	21,5	19,7	22,4	24,2	22,8	20,4

15.4	24,1	22,6	23,3	16,5	22,0	21,8	20,7	20,6	20,8	21,5	25,3	21,9	21,5	20,5	21,2
	18,4	20,4	25,3	19,8	24,2	22,7	23,4	16,6	22,1	21,9	20,8	20,7	20,9	21,4	25,2
	21,8	21,4	21,1	20,8	18,3	19,7	20,3	25,2	21,8	20,7	20,6	20,8	21,5	25,3	21,9
	21,5	20,4	23,1	23,6	22,3	17,5	21,0	22,8	19,7	21,6	19,8	22,5	24,3	22,9	20,5

15.5	23,7	22,2	22,9	16,1	21,6	21,4	20,3	20,2	20,4	21,1	24,9	21,5	21,1	20,0	20,8
	18,0	20,0	24,9	19,4	23,8	22,3	23,0	16,2	21,7	21,5	20,4	20,3	20,5	21,0	24,8
	21,4	21,0	20,7	20,4	17,9	19,3	19,9	24,8	21,4	20,3	20,2	20,4	21,1	24,9	21,5
	21,1	20,0	22,7	23,2	21,9	17,1	20,6	22,4	19,3	21,2	19,4	22,1	23,9	22,5	20,1

15.6	24,9	23,4	24,1	17,3	22,8	22,6	21,5	21,4	21,6	22,3	26,1	22,7	22,3	21,2	22,0
	19,2	21,2	26,1	20,6	25,0	23,5	22,2	17,4	22,9	22,7	21,6	21,5	21,7	22,2	26,0
	22,6	22,2	21,9	21,6	19,1	20,5	21,1	26,0	22,6	21,5	21,4	21,6	22,3	26,1	22,7
	22,3	21,2	23,9	24,4	23,1	18,3	21,8	23,6	20,5	22,4	20,6	23,3	25,1	23,7	21,3

15.7	26,9	25,4	26,1	19,3	24,8	24,6	23,5	23,4	23,6	24,3	28,1	24,7	24,3	23,2	24,0
	21,2	23,2	28,1	22,6	27,0	25,5	26,2	19,4	24,9	24,7	23,6	23,5	23,7	24,2	28,0
	24,6	24,2	23,9	23,6	21,1	21,5	23,1	28,0	22,6	23,5	23,4	23,6	24,3	28,1	24,7
	24,3	23,2	25,9	28,4	25,1	20,3	23,8	25,6	22,5	24,4	22,6	25,3	27,1	25,7	23,3

15.8	27,7	26,2	26,9	20,1	25,6	25,4	24,3	24,2	25,4	25,1	28,9	25,5	25,1	24,0	24,8
	22,0	24,0	28,9	24,4	27,8	26,3	27,0	20,2	25,7	25,5	24,4	24,3	24,5	25,0	28,8
	25,4	25,0	24,7	24,4	21,9	23,3	23,9	28,8	25,4	24,3	25,2	24,4	25,1	29,9	26,5
	25,1	24,0	26,7	27,2	25,9	21,1	24,6	26,4	23,3	25,2	23,4	26,1	27,9	26,5	24,1

15.9	26,1	24,5	23,3	18,6	21,9	22,9	19,6	21,7	21,9	20,4	24,2	22,0	20,4	22,6	23,3
	16,3	22,5	24,2	20,9	22,1	24,8	21,3	18,7	21,0	23,9	18,7	22,8	23,0	18,2	27,3
	19,7	23,5	19,0	22,9	16,1	21,8	18,2	27,3	19,7	22,8	18,5	23,1	18,4	27,4	19,8
	23,6	22,5	21,0	25,7	24,2	18,6	22,0	249	17,5	22,5	19,9	21,6	25,4	23,8	21,4

15.10	23,1	18,6	23,3	13,5	25,0	18,8	23,7	17,6	23,8	18,5	28,3	18,9	24,5	17,5	24,2
	15,4	23,4	22,3	22,8	21,2	25,7	21,4	19,6	19,1	24,9	17,8	24,7	17,9	25,4	22,2
	24,8	18,4	24,1	17,8	21,3	16,7	23,3	22,2	24,8	17,7	23,6	23,8	18,5	28,3	18,9
	24,5	17,4	26,1	20,6	25,3	20,5	18,0	25,8	16,7	24,6	16,8	25,5	21,3	25,9	17,5

15.11–15.20. Получены результаты взвешивания 60 коров (ц). Постройте интервальный ряд распределения коров по весу. Постройте гистограмму распределения. Вычислите среднюю, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

15.11	4,5	4,7	3,4	5,4	4,6	5,0	3,8	4,7	5,6	4,0	5,1	4,9	3,3	3,5	4,3
	5,5	4,5	4,2	5,1	4,9	4,5	3,2	4,0	5,9	4,7	5,8	4,4	4,6	4,8	5,7
	3,3	5,5	4,5	5,1	3,7	4,8	5,3	4,1	4,2	5,2	4,8	3,4	3,4	4,5	4,7
	4,6	5,7	4,5	4,5	4,7	4,5	4,6	3,7	5,1	4,6	4,9	4,1	4,7	5,2	4,2

15.12	5,6	5,8	4,5	6,5	5,7	6,1	4,9	5,8	6,7	5,1	6,2	5,9	4,4	4,6	5,4
	6,6	5,6	5,3	6,2	6,0	5,6	4,3	5,1	5,2	5,8	6,9	5,5	5,7	5,9	6,8
	4,4	6,6	5,6	6,2	4,8	5,9	6,4	5,2	5,3	6,3	5,9	4,5	4,5	5,6	5,8
	5,7	6,8	5,6	5,6	5,8	5,6	5,7	4,8	6,2	5,7	6,0	5,2	5,8	6,3	5,3
15.13	4,7	4,9	3,6	5,6	4,8	5,2	4,0	4,9	5,8	4,2	5,3	5,1	3,5	3,7	4,5
	5,4	4,4	4,1	5,0	4,8	4,4	3,1	3,9	5,8	4,6	5,7	4,3	4,5	4,7	5,6
	3,5	5,7	4,7	5,3	3,9	5,0	5,5	4,3	4,4	5,4	5,0	3,6	3,6	4,7	4,9
	4,5	5,6	4,4	4,4	4,6	4,4	4,5	3,6	5,0	4,5	4,8	4,0	4,6	5,1	4,1
15.14	4,3	4,5	3,2	5,2	4,4	4,8	3,6	4,5	5,4	3,8	4,9	4,7	3,1	3,3	4,1
	5,7	4,7	4,4	5,3	5,1	4,7	3,4	4,2	6,1	4,9	6,0	4,6	4,8	5,0	5,9
	3,1	5,3	4,3	4,9	3,5	4,6	5,1	3,9	4,0	5,0	4,6	3,2	3,2	4,3	4,5
	4,8	5,9	4,7	4,7	4,9	4,7	4,8	3,9	5,3	4,8	5,1	4,3	4,9	5,4	4,4
15.15	4,2	4,4	3,1	5,1	4,3	4,7	3,5	4,4	5,3	3,7	4,8	4,6	3,0	3,2	4,0
	5,4	4,4	4,1	5,0	4,8	4,4	3,1	3,9	5,8	4,6	5,7	4,3	4,5	4,7	5,6
	3,0	5,2	4,2	4,8	3,4	4,5	5,0	3,8	3,9	4,9	4,5	3,1	3,1	4,2	4,4
	4,5	5,6	4,4	4,4	4,6	4,4	4,5	3,6	5,0	4,5	4,8	4,0	4,6	5,1	4,1
15.16	4,6	4,5	3,5	5,2	4,7	4,8	3,9	4,5	5,7	3,8	5,2	4,7	3,4	3,3	4,4
	5,6	4,3	4,3	4,9	5,0	4,3	3,3	3,8	6,0	4,5	5,9	4,2	4,7	4,6	5,8
	3,4	5,3	4,6	4,9	3,8	4,6	5,4	3,9	4,3	5,0	4,9	3,2	3,5	4,3	4,8
	4,7	5,5	4,6	4,3	4,8	4,3	4,7	3,5	5,2	4,4	5,0	3,9	4,8	5,0	4,3
15.17	4,3	4,8	3,2	5,5	4,4	5,1	3,6	4,8	5,4	4,1	4,9	5,0	3,1	3,6	4,1
	5,3	4,6	4,0	5,2	4,7	4,6	3,0	4,1	5,7	4,8	5,6	4,5	4,4	4,9	5,5
	3,1	5,6	4,3	5,2	3,5	4,9	5,1	4,2	4,0	5,3	4,6	3,5	3,2	4,6	4,5
	4,4	5,8	4,3	4,6	4,5	4,6	4,4	3,8	4,9	4,7	4,7	4,2	4,5	5,3	4,0
15.18	4,9	4,8	3,8	5,5	5,0	5,1	4,2	4,8	6,0	4,1	5,5	5,0	3,7	3,6	4,7
	5,9	4,6	4,6	5,2	5,3	4,6	3,6	4,1	6,3	4,8	6,2	4,5	5,0	4,9	6,1
	3,7	5,6	4,9	5,2	4,1	4,9	5,7	4,2	4,6	5,3	5,2	3,5	3,8	4,6	5,1
	5,0	5,8	4,9	4,6	5,1	4,6	5,0	3,8	5,5	4,7	5,3	4,2	5,1	5,3	4,6
15.19	3,5	5,7	2,4	6,4	3,6	6,0	2,8	5,7	4,6	5,0	4,1	5,9	2,3	4,5	3,3
	4,5	5,5	3,2	6,1	3,9	5,5	2,2	5,0	4,9	5,7	4,8	5,4	3,6	5,8	4,7
	2,3	6,5	3,5	6,1	2,7	5,8	4,3	5,1	3,2	6,2	3,8	4,4	2,4	5,5	3,7
	3,6	6,7	3,5	5,5	3,7	5,5	3,6	4,7	4,1	5,6	3,9	5,1	3,7	6,2	3,2
15.20	4,6	4,6	3,5	5,5	4,7	4,9	3,9	4,8	5,7	3,9	5,2	5,0	3,4	3,4	4,2
	5,6	4,6	4,1	5,2	5,0	4,6	3,1	4,1	6,0	4,8	5,7	4,5	4,7	4,9	5,6
	3,4	5,6	4,6	5,0	3,8	4,9	5,4	4,0	4,3	5,3	4,9	3,3	3,5	4,6	4,8
	4,7	5,8	4,6	4,6	4,6	4,6	4,7	3,8	5,0	4,7	5,0	4,2	4,6	5,3	4,3

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Контрольная работа № 1

Задача № 1. Даны вершины треугольника ABC: A(–4; 8), B(5; –4), C(10; 6).

Найти: 1) длину стороны AB;

2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;

3) угол A;

4) уравнение высоты CD и ее длину;

5) уравнение окружности, для которой высота CD является диаметром.

Решение. 1) Расстояние d между точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ определяется по формуле:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,. \qquad (1)$$

Подставив в эту формулу координаты точек A и B, имеем:

$$AB=\sqrt{(5-(-4))^2+(-4-8)^2}=\sqrt{81+144}=15.$$

2) Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\,. \qquad (2)$$

Подставив в (2) координаты точек:

$$\frac{x-(-4)}{5-(-4)}=\frac{y-8}{-4-8},\quad \frac{x+4}{9}=\frac{y-8}{-12},\quad \frac{x+4}{3}=\frac{y-8}{-4},$$

$$3y-24=-4x-16,\quad 4x+3y-8=0 \quad (AB).$$

Для нахождение углового коэффициента k_{AB} прямой AB разрешим полученное уравнение относительно y: $y=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$. Отсюда $k_{AB}=-\frac{4}{3}$. Подставив в формулу (2) координаты т очек A и C, получим уравнение прямой AC.

$$\frac{x-(-4)}{10-(-4)}=\frac{y-8}{6-8},\quad \frac{x+4}{14}=\frac{y-8}{-2},\quad \frac{x+4}{7}=\frac{y-8}{-1},$$

$$x+7y-52=0 \quad (AC).$$

Отсюда $k_{AC}=-\frac{1}{7}$.

3) Угол α между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых равны k_1 и k_2, определяется по формуле:

$$tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\,. \qquad (3)$$

Угол A, образованный прямыми AB и AC, найдем по формуле (3), подставив в нее $k_1 = k_{AB} = -\frac{4}{3}$, $k_2 = k_{AC} = -\frac{1}{7}$.

$$tgA = \frac{-\frac{1}{7} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{21}} = \frac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}} = 1,$$

$$\angle A = arctg1 = 45^0.$$

4) Так как высота CD перпендикулярна стороне AB, то угловые коэффициенты этих прямых обратны по величине и противоположны по знаку, т.е.

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1; y_1)$ в заданном угловым коэффициентом k направлении, имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (4)$$

Подставив в (4) координаты точки C и $k_{CD} = \frac{3}{4}$, получим уравнение высоты CD:

$$y - 6 = \frac{3}{4}(x - 10), \quad 4y - 24 = 3x - 30, \quad 3x - 4y - 6 = 0 \quad (CD). \qquad (5)$$

Для нахождения длины CD определим координаты точки D, решив систему уравнений (AB) и (CD):

$$\begin{cases} 4x + 3y - 8 = 0, \\ 3x - 4y - 6 = 0, \end{cases}$$

откуда $x = 2, \quad y = 0$, то есть $D(2;0)$.

Подставив в формулу (1) координаты точек C и D, находим:

$$CD = \sqrt{(10-2)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

5) Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $E(a;b)$ имеет вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (6)$$

Так как CD является диметром искомой окружности, то ее центр E есть середина отрезка CD. Воспользовавшись формулами деления отрезка пополам, получим:

$$x_E = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{10+2}{2} = 6, \quad y_E = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{6+0}{2} = 3.$$

Следовательно, $E(6;3)$ и $R = \frac{CD}{2} = 5$. Используя формулу (6), получаем уравнение искомой окружности: $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 25$.

На рис. 1 в декартовой прямоугольной системе координат xOy изображен треугольник ABC, высота CD, окружность с центром в точке E.

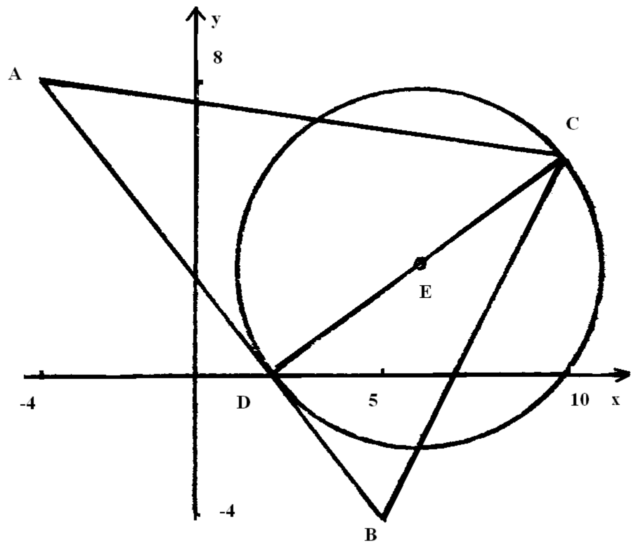


Рис. 1

Задача № 2.

1) Определить тип заданной кривой и построить её (для окружности указать центр, для эллипса и гиперболы – фокусы и эксцентриситет, для параболы – фокус и директрису):

$$x^2+4y^2=16.$$

Решение. Для того, чтобы определить тип кривой второго порядка (окружность, эллипс, гипербола или парабола), произведём преобразования заданного уравнения:

$$x^2+4y^2=16 \,|\, :16$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Получили каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

$\left.\begin{array}{l} a^2=16 \Rightarrow a=4 \\ b^2=4 \Rightarrow b=2 \end{array}\right\}$ – полуоси эллипса.

Найдём координаты фокусов: F_1(-c;0) и F_2(c;0), где $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}\approx 3,5.$ – половина расстояния между фокусами. Итак, F_1(-3,5;0) и F_2(3,5;0) – фокусы эллипса.

$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3,5}{4}\approx 0,9$ – эксцентриситет эллипса:

Построим эллипс (рис. 2).

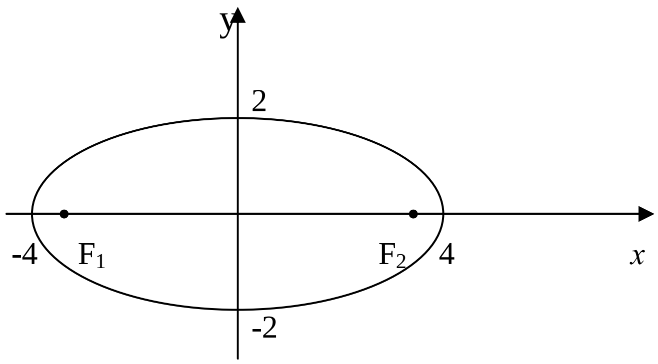


Рис. 2

2) Определить тип заданной кривой и построить её (для окружности указать центр, для эллипса и гиперболы – фокусы и эксцентриситет, для параболы – фокус и директрису):

$$9x^2-25y^2=225.$$

Решение. Преобразуем заданное уравнение:

$$9x^2-25y^2=225 \,\big|\, :225$$

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Получили каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2=25\Rightarrow a=5 \\ b^2=9\Rightarrow b=3 \end{array}\right\}$$ – полуоси гиперболы.

Найдём координаты её фокусов: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}$ – половина расстояния между фокусами.

Итак, $c=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}\approx 5,8.$

Тогда $F_1(-5,8;0)$ и $F_2(5,8;0)$ – фокусы гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5,8}{5}\approx 1,2.$

Построим гиперболу (рис. 3).

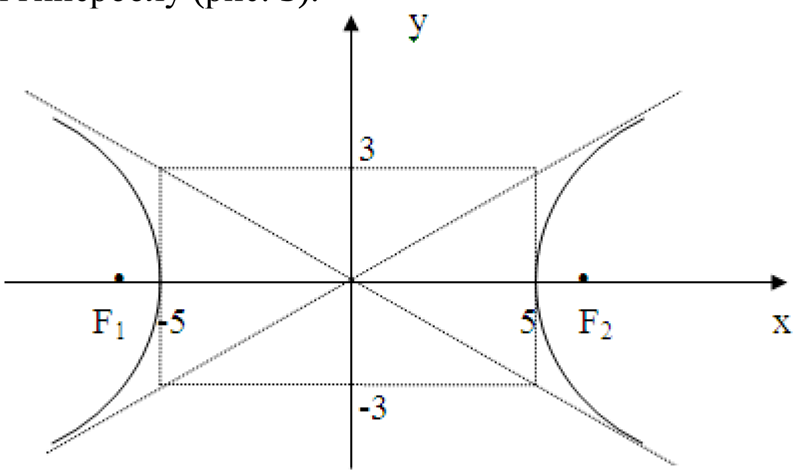


Рис. 3.

3) Определить тип заданной кривой и построить её (для окружности указать центр, для эллипса и гиперболы – фокусы и эксцентриситет, для параболы – фокус и директрису).

$$y^2=6x+12$$

Решение. Преобразуем данное уравнение:

$$y^2=6x+12$$

$$y^2=6(x+2)$$

Получили уравнение параболы: $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$.

$$(y-0)^2=2\cdot 3(x-(-2)).$$

Ветви параболы направлены вправо, вершина расположена в точке (x_0; y_0), т.е. в точке (-2;0).

Для построения параболы её уравнение приведём к простейшему (каноническому) виду. Для этого произведём параллельный перенос системы координат:

$$\begin{cases} x-(-2)=X', \\ y-0=Y'. \end{cases}$$

Тогда в новой системе координат $X'O'Y'$, где $O'(-2;0)$ – начало координат, уравнение параболы принимает канонический вид: $(Y')^2=6X'$.

Найдём координаты фокуса и уравнение директрисы: $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – фокус, $x=-\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы.

Итак, 2p=6, значит, p=3. Тогда F(1,5; 0) и x= -1,5.

Строим параболу в системе координат $X'O'Y'$ (рис.4).

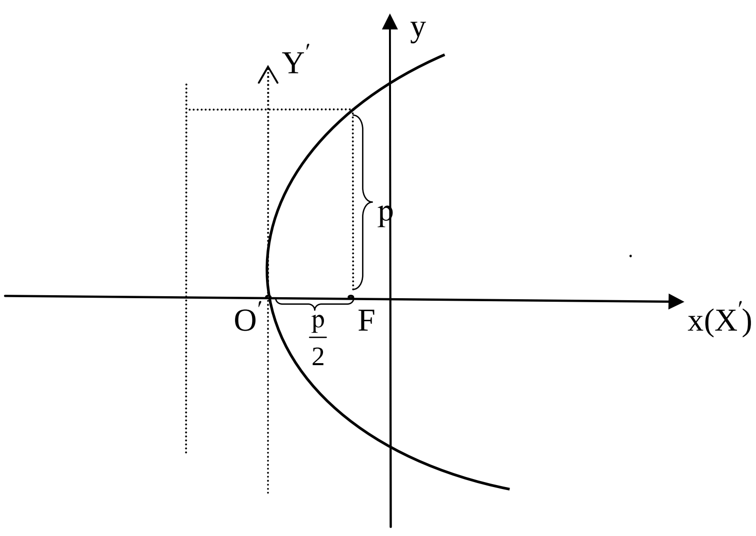


Рис.4

Задача № 3. Даны координаты трёх точек: A(3; 0; –5), B(6; 2; 1), C(12; –12; 3). Требуется:

1) записать векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ в системе орт и найти их модули;

2) найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

3) составить уравнение плоскости, проходящей через точку C перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$.

Решение. 1) Если даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ через орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ выражается следующим образом:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} .$$

Подставляя в эту формулу координаты точек A и B, имеем:

$$\overrightarrow{AB} = (6-3)\vec{i} + (2-0)\vec{j} + (1-(-5))\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} .$$

Аналогично

$$\overrightarrow{AC} = (12-3)\vec{i} + (-12-0)\vec{j} + (3-(-5))\vec{k} = 9\vec{i} - 12\vec{j} + 8\vec{k} .$$

Модуль вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ вычисляется по формуле

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

Подставляя в формулу найденные ранее координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, находим их модули:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7 ,$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17 .$$

2) Косинус угла α, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равен их скалярному произведению, деленному на произведение их модулей

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} .$$

Так как скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, равно сумме попарных произведений одноименных координат, то

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\cdot 9 + 2\cdot(-12) + 6\cdot 8 = 51 .$$

Тогда

$$\cos\alpha = \cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{;}\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{51}{7\cdot 17} \approx 0,4286; \quad \alpha \approx 64^0 .$$

3) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}\{A; B; C\}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 .$$

По условию задачи искомая плоскость проходит через точку $C(12; -12; 3)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}\{3; 2; 6\}$. Подставляя $A = 3, B = 2, C = 6,$ $x_0 = 12,$ $y_0 = -12,$ $z_0 = 3$, получим:

$$3(x-12) + 2(y-(-12)) + 6(z-3) = 0,$$

$3x + 2y + 6z - 30 = 0$ – искомое уравнение плоскости.

Задача № 4. Данную систему уравнений решить методом Крамера (с помощью определителей):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы Δ по правилу «треугольников»:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}\ a_{22}\ a_{33} + a_{21}\ a_{32}\ a_{13} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31}) - (a_{31}\ a_{22}\ a_{13} + a_{32}\ a_{23}\ a_{11} + a_{21}\ a_{12}\ a_{33}).$$

Итак,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 2 - 2\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 1 - \left(1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot(-2)\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot 1\right) = 6 + 2 - 2 - 3 + 8 - 1 = 10.$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение, которое находим по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

Определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ получаем заменой соответствующего столбца определителя Δ столбцом свободных членов системы.

Вычислим определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 - 2 + 3 - 1 + 32 = 30,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 2 - 1 - 8 - 1 - 4 = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 - 16 - 3 + 8 - 4 = -20.$$

Таким образом, $\begin{cases} x_1 = \dfrac{30}{10} = 3, \\ x_2 = \dfrac{0}{10} = 0, \\ x_3 = \dfrac{-20}{10} = -2. \end{cases}$

Сделаем проверку, подставив найденное решение в каждое уравнение данной системы:

$$\begin{cases} 3-2\cdot 0-2=1, \\ 2\cdot 3+3\cdot 0-(-2)=8, \\ 3-0+2\cdot(-2)=-1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=1, \\ 8=8, \\ -1=-1. \end{cases} \text{ – верно.}$$

Ответ: (3;0;-2).

Задача № 5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+3x+1}{5x+x^2}$.

Решение. а) Подстановка предельного значения аргумента x= -3 приводит к неопределенному выражению вида $\dfrac{0}{0}$.

Для устранения этой неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим дробь на множитель $(x+3)$. Такое сокращение возможно, так как множитель $(x+3)$ отличен от нуля при $x\to -3$:

$$\lim_{x\to -3}\frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(4x-1)(x+3)}{(3x+1)(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{4x-1}{3x+1}=\frac{4\cdot(-3)-1}{3\cdot(-3)+1}=\frac{13}{8}.$$

б) При x→∞ числитель и знаменатель дроби $\dfrac{6x^2+3x+1}{5x+x^2}$ стремятся к ∞.

Тогда получаем неопределённость вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, которая раскрывается по следующему правилу: предел отношения двух бесконечно больших функций, являющихся многочленами, равен пределу отношения их слагаемых со старшей степенью переменной.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+3x+1}{5x+x^2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2}{x^2}=6.$$

Контрольная работа № 2

Задача № 6. Провести полное исследование функции и построить её график:

$$y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+14.$$

Решение. Проведём исследование функции по следующей схеме:

1) Область определения функции: $x\in(-\infty;+\infty)$.

2) Возрастание/убывание, экстремумы функции:

$$y'=\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x+14\right)'=\frac{3x^2}{3}-2x-3=x^2-2x-3.$$

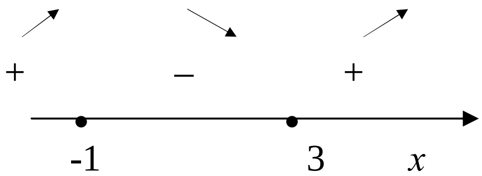
Найдём критические точки функции – точки, в которых y'=0 или не существует:

$$y'=0\Rightarrow x^2-2x-3=0,$$

$$D=4-4(-3)=4+12=16,$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm4}{2}=\left[\begin{array}{l}\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}-1,\\ \frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3.\end{array}\right.$$

Точек, в которых производная не определена, нет. Отметим полученные точки на числовой прямой:



Определим знак производной на каждом интервале: подставим любую точку из интервала в производную $y'=x^2-2x-3$, тогда знак полученного значения производная сохраняет на всём интервале. Например, $y'(-2)=(-2)^2-2(-2)-3=5>0$, $y'(0)=0^2-2\cdot0-3=-3<0$, $y'(4)=4^2-2\cdot4-3=5>0$.

Теперь по полученным знакам производной делаем вывод о поведении функции: знак «+» соответствует возрастанию функции, «-» – убыванию. А точки, в которых происходит смена знака, являются точками экстремума функции: $x_{max}=-1$, $x_{min}=3$. Найдём экстремумы:

$$y_{max}=y\left(x_{max}\right)=y(-1)=\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2-3(-1)+14=-\frac{1}{3}-1+3+14=$$

$$=-\frac{1}{3}+16=15\frac{2}{3};\,y_{min}=y\left(x_{min}\right)=y(3)=\frac{3^3}{3}-3^2-3\cdot3+14=5.$$

Итак, точка $A\left(-1;15\frac{2}{3}\right)$ – точка максимума, $B(3;5)$ – точка минимума.

3) Найдём интервалы выпуклости/вогнутости и точки перегиба графика функции.

$$y'' = (y')' = (x^2 - 2x - 3)' = 2x - 2.$$

$y'' = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0,$

$2x = 2,$

$x = 1.$

Определим знак второй производной на интервалах (-∞;1) и (1;∞): y''(0)=2·0-2=-2<0, y''(2)=2·2-2=2>0. Следовательно, на первом интервале график является выпуклым, на втором – вогнутым, а при x=1 имеет перегиб.

Найдём соответствующее значение функции:

$$y(1) = \frac{1^3}{3} - 1^2 - 3 \cdot 1 + 14 = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 14 = \frac{1}{3} + 10 = 10\frac{1}{3}.$$

Таким образом, точка $C\left(1;10\frac{1}{3}\right)$ – точка перегиба графика функции.

Теперь, пользуясь результатами исследования функции, строим её график:

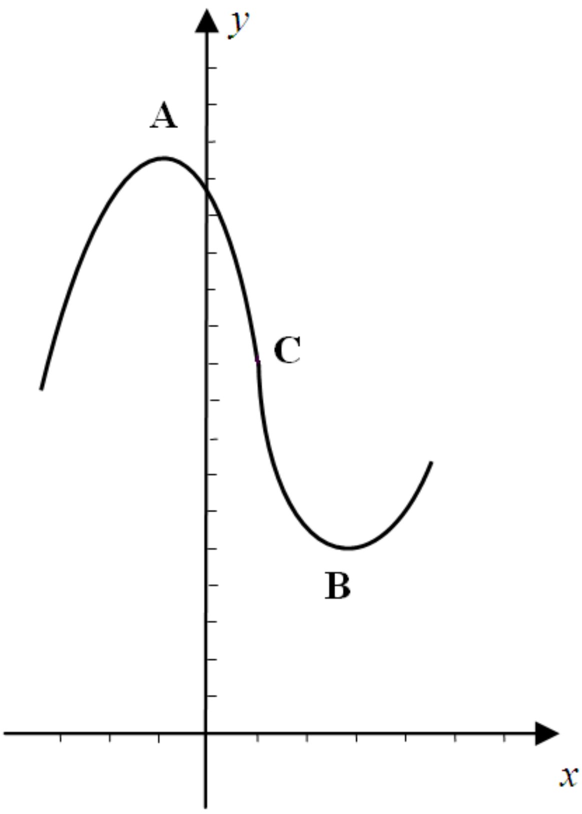


Рис. 5

Задача № 7. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 + 1$.

Решение. Находим стационарные точки – точки, в которых частные производные функции равны нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 2y;$$

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ 2xy + 2y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ 2y(x+1) = 0. \end{cases}$$

Решение последней системы дает четыре стационарные точки:

$$P_1(0;0),\ P_2\left(-\frac{5}{3};0\right),\ P_3(-1;2),\ P_4(-1;-2).$$

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x + 10; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x + 2.$$

Исследуем каждую стационарную точку.

1) В точке $P_1(0;0)$: $A = 10; B = 0; C = 2; \Delta = 20.$ Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то в этой точке функция имеет минимум.

$$z_{\min} = z(0;0) = 1.$$

2) В точке $P_2\left(-\frac{5}{3};0\right)$: $A = -10; B = 0; C = -\frac{4}{3}; \Delta = \frac{40}{3}.$ Так как $\Delta > 0$ и $A < 0$, то в этой точке функция имеет максимум.

$$z_{\max} = z\left(-\frac{5}{3};0\right) = 5\frac{17}{27}.$$

3) В точке $P_3(-1;2)$: $A = -2; B = 4; C = 0; \Delta = -16.$ Так как $\Delta < 0$, то в этой точке нет экстремума.

4) В точке $P_4(-1;-2)$: $A = -2; B = -4; C = 0; \Delta = -16.$ Так как $\Delta < 0$, то в этой точке нет экстремума.

Задача № 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

Решение. Графиком первой функции является парабола с ветвями вверх, второй функции – прямая.

Найдём координаты вершины параболы:

$$x_{в.} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2.$$

$$y_{в.} = y(x_{в.}) = y(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = 4 - 8 = -4.$$

Итак, точка (-2;-4) является вершиной параболы.

Для нахождения точек пересечения данных линий решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x, \\ y = x + 4, \end{cases}$$

$$x^2 + 4x = x + 4$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$D = 9 + 16 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \left[\begin{matrix} -4 \\ 1 \end{matrix}\right.$$

Найдём вторые координаты (ординаты) точек пересечения графиков, подставив найденные значения x в любое из уравнений: y(-4)=-4+4=0, y(1)=1+4=5. Таким образом, парабола и прямая пересекаются в точках (-4;0) и (1;5).

Теперь вершину параболы и точки пересечения используем для построения графиков (рис. 6).

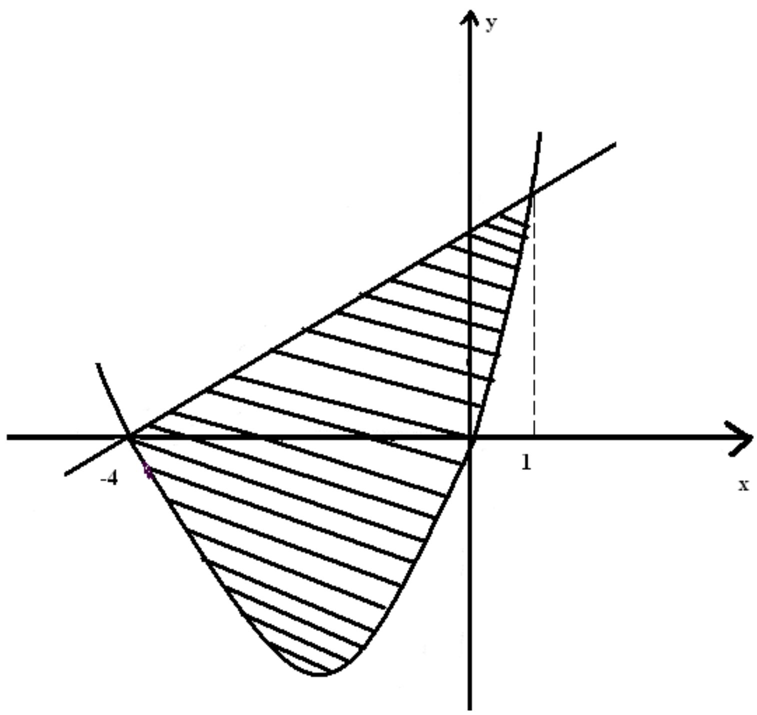


Рис. 6

Площадь фигуры, ограниченной сверху и снизу непрерывными линиями $y = f(x)$ и $y = \phi(x)$, пересекающимися в точках с абсциссами x=a и x=b, определяется по формуле:

$$S = \int_a^b [\,f(x) - \phi(x)]\,dx\,.$$

$$S = \int_{-4}^{1} (x + 4 - x^2 - 4x)dx = \int_{-4}^{1} (4 - 3x - x^2)dx = \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-4}^{1} = 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6}.$$

Задача № 9. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

$$2y'' + 7y' - 4y = 0,\ y(0) = -1, y'(0) = 1.$$

Решение. Это линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение уравнения составляется в зависимости от корней характеристического уравнения:

$$2k^2 + 7k - 4 = 0,$$

$$D = 7^2 - 4\cdot 2\cdot(-4) = 49 + 32 = 81,$$

$$k_{1,2} = \frac{-7\pm 9}{4} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{-16}{4} = -4, \\ \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Если корни характеристического уравнения действительны и различны, то общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$. В нашем случае $k_1 = -4, k_2 = \dfrac{1}{2}$, значит, $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$.

Теперь из общего решения уравнения выделим частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$y' = \left(C_1 e^{-4x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}\right)' = C_1 e^{-4x}(-4x)' + C_2 e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)' = C_1 e^{-4x}\cdot(-4) + C_2 e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = -4C_1 e^{-4x} + \frac{1}{2}C_2 e^{\frac{x}{2}}.$$

$$\begin{cases} y(0) = -1, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = C_1 e^{-4\cdot 0} + C_2 e^{\frac{0}{2}}, \\ 1 = -4C_1 e^{-4\cdot 0} + \dfrac{1}{2}C_2 e^{\frac{0}{2}}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = C_1 e^0 + C_2 e^0, \\ 1 = -4C_1 e^0 + \dfrac{1}{2}C_2 e^0. \end{cases}$$

$$e^0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 = C_1 + C_2, \\ 1 = -4C_1 + \dfrac{1}{2}C_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = -1, \\ -4C_1 + \dfrac{C_2}{2} = 1 \,|\cdot 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = -1, \\ -8C_1 + C_2 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = -1 - C_1, \\ -8C_1 + (-1 - C_1) = 2. \end{cases}$$

$$-8C_1 - 1 - C_1 = 2,$$

$$-9C_1 = 3,$$

$$C_1 = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3} \Rightarrow C_2 = -1 - C_1 = -1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Итак, $\begin{cases} C_1 = -\dfrac{1}{3}, \\ C_2 = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

Подставим найденные значения констант в общее решение. Тогда $y = -\dfrac{1}{3}e^{-4x} - \dfrac{2}{3}e^{\frac{x}{2}}$ – частное решение уравнения.

Задача 10. Дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{12^n \sqrt[4]{n+3}}$. Написать первые три члена ряда, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

Решение. $u_n = \frac{5^n x^n}{12^n \sqrt[4]{n+3}}$ – общий член ряда. Подставив в эту формулу вместо n значения 1, 2, 3, …, можно найти любой член ряда:

$$u_1 = \frac{5^1 x^1}{12^1 \sqrt[4]{1+3}} = \frac{5x}{12\sqrt[4]{4}},$$

$$u_2 = \frac{5^2 x^2}{12^2 \sqrt[4]{2+3}} = \frac{25x^2}{144\sqrt[4]{5}},$$

$$u_3 = \frac{5^3 x^3}{12^2 \sqrt[4]{3+3}} = \frac{125x^3}{1728\sqrt[4]{6}}.$$

Степенной ряд в общем виде записывается следующим образом: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где a_n – формула числовых коэффициентов. Для данного ряда $a_n = \frac{5^n}{12^n \sqrt[4]{n+3}}$.

Областью сходимости степенного ряда является интервал (-R;R), где $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ – радиус сходимости. Вычислим его:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{5^n}{12^n \sqrt[4]{n+3}}.}{\dfrac{5^{n+1}}{12^{n+1} \sqrt[4]{(n+1)+3}}.}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{5^n}}{\cancel{12^n}\sqrt[4]{n+3}}\cdot\frac{\cancel{12^n}\cdot 12\sqrt[4]{(n+1)+3}}{\cancel{5^n}\cdot 5}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{12\sqrt[4]{n+4}}{5\sqrt[4]{n+3}} =$$

$$= \frac{12}{5}\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{\frac{n+4}{n+3}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{12}{5}\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{\frac{n}{n}} = \frac{12}{5}\cdot 1 = \frac{12}{5}.$$

.

Итак, ряд является сходящимся (абсолютно) при всех x, принадлежащих интервалу $\left(-\frac{12}{5};\frac{12}{5}\right)$.

Теперь проверим сходимость ряда на концах этого интервала.

Пусть $x = -\frac{12}{5} \Rightarrow$ получаем ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\left(-\frac{12}{5}\right)^n}{12^n \sqrt[4]{n+3}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{5^n}(-1)^n \frac{\cancel{12^n}}{\cancel{5^n}}}{\cancel{12^n}\sqrt[4]{n+3}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n+3}}.$

Это числовой знакочередующийся ряд, исследуем его по признаку Лейбница:

$$\left.\begin{array}{l} 1. u_1 > u_2 > u_3 > ... \\ 2. \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} u_n \ \textit{сходится.}$$

$$u_n=\frac{1}{\sqrt[4]{n+3}}$$

$$\left.\begin{aligned}&1.\frac{1}{\sqrt[4]{4}}>\frac{1}{\sqrt[4]{5}}>\frac{1}{\sqrt[4]{6}}>\ldots-\textit{верно}\\&2.\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n+3}}=\frac{1}{\infty}=0-\textit{верно}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{ряд сходится, значит, } x=-\frac{12}{5}-\text{точка сходимости.}$$

При $x=\frac{12}{5}$ исходный ряд принимает вид: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\left(\frac{12}{5}\right)^n}{12^n\sqrt[4]{n+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{5^n}\cdot\frac{\cancel{12^n}}{\cancel{5^n}}}{\cancel{12^n}\sqrt[4]{n+3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n+3}}$ – числовой знакоположительный ряд. Исследуем его сходимость при помощи интегрального признака сходимости Коши. Рассмотрим несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x+3}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{\sqrt[4]{x+3}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b(x+3)^{-\frac{1}{4}}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{(x+3)^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}\right|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{(x+3)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}\right|_1^b=\frac{4}{3}\lim_{b\to\infty}\left((b+3)^{\frac{3}{4}}-(1+3)^{\frac{3}{4}}\right)=\infty.$$

Так как несобственный интеграл расходится, то расходится и исследуемый ряд. Значит, $x=\frac{12}{5}$ – точка расходимости.

Таким образом, данный степенной ряд является сходящимся при $x\in\left[-\frac{12}{5};\frac{12}{5}\right)$.

Контрольная работа № 3

Задача 11.

1) В холодильнике стоят пять банок рыбных консервов и восемь – овощных. Наудачу взяли три банки. Какова вероятность того, что они все с овощами?

Решение: Задачу можно решить двумя способами.

1 способ: Применим классическое определение вероятности события: $P(A)=\frac{m}{n}$, где n – число всех исходов испытания, m – число благоприятствующих событию А исходов. Испытание в данной задаче состоит в том, что мы наудачу из 13 банок выбираем 3. Число способов выбора найдем по формуле: $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, так как получаемые комбинации различаются хотя бы одним элементом (банкой), а порядок их расположения не важен, т.е. являются сочетаниями:

$$n=C_{13}^3=\frac{13!}{3!(13-3)!}=\frac{13!}{3!10!}=\frac{\cancel{10!}\cdot11\cdot12\cdot13}{(1\cdot2\cdot3)\cdot\cancel{10!}}=\frac{11\cdot\overset{2}{\cancel{12}}\cdot13}{\cancel{6}}=286.$$

Таким образом, общее число всех исходов испытания равно 286. Теперь найдем число благоприятствующих событию А исходов. Событие состоит в том, что все выбранные банки содержат овощи, а поскольку таких банок по условию задачи восемь, то необходимо вычислить число сочетаний из восьми по три элемента:

$m = C_8^3 = \dfrac{8!}{3!(8-3)!} = \dfrac{8!}{3!5!} = \dfrac{\cancel{5!}\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{6\cdot \cancel{5!}} = \dfrac{336}{6} = 56.$

Итак, вероятность данного события равна: $P(A) = \dfrac{56}{286} \approx 0,2.$

2 способ: Применим теоремы сложения и умножения событий. Введём события: A={первая выбранная банка – овощи};

B={вторая выбранная банка – овощи};

C={третья выбранная банка – овощи}.

Тогда P{все выбранные банки – с овощами}=P(ABC)=[события зависимы]=$P(A)P_A(B)P_{AB}(C)$, где $P_A(B)$ и $P_{AB}(C)$ – вероятности, вычисленные при условии, что предыдущие события уже наступили. Затем, применяя для каждого события классическое определение вероятности, получаем:

$P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = \dfrac{8}{13}\cdot\dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{6}{11} \approx 0,2.$

Ответ: 0,2.

2) В билете три вопроса. Студент знает первый вопрос на 90 %, второй – на 70 %, третий – на 50 % . Найти вероятность того, что студент верно ответит:

а) на два вопроса;

б) на все три вопроса;

в) хотя бы на один вопрос.

Решение: Рассмотрим следующие события:
A={студент знает первый вопрос}, по условию задачи P(A)=0,9;
B={студент знает второй вопрос}, P(B)=0,7;
C={студент знает третий вопрос}, P(C)=0,5.

Затем с помощью теорем сложения и умножения вероятностей найдем вероятности указанных событий:

а) P{студент верно ответит на два вопроса} = $P\left(AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC\right)$=[напомним, что произведение событий – это их одновременное наступление, сумма событий – наступление одного из них (в случае их несовместности)] $= P\left(AB\overline{C}\right) + P\left(A\overline{B}C\right) +$
$+ P\left(\overline{A}BC\right) = P(A)P(B)P\left(\overline{C}\right) + P(A)P\left(\overline{B}\right)P(C) + P\left(\overline{A}\right)P(B)P(C) =$
=0,9·0,7·(1-0,5)+0,9·(1-0,7)0,5+(1-0,9)·0,7·0,5=0,9·0,7·0,5+0,9·0,3·0,5+
+0,1·0,7·0,5=0,315+ 0,135+0,035=0,485≈0,49.

Здесь мы применили теорему сложения вероятностей для несовместных событий-слагаемых и теорему умножения для независимых событий-сомножителей.

в) P{студент верно ответит на все три вопроса} = $P(ABC) = P(A)P(B)P(C) =$
=0,9·0,7·0,5=0,315≈0,32.

б) P{студент верно ответит хотя бы на один из вопросов}=[применим противоположное событие]=1–P{ни на один вопрос студент не даст верного ответа}$= 1 - P\left(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)P(\overline{C}) =$ 1-(1-0,9)·(1-0,7)·(1-0,5)=1-0,1·0,3·0,5=0,985≈0,99.

Ответ: а) 0,49; б) 0,32; в) 0,99.

3) В магазин поступает продукция с трёх фабрик. При этом 60 % всей продукции поступает с 1-й фабрики и по 20 % со 2-й и 3-й. Доля бракованной продукции для каждой фабрики соответственно равна 0,02, 0,01 и 0,03. Найти вероятность того, что экземпляр продукции, взятый наудачу в магазине, окажется качественным.

Решение: Введём события:
A={экземпляр продукции является качественным},
H_1={экземпляр продукции поступил с 1-й фабрики},
H_2={экземпляр продукции поступил со 2-й фабрики},
H_3={экземпляр продукции поступил с 3-й фабрики}.

$$P(H_1)=0,6; \quad P_{H_1}(A)=1-0,02=0,98,$$
$$P(H_2)=0,2; \quad P_{H_2}(A)=1-0,01=0,99,$$
$$P(H_3)=0,2; \quad P_{H_3}(A)=1-0,03=0,97.$$

Тогда по формуле полной вероятности получаем:

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+P(H_3)P_{H_3}(A)=0,6\cdot 0,98+0,2\cdot 0,99+0,2\cdot 0,97=$$
$$=0,588+0,198+0,194=0,98.$$

Ответ: 0,98.

4) Вероятность попадания стрелка в цель равна 0,6. Найти вероятность того, что из 5 выстрелов он попадёт не более двух раз.

Решение: Имеем типичную задачу на независимые повторные испытания. A={попадание стрелка в цель} – событие, которое может появиться или не появиться при каждом испытании. Вероятность этого события P(A)=p=0,6 постоянна и не зависит от исходов других испытаний. Тогда вероятность ненаступления события A будет равна q=1-p=1-0,6=0,4.

Запишем данные: $\begin{cases} n=5, \\ p=0,6, \\ q=1-p=0,4, \\ k\le 2. \end{cases}$

Тогда $P_5(k\le 2)=P_5(2)+P_5(1)+P_5(0).$ Так как число испытаний невелико, то для вычисления вероятностей применяем формулу Бернулли: $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$.

$$P_5(2)=C_5^2 0,6^2 0,4^{5-2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}\cdot 0,36\cdot 0,4^3=\frac{5!}{2!3!}\cdot 0,36\cdot 0,064=\frac{\cancel{3!}\cdot 4\cdot 5}{2\cdot \cancel{3!}}\cdot 0,02304=10\cdot 0,02304=$$
$$=0,2304\approx 0,23.$$

$$P_5(1)=C_5^1 0,6^1 0,4^{5-1}=\frac{5!}{1!(5-1)!}\cdot 0,6\cdot 0,4^4=\frac{5!}{1\cdot 4!}\cdot 0,6\cdot 0,0256=\frac{\cancel{4!}\cdot 5}{1\cdot \cancel{4!}}\cdot 0,01536=5\cdot 0,01536=$$
$$=0,0768\approx 0,08.$$

$$P_5(0)=C_5^0 0,6^0 0,4^{5-0}=\frac{5!}{0!(5-0)!}\cdot 1\cdot 0,4^5=\frac{\cancel{5!}}{1\cdot\cancel{5!}}\cdot 1\cdot 0,01024=1\cdot 0,01024=0,01024\approx 0,01.$$

Тогда $P_5(k\le 2)=0,23+0,08+0,01=0,32.$

Ответ: 0,32.

5) Среди билетов «Русского лото» 0,1 % выигрышных. Было куплено 3000 билетов. Найти вероятность того, что будет пять выигрышей.

Решение: а) $\begin{cases} n=3000 \\ p=0,001 \\ k=5 \end{cases}$

Поскольку число испытаний велико, а вероятность события очень мала, то более точный результат (по сравнению с локальной формулой Лапласа) даст формула Пуассона:

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ \text{где}\ \lambda=np\le 10\,.$$

Таким образом, подставляя в формулу наши данные, получаем:

$$\lambda=np=3000\cdot 0,001=3<10\Rightarrow P_{3000}(5)\approx\frac{3^5e^{-3}}{5!}\approx\frac{243\cdot 0,05}{120}\approx 0,1.$$

Ответ: 0,1.

Задача 12. Вероятность выигрыша лотерейного билета равна 0,2. Найти вероятность того, что:

а) из 40 билетов будет 10 выигрышей;

б) из 120 выиграют не менее 20, но не более 50 билетов.

Решение

а) $\begin{cases} n=40, \\ p=0,2\,, \\ q=0,8, \\ k=9. \end{cases}$

Так как число испытаний велико, вычисления будем проводить по локальной формуле Лапласа:

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P_{40}(9)\approx\frac{1}{\sqrt{40\cdot 0,2\cdot 0,8}}\varphi\left(\frac{9-40\cdot 0,2}{\sqrt{40\cdot 0,2\cdot 0,8}}\right)=\frac{1}{\sqrt{6,4}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{6,4}}\right)\approx\frac{1}{2,53}\varphi\left(\frac{1}{2,53}\right)\approx 0,4\varphi(0,40)=$$
$$=0,4\cdot 0,3683\approx 0,15.$$

б) $\begin{cases} n = 120, \\ p = 0,2, \\ q = 0,8, \\ 20 \le k \le 50. \end{cases}$

Так как число испытаний велико и число наступлений события меняется в заданных пределах, то для решения задачи применяем интегральную формулу Лапласа:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P_{120}(20 \le k \le 50) \approx \Phi\left(\frac{50 - 120 \cdot 0,2}{\sqrt{120 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) - \Phi\left(\frac{20 - 120 \cdot 0,2}{\sqrt{120 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) = \Phi\left(\frac{26}{\sqrt{19,2}}\right) - \Phi\left(\frac{-4}{\sqrt{19,2}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{26}{4,38}\right) + \Phi\left(\frac{4}{4,38}\right) \approx \Phi(5,94) + \Phi(0,91) = 0,5 + 0,3186 = 0,8186 \approx 0,82.$$

При вычислениях были применены свойства функции Лапласа Φ(x):

1) нечётности: Φ(–x)= –Φ(x);

2) ограниченности: если x>5, то Φ(x)≈0,5.

Значения функций φ(x) и Φ(x) посмотрели в специальных таблицах (в конце пособия).

Ответ: а) 0,15; б) 0,82.

Задача 13. Задан закон распределения дискретной случайной величины *X* (в первой строке указаны возможные значения величины *X*, во второй строке даны вероятности *p* этих значений). Найти: 1) математическое ожидание M(X); 2) дисперсию D(X); 3) среднее квадратическое отклонение σ(X).

X	-6	3	7	9	15
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Решение: Математическое ожидание дискретной случайной величины находится по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n.$$

Итак, M(X)=-6·0,1+3·0,2+7·0,2+9·0,4+15·0,1=-0,6+0,6+1,4+3,6+1,5=6,5. Поскольку вероятностный смысл рассмотренной характеристики состоит в том, что математическое ожидание приближённо равно среднему значению случайной величины, то можно считать, что 6,5 – это среднее значение данной величины.

Дисперсию можно вычислить двумя способами:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i = \left(x_1 - M(X)\right)^2 p_1 + ... + \left(x_n - M(X)\right)^2 p_n$$

или

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-M^2\left(X\right)=x_1^2p_1+...+x_n^2p_n-M^2\left(X\right).$$

Применим вторую формулу: $D(X)=(-6)^2\cdot0{,}1+3^2\cdot0{,}2+7^2\cdot0{,}2+9^2\cdot0{,}4+15^2\cdot0{,}1-6{,}5^2=$ $=36\cdot0{,}1+9\cdot0{,}2+49\cdot0{,}2+81\cdot0{,}4+225\cdot0{,}1-2{,}25=3{,}6+1{,}8+9{,}8+32{,}4+22{,}5-42{,}25=27{,}85$.

Теперь, извлекая квадратный корень из дисперсии, получаем следующую числовую характеристику величины – среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{27{,}85}\approx5{,}3.$

Так как дисперсия и среднее квадратическое отклонение характеризуют степень разброса значений величины вокруг её математического ожидания, то делаем вывод, что значения данной величины отклоняются от её среднего значения в среднем на 5,3.

Ответ: M(X)=6,5; D(X)=27,85; σ(X)≈5,3.

Задача 14. Случайная величина X – диаметр яблока – имеет нормальное распределение со средним значением 5,5 см и средним квадратическим отклонением 0,8 см. Найти процент яблок:

а) имеющих диаметр в пределах от 4 до 6 см;

б) имеющих диаметр более 6 см.

Решение: a=M(X)=5,5, σ=σ(X)=0,8.

а) Для нахождения вероятности попадания величины в заданный интервал воспользуемся формулой:

$$P\left(\alpha<X<\beta\right)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

$$P\left(4<X<6\right)=\Phi\left(\frac{6-5{,}5}{0{,}8}\right)-\Phi\left(\frac{4-5{,}5}{0{,}8}\right)=\Phi\left(\frac{0{,}5}{0{,}8}\right)-\Phi\left(\frac{-1{,}5}{0{,}8}\right)=\Phi\left(0{,}63\right)+\Phi\left(1{,}88\right)=$$
$$=0{,}2357+0{,}4699=0{,}7056\approx0{,}71.$$

Таким образом, 71 % яблок имеют диаметр от 4 до 6 см.

б) $$P\left(6<X<\infty\right)=\Phi\left(\frac{\infty-5{,}5}{0{,}8}\right)-\Phi\left(\frac{6-5{,}5}{0{,}8}\right)=\Phi\left(\infty\right)-\Phi\left(\frac{0{,}5}{0{,}8}\right)=\Phi\left(\infty\right)-\Phi\left(0{,}63\right)=$$
$$=0{,}5-0{,}2357=0{,}2643\approx0{,}26.$$

Итак, 26 % яблок имеют диаметр более 6 см.

Ответ: 71 %; 26 %.

Задача 15.

Суточный удой молока (кг) 60 коров, отобранных в случайном порядке, оказался равным:

16,5	18,5	15,7	20,6	20,5	22,4	24,6	22,5	23,4	22,8	15,8	16,7	18,9	23,5	18,6
26,8	25,1	16,7	20,6	21,4	19,5	21,6	24,5	22,5	21,0	19,1	22,6	24,1	23,0	23,5
20,3	20,4	21,5	22,3	21,7	20,6	24,6	21,8	21,0	23,1	19,6	19,8	18,6	14,1	21,8
21,4	26,6	24,3	25,1	22,4	18,5	16,7	19,5	20,4	22,6	21,5	22,5	22,0	23,6	24,2

Постройте гистограмму распределения. Вычислите среднюю, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

Решение: Найдём минимальное и максимальное значения признака: x_{min}=14,1, x_{max}=26,8. Разница между ними составляет: 26,8-14,1=12,7.

Теперь этот отрезок нужно разбить на интервалы одинаковой длины (частичные интервалы). Для определения количества частичных интервалов воспользуемся формулой: к=1+3,2lgn, где n=60 – объём выборки.

Итак, к=1+3,2lg60≈1+3,2·1,78≈7 (округляем до ближайшего целого числа). Определим длину частичных интервалов: $h=\frac{12,7}{7}\approx 1,9$ (округляем с избытком с точностью чисел, заданных в условии задачи, т.е. до десятых).

Итак, получаем следующие интервалы: 14,1 – 16,0; 16,0 – 17,9; 17,9 – 19,8; 19,8 – 21,7; 21,7 – 23,6; 23,6 – 25,5; 25,5 – 27,4.

Теперь заполним таблицу:

	Суточный удой (кг)	Разноска	Число коров (частоты m_i)	Накопленные частоты	Относительные частоты $W_i=\frac{m_i}{n}$	Плотности относительных частот $\frac{W_i}{h}$	Середины интервалов (x_i)
1	14,1 – 16,0		3	3	$\frac{3}{60}$	0,03	15,05
2	16,0 – 17,9		4	7	$\frac{4}{60}$	0,04	16,95
3	17,9 – 19,8		10	17	$\frac{10}{60}$	0,09	18,85
4	19,8 – 21,7		15	32	$\frac{15}{60}$	0,13	20,75
5	21,7 – 23,6		18	50	$\frac{18}{60}$	0,16	22,65
6	23,6 – 25,5		8	58	$\frac{8}{60}$	0,07	24,55
7	25,5 – 27,4		2	60	$\frac{2}{60}$	0,02	26,45
$\sum$	–	–	60	–	1	–	–

Разноска вариант осуществляется следующим образом: рассматриваем варианты в данном в условии задачи порядке и разносим их по соответствующим интервалам, отмечая точками (по вершинам квадратов) или чёрточками (по сторонам и диагоналям квадратов). Тогда все попавшие в интервалы значения располагаются достаточно компактно, и подсчитать их количество не составляет никакого труда. При этом если варианта попадает на границу двух интервалов, то её относят к первому из интервалов.

Изобразим полученный ряд графически, т.е. построим гистограмму. По горизонтали откладываем границы интервалов, по вертикали – значения соответствующих плотностей относительных частот (рис. 8).

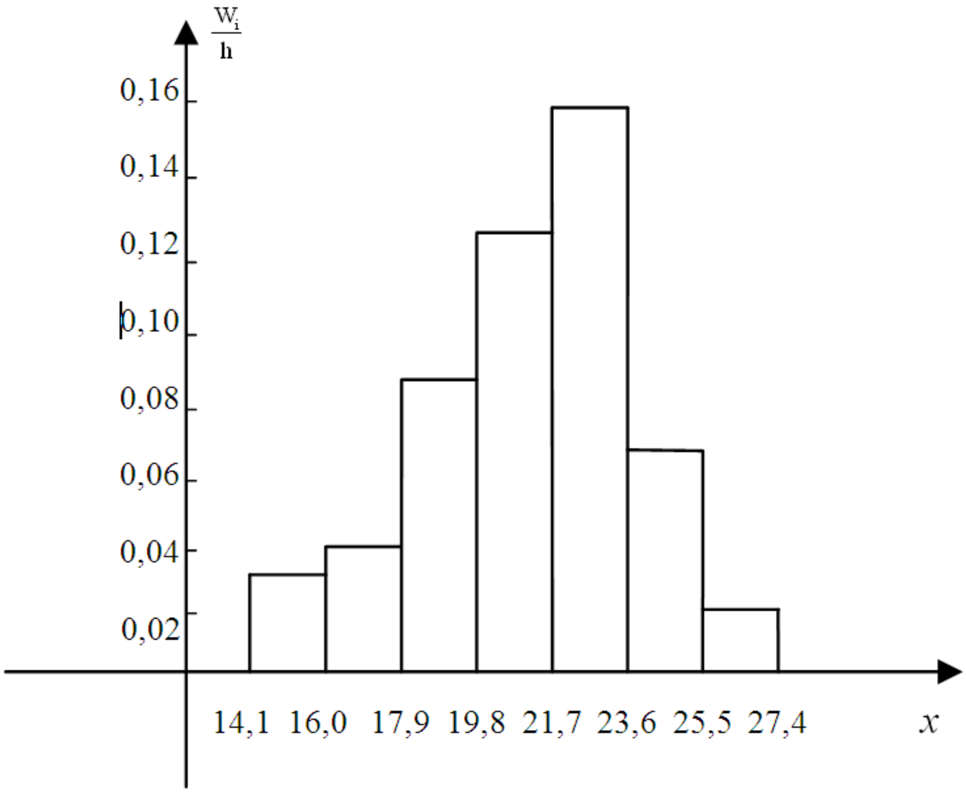


Рис. 7.

Теперь вычислим основные выборочные характеристики.

1) Начнём со средней:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i \, ,$$

где n – объём выборки, k – число интервалов, x_i – середины интервалов, m_i – частоты.

$$\bar{x} = \frac{1}{60}\left(15,05\cdot 3+16,95\cdot 4+18,85\cdot 10+20,75\cdot 15+22,65\cdot 18+24,55\cdot 8+26,45\cdot 2\right) = \frac{1}{60}(45,15+67,8+$$

$$+188,5+311,25+407,7+196,4+52,9) = \frac{1}{60}\cdot 1269,7 \approx 21,2.$$

Таким образом, средний суточный удой коров в данной выборке составляет 21,2 кг (результат оставляем с той же точностью, что и сами данные).

2) Мода – варианта, имеющая наибольшую частоту. Для интервального ряда её находят по формуле:

$$M_0 = x_{M_0} + h\frac{m_2 - m_1}{(m_2 - m_1) + (m_2 - m_3)}.$$

x_{M_0} – начало модального интервала (интервала с наибольшей частотой);
h – длина частичных интервалов;
m_1 – частота домодального интервала;
m_2 – частота модального интервала;
m_3 – частота замодального интервала.

В нашем случае больше всего значений содержится в 5-м интервале. Значит,
x_{M_0} =21,7;
h=1,9;
m_1=15;
m_2=18;
m_3=8.

Тогда $M_0 = 21,7 + 1,9 \cdot \frac{18-15}{(18-15)+(18-8)} = 21,7 + 1,9 \cdot \frac{3}{3+10} = 21,7 + \frac{5,7}{13} \approx 22,1.$

3) Медиана – варианта, делящая ряд распределения на две равные части. Для интервального ряда медиану находят по формуле:

$$M_e = x_{M_e} + h \cdot \frac{\frac{n}{2} - m_H}{m_{M_e}}.$$

x_{M_e} – начало медианного интервала;
h – длина частичных интервалов;
n – объём выборки;
m_H – накопленная частота домедианного интервала;
m_{M_e} – частота медианного интервала.

Сначала найдём половину объёма выборки: $\frac{n}{2} = \frac{60}{2} = 30.$ Затем по накопленным частотам определяем медианный интервал: накопленная частота 4-го интервала равна 32, значит, этот интервал находится в середине ряда распределения, т.е. является медианным. Тогда x_{M_e} =19,8; h=1,9; m_H =17; m_{M_e} =15.

$$M_e = 19,8 + 1,9 \cdot \frac{\frac{60}{2} - 17}{15} = 19,8 + 1,9 \cdot \frac{30-17}{15} = 19,8 + 1,9 \cdot \frac{13}{15} \approx 21,4.$$

4) Дисперсию можно вычислить по одной из следующих формул:

$$D=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\overline{x}\right)^2 m_i \quad или \quad D=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i^2 m_i-\left(\overline{x}\right)^2.$$

Воспользуемся первой формулой:

$$D=\frac{1}{60}\Big((15,05-21,2)^2\cdot 3+(16,95-21,2)^2\cdot 4+(18,85-21,2)^2\cdot 10+(20,75-21,2)^2\cdot 15+$$

$$+(22,65-21,2)^2\cdot 18+(24,55-21,2)^2\cdot 8+(26,45-21,2)^2\cdot 2\Big)=$$

$$=\frac{1}{60}(113,4675+72,25+55,225+3,0375+37,845+89,78+55,125)=\frac{1}{60}\cdot 426,73\approx 7,11.$$

5) Теперь найдём среднее квадратическое отклонение: $\sigma=\sqrt{D}=\sqrt{7,11}\approx 2,7.$ Значит, суточный удой коров в выборке отклоняется от среднего значения 21,2 кг в среднем на 2,7 кг.

6) Помимо абсолютных показателей изменчивости признака (дисперсии и среднего квадратического отклонения), существует относительный показатель – коэффициент вариации, который даёт характеристику степени изменчивости признака в процентах:

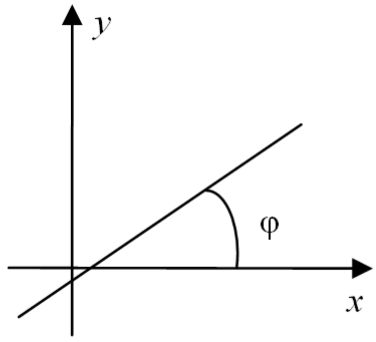
$$V=\frac{\sigma}{\overline{x}}\cdot 100\%=\frac{2,7}{21,2}\cdot 100\%\approx 12,7\%.$$

Ответ: $\overline{x}=21,2;$ M_o=22,1; M_e=21,4; D=7,11; σ=2,7, V=12,7 %.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Прямая на плоскости



φ – угол наклона прямой, φ∈ [0;π).
k=tg φ – угловой коэффициент, k∈(-∞;+∞).

<u>Стандартные уравнения прямой</u>

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b$$

k – угловой коэффициент прямой,
b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy.

2. Уравнение прямой с известным угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

k – угловой коэффициент прямой, (x_0, y_0)– координаты заданной точки.

3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

(x_1, y_1), (x_2, y_2) – координаты заданных точек.

4. Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0$$

A, B, C – некоторые числа, причём $A^2+B^2 \neq 0$.

Частные случаи уравнения:
y=b – уравнение прямой, параллельной оси Ox (y=0 – ось Ox).
x=a – уравнение прямой, параллельной оси Oy (x=0 – ось Oy).
y=kx – уравнение прямой, проходящей через начало координат.

Угол между прямыми

$$tg\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|,$$ где k_1, k_2 – угловые коэффициенты прямых.

Условие параллельности прямых: $\ell_2 \parallel \ell_1 \Leftrightarrow k_2=k_1$

Условие перпендикулярности прямых: $\ell_2 \perp \ell_1 \Leftrightarrow k_2=-\dfrac{1}{k_1}$

Дифференциальное исчисление

Опр. Производной функции y=f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Операция нахождения производной называется дифференцированием функции.

Геометрический смысл производной

Производная функции, вычисленная в точке x_0, равна угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику функции в этой точке:

$$y'(x_0)=k_{кас}$$

Биологический смысл производной

Пусть функция p=p(t) задаёт число особей в популяции в зависимости от времени t. Тогда производная этой функции, вычисленная в точке t_0, равна скорости размножения популяции (если она положительна, то это скорость размножения, если отрицательна – скорость вымирания) в момент времени t_0:

$$p'(t_0)=v(t_0)$$

Правила дифференцирования

1. $(Cu)'=Cu'$

2. $(u\pm v)'=u'\pm v'$

3. $(uv)'=u'v+uv'$

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

5. $f'(u(x))=f'_u\cdot u'_x$

Таблица производных

Основные элементарные функции	Сложные функции
1. $C' = 0.$	
2. $x' = 1.$	
3. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1},$	$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$
4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
5. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2},$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}\cdot u'$
6. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a,$	$\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a\cdot u'$
7. $\left(e^{x}\right)' = e^{x},$	$\left(e^{u}\right)' = e^{u}\, u'$
8. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a},$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'$
9. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x},$	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$
10. $\left(\sin x\right)' = \cos x,$	$\left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u'$
11. $\left(\cos x\right)' = -\sin x,$	$\left(\cos u\right)' = -\sin u\cdot u'$
12. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},$	$\left(tgu\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
13. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},$	$\left(ctgu\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
14. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
15. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
16. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2},$	$\left(arctgu\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
17. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2},$	$\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Интегральное исчисление

Опр. Функция F(x) называется первообразной для функции f(x), если выполнено равенство: $F'(x)=f(x)$.
Опр. Общее выражение множества всех первообразных для функции f(x) называется неопределённым интегралом от этой функции.

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

Опр. Операция нахождения первообразной называется интегрированием функции.

<u>Свойства неопределённого интеграла</u>

1. $\int \alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx,\ \alpha-const,$
2. $\int \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx,$
3. $\int f(ax+b)dx=\dfrac{1}{a}F(ax+b)+C.$

<u>Таблица основных интегралов</u>

1. $\int dx=x+C$
2. $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq-1$
3. $\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$
4. $\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$
5. $\int e^{x}dx=e^{x}+C$
6. $\int \sin x dx=-\cos x+C$
7. $\int \cos x dx=\sin x+C$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C$
10. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|+C$ *или* $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+m}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|+C$

Определённый интеграл

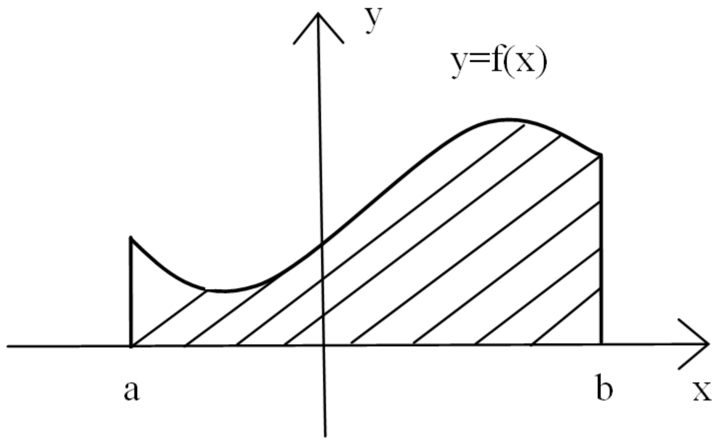
Опр. Пусть функция f(x) определена и непрерывна на отрезке [a;b]. Определённым интегралом от функции f(x) по отрезку [a;b] называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ при $n\to\infty$ и $\lambda\to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка, ни от выбора промежуточных точек x_i:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

n – число отрезков, на которые разбит отрезок [a;b], λ – длина наибольшего отрезка, x_i – некоторая точка i-го отрезка.

Формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Геометрический смысл: Определённый интеграл равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке [a;b] функции y=f(x), прямыми x=a, x=b и осью Ox: $\int_a^b f(x)dx = S_{кр.тр.}$



Свойства определённого интеграла

1. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, где\ C - const,$

2. $\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx,$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$

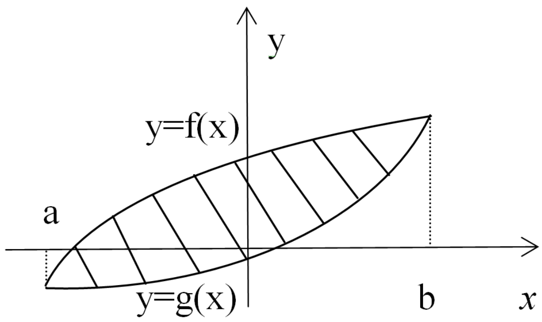
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, где\ c \in [a;b],$

5. $\int_a^a f(x)dx = 0,$

6. $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, \textit{если } f(x) - \textit{нечётная функция}, \\ 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx, \textit{если } f(x) - \textit{чётная}, \end{cases}$

7. $\textit{Если } f(x) \geq 0 (\leq 0) \textit{ при всех } x \in [a;b], \textit{ то } \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \geq 0 (\leq 0).$

Геометрические приложения: площадь фигуры



$$S_{ф.} = \int\limits_{a}^{b} \left(f(x) - g(x) \right) dx,$$

где a и b – абсциссы точек пересечения графиков, которые находят из уравнения f(x)=g(x).

Дифференциальные уравнения

Опр. Дифференциальное уравнение – это уравнение, связывающее независимую переменную, её функцию и производные или дифференциалы различных порядков этой функции, при этом порядок старшей производной или дифференциала называется порядком уравнения.

$$F\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)\right) = 0 \; -$$

общий вид дифференциального уравнения n-го порядка

Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными

Общий вид: $y'(x) = f(x)g(y) \textit{ или } f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$

Схема решения

$$y' = f(x)g(y).$$

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)\Big| \cdot dx,$$

$$dy = f(x)g(y)dx\Big| : g(y),$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx,$$

$$G(y) = F(x) + C.$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0$$

Корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$	**Общее решение дифференциального уравнения**
D>0, $k_1 \neq k_2$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
D=0, $k_1 = k_2$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}$
D<0, $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексные числа, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.	$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$

Ряды

Опр. Рядом называется бесконечная сумма членов некоторой последовательности, общий член которой является функцией номера n.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n = f(n), n \in N$$

Ряды

↙ ↘

числовые функциональные

Числовые ряды

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ – n-я частичная сумма.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} S - const. \Rightarrow \text{ряд сходится}, S - \text{сумма ряда}, \\ \infty \Rightarrow \text{расходится}. \end{cases}$$

$R_n = S - S_n$ – остаток сходящегося ряда.

Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов

Необходимый признак сходимости (достаточный признак расходимости):

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ расходится}$$

Признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \Rightarrow \begin{cases} l < 1 \Rightarrow \text{сходится}, \\ l > 1 \Rightarrow \text{расходится}, \\ l = 1 \Rightarrow ?\ (\text{вопрос о сходимости ряда не решён}) \end{cases}$$

Алгебраический признак Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \Rightarrow \begin{cases} l < 1 \Rightarrow \text{сходится}, \\ l > 1 \Rightarrow \text{расходится}, \\ l = 1 \Rightarrow ? \end{cases}$$

Интегральный признак

Пусть f(x) – непрерывная, положительная и убывающая функция при x≥1. Тогда

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx - \text{сходится (расходится)} \Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ где } u_n = f(n), n \in N,$$
$$\text{тоже сходится (расходится)}.$$

1-й признак сравнения

$$u_n \geq v_n \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ сходится}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ расходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ расходится}. \end{cases}$$

2-й признак сравнения (предельный)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}\neq\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}\Rightarrow \text{ряды } \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}v_n \text{ сходятся (расходятся) одновременно.}$$

Стандартные числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1} - \textit{геометрическая прогрессия}, \begin{cases}|q|<1\Rightarrow \textit{сходится},\\ |q|\geq 1\Rightarrow \textit{расходится},\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \textit{гармонический ряд, расходится},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} - \textit{обобщённый гармонический ряд}, \begin{cases}p>1\Rightarrow \textit{сходится},\\ p\leq 1\Rightarrow \textit{расходится}.\end{cases}$$

Знакочередующиеся числовые ряды

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n, u_n>0\ .$$

Признак Лейбница: $\left.\begin{matrix}1. u_1>u_2>u_3>\ldots\\ 2. \lim\limits_{n\to\infty}u_n=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \textit{ сходится}$

$$\left.\begin{matrix}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n - \textit{сходится}\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n - \textit{сходится}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n - \textit{сходится абсолютно.}$$

$$\left.\begin{matrix}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n - \textit{сходится}\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n - \textit{расходится}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n - \textit{сходится условно.}$$

Теорема: Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, составленный из абсолютных величин знакочередующегося ряда, сходится, то данный знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Функциональные ряды

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), u_n(x)=f(n;x), n\in N$$

Частным случаем функциональных рядов являются степенные ряды:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$x \in (-R; R)$ – область сходимости степенного ряда.

$\mathrm{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ – радиус сходимости.

Опр. Разложением функции f(x) в ряд по степеням (x-a) (рядом Тейлора) называется ряд вида:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Опр. Ряд Тейлора при a=0 называется рядом Маклорена.

Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ..., \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ..., \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ..., \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ..., \quad x \in (-1; 1]$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ..., x \in (-1; 1)$$

$$\mathrm{arc}\,tgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ..., \quad x \in [-1; 1]$$

Примечание: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ – факториал.

Теория вероятностей

Комбинаторика

$P_n = n!$ – число перестановок из n элементов, где n!=1·2·3·4·…·n – факториал, 0!=1.

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n элементов по к элементов.

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ – число размещений из n элементов по к элементов.

Вероятность события

Опр. Вероятность события – это число, характеризующее степень возможности появления события.

Классическое определение вероятности события: $P(A) = \frac{m}{n}$, где n – число всех исходов испытания, m – число благоприятствующих событию А исходов.

$$0 \le P(A) \le 1$$

$W(A) = \frac{M}{N}$ – относительная частота события , $W(A) \approx P(A)$.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

$$P(A+B) = \begin{cases} P(A)+P(B), \text{ если } A \text{ и } B \text{ несовместны;} \\ P(A)+P(B)-P(AB), \text{ если } A \text{ и } B \text{ совместны.} \end{cases}$$

$$P(AB) = \begin{cases} P(A)P(B), \text{ если } A \text{ и } B \text{ независимы;} \\ P(A)P_A(B), \text{ если } A \text{ и } B \text{ зависимы.} \end{cases}$$

Следствия:

1. $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$, если события попарно несовместны.
2. $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$, если события образуют полную группу.
3. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
4. $P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$, если события независимы.
5. $P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)...P_{A_1...A_{n-1}}(A_n)$, если события зависимы.

Формула полной вероятности. Формула Байеса

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + ...P(H_n)P_{H_n}(A)$$

$H_1, H_2, ..., H_n$ – гипотезы, $P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1$.

Формула Байеса: $P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad i = 1..n$

Независимые повторные испытания

Название формулы	Формула	Условия применения
Формула Бернулли	$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$	n мало
Локальная формула Лапласа	$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Свойства φ(x): 1. φ(-x)=φ(x); 2. значения функции занесены в таблицу, причём если x>3,99, то φ(x)≈0.	n – велико
Формула Пуассона	$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, где λ=np	n – велико (n≥100), p – мало (p≤0,1)
Интегральная формула Лапласа	$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$ где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа. Свойства Φ(x) : 1. -0,5< Φ(x) <0,5; 2. Φ(-x)=-Φ(x); 3. значения функции занесены в таблицу, причём если x>5, то Φ(x)≈0,5.	n – велико, $k \in [k_1, k_2]$

Наиболее вероятное число наступлений события при повторных испытаниях:

$$np - q \le k_0 \le np + p$$

Случайные величины

Дискретная случайная величина

Опр. Дискретной случайной величиной (ДСВ) называется величина, возможные значения которой изолированы друг от друга, и их можно занумеровать.

Закон распределения ДСВ задаётся в виде таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – возможные значения величины, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – их вероятности, причём $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Числовые характеристики дискретной случайной величины

1) Математическое ожидание: $M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$

Вероятностный смысл: математическое ожидание величины приближённо равно её среднему значению.

Свойства M(X): $\begin{cases} M(C)=C, \\ M(CX)=CM(X), \\ M(X\pm Y)=M(X)\pm M(Y), \\ M(XY)=M(X)M(Y). \end{cases}$

2) Дисперсия – число, характеризующее степень разброса значений величины вокруг её среднего значения.

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M(X)\right)^2 p_i = \left(x_1 - M(X)\right)^2 p_1 + ... + \left(x_n - M(X)\right)^2 p_n$$

или

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i - M^2\left(X\right)=x_1^2 p_1 + ... + x_n^2 p_n - M^2\left(X\right)$$

Свойства D(X): $\begin{cases} D(X)\geq 0, \\ D(C)=0, \\ D(CX)=C^2 D(X), \\ D(X\pm Y)=D(X)+D(Y). \end{cases}$

3) Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

4) Мода (Mo) – наиболее вероятное значение.

5) Медиана (Me) – значение, делящее распределение на две равные части.

Виды распределения ДСВ

Вид	Случайная величина X	Формула p_k	Числовые характеристики
Биномиальное	X – число наступлений события A в n повторных независимых испытаниях.	$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$	$M(X)=np, \quad D(X)=npq$
Пуассона	X – число наступлений события A в n повторных независимых испытаниях, причём n - велико (n≥100), p – мало (p≤0,1).	$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda=np$	$M(X)=D(X)=\lambda=np$
Геометрическое	X – число испытаний, проведённых до первого появления события A.	$P_k=q^{k-1}p$ Если число испытаний ограничено, то $P_n=q^{n-1}p+q^n$	По общим формулам

Непрерывная случайная величина

Опр. Непрерывной случайной величиной (НСВ) называется величина, возможные значения которой непрерывно заполняют собой некоторый конечный или бесконечный интервал.

$\boxed{F(x) = P(X < x)}$ – функция распределения вероятностей случайной величины.

Свойства F(x): $\begin{cases} 0 \le F(x) \le 1, \\ x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2), \\ P\{x_1 \le X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1), \\ F(+\infty) = 1, \\ F(-\infty) = 0. \end{cases}$

$f(x) = F'(x)$ – плотность распределения вероятностей НСВ.

Свойства f(x): $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \\ P\{x_1 \le X \le x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx, \\ F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx. \end{cases}$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

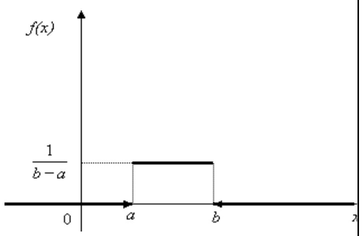
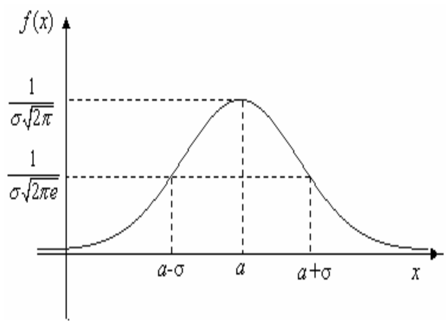
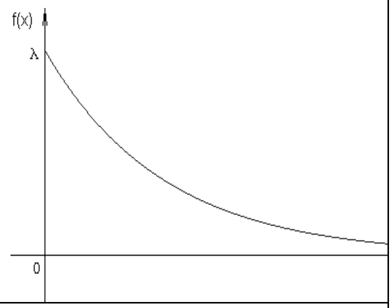
1) Математическое ожидание: $M(X) = \int\limits_a^b xf(x)dx$

2) Дисперсия:

$$D(X) = \int\limits_a^b \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx \quad \text{или} \quad D(X) = \int\limits_a^b x^2 f(x)dx - M^2(X)$$

3) Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Виды распределения НСВ

	Равномерное	**Нормальное**	**Показательное**
Плотность распределения	$f(x)=\begin{cases}0, x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b\\ 0, x>b\end{cases}$ 	$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ 	$f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0\end{cases}$ 
Функция распредел ения	$F(x)=\begin{cases}0, x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b\\ 1, x>b\end{cases}$	$F(x)=0,5-\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$	$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, x\ge 0\end{cases}$
Числовые характеристики	$M(X)=\dfrac{a+b}{2}$ $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$	$M(X)=a, D(X)=\sigma^2,$ $\sigma(X)=\sigma$	$M(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$ $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$
Вероятность попадания в интервал	$P(\alpha<X<\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$	$P(\alpha<X<\beta)=$ $=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right),$ $P(\lvert X-a\rvert<\delta)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$ Правило трёх сигм: $P(\lvert X-a\rvert<3\sigma)=P(a-3\sigma<X<a+3\sigma)\approx 1$	$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\alpha\lambda}-e^{-\beta\lambda}$

Закон больших чисел

Неравенство Чебышева: $P\left(\left|X - M(X)\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

Теорема Чебышева: $P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ...M(X_n)}{n}\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$,

где $D(X_i) \le C, i = 1...n.$

Теорема Бернулли: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$

Элементы математической статистики

Выборочная средняя: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i$

Дисперсия: $D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i$ *или* $D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i - \left(\overline{x}\right)^2$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D}$

Коэффициент вариации: $V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100\,\%$

Мода: $M_0 = x_{м_0} + h\frac{m_2 - m_1}{\left(m_2 - m_1\right) + \left(m_2 - m_3\right)}$.

x_{M_0} – начало модального интервала (интервала с наибольшей частотой);
h – длина частичных интервалов;
m_1 – частота домодального интервала;
m_2 – частота модального интервала;
m_3 – частота замодального интервала.

Медиана: $M_e = x_{м_e} + h \cdot \frac{\frac{n}{2} - m_H}{m_{M_e}}$.

x_{M_e} – начало медианного интервала;
h – длина частичных интервалов;
n – объём выборки;
m_H – накопленная частота домедианного интервала;
m_{M_e} – частота медианного интервала.

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0024
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,37	0,1443	0,74	0,2703	1,11	0,3665	1,48	0,4306
0,01	0,0040	0,38	0,1480	0,75	0,2734	1,12	0,3686	1,49	0,4319
0,02	0,0080	0,39	0,1517	0,76	0,2764	1,13	0,3708	1,50	0,4332
0,03	0,0120	0,40	0,1554	0,77	0,2794	1,14	0,3729	1,51	0,4345
0,04	0,0160	0,41	0,1591	0,78	0,2823	1,15	0,3749	1,52	0,4357
0,05	0,0199	0,42	0,1628	0,79	0,2852	1,16	0,3770	1,53	0,4370
0,06	0,0239	0,43	0,1664	0,80	0,2881	1,17	0,3790	1,54	0,4382
0,07	0,0279	0,44	0,1700	0,81	0,2910	1,18	0,3810	1,55	0,4394
0,08	0,0319	0,45	0,1736	0,82	0,2939	1,19	0,3830	1,56	0,4406
0,09	0,0359	0,46	0,1772	0,83	0,2967	1,20	0,3849	1,57	0,4418
0,10	0,0398	0,47	0,1808	0,84	0,2995	1,21	0,3869	1,58	0,4429
0,11	0,0438	0,48	0,1844	0,85	0,3023	1,22	0,3883	1,59	0,4441
0,12	0,0478	0,49	0,1879	0,86	0,3051	1,23	0,3907	1,60	0,4452
0,13	0,0517	0,50	0,1915	0,87	0,3078	1,24	0,3925	1,61	0,4463
0,14	0,0557	0,51	0,1950	0,88	0,3106	1,25	0,3944	1,62	0,4474
0,15	0,0596	0,52	0,1985	0,89	0,3133	1,26	0,3962	1,63	0,4484
0,16	0,0636	0,53	0,2019	0,90	0,3159	1,27	0,3980	1,64	0,4495
0,17	0,0675	0,54	0,2054	0,91	0,3186	1,28	0,3997	1,65	0,4505
0,18	0,0714	0,55	0,2088	0,92	0,3212	1,29	0,4015	1,66	0,4515
0,19	0,0753	0,56	0,2123	0,93	0,3238	1,30	0,4032	1,67	0,4525
0,20	0,0793	0,57	0,2157	0,94	0,3264	1,31	0,4049	1,68	0,4535
0,21	0,0832	0,58	0,2190	0,95	0,3289	1,32	0,4066	1,69	0,4545
0,22	0,0871	0,59	0,2224	0,96	0,3315	1,33	0,4082	1,70	0,4554
0,23	0,0910	0,60	0,2257	0,97	0,3340	1,34	0,4099	1,71	0,4564
0,24	0,0948	0,61	0,2291	0,98	0,3365	1,35	0,4115	1,72	0,4573
0,25	0,0987	0,62	0,2324	0,99	0,3389	1,36	0,4131	1,73	0,4582
0,26	0,1026	0,63	0,2357	1,00	0,3413	1,37	0,4147	1,74	0,4591
0,27	0,1064	0,64	0,2389	1,01	0,3438	1,38	0,4162	1,75	0,4599
0,28	0,1103	0,65	0,2422	1,02	0,3461	1,39	0,4177	1,76	0,4608
0,29	0,1141	0,66	0,2454	1,03	0,3485	1,40	0,4192	1,77	0,4616
0,30	0,1179	0,67	0,2486	1,04	0,3508	1,41	0,4207	1,78	0,4625
0,31	0,1217	0,68	0,2517	1,05	0,3531	1,42	0,4222	1,79	0,4633
0,32	0,1255	0,69	0,2549	1,06	0,3554	1,43	0,4236	1,80	0,4641
0,33	0,1293	0,70	0,2580	1,07	0,3577	1,44	0,4251	1,81	0,4649
0,34	0,1331	0,71	0,2611	1,08	0,3599	1,45	0,4265	1,82	0,4656
0,35	0,1368	0,72	0,2642	1,09	0,3621	1,46	0,4279	1,83	0,4664
0,36	0,1406	0,73	0,2673	1,10	0,3643	1,47	0,4292	1,84	0,4671

Таблица значений функции Ф(x), продолжение

	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
1,85	0,4678	2,00	0,4772	2,30	0,4893	2,60	0,4953	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,02	0,4783	2,32	0,4898	2,62	0,4956	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,04	0,4793	2,34	0,4904	2,64	0,4959	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,06	0,4803	2,36	0,4909	2,66	0,4961	2,96	0,4985
1,89	0,4706	2,08	0,4812	2,38	0,4913	2,68	0,4963	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,10	0,4821	2,40	0,4918	2,70	0,4965	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,12	0,4830	2,42	0,4922	2,72	0,4967	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,14	0,4838	2,44	0,4927	2,74	0,4969	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,16	0,4846	2,46	0,4931	2,76	0,4971	3,60	0,499841
1,94	0,4738	2,18	0,4854	2,48	0,4934	2,78	0,4973	3,80	0,499928
1,95	0,4744	2,20	0,4861	2,50	0,4938	2,80	0,4974	4,00	0,499968
1,96	0,4750	2,22	0,4868	2,52	0,4941	2,82	0,4976	4,50	0,499997
1,97	0,4756	2,24	0,4875	2,54	0,4945	2,84	0,4977	5,00	0,49999997
1,98	0,4761	2,26	0,4881	2,56	0,4948	2,86	0,4979		
1,99	0,4767	2,28	0,4887	2,58	0,4951	2,88	0,4980		