Индивидуальное домашнее задание № 1

Индивидуальное домашнее задание № 1 содержит *две* задачи.

На рис. 1 представлен граф электрической цепи, *общий для обеих задач.* Граф содержит 4 узла – *a*, *b*, *c*, *d*, между которыми включены 6 ветвей – *ab*, *ac*, *bc*, *bd*, *da*, *dc*. Ветви содержат активные и пассивные элементы электрической цепи и обозначены номерами 1…6 (рис. 2). В табл. 1 приведены номера вариантов задания от 1 до 25 с указанием номеров элементов электрической цепи, включенных между узлами (номер варианта равен индивидуальному номеру студента). Параметры ветвей электрической цепи приведены в табл. 2.

Часть 2

Для электрической цепи, схема и параметры которой соответствуют номеру варианта, при параметрах источников

$$e_1(t) = E_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + 90^\circ) \text{ В},$$

$$e_2(t) = E_2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - 45^\circ) \text{ В},$$

$$J(t) = J \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + 30^\circ) \text{ А},$$

$f = 50$ Гц

выполнить следующее:

1. Преобразовать схему, заменив ветви с параллельным и последовательным соединениями резисторов на эквивалентные, и составить в общем (буквенном) виде полную систему уравнений состояния цепи по законам Кирхгофа в дифференциальной форме.

2. Представить сопротивления ветвей и действующие значения ЭДС и тока источников в комплексной форме и изобразить комплексную схему замещения цепи.

3. В полученной схеме любым известным методом рассчитать комплексы действующих значений токов ветвей и напряжения на источнике тока.

4. Составить баланс активных и реактивных мощностей источников и потребителей электрической энергии. Небаланс как по активной, так и по реактивной мощностям не должен превышать 3 %.

5. Изобразить схему включения ваттметра для измерения активной мощности в ветви с индуктивностью L_5 и определить его показание.

6. Построить топографическую векторную диаграмму напряжений, совмещенную с лучевой векторной диаграммой токов, при этом потенциал узла *a* принять равным нулю.

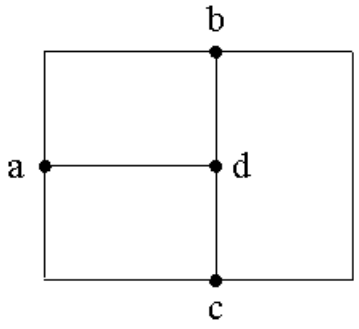

Рис. 1. Граф электрической цепи

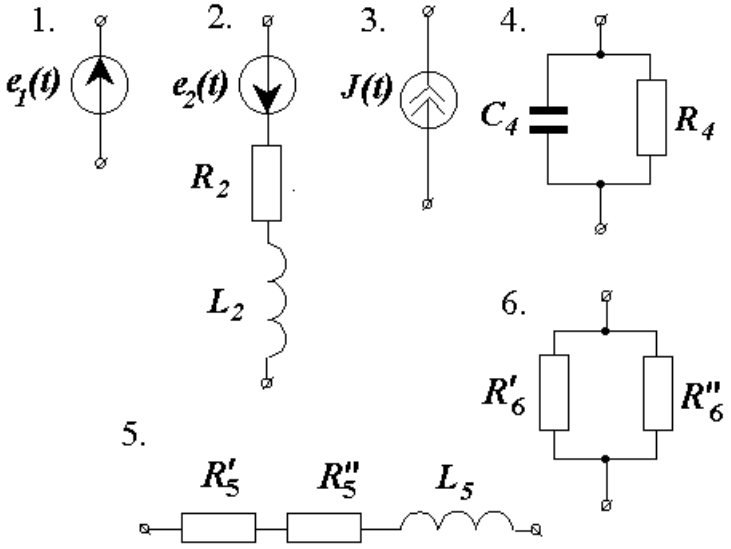

Рис. 2. Элементы электрической цепи

Таблица 1

Варианты компоновки электрической цепи

Ветвь / № вар.	***ab***	***ac***	***bc***	***bd***	***da***	***dc***
1	1	2	3	4	5	6
2	6	1	2	3	4	5
3	5	6	1	2	3	4
4	4	5	6	1	2	3
5	3	4	5	6	1	2
6	2	1	3	4	5	6
7	6	2	1	3	4	5
8	5	6	2	1	3	4
9	4	5	6	2	1	3
10	3	4	5	6	2	1
11	1	2	4	3	5	6
12	6	1	2	4	3	5
13	5	6	1	2	4	3
14	3	5	6	1	2	4
15	4	3	5	6	1	2
16	1	4	3	2	6	5

17	5	1	4	3	2	6
18	6	5	1	4	3	2
19	2	6	5	1	4	3
20	3	2	6	5	1	4
21	1	3	2	5	4	6
22	6	1	3	2	5	4
23	4	6	1	3	2	5
24	5	4	6	1	3	2
25	2	5	4	6	1	3

Таблица 2

Параметры элементов электрической цепи

	E_1	E_2	J	R_2	R_4	R_5'	R_5''	R_6'	R_6''	L_2	L_5	C_4
№ вар.	В	В	А	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	мГн	мГн	мкФ
нечет.	100	50	2	10	8	8	4	12	6	31,9	28,6	398
четн.	50	100	5	15	10	6	6	18	9	47,8	51,0	318,4

Методические указания к заданию 1, часть 2

1. Изобразим схему электрической цепи для условного варианта, рассмотренного в методических указаниях к задаче 1.1 (рис. 9).

2. В общем (буквенном) виде составляем полную систему уравнений состояния цепи по законам Кирхгофа для расчета токов всех ветвей и напряжения на источнике тока.

Схема содержит $У = 4$ узла и $В = 7$ ветвей. Следовательно, по первому закону Кирхгофа можно составить $У - 1 = 4 - 1 = 3$ независимых уравнения, а по второму закону Кирхгофа $В - У + 1 = 7 - 4 + 1 = 4$ независимых уравнения.

Узел a: $i_6 - i_1 - i_5 = 0.$

Узел b: $i_1 - i_{R4} - i_{C4} = -J.$

Узел d: $i_5 - i_2 = J.$

Контур 1: $$U_J - i_5 \cdot R_5 - L_5 \frac{di_5}{dt} = e_1.$$

Контур 2: $i_5 \cdot R_5 + L_5 \dfrac{di_5}{dt} + i_2 \cdot R_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} + i_6 \cdot R_6 = e_2.$

Контур 3: $i_2 \cdot R_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} - i_{R4} \cdot R_4 + u_J = e_2.$

Контур 4: $\dfrac{1}{C} \cdot \int i_{C4} \cdot dt - i_{R4} \cdot R_4 = 0.$

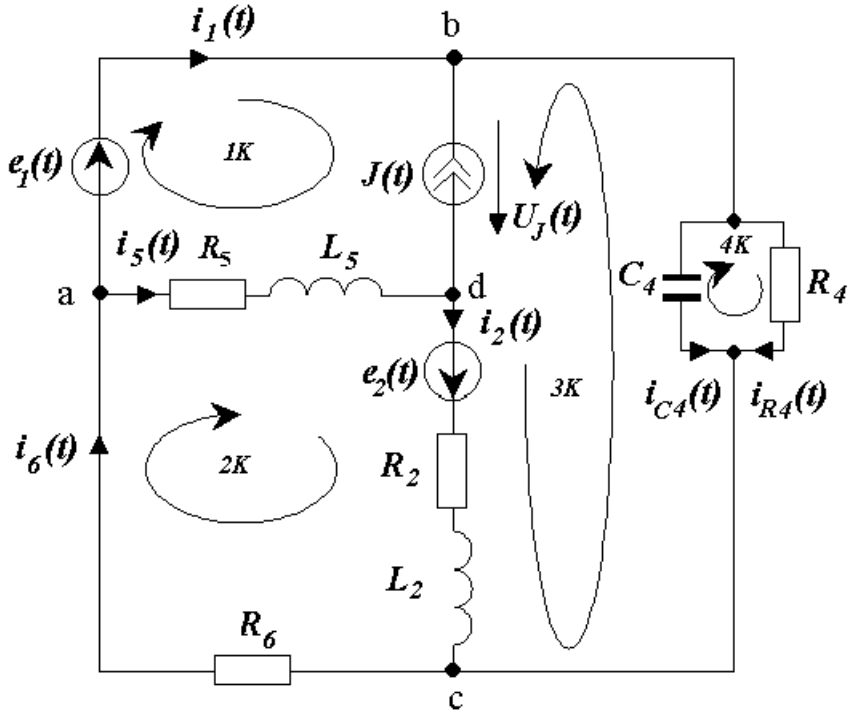

Рис. 3. Схема электрической цепи переменного тока

3. Определим реактивные сопротивления индуктивностей и емкости:

$$x_L = \omega \cdot L_2 = 314{,}159 \cdot 0{,}0319 = 10 \text{ Ом};$$

$$x_L = \omega \cdot L_5 = 314{,}159 \cdot 0{,}051 = 16 \text{ Ом};$$

$$x_C = \frac{1}{\omega \cdot C_4} = \frac{1}{314{,}159 \cdot 212{,}3 \cdot 10^{-6}} = 15 \text{ Ом}.$$

Здесь и далее $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot 3{,}14159 \cdot 50 = 314{,}159$ рад/с – круговая частота источников ЭДС и тока.

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j \cdot x_L = 10 + j \cdot 10 = 14{,}1 \cdot e^{j \cdot 45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_4 = \frac{R_4 \cdot (-j \cdot x_C)}{R_4 - j \cdot x_C} = \frac{15 \cdot (-j \cdot 15)}{15 - j \cdot 15} = 7{,}5 - j \cdot 7{,}5 = 10{,}575 \cdot e^{-j \cdot 45^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_5 = R_5 + j \cdot x_L = 12 + j \cdot 16 = 20 \cdot e^{j \cdot 53{,}13^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_6 = R_6 = 4 \text{ Ом}.$$

Комплексы действующих значений ЭДС и тока источников:

$$\underline{E}_1 = 100 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} = (0 + j \cdot 100) \text{ В};$$

$$\underline{E}_2 = 50 \cdot e^{-j \cdot 45^\circ} = (35{,}46 - j \cdot 35{,}46) \text{В};$$

$$\underline{J} = 2 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = (1{,}73 + j \cdot 1) \text{ А}.$$

Расчетная схема с комплексными источниками ЭДС и тока и комплексными сопротивлениями ветвей показана на рис. 10.

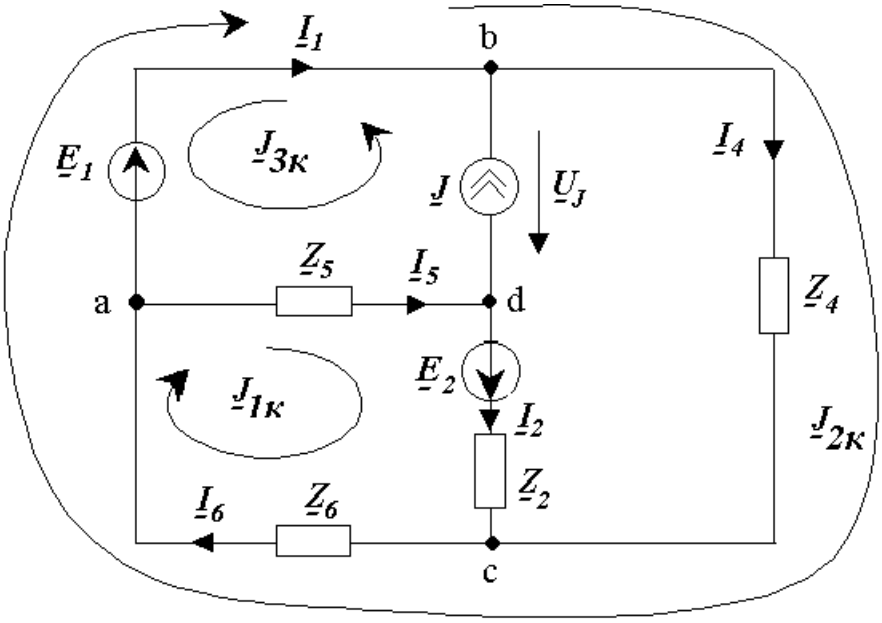

Рис. 4. Расчетная схема замещения электрической цепи

Токи в ветвях схемы определим методом контурных токов. Через ветвь с источником тока проходит контурный ток $\underline{J}_{3к}$, поэтому

$$\underline{J}_{3к} = \underline{J} = 2\ e^{j\,30^\circ} \text{ А}.$$

Для контурных токов $\underline{J}_{1к}$ и $\underline{J}_{2к}$ составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \underline{J}_{1к} \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6) + \underline{J}_{2к} \cdot \underline{Z}_6 = \underline{E}_2 - \underline{J} \cdot \underline{Z}_5; \\ \underline{J}_{1к} \cdot \underline{Z}_6 + \underline{J}_{2к} \cdot (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6) = \underline{E}_1. \end{cases}.$$

Или, численно:

$$\begin{cases} \underline{J}_{1к} \cdot (26 + j \cdot 26) + \underline{J}_{2к} \cdot (4 + j \cdot 0) = 30,675 - j \cdot 75,172; \\ \underline{J}_{1к} \cdot (4 + j \cdot 0) + \underline{J}_{2к} \cdot (11,4 - j \cdot 7,5) = 0 + j \cdot 100). \end{cases}$$

Решив систему, получим:

$$\underline{J}_к = -1,066 - j \cdot 2,9 = 3,09 \cdot e^{j \cdot 250°} \text{ А};$$

$$\underline{J}_{2к} = -4,23 + j \cdot 7,0 = 8,18 \cdot e^{j121.14°} \text{ А}.$$

Токи в ветвях схемы определятся как

- $\underline{I}_1 = \underline{J}_{2к} - \underline{J}_{3к} = -4,23 + j \cdot 7,0 - 1,73 - j \cdot 1,0 = -5,96 + j\,6,0 =$
$= 8,46 \cdot e^{j134.8°}$ А;
- $\underline{I}_2 = \underline{J}_{1к} = -1,066 - j \cdot 2,9 = 3,09\ e^{j250°}$ А;
- $\underline{I}_4 = \underline{J}_{2к} = -4,23 + j \cdot 7,0 = 8,18\ e^{j121.14°}$ А;
- $\underline{I}_5 = \underline{J}_{1к} + \underline{J}_{3к} = -1,066 - j \cdot 2,9 + 1,73 + j \cdot 1,0 = 0,66 - j \cdot 1,9 =$
$= 2,01 \cdot e^{-j70.8°}$ А;
- $\underline{I}_6 = \underline{J}_{1к} + \underline{J}_{2к} = -1,066 - j \cdot 2,9 - 4,23 + j \cdot 7,0 = -5,3 + j \cdot 4,1 =$
$= 6,7 \cdot e^{j142.2°}$ А.

Согласно второму закону Кирхгофа, $\underline{U}_J - \underline{I}_5 \cdot \underline{Z}_5 = \underline{E}_1$.

Отсюда $\underline{U}_J = \underline{I}_5 \cdot \underline{Z}_5 + \underline{E}_1 = j \cdot 100 + 2,01 \cdot e^{-j70.8°} \cdot 20 \cdot e^{j53.13°} =$
$= j \cdot 100 + 38,3 - j \cdot 87,8 = 38,3 + j \cdot 87,8 = 95,79 \cdot e^{j66.43°}$ В.

4. Составим баланс активной и реактивной мощностей.

Полная мощность источников составит:

$$\underline{S}_и = P_и + j \cdot Q_и = \underline{E}_1 \cdot \overset{*}{\underline{I}}_1 + \underline{E}_2 \cdot \overset{*}{\underline{I}}_2 + \underline{U}_J \cdot \overset{*}{\underline{J}} =$$
$$= 100 \cdot e^{j \cdot 90°} \cdot 8,46 \cdot e^{-j \cdot 134,8°} + 50 \cdot e^{-j45°} \cdot 3,09 \cdot e^{-j250°} + 95,79 \cdot e^{j66,43°} \cdot 2 \cdot e^{-j30°} =$$
$$= 600,3 - j \cdot 596,12 + 65,3 + j \cdot 140 + 154,14 + j \cdot 113,76 = 819,73 - j \cdot 342,3 \text{ ВА}.$$

Здесь $\overset{*}{\underline{I}}$ – сопряженный комплекс тока.

Таким образом, активная мощность источников энергии составит $P_и = 819,73$ Вт; реактивная мощность – $Q_и = -342,3$ ВАр.

Активная мощность потребителей

$$P_{\text{п}} = I_2^2 \cdot R_2 + I_4^2 \cdot R_4 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6 =$$
$$= 3{,}09^2 \cdot 10 + 8{,}18^2 \cdot 7{,}5 + 2{,}01^2 \cdot 12 + 6{,}7^2 \cdot 4 = 825{,}36 \text{ Вт}$$

Реактивная мощность потребителей

$$Q_{\text{п}} = I_2^2 \cdot x_2 - I_4^2 \cdot x_4 + I_5^2 \cdot x_5 =$$
$$= 3{,}09^2 \cdot 10 - 8{,}18^2 \cdot 7{,}5 + 2{,}01^2 \cdot 16 = -341{,}7 \text{ ВАр}$$

Погрешность расчета (небаланс) составила:

- по активной мощности

$$\delta_P = \left| \frac{P_{\text{и}} - P_{\text{п}}}{P_{\text{и}}} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{819{,}73 - 825{,}36}{819{,}73} \right| \cdot 100\% = 0{,}68\% \ ;$$

- по реактивной мощности

$$\delta_Q = \left| \frac{Q_{\text{и}} - Q_{\text{п}}}{Q_{\text{п}}} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{-342{,}3 + 341{,}7}{-342{,}3} \right| \cdot 100\% = 0{,}17\% \ .$$

Таким образом, небаланс как по активной, так и по реактивной мощности в пределах допуска ($\delta \leq 1$ %).

5. Изобразим схему включения ваттметра для измерения активной мощности в ветви, содержащей сопротивление $\underline{Z}_5$. Очевидно, что для измерения мощности, потребляемой сопротивлением $\underline{Z}_5$, необходимо, чтобы обмотка напряжения ваттметра была включена параллельно, а токовая обмотка – последовательно с сопротивлением $\underline{Z}_5$ (рис. 11).

Напряжение на обмотке ваттметра

$$\underline{U}_w = \underline{\varphi}_a - \underline{\varphi}_d = \underline{I}_5 \cdot \underline{Z}_5 = 2{,}01 \cdot e^{-j70.8^\circ} \cdot 20 \cdot e^{j53.13^\circ} = 40{,}2 \cdot e^{-j17.67^\circ} \text{ В.}$$

Ток, протекающий через токовую обмотку ваттметра, равен:

$$\underline{I}_W = \underline{I}_5 = 2{,}01 \cdot e^{-j70.8^\circ} \text{ А.}$$

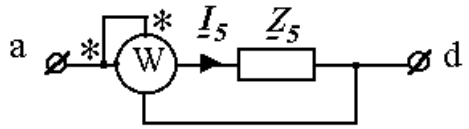

Рис. 5. Схема включения ваттметра

Показание ваттметра

$P_W = U_W \cdot I_W \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) = 40{,}2 \cdot 2{,}01 \cdot \cos(-17{,}67^\circ + 70{,}8^\circ) = 48{,}48$ Вт.

6. Построим топографическую векторную диаграмму напряжений, и лучевую векторную диаграмму токов, при этом потенциал узла *a* примем равным нулю. Для этого изобразим комплексную схему замещения цепи с указанными на ней направлениями напряжений (рис. 12).

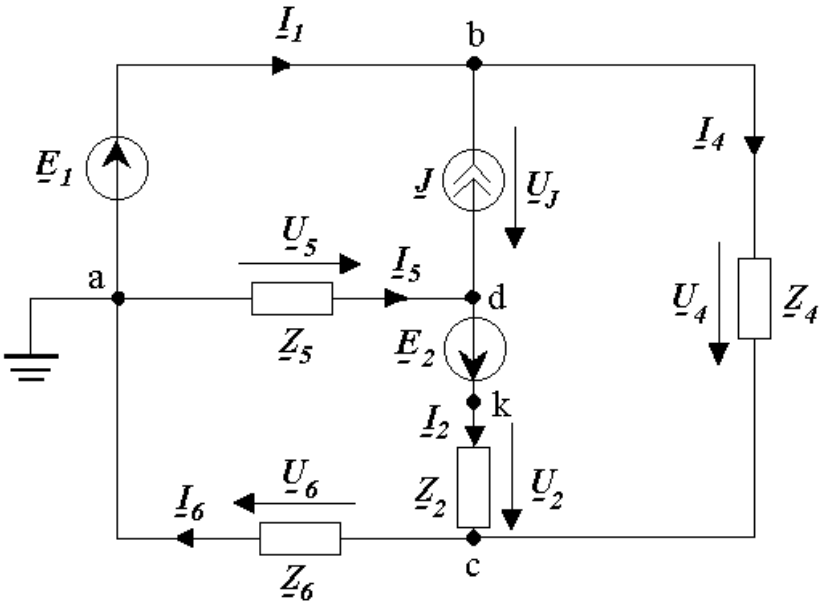

Рис. 6. К построению векторных диаграмм

На векторной диаграмме вектора напряжений направлены в точку высшего потенциала от которой течет ток, т.е. противоположно положительным направлениям напряжений на схеме: $\underline{U}_2$ – направлено из точки *c* в точку *k*; $\underline{U}_4$ - направлено из точки *c* в точку *b*: $\underline{U}_5$ – направлено из точки *d* в точку *a*; $\underline{U}_6$ - направлено из точки *a* в точку *c*, $\underline{U}_J$ направлено из точки *d* в точку *b*. $\underline{E}_1$ направлено из точки *a* в точку *b*, $\underline{E}_2$ – из точки *d* в точку *k*.

По закону Ома определим комплексные напряжения на сопротивлениях схемы:

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 = 3{,}09 \cdot e^{j250^\circ} \cdot 14{,}1 \cdot e^{j45^\circ} = 43{,}57 \cdot e^{j295^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_4 = \underline{I}_4 \cdot \underline{Z}_4 = 8{,}18 \cdot e^{j121.14^\circ} \cdot 10{,}575 \cdot e^{-j45^\circ} = 86{,}5 \cdot e^{j76.14^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_5 = \underline{I}_5 \cdot \underline{Z}_5 = 2{,}01 \cdot e^{-j70.8^\circ} \cdot 20 \cdot e^{j53.13^\circ} = 40{,}2 \cdot e^{-j17.67^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_6 = \underline{I}_6 \cdot \underline{Z}_6 = 6{,}7 \cdot e^{j142.2^\circ} \cdot 4 = 26{,}8 \cdot e^{j142.2^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_J = 95{,}79 \cdot e^{j66.43^\circ} \text{ В}.$$

Векторная лучевая диаграмма токов и топографическая диаграмма напряжений показаны на рис. 13.

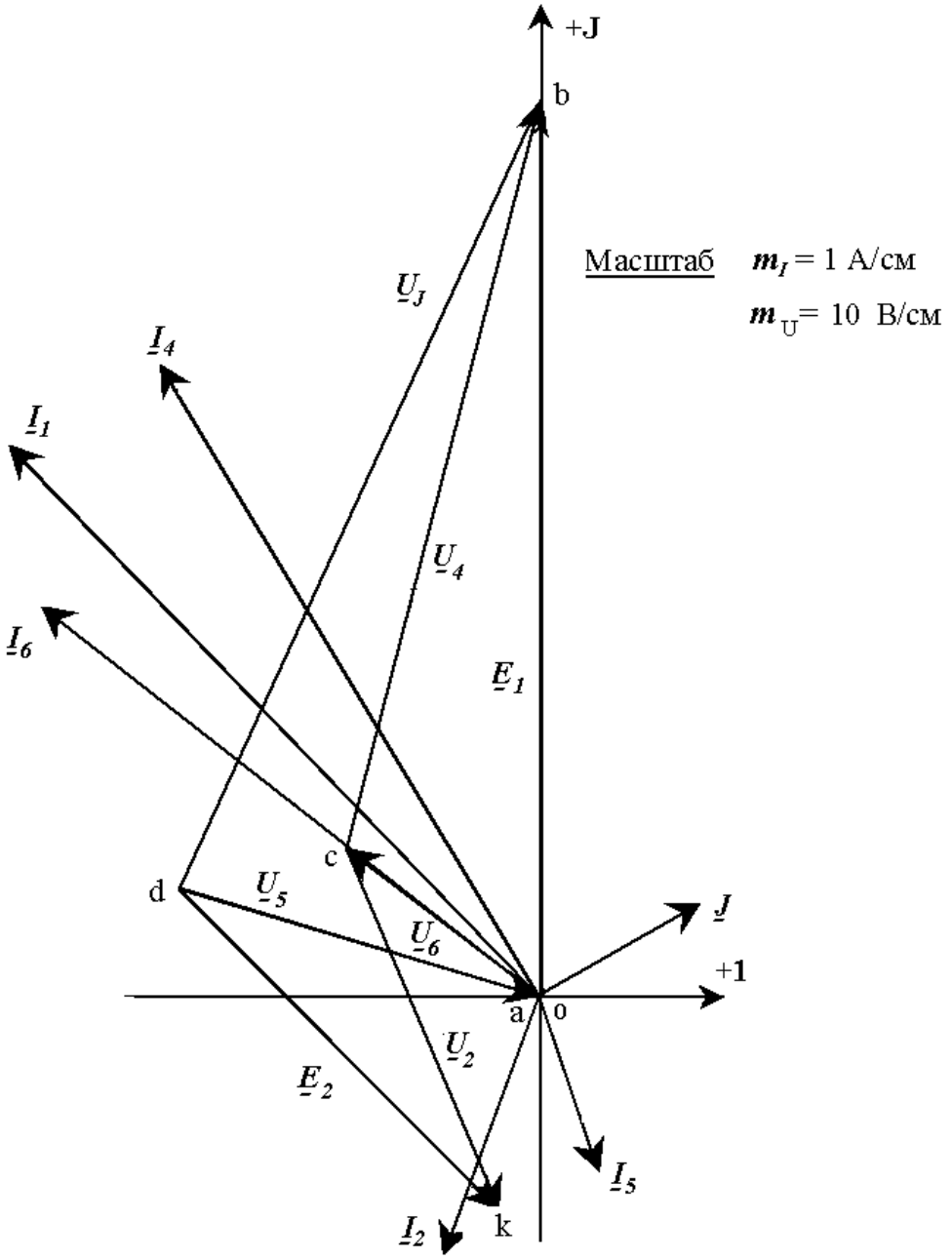

Рис. 7. Векторная лучевая диаграмма токов
и топографическая диаграмма напряжений