А. П. Иванов

Методические указания

Тема 5: Интерполирование функций

факультет ПМ–ПУ СПбГУ 2007 г.

Оглавление

1. Алгебраическое интерполирование. Полином Лагранжа

Пусть на отрезке $[a, b] \subset R$ рассматривается функция $f(\cdot)$ и пусть известны её значения в $(n+1)$ различных узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$, принадлежащих $[a, b]$. Возьмём многочлен степени n

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \,. \tag{1}$$

Коэффициенты a_i выбираем так, чтобы совпадали значения $f(\cdot)$ и $P_n(\cdot)$ в узлах интерполирования $\{x_i\}$:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n \,. \tag{2}$$

Эти равенства дают квадратную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\{a_i\}$, причём определитель её суть определитель Вандермонда, что гарантирует существование и единственность решения СЛАУ (2).

Искомый интерполяционный полином может быть представлен в виде

$$P_n(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} f(x_i). \tag{3}$$

Многочлены $\{l_k(x)\}$ называют *множителями Лагранжа*

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)} = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} \,,$$

где $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$, а формулу (3) *формулой Лагранжа* для интерполирующего многочлена $L_n(x)$. Часто интерполяционный полином $L_n(\cdot)$ называют просто *полиномом Лагранжа.*

1.1. Погрешность метода. Остаточный член формулы Лагранжа

Оценку для $r_n(x) = f(x) - L_n(x)$ на классе функций $f(\cdot) \in C^{n+1}[a, b]$ в точке $x = x^* \in [a, b]$ можно получить в виде

$$r_n(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x^*) \,, \quad \xi \in (a, b). \tag{4}$$

Будем называть равенство (4) формулой Лагранжа для остатка интерполирования или *методической погрешностью* интерполирования.

1.2. Выбор узлов интерполирования

Рассмотрим множество Φ_n всевозможных функций $f(\cdot)$, которые $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$ и производная которых порядка $(n+1)$ ограничена по модулю числом M_{n+1}: $|f^{(n+1)(x)}| \leq M_{n+1}$ $(x \in [a, b])$. В этом классе функций остаток интерполирования (методическая погрешность интерполирования) имеет оценку:

$$|r_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0||x - x_1| \ldots |x - x_n|. \tag{5}$$

Она является *точной* и достигается в том случае, когда $f(\cdot)$ есть многочлен степени $n+1$ вида

$$f(x) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} + a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots .$$

Задача 1. *Функция $f(\cdot)$ задана таблично, $\hat{x}$ - не табличное значение аргумента, в котором необходимо приблизить функцию $f(\cdot)$ при помощи интерполяционного многочлена степени n, взяв за узлы любые табличные значения аргумента $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$.*

Множитель $\dfrac{M}{(n+1)!}$ не зависит от выбора узлов. Поэтому при фиксированном значении $\hat{x}$ необходимо выбрать $\{x_{i_k}\}$ так, чтобы произведение

$$|\hat{x} - x_{i_0}||\hat{x} - x_{i_1}| \ldots |\hat{x} - x_{i_n}|$$

имело *наименьшее значение.*
Очевидно, что для этого набор $\{x_{i_k}\}_{k=0}^{n}$ следует выбирать из условий:

$$x_{i_0} = \min_{i} |\hat{x} - x_i|; \quad x_{i_1} = \min_{i \neq i_0} |\hat{x} - x_i|; \ldots, \quad x_{i_n} = \min_{i \neq i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}} |\hat{x} - x_i|.$$

Задача 2. *Выбрать узлы $x_0, x_1, \ldots, x_n$ на $[a, b]$ так, чтобы правая часть оценки (5) принимала минимальное значение.*

Если считать $[a, b] = [-1, 1]$, то учитывая свойства полиномов Чебышева можно утверждать,что $\omega_{n+1}(x) = \bar{T}_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$. В общем же случае $[a, b] \neq [-1, 1]$ достаточно сделать преобразование $[a, b] \to [-1, 1]$ и получим искомые узлы $\{x_i\}$ в виде:

$$x_i = \frac{1}{2}\left[(b - a)\cos\frac{(2i + 1)}{2(n + 1)}\pi + (b + a)\right], \quad i = \overline{0, n}. \tag{6}$$

При таком выборе узлов оценка (5) для методической погрешности принимает вид:

$$\left|f(x) - L_n(x)\right| \leq \frac{M_{n+1}(b - a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n + 1)!}.$$

Очевидно, что использование указанной оценки весьма затруднительно, поэтому важен вопрос: как ведёт себя последовательность интерполяционных полиномов для заданной функции при увеличении числа узлов интерполирования.

1.3. О сходимости интерполяционного процесса

Решив задачу интерполирования по заданному числу узлов на интервале $[a, b]$, мы должны ответить на вопрос: как ведёт себя последовательность интерполяционных полиномов при неограниченном возрастании числа узлов на $[a, b]$? Будет ли (и если будет, то при каких условиях) иметь место свойство:

$$r_n(x_*, f) = f(x_*) - L_n(x_*, f) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \ ?$$

Поскольку ответ на поставленный вопрос зависит в том числе и от свойств функции $f(\cdot)$, обозначаем здесь полином Лагранжа через $L_n(x, f)$, чтобы подчеркнуть указанное обстоятельство.
Уточним задачу. Рассмотрим бесконечную треугольную таблицу узлов, расположенных на $[a, b]$:

$$X = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1^1 & & & \\ x_1^2 & x_2^2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\}. \tag{7}$$

Определение 1. Построение интерполяционных полиномов $L_n(x, f)$ по таблице (7) для функции $f(\cdot)$ будем называть *интерполяционным процессом* (для экономии места – ИП).

Определение 2. Если для $\hat{x} \in [a, b]$ имеет место: $r_n(\hat{x}, f) \to 0$ при $n \to \infty$, то говорят, что ИП для $f(\cdot)$ по таблице (7) сходится в точке $\hat{x}$.

Определение 3. Если сходимость ИП имеет место для всех $x \in [a, b]$, то говорят, что ИП сходится для $f(\cdot)$ на $[a, b]$.

Определение 4. Если $r_n(x, f) \to 0$ при $n \to \infty$ *равномерно* на $[a, b]$, то говорят о *равномерной* сходимости ИП к $f(\cdot)$ на $[a, b]$.

Некоторые факты.

- Для любой непрерывной функции $f(\cdot)$ можно выбрать узлы (7) так, что ИП будет равномерно на $[a, b]$ сходиться к этой функции. В основе утверждения – теорема Вейерштрасса о приближении функций полиномами.
- (т. Фабера) Для любой таблицы (7) существует непрерывная функция, для которой ИП не является равномерно сходящимся.
- Для целой функции ИП по любой таблице (7) равномерно на $[a, b]$ сходится к ней.

Пример Бернштейна. Для $f(x) = |x|, \quad x \in [-1, 1]$ ИП по равноотстоящим узлам не сходится ни в одной точке, кроме точек $-1, 0, 1$ (при этом -1 и $+1$ считаются узлами интерполирования).

Рассмотрим несколько примеров построения интерполяционного полинома и оценки методической погрешности.

Пример 1. С какой методической погрешностью можно найти $\sin\dfrac{\pi}{4}$, имея таблицу:

x	0	$\pi/6$	$\pi/2$
f(x)	0	1/2	1

Установим связь между параметрами задачи и параметрами, использованными при рассмотрении вопроса о построении интерполяционного полинома Лагранжа:

$$f(x) = \sin x,\ n = 2,\ a = 0,\ b = \pi/2,\ M_3 = 1.$$

$$\begin{aligned} \left|r_n\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| &= \left|\sin\frac{\pi}{4} - L_2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| \le \frac{1}{3!}\left|\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right| = \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{12} \approx \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{16} \cdot \frac{1}{4} \approx \frac{1}{37}, \end{aligned}$$

т.е. относительная погрешность вычисления указанного значения с помощью полинома Лагранжа составляет $\approx 3\%$.

Пример 2. Построить полином Лагранжа по таблице:

x	0	2	3
f(x)	1	3	2

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(-2)(-3)} \cdot 1 + \frac{x(x-3)}{2(-1)} \cdot 3 + \frac{x(x-2)}{3 \cdot 1} \cdot 2 = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 1.$$

Пример 3. Построить полином Лагранжа по таблице:

x	0	2	3	5
f(x)	1	3	2	5

$$L_3(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(-2)(-3)(-5)} \cdot 1 + \frac{x(x-3)(x-5)}{2(-1)(-3)} \cdot 3 +$$
$$\frac{x(x-2)(x-5)}{3 \cdot 1 \cdot (-2)} \cdot 2 + \frac{x(x-2)(x-3)}{5 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 5 = \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1.$$

Примеры 2 и 3 показывают, что при добавлении узла в таблицу приходится заново проделывать всю работу. Этот недостаток может быть устранен при записи интерполяционного полинома в иной *форме*, известной как полином Ньютона.

2. Задание для работы на компьютере

Для заданной функции $y = f(x)$ студент должен выполнить следующее:

1. Выбрать из области её определения интервал непрерывности.
2. Назначить некоторое число равноотстоящих узлов и построить интерполяционный полином. Проделать то же самое, взяв в качестве узлов то же количество узлов, но определяемых по формуле (6). Сравнить полученные результаты.
3. Повторить п.2, увеличивая число узлов.
4. Для функции $h = |x| \cdot f(x)$ проделать ту же работу, что и для $y = f(x)$ на том же самом интервале. Сравнить поведение интерполяционных полиномов в первом и втором случаях.

2.1. Конкретные функции для выполнения задания

1. $f(x) = x - \sin x - 0.25$;
2. $f(x) = x^3 - e^x + 1$;
3. $f(x) = \sqrt{x} + \cos x$;
4. $f(x) = x^2 + 1 - \arccos x$;
5. $f(x) = \lg x + \dfrac{7}{2x+6}$;
6. $f(x) = \operatorname{tg}(0.5x + 0.2) - x^2$;
7. $f(x) = 3x - \cos x - 1$;
8. $f(x) = x + \lg x.5$;
9. $f(x) = x^2 - \arcsin(x - 0.2)$;
10. $f(x) = x^2 + 4\sin x - 2$;
11. $f(x) = \operatorname{ctg} x + x^2$;
12. $f(x) = \operatorname{tg} x - \cos x + 0.1$;
13. $f(x) = x\ln(x+1)$;
14. $f(x) = x^2 - \sin 10x$;
15. $f(x) = \operatorname{ctg} x - x$;
16. $f(x) = \operatorname{tg} 3x + 0.4 - x^2$;
17. $f(x) = x^2 + 1 - \operatorname{tg} x$;
18. $f(x) = x^2 - 1 - \ln x$;
19. $f(x) = 0.5^x + 1 - (x-2)^2$;
20. $f(x) = (x+3)\cos x - 1$;
21. $f(x) = x^2 \cos 2x + 1$;
22. $f(x) = \cos(x + 0.3) - x^2$;
23. $f(x) = 2^x(x-1)^2 - 2$;
24. $f(x) = x\ln(x+1) - 0.5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Бахвалов, Н. Жидков, Г. Кобельков. Численные методы. Физматлит, М.– СПб – 2000.
2. В. М Вержбицкий. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. М., Высшая школа 2000.
3. Г. Н. Воробьёва, А. Н. Данилова. Практикум по вычислительной математике. М., Высшая школа 1990.