

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
ВВЕДЕНИЕ	5
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1 Обработка экспериментальных данных	
Метод наименьших квадратов	6
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ.....	8
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	9
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2 Регрессионные модели, множественные линейные модели.....	11
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ.....	13
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	14
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3. Динамические регрессионные модели .	15
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ.....	17
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	19
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4. Анализ подобия и размерности при неизвестном математическом описании	21
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ.....	24
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	25
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5 Оценка адекватности модели	27
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ПО КРИТЕРИЮ χ^2 КВАДРАТ.....	29
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ПО КРИТЕРИЮ КОЛМОГорова И КОЛМОГорова-СМИРнова.....	30
ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	30
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6 Планирование экспериментов.....	30
ПРИМЕР ВЫБОРА ИНТЕРВАЛА ИЗМЕНЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ	34
ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА.....	34
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	35
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	36
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Методы обращения матриц.....	37
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Стандартное отклонение как 68 %-й доверительный интервал.....	39
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	41

ПРЕДИСЛОВИЕ

Издание предназначено для самостоятельной работы студентов и преподавания практических занятий по дисциплине моделирования систем.

Предназначено для студентов специальностей 210200 «Автоматизация технологических процессов и производств» (АТПП), может использоваться на специальностях 180400 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов» (АЭП), 100400 «Электроснабжение» (ЭС) дневной и заочной форм обучения. Материал учебного пособия соответствует программе дисциплины «Моделирование систем», примерному учебному плану указанных специальностей и дополняет существующие пособия для практических и лабораторных работ по данной дисциплине с учетом особенностей специальностей. При написании учебного пособия использован опыт проведения практических занятий и методические материалы к ним в Пермском государственном техническом университете, учтены пожелания студентов, а также обобщен опыт организации практических работ в вузах России, выпускающих специалистов по данным специальностям.

Авторы благодарят кандидата технических наук, доцента Андриевскую Н.В. за рекомендации по выбору тематики практических работ и структурному оформлению нашедшие, отражение в учебном пособии.

Замечания по содержанию просьба направлять по адресу: 614013, г. Пермь, ул. проф. Поздеева 7, к. А (электротехнический факультет), Пермский государственный технический университет, кафедра «Микропроцессорные средства автоматизации».

ВВЕДЕНИЕ

Данный практикум ориентирован на изучение методов, используемых при составлении математических моделей по известным входным воздействиям на систему типа «черный ящик» и известной реакции на эти воздействия. Цель практикума – выработать у студентов умение самостоятельно применять для составления математических моделей систем знания по моделированию, полученные из лекционного курса.

Каждая практическая работа должна научить студентов самостоятельно решать отдельные прикладные задачи, уметь объяснять и защищать полученные результаты.

Усвоение всех работ позволит научиться строить модели физических объектов и устройств, начиная с планирования эксперимента, построения математической модели объекта системы и заканчивая проверкой её адекватности.

В предлагаемом учебном пособии с единых методологических позиций рассмотрены вопросы организации выполнения практических работ. Существенное место в современном изучении курса моделирования систем занимают вопросы машинной реализуемости моделей и алгоритмов их получения. Все теоретические выкладки и описания построены с этой точки зрения. Поэтому, в практикуме рассматриваются алгоритмы, легко реализуемые как с использованием алгоритмических универсальных и специализированных языков, так и с использованием математических пакетов (MatCat, MatLab и др.). Для практического усвоения материала практикума по дисциплине «Моделирование систем» приведены примеры выполнения конкретных вариантов практических работ.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

Обработка экспериментальных данных

Метод наименьших квадратов

При обработке экспериментальных (или статистических) данных часто бывает необходимо найти функцию, описывающую полученную закономерность (кривую, описываемую функцией и проходящую вблизи от заданных или полученных точек). Одним из методов, используемых для построения таких кривых, является **метод наименьших квадратов** (МНК).

В результате проведенного эксперимента пусть мы имеем набор точек (x_i, y_i) , $i = \overline{1..m}$, причем $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ и значения y_i содержат ошибки измерения. Мы хотим через данные точки провести кривую $F(x)$, которая является линейной комбинацией заранее выбранных базисных функций $f_j(x)$, $j = \overline{1..n}$. Другими словами,

$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(x).$$

Часто в качестве базисных функций рассматривают мономы $f_j(x) = x^{j-1}$. Коэффициенты c_j необходимо определить, выбрав определенный критерий для сравнения функций. Рассмотрим критерий, называемый **МНК** [1]. Построим матрицу значений базисных функций в заданных точках

$$A = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \dots & f_n(x_m) \end{pmatrix}.$$

Матрица A , как правило, не будет квадратной матрицей. Пусть c – вектор из n искомых коэффициентов. Тогда можно построить вектор из m значений, через которые проходит данная кривая:

$$y^* = Ac = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \dots & f_n(x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x_1) \\ F(x_2) \\ \vdots \\ F(x_m) \end{pmatrix}.$$

Для минимизации величины отклонения искомой кривой от заданных нам точек потребуем, чтобы коэффициенты вектора c определялись минимумом "расстояния" между векторами y и y^* , т.е. чтобы было выполнено условие

$$\left(\sum_{i=1}^m (y_i - y_i^*)^2 \right)^{1/2} \Rightarrow \min$$

(евклидова норма). Другими словами, мы хотим, чтобы сумма квадратов разностей между экспериментальным и теоретическим значением была минимальной (после возведения в квадрат левой и правой частей неравенства), отсюда и название **МНК** (1.1)

$$\sum_{i=1}^m (y_i - y_i^*)^2 \Rightarrow \min. \quad (1.1)$$

Как правило, в литературе выводятся формулы для случая линейного и квадратичного приближения. Вслед за Д.Корменом [1], мы рассмотрим более общий алгоритм, пригодный для любого выбора базисных функций. Чтобы найти минимум функции (1.1), необходимо продифференцировать ее по всем переменным c_k и приравнять соответствующие производные нулю. Тогда мы получим систему уравнений, которую можно записать в виде

$$\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^m (y_i - y_i^*)^2 \right)}{\partial c_k} = \sum_{i=1}^m 2 \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j - y_i \right) a_{ik} = 0, \quad k = \overline{1..n}.$$

Эту систему из n уравнений можно записать в виде матричного уравнения

$$(Ac - y)^T A = 0,$$

которое эквивалентно уравнению

$$A^T (Ac - y) = 0,$$

или

$$A^T A c = A^T y. \quad (1.2)$$

Полученное уравнение в математической статистике называется **нормальным уравнением**. Можно показать, что матрица $A^T A$ является симметрической и, согласно теории матриц, если ее столбцы являются линейно независимыми, существует обратная матрица $(A^T A)^{-1}$. Тогда решение системы (1.2) относительно неизвестного вектора c является единственным и выражается формулой

$$c = \left((A^T A)^{-1} A^T \right) y = A^+ y.$$

Матрица $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ называется **псевдообратной матрицей** по аналогии с обратной матрицей для систем алгебраических линейных уравнений.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

Найти оценки для параметров модели $F(x) = c_1 + c_2 x \log_2 x + c_3 e^x$ по точкам (табл. 1.1), а также построить график функции $F(x)$ и нанести исходные точки.

Таблица 1.1

Исходные точки для построения кривой МНК

X	1	2	3	4
Y	1	1	3	8

Очевидно, что в качестве базисных функций необходимо выбрать

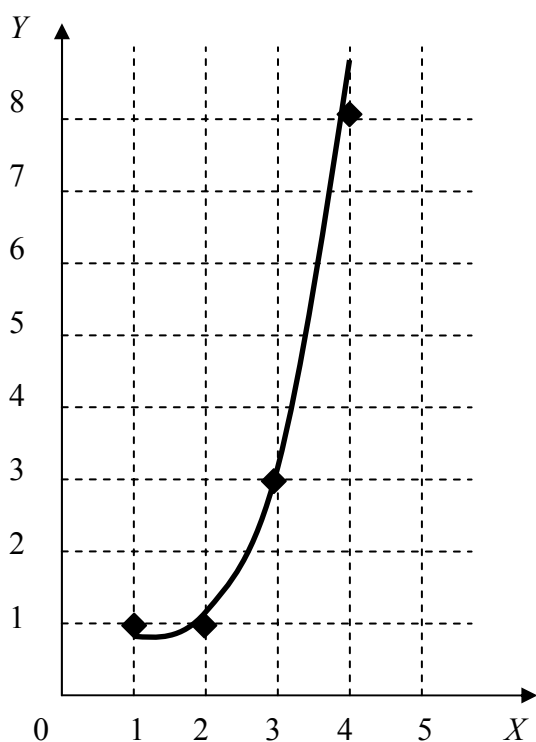
$$f_1(x) = 1; \quad f_2(x) = x \log_2 x; \quad f_3 = e^x$$

$$c = \left((A^T A)^{-1} A^T \right) y = \begin{pmatrix} 0,412 \\ -0,205 \\ 0,17 \end{pmatrix}.$$

Запишем искомую функцию

$$F(x) = 0,412 - 0,205 x \log_2 x + 0,17 e^x.$$

* Способы обращения матрицы приведены в приложении 1.



Построим график и нанесем на нем заданные точки (рис. 1.1).

Рис. 1.1. Кривая, полученная с использованием МНК, и исходные точки

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти оценки для параметров модели $y = c_1 + c_2x + c_3x^2$, построить график функции $y(x)$ и нанести на него исходные точки.

Вариант 2.

X	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0
Y	7,7	9,4	11,4	13,6	15,6	18,6	21,2	24,1

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

Регрессионные модели, множественные линейные модели

При построении функциональной зависимости входа от выхода (рис.2.1) при обработке экспериментальных или статистических данных (при известной реакции на входное воздействие), как правило, вид функции не известен.

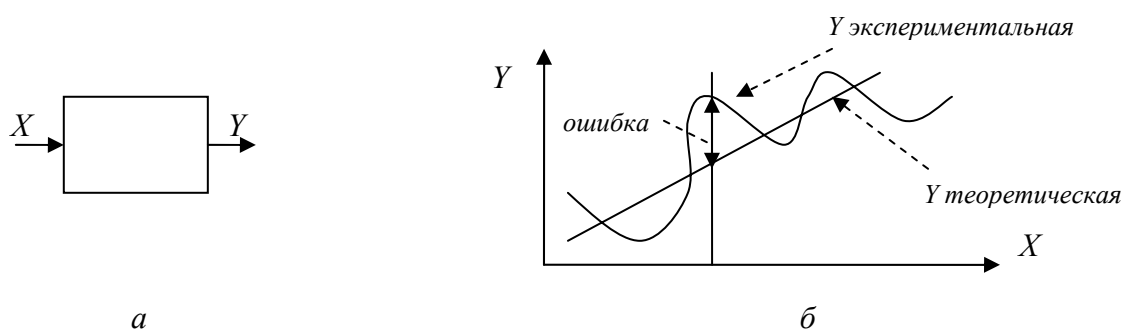


Рис.2.1. Зависимость выхода от входа при одной входной переменной: *а* – система типа «черный ящик»; *б* – пример зависимости выхода «черного ящика» от входа

Из курса высшей математики известно, что любую функциональную зависимость можно представить в виде полинома (например, повсеместно применяются такой известный полином, как степенной ряд, ряд Фурье и др. [6]. Поэтому часто функциональную зависимость $y = f(x)$ ищут в виде:

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n .$$

Для этого исследователь выдвигает гипотезу о виде функции (как правило, порядке полинома), а затем делаются выводы об адекватности полученной модели. Если модель не адекватна, то выдвигается другая гипотеза (полином более высокого порядка).

Коэффициенты c_0, c_1, \dots, c_n могут быть вычислены с помощью МНК см. практическую работу №1 (2.1)

$$c = \left((A^T A)^{-1} A^T \right) y = A^+ y . \quad (2.1)$$

Чтобы определить, принимается гипотеза или нет, необходимо определить размер ошибки (погрешности). Для расчета ошибки рекомендуется использовать методы, описанные в практической работе №5. Для простоты в данной работе будем применять следующий подход (2.2):

$$E_i = (Y_i^T - Y_i^Э), F = \sum_{i=1}^n E_i^2. \quad (2.2)$$

Найдем значение σ (сигма) по формуле: $\sigma = \sqrt{\frac{F}{n}}$,

где n – количество экспериментальных точек.

Если в интервал $(Y_Э - \sigma \leq Y_T \leq Y_Э + \sigma)$ попадает 68% точек и более, то выдвинутая нами гипотеза принимается (см. Приложение 2). В противном случае, выбирают более сложную гипотезу или проверяют исходные данные. Если требуется большая уверенность в результате, то используют дополнительное условие: в интервал $(Y_Э - 2\sigma \leq Y_T \leq Y_Э + 2\sigma)$ должны попасть 95% экспериментальных точек.

Аналогичный приведенному выше способ построения регрессионной модели системы типа «черный ящик» используется при множестве входов и выходов. Рассмотрим систему с множеством входов и выходов более подробно. Для простоты предположим, что функциональная структура имеет линейную зависимость, количество входных сигналов, действующих одновременно, равно n , а выходных – m ((2.3), рис. 2.2).

$$\begin{cases} y_1 = c_{10} + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \\ y_2 = c_{20} + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n \\ \dots \\ y_m = c_{m0} + c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n \end{cases} \quad (2.3)$$

Коэффициенты c как и прежде находим методом наименьших квадратов (см. практическую работу №1).

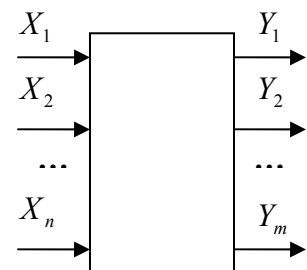


Рис. 2.2. Множественная модель

$$\begin{cases} C_1 = \left((A^T A)^{-1} A^T \right) y_1 = A^+ y_1 \\ C_2 = \left((A^T A)^{-1} A^T \right) y_2 = A^+ y_2 \\ \dots \\ C_m = \left((A^T A)^{-1} A^T \right) y_m = A^+ y_m. \end{cases}$$

При заполнении матрицы A в качестве функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ используем соответственно x_1 , x_2 , ..., x_n .

В случае нелинейного случая система уравнений (2.3) будет дополняться по необходимости переменными x более высоких порядков по аналогии со случаем с одним входом и одним выходом.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

Пусть со входа X и выхода Y модели типа «черный ящик» сняты следующие значения (табл. 2.1). Необходимо найти математическое описание и коэффициенты модели методом регрессии, оценить погрешность, построить системе координат экспериментальные точки, график полученной функции, интервалы σ и если необходимо 2σ .

Таблица 2.1

Исходные данные для построения регрессионной модели

X	0	12	5	8	13	14
Y	1	10	7	5	10	14

Сначала отметим исходные точки на графике (рис.2.3). Так как исходные точки имеют небольшой разброс, то проверим гипотезу о линейной функции:

$$Y = c_0 + c_1 X.$$

Теперь найдем неизвестные коэффициенты c_0 , c_1 методом наименьших квадратов. Подставляя числа X и Y , число экспериментов $m = 6$, имеем: $c_1 = 0,771$, $c_0 = 1,147$ (см. практическую работу №1).

Чтобы определить, принимается гипотеза или нет, нужно рассчитать ошибку между теоретической и экспериментальной зависимостями.

$$F = 85,624, \quad \sigma = 3,778.$$

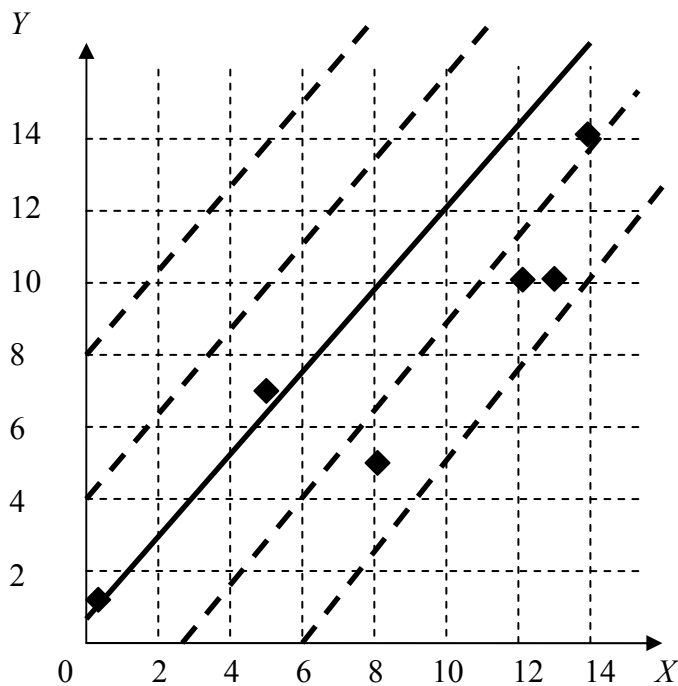


Рис. 2.3 График функции, полученной методом регрессии, и исходные точки

Теперь построим график функции $Y = 0,71 \cdot X + 3,32$ и параллельно ему две линии на расстоянии от него $+3,778$ и $-3,778$ (рис. 2.3). В коридор $[-3,778, +3,778]$ попадет 3 экспериментальных точки из шести, то есть $\frac{3}{6} \cdot 100\% = 50\%$, что не

удовлетворяет требованию нормального распределения ошибки (68%). Поэтому гипотеза о том, что данную функцию можно считать

линейной, не выполняется, и необходимо выдвигать более сложную гипотезу (функцию более высокого порядка).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Используя заданные экспериментальные данные, постройте график. Предложите зависимость для описания данных (гипотезу $Y = c_0 + c_1 X$). Запишите аналитически вид предложенной зависимости. Определите, сколько неизвестных параметров в гипотезе требуется найти. Найдите параметры и подставьте их в гипотезу. Начертите зависимость на том же графике. Определите ошибку описания. Начертите коридоры ошибки σ и 2σ относительно теоретической зависимости. Определите, сколько точек попало в допустимый интервал. Сравните с нормативом, сделайте вывод о принятии гипотезы.

Усложните гипотезу ($Y = c_0 + c_1 X + c_2 X^2$). Повторите расчет и построения. Сравните ошибки двух гипотез. Сделайте общий вывод.

Таблица 2.2

Исходные данные для задания

№ вар.		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	y^j	1	1,5	3	3	4	6	5	4	4,5	3

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3. **Динамические регрессионные модели**

На практике наиболее часто встречаются модели типа «черный ящик», изменяющие свои характеристики во времени. Такие модели, как правило, представляют собой обратные связи, системы автоматического регулирования и управления, хорошо описываемые типовыми динамическими звеньями. Для определения параметров типовых

динамических звеньев хорошие результаты дает МНК, рассматриваемый в практической работе №1.

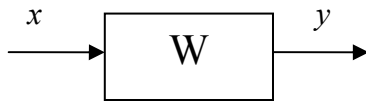


Рис.3.1. Динамическая модель типа «черный ящик»

По определению передаточная функция – это отношение выхода к входу ($W = \frac{y}{x}$).

Для того чтобы рассмотреть, как привести описание динамической модели типа «черный ящик» к виду, к которому может быть применен МНК, рассмотрим инерционное звено второго порядка (колебательное звено). Передаточная функция такого звена записывается в виде:

$$W = \frac{k}{B_1 p^2 + B_2 p + 1} = \frac{c_1}{p^2 + c_2 p + c_3},$$

где $p = \frac{d}{dt}$.

Или в виде дифференциального уравнения 2-го порядка

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + c_2 \frac{dy}{dt} + c_3 y = c_1 x.$$

Дважды проинтегрируем это выражение:

$$y + c_2 \int_0^T y dt + c_3 \int_0^T \int_0^\tau y d\tau dt = c_1 \int_0^T \int_0^\tau x d\tau dt.$$

Нам необходимо определить коэффициенты c_1, c_2, c_3 для чего уравнение выразим через суммы в разностном виде:

$$y_m + c_2 \sum_{i=1}^m y_i + c_3 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j y_i = c_1 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j x_i; \quad m = \overline{1, n},$$

где n – число экспериментов.

Выразив y_m , получим

$$y_m = c_1 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j x_i + c_2 \sum_{i=1}^m y_i + c_3 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j y_i^* .$$

Коэффициенты c_1, c_2, c_3 определим методом наименьших квадратов (см. практическую работу №1).

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

По известным данным эксперимента (табл. 3.1) определить параметры передаточной функции

$$W = \frac{c_1}{p^2 + c_2 p + c_3} .$$

Входное воздействие равно единичной функции $X(t) = 1(t)$, что соответствует следующим условиям:

$$\begin{cases} X(t) = 0, t \leq 0 \\ X(t) = 1, t > 0. \end{cases}$$

Таблица 3.1

Данные эксперимента на динамической модели типа «черный ящик»

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	0	1,9	5,11	6,81	6,49	5,28	4,41	4,34	4,76	5,16	5,27	5,14	4,98	4,9

Нам необходимо определить коэффициенты c_1, c_2, c_3 , для чего уравнение выразим через суммы в разностном виде:

$$y_m + c_2 \sum_{i=1}^m y_i + c_3 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j y_i = c_1 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j x_i . \quad (3.1)$$

Для облегчения составления матрицы A можно построить таблицу предварительных расчетных данных (табл. 3.2).

* В данном случае знаки перед коэффициентами не имеют значения, т.к. при поиске их значений мы найдем и необходимый нам знак перед коэффициентом.

Таблица 3.2

Предварительные расчетные данные для уравнения (3.1)

i	t_i	x_i	y_i	$\sum_{i=1}^m y_i$	$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j x_i$	$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j y_i$
1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1,9	1,9	1	1,9
3	2	1	5,11	7,01	3	8,91
4	3	1	6,81	13,82	6	22,73
5	4	1	6,49	20,31	10	43,04
6	5	1	5,28	25,59	15	68,63
7	6	1	4,41	30	21	98,63
8	7	1	4,34	34,3	28	132,97
9	8	1	4,76	39,1	36	172,07
10	9	1	5,15	44,26	45	216,33
11	10	1	5,27	49,53	55	265,86
12	11	1	5,14	54,67	66	320,53
13	12	1	4,98	59,65	78	380,18
14	13	1	4,9	64,55	91	444,73

Из (3.1) запишем выражение для y_m .

$$y_m = c_1 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j x_i + c_2 \sum_{i=1}^m y_i + c_3 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j y_i.$$

Согласно методу наименьших квадратов $c = (A^T A)^{-1} A^T y$.Подставив данные, получаем: $c_1 = 4,623$; $c_2 = -0,017$; $c_3 = -0,933$.Отсюда выражение для y_m получаем

$$y_m = 4,623 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j x_i - 0,017 \sum_{i=1}^m y_i - 0,933 \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j y_i.$$

Построим график экспериментальных данных и функцию, полученную теоретически (рис.3.2).

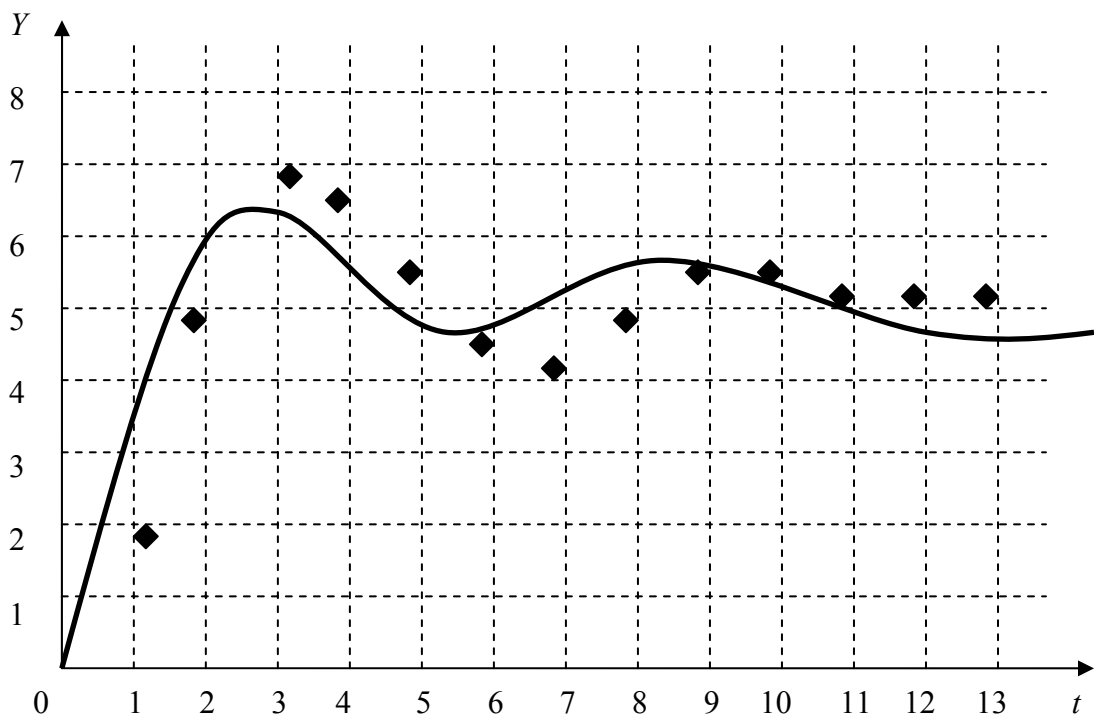


Рис.3.2. График функции передаточного звена и экспериментальные точки

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

По известным данным эксперимента и известному входному воздействию $X(t)$ (см. варианты) определить параметры передаточной функции (W), построить её график.

Вариант 2.

$$W = \frac{c_1}{p + c_2}, \quad X(t) = 1(t).$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	0	2,2	5	6,2	5,9	5,1	4,6	4,7	5,1	5,4	5,4	5,2	5	4,8

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

Анализ подобия и размерности при неизвестном математическом описании

Ученые часто сталкиваются с задачей построения математической модели явления, для которого еще не найден удовлетворительный механизм и не установлены балансовые и определяющие уравнения. В этих случаях главную роль играют экспериментальные методы исследования, дающие возможность установить простейшие опытные факты. Постановка же эксперимента требует предварительного теоретического анализа. Возможность такого предварительного анализа дает теория подобия. Самый замечательный итог применения анализа размерности и подобия заключается в том, что он оказывается достаточным для установления особого класса автомодельных решений математической формулировки задачи, отражающих глубокие физические закономерности изучаемого явления [2]. Сформулируем суть метода и приведем несколько примеров его применения*.

* Анализ размерностей основан на физически содержательном утверждении, сформулированном Э.Бакингамом и известном как π -теорема.

Пусть для выяснения зависимости некоторой величины P от некоторого определяющего параметра P_j надо измерить эту величину при десяти значениях данного аргумента. Тогда для экспериментального определения величины P как функции m определяющих параметров P_1, P_2, \dots, P_m нужно произвести 10^m экспериментов. Согласно π -теореме [3], если все величины P_1, P_2, \dots, P_m выражаются через k независимых размерностей, дело сводится к определению функции $m - k$ безразмерных критериев подобия $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{m-k}$, для нахождения которой достаточно 10^{m-k} опытов, т.е. в 10^k раз меньше!

Итак использование π -теоремы сводится к выполнению следующих шагов:

Шаг 1. Выявим m параметров, которые характеризуют процесс $P = f(P_1, P_2, \dots, P_m)$.

Шаг 2. Установим число k независимых между собой параметров.

Для этого выразим все величины через набор независимых параметров (4.1). Наиболее часто используют набор параметров масса, длина и время (или MLT).

$$\begin{aligned} [P_1] &= [M]^{\alpha_1} [L]^{\beta_1} [T]^{\gamma_1} \\ [P_2] &= [M]^{\alpha_2} [L]^{\beta_2} [T]^{\gamma_2} \\ &\dots \\ [P_m] &= [M]^{\alpha_m} [L]^{\beta_m} [T]^{\gamma_m} \end{aligned} \quad (4.1)$$

В этом случае число независимых величин $k = 3$ (по числу независимых параметров)*. Выберем 3 независимых величины. Для этого они должны удовлетворять условию:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \alpha_j & \beta_j & \gamma_j \\ \alpha_l & \beta_l & \gamma_l \end{vmatrix} \neq 0,$$

где $1 \leq i \neq j \neq l \leq m$ и являются номерами переменных с независимыми размерностями.

Таким образом, мы разбили величины P_1, P_2, \dots, P_m на две группы. В первую группу P_1, \dots, P_k включаются определенные величины с

* В случае если выбран набор независимых параметров, состоящий из их другого числа, то поменяются размерности матриц D и D_{ij} .

независимыми размерностями. Во вторую группу P_k, \dots, P_m входят величины, размерности которых можно выразить через размерности величин первой группы.

Аналогично через набор независимых параметров выразим $P = f(P_1, P_2, \dots, P_m)$:

$$[P] = [M]^\alpha [L]^\beta [T]^\gamma.$$

Шаг 3. Составим выражения для $m - k$ критериев подобия.

В соответствии с π -теоремой:

$$\pi_j = \frac{P_j}{P_1^{x_{1j}} P_2^{x_{2j}} \dots P_k^{x_{kj}}}, \quad (4.2)$$

где $j = \overline{k+1, m}$.

Для $P = f(P_1, P_2, \dots, P_m)$ критерий подобия вычисляется по аналогичной формуле:

$$\pi = \frac{P}{P_1^{x_1} P_2^{x_2} \dots P_k^{x_k}}.$$

Значение величины степени вычислим по формуле $x_{ij} = \frac{D_{ij}}{D}$,

$$\text{где } D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_k & \beta_k & \gamma_k \end{vmatrix}, \text{ а } D_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_j & \beta_j & \gamma_j \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_k & \beta_k & \gamma_k \end{vmatrix} \rightarrow i\text{-я строка,}$$

где в свою очередь i равно порядковому номеру множителя в знаменателе выражения (4.2), для которого считаем величину степени x_{ij} , а значения $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ для i -й строки равны степеням независимых параметров для P_j в (4.1).

Шаг 4. Из π -теоремы можно показать, что в координатах $\ln \pi$, $\ln \pi_j$ все экспериментальные точки будут лежать на одной кривой, вид которой и коэффициенты можно определить, например, методом линейной регрессии.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

В 1909-1911 годах специалисты в области физической химии Э.Бозе, Д.Рауэрт и М.Бозе опубликовали серию экспериментов. Ими изучалось время τ заполнения сосуда данного объема Q и перепад давления P на концах трубки при стационарном протекании через трубку различных жидкостей: воды, хлороформа, бромформа, ртути.

Шаг 1. Из курса физики известно, что перепад давления P на концах трубки должен зависеть от времени заполнения сосуда τ , объема сосуда Q и свойств жидкости (коэффициента вязкости μ и плотности ρ): $P = f(\tau, Q, \mu, \rho)$, в данном случае $m = 4$.

Шаг 2. Размерности параметров в классе MLT (масса, длина, время) выражаются следующими соотношениями:

$$[\tau] = T, [Q] = L^3, [\mu] = \frac{M}{LT}, [\rho] = \frac{M}{L^3}, [P] = \frac{M}{LT^2};$$

иначе можно переписать

$$\begin{aligned} [\tau] &= M^0 L^0 T^1, \\ [Q] &= M^0 L^3 T^0, \\ [\mu] &= M^1 L^{-1} T^{-1}, \\ [\rho] &= M^1 L^{-3} T^0, \\ [P] &= M^1 L^{-1} T^{-2}. \end{aligned}$$

Легко увидеть, что первые три размерности определяющих параметров τ , Q , μ имеют независимые размерности, размерность же четвертого параметра ρ выражается через размерности первых трех $k = 3$.

Для проверки сосчитаем детерминант $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow$ независимые

переменные выбраны правильно.

Шаг 3. $n - k = 1 \Rightarrow$ нам нужно найти 1 критерий подобия.

$$\pi_\rho = \frac{\rho}{\tau^{x_{1\rho}} Q^{x_{2\rho}} \mu^{x_{3\rho}}}$$

$$x_{1\rho} = \frac{D_{1\rho}}{D}, \quad x_{2\rho} = \frac{D_{2\rho}}{D}, \quad x_{3\rho} = \frac{D_{3\rho}}{D},$$

где

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad D_{1\rho} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$D_{2\rho} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad D_{3\rho} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3,$$

$$x_{1\rho} = 1, \quad x_{2\rho} = -\frac{2}{3}, \quad x_{3\rho} = 1,$$

$$\pi_\rho = \frac{\rho Q^{2/3}}{\tau \mu},$$

$$\pi = \frac{P}{\tau^{x_1} Q^{x_2} \mu^{x_3}},$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D},$$

где

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1,$$

$$\pi = \frac{P\tau}{\mu}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

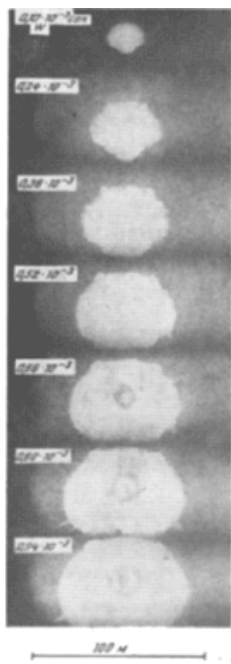


Рис.4.1.
Распространение
взрывной волны

Вариант 2. При атомном взрыве в области, настолько малой, что ее можно считать точкой, быстро (практически мгновенно) выделяется значительная энергия E . От центра взрыва распространяется мощная ударная волна (рис. 4.1), давление за которой вначале составляет сотни тысяч атмосфер. Это давление много больше, чем начальное давление воздуха, влиянием которого на первой стадии взрыва можно пренебречь. Таким образом, радиус фронта ударной волны r через промежуток времени τ после взрыва зависит от E , τ и начальной плотности воздуха ρ ($r = f(E, \tau, \rho)$).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

Оценка адекватности модели

Под адекватностью модели будем понимать степень соответствия результатов, полученных по разработанной модели, данным эксперимента или тестовой задачи.

Для оценки адекватности теоретических значений часто используют критерии согласия: критерий χ^2 (самый известный из статистических критериев, является основным методом, используемым в сочетании с другими критериями), критерий согласия Колмогорова, критерий согласия Фишера, критерий согласия Стьюдента и др [5].

Дано две последовательности значений экспериментальные $F^{\exists}(x)$ и теоретические $F^{\Gamma}(x)$. Необходимо проверить гипотезу $F^{\Gamma}(x)$ на адекватность $F^{\exists}(x)$.

Критерий χ^2

Сосчитаем величину V :

$$V = \sum_{i=1}^k \frac{(y_i^{\exists} - y_i^{\Gamma})^2}{y_i^{\Gamma}},$$

где k – количество точек.

Вычислим число степеней свободы $\nu = k - 1$.

Отвечая на вопрос чему равно приемлемое значение V , определим его с помощью таблиц подобных табл. 5.1. Если в таблице выбрать выбрать число x , стоящее на ν -й строке и в столбце p , то «вероятность того, что значение V будет меньше или равно x , приближенно равна p , если k достаточно велико».

Сравним значение V с табличным (табл. 5.1), где

p – вероятность, и сделаем выводы об адекватности. Если вычисленное на основе экспериментальных данных значение V меньше чем табличное значение, то гипотеза не принимается с вероятностью p [4].

Таблица 5.1

Некоторые процентные точки χ^2 - распределения

	$p = 1\%$	$p = 5\%$	$p = 25\%$	$p = 50\%$	$p = 75\%$	$p = 95\%$	$p = 99\%$
$v = 1$	0,00016	0,00393	0,1015	0,4549	1,323	3,841	6,635
$v = 2$	0,0201	0,1026	0,5754	1,386	2,773	5,991	9,210
$v = 3$	0,1148	0,3518	1,213	2,366	4,108	7,815	11,34
$v = 4$	0,2971	0,7170	1,923	3,357	5,385	9,488	13,28
$v = 5$	0,5543	1,1455	2,675	4,351	6,626	11,07	15,09
$v = 6$	0,8721	1,635	3,455	5,348	7,841	12,59	16,81
$v = 7$	1,239	2,167	4,255	6,346	9,037	14,07	18,48
$v = 8$	1,646	2,733	5,071	7,344	10,22	15,51	20,09
$v = 9$	2,088	3,325	5,899	8,343	11,39	16,92	21,67
$v = 10$	2,558	3,940	6,737	9,342	12,55	18,31	23,21
$v = 11$	3,053	4,575	7,584	10,34	13,70	19,68	24,72
$v = 12$	3,571	5,226	8,438	11,34	14,85	21,03	26,22
$v = 15$	5,229	7,261	11,04	14,34	18,25	25,00	30,58
$v = 20$	8,260	10,85	15,45	19,34	23,83	31,41	37,57
$v = 30$	14,95	18,49	24,48	29,34	34,80	43,77	50,89
$v = 50$	29,71	34,76	42,94	49,33	56,33	67,50	76,15
$v > 50$	$v + \sqrt{2vx_p} + \frac{2}{3}x_p^2 - \frac{2}{3} + O\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right)$						
$x_p =$	-2,33	-1,64	-0,674	0,00	0,674	1,64	2,33

Критерии согласия Колмогорова и Колмогорова-Смирнова

Критерий Колмогорова для обработки результатов моделирования целесообразно применять в тех случаях, когда известны все параметры теоретической функции распределения, непрерывны и известны все их значения:

$$D_k^+ = \max[F_i^{\mathcal{O}}(x) - F_i^T(x)] \text{ при } i = \overline{1, k},$$

$$D_k^- = \max[F_i^T(x) - F_i^{\mathcal{O}}(x)] \text{ при } i = \overline{1, k},$$

$$D = \max |F_i^T(x) - F_i^{\mathcal{O}}(x)| \text{ при } i = \overline{1, k}.$$

Из теоремы Колмогорова следует, что $K = D\sqrt{k}$.

Или согласно дополнению Смирнова $K_k^+ = D_k^+ \sqrt{k}$, $K_k^- = D_k^- \sqrt{k}$.

Если вычисленное на основе экспериментальных данных значение K меньше, чем табличное значение (табл. 5.2), то гипотеза принимается с вероятностью p , в противном случае расхождение между $F^T(x)$ и $F^{\ominus}(x)$ считается неслучайным и гипотеза отвергается [4].

Таблица 5.2

Некоторые процентные точки распределений K_n^+ и K_n^-

	$p = 1\%$	$p = 5\%$	$p = 25\%$	$p = 50\%$	$p = 75\%$	$p = 95\%$	$p = 99\%$
$n = 1$	0,01000	0,05000	0,2500	0,5000	0,7500	0,9500	0,9900
$n = 2$	0,01400	0,06749	0,2929	0,5176	0,7071	1,0980	1,2728
$n = 3$	0,01699	0,07919	0,3112	0,5147	0,7539	1,1017	1,3589
$n = 4$	0,01943	0,08789	0,3202	0,5110	0,7642	1,1304	1,3777
$n = 5$	0,02152	0,09471	0,3249	0,5245	0,7674	1,1392	1,4024
$n = 6$	0,02336	0,1002	0,3272	0,5319	0,7703	1,1463	1,4144
$n = 7$	0,02501	0,1048	0,3280	0,5364	0,7755	1,1537	1,4246
$n = 8$	0,02650	0,1086	0,3280	0,5392	0,7797	1,1586	1,4327
$n = 9$	0,02786	0,1119	0,3274	0,5411	0,7825	1,1624	1,4388
$n = 10$	0,02912	0,1147	0,3297	0,5426	0,7845	1,1658	1,4440
$n = 11$	0,03028	0,1172	0,3330	0,5439	0,7863	1,1688	1,4484
$n = 12$	0,03137	0,1193	0,3357	0,5453	0,7880	1,1714	1,4521
$n = 15$	0,03424	0,1244	0,3412	0,5500	0,7926	1,1773	1,4606
$n = 20$	0,03807	0,1298	0,3461	0,5547	0,7975	1,1839	1,4698
$n = 30$	0,04354	0,1351	0,3509	0,5605	0,8036	1,1916	1,4801
$n > 30$	$y_p + \frac{1}{6}n^{-1/2} + O(1/n)$						
$y_p =$	0,07089	0,1601	0,3793	0,5887	0,8326	1,2239	1,5174

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ПО КРИТЕРИЮ χ^2 КВАДРАТ

x	1	2	3	4
y^{\ominus}	1	1	3	8
y^T	0,874	1,258	2,852	8,054

$$V = \sum_{i=1}^k \frac{(y_i^{\text{э}} - y_i^T)^2}{y_i^T} = \frac{0,018776}{0,874} + \frac{0,066564}{1,258} + \frac{0,0219}{2,852} + \frac{0,054}{8,054} =$$

$$= 0,0214 + 0,0529 + 0,00768 + 0,000362 = 0,0823,$$

$$v = k - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Гипотеза попадает в интервал 1–5% и может быть принята. Проверка по критерию χ^2 три и более раза с разными экспериментальными данными.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ПО КРИТЕРИЮ КОЛМОГороВА И КОЛМОГороВА-СМИРНОВА

x	1	2	3	4
$y^{\text{э}}$	1	1	3	8
y^T	0,874	1,258	2,852	8,054

$$K_k^+ = D_k^+ \sqrt{k} = \max(1 - 0,874; 1 - 1,258; 3 - 2,852; 8 - 8,054) \sqrt{4} = (3 - 2,852) \sqrt{4} = 0,296,$$

$$K_k^- = D_k^- \sqrt{k} = \max(0,874 - 1; 1,258 - 1; 2,852 - 3; 8,054 - 8) \sqrt{4} = (1,258 - 1) \sqrt{4} = 0,516,$$

$$K = D \sqrt{k} = \max |1 - 0,874; 1 - 1,258; 3 - 2,852; 8 - 8,054| \sqrt{4} = |1 - 1,258| \sqrt{4} = 0,516.$$

По критерию Колмогорова-Смирнова гипотеза принимается с вероятностью 5-25% по K_k^+ и с вероятностью 50-75% по K_k^- .

По критерию Колмогорова гипотеза принимается с вероятностью 50-75% по K .

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Проверить на адекватность по критерию χ^2 и критерию Колмогорова или Колмогорова-Смирнова (на выбор) данные, полученные в практической работе №2.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

Планирование экспериментов

В связи с тем, что математические методы планирования экспериментов основаны на кибернетическом представлении процесса проведения эксперимента, наиболее подходящей моделью последнего является абстрактная схема, называемая «черным ящиком». При таком

кибернетическом подходе различают входные и выходные переменные: $x_1, x_2, \dots, x_k; y_1, y_2, \dots, y_i$. В зависимости от того, какую роль играет каждая переменная в проводимом эксперименте, она может являться либо фактором, либо реакцией. Пусть, например, имеют место только две переменные: x и y . Тогда если цель эксперимента - изучение влияния переменной x на переменную y , то x - фактор, а y - реакция.

Если в результате эксперимента нам необходимо определить коэффициенты уравнения регрессии (6.1) с B , независимыми коэффициентами, то план эксперимента D должен содержать как минимум $N \geq B$ экспериментальных точек [5].

$$y = b_0 + \sum b_i x_i + \sum b_{ij} x_j x_i + \sum b_{ii} x_i^2 + \dots \quad (6.1)$$

$$D = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{kN} \end{vmatrix},$$

где x_{iu} - значения, которые принимает i -я переменная в u -м испытании, $i = \overline{1, k}$, $u = \overline{1, N}$.

Реализовав испытания в N точках области факторного пространства, отведенной для экспериментирования, получим вектор наблюдений, имеющий следующий вид:

$$\vec{y} = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{vmatrix},$$

где y_u - реакция, соответствующая u -й точке плана $\vec{x}_u = \|x_{1u}, x_{2u}, \dots, x_{ku}\|$, $u = \overline{1, N}$.

При незначительном влиянии неуправляемых входных переменных и параметров по сравнению с вводимыми возмущениями управляемых переменных в планировании эксперимента предполагается верной следующая модель:

$$y_u = b_0 x_{0u} + b_1 x_{1u} + \dots + b_k x_{ku} + b_{k+1} x_{k+1u} + \dots + b_{k'} x_{k'u}.$$

Выписав аналогичные соотношения для всех точек плана $u = \overline{1, N}$, получим матрицу планирования

$$X = \begin{pmatrix} x_{01} & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} & x_{k+11} & \cdots & x_{k'1} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} & x_{k+12} & \cdots & x_{k'2} \\ \vdots & & & & & & & \\ x_{0N} & x_{1N} & x_{2N} & \cdots & x_{kN} & x_{k+1N} & \cdots & x_{k'N} \end{pmatrix}.$$

Вначале следует выбрать границы $x_{i\min}$ и $x_{i\max}$ области определения факторов, задаваемые исходя из свойств исследуемого объекта, т. е. на основе анализа априорной информации о системе и внешней среде. Например, такая переменная, как температура, при термобарических экспериментах принципиально не может быть ниже абсолютного нуля и выше температуры плавления материала, из которого изготовлена термобарокамера.

После определения области необходимо найти локальную подобласть для планирования эксперимента путем выбора основного (нулевого) уровня x_{i0} и интервалов варьирования Δx_i , $i = \overline{1, k}$.

В качестве исходной точки x_{i0} выбирают такую, которая соответствует наилучшим условиям, определенным на основе анализа априорной информации о системе, причем эта точка не должна лежать близко к границам области определения факторов $x_{i\min}$ и $x_{i\max}$. На выбор интервала варьирования Δx_i накладываются естественные ограничения снизу (интервал не может быть меньше ошибки фиксирования уровня фактора, так как в противном случае верхний и нижний уровни окажутся неразличимыми) и сверху (верхний и нижний уровни не должны выходить за область определения).

В рамках выбранной модели планирования в виде алгебраических полиномов строится план эксперимента путем варьирования каждого из факторов x_i , $i = \overline{1, k}$, на нескольких уровнях q относительно исходной точки x_{i0} , представляющей центр эксперимента.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется **полным факторным экспериментом** (ПФЭ). Если выбранная модель планирования включает в себя только линейные члены полинома и их произведения, то для оценки

коэффициентов модели используется план эксперимента с варьированием всех k факторов на двух уровнях, т. е. $q=2$. Такие планы называются планами типа 2, где $N=2^k$ – число всех возможных испытаний.

Начальный этап планирования эксперимента для получения коэффициентов линейной модели основан на варьировании факторов на двух уровнях: нижнем $x_{ин}$ и верхнем $x_{ив}$, симметрично расположенных относительно основного уровня x_{i0} , $i=\overline{1,k}$. Геометрическая интерпретация показана на рис. 6.1 (а). Так как каждый фактор принимает лишь два значения $x_{ин}=x_{i0}-\Delta x_i$ и $x_{ив}=x_{i0}+\Delta x_i$, то для стандартизации и упрощения записи условий каждого испытания и обработки выборочных данных эксперимента масштабы по осям факторов выбираются так, чтобы нижний уровень соответствовал -1 , верхний $+1$, а основной – нулю. Это легко достигается с помощью преобразования вида

$$\tilde{x}_i = \frac{(x_i - x_{i0})}{\Delta x_i}, \quad i = \overline{1,k},$$

где \tilde{x}_i – кодированное значение i -го фактора; x_i – натуральное значение фактора; x_{i0} – нулевой уровень; $\Delta x = \frac{(x_{ив} - x_{ин})}{2}$ – интервал варьирования фактора.

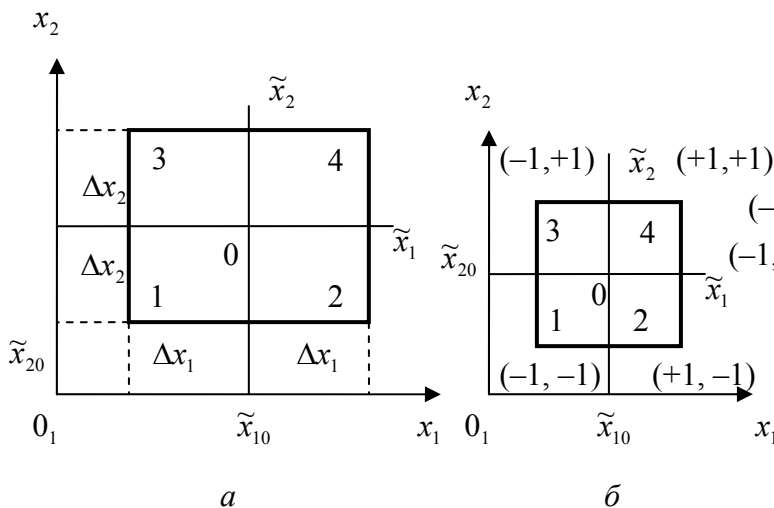


Рис.6.1. Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента типа 2^2 : а – без масштабирования, б – при масштабировании по осям

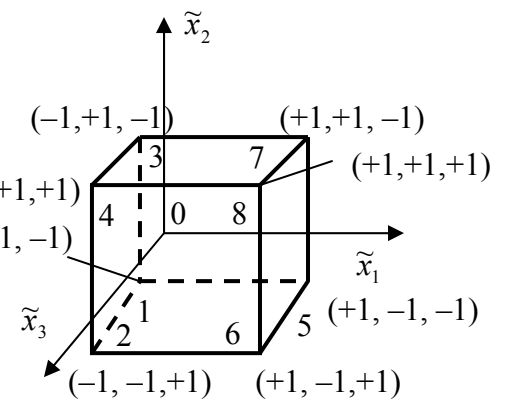


Рис.6.2. Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента типа 2^3

ПРИМЕР ВЫБОРА ИНТЕРВАЛА ИЗМЕНЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть в качестве i -го фактора выступает такая переменная, как температура T , °С, т.е. $x_i = T$, причем выбраны основной уровень $x_{i0} = 100$ °С и интервал варьирования $\Delta x_i = 20$ °С. Тогда кодированные значения \tilde{x}_i по уровням соответственно будут $(80-100)/20 = -1$ для нижнего, $(120-100)/20 = +1$ для верхнего, $(100-100)/20 = 0$ для основного.

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Для оценки свободного члена b_0 и определения эффектов взаимодействия $b_{12}, b_{13}, \dots, b_{123}$ план эксперимента D расширяют до матрицы планирования X путем добавления соответствующей «фиктивной переменной»: единичного столбца \tilde{x}_0 и столбцов произведений $\tilde{x}_1\tilde{x}_2, \tilde{x}_1\tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ как показано, например, для ПФЭ типа 2^3 , соответственно табл.6.2 и табл. 6.1 [2].

Таблица 6.1

План ПФЭ 2^3

Номер испытания	1	2	3	4	5	6	7	8
\tilde{x}_1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1
\tilde{x}_2	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1
\tilde{x}_3	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1
Обозначение строк*	(1)	c	B	bc	a	ac	Ab	abc

Факторы, которые по тем или иным причинам невозможно учесть в эксперименте, необходимо в течении всех опытов стабилизировать на постоянных уровнях.

* При этом планы можно записывать сокращенно с помощью условных буквенных обозначений строк. Для этого порядковый номер фактора ставится в соответствие со строчной буквой латинского алфавита: $x_1 \rightarrow a$, $x_2 \rightarrow b$ и т. д.

Таблица 6.2

Матрица планирования

Номер испытания	\tilde{x}_0	План ПФЭ			$\tilde{x}_1\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_2\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$	Реакция y
		\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3					
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	y_1
2	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y_3
4	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	y_4
5	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	y_6
7	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

Для плана ПФЭ 2^3 число факторов $k = 3$. Выполняется $N = 2^3 = 8$ опытов. Уравнение может содержать до восьми членов:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

Результаты эксперимента, проведенного по такому плану, позволяют построить регрессионную модель.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Составить план полного факторного эксперимента, для уравнения задавшись физическим смыслом факторов x и их диапазонами изменения.

Вариант 2. $y = b_0 + b_1 \sin x_1 + b_2 \sin x_2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время моделирование стало эффективным средством решения сложных задач автоматизации исследований, экспериментов и проектирования больших систем. Достигнуты успехи в прикладной теории моделирования. Научиться моделированию как рабочему инструменту можно только при полном овладении приемами и технологией практического решения задач. Эту цель и преследует данное учебное пособие.

Существенное упрощение и ускорение процесса разработки моделей систем достигается при использовании ЭВМ и специальных пакетов. В данном пособии материал представлен в виде, в котором наиболее просто представленные методы могут быть реализованы на ЭВМ.

Дальнейшее развитие информатики и автоматизации как сферы эффективного применения вычислительной техники для исследования и разработки сложных систем управления различными объектами, несомненно, послужит повышению роли моделирования и, в частности, машинного моделирования для решения сложных народнохозяйственных проблем.

В этом аспекте учебное пособие может быть использовано как основа для изучения методов, применяемых в машинном моделировании и разработки математических моделей систем.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Методы обращения матриц

Обращение матрицы с помощью расширенной матрицы

Процедура обращает квадратную матрицу M размером $n \times n$ с помощью элементарных операций, которые приводят матрицу M к единичной. К числу элементарных операций относятся: перестановка двух столбцов (строк) матрицы, умножение строки (столбца) на k , неравное 0, сложение двух строк (столбцов).

Зададим расширенную матрицу A :

$$A = \left(\begin{array}{cccc|ccc} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & & m_{nn} & 0 & 0 & & 1 \end{array} \right).$$

При обращении над расширенной матрицей совершаются операции со строками, приводящие левую часть матрицы к единичной. По завершении этого процесса правая часть расширенной матрицы будет обратной матрицей.

Следует отметить, что не у каждой матрицы есть обратная матрица. Если матрица вырождена, то при её обращении потребуется поделить строку на число, равное нулю, что невозможно.

Обращение матрицы методом Гаусса

Процедура находит матрицу, обратную квадратной матрице A размером $n \times n$, по методу Гаусса. Для невырожденной матрицы $A = (a_{ij})$ находится матрица $A^{-1} = (x_{ij})$, такая, что

$$AA^{-1} = E,$$

где E – единичная матрица.

Уравнение представляет собой n систем n линейных уравнений для n^2 неизвестных x_{ij} . Каждая из систем имеет одну и ту же основную матрицу A и различные свободные члены. Все системы решаются одновременно.

Следует отметить, что не у каждой матрицы есть обратная матрица. Если матрица вырождена, то при её обращении потребуется произвести деление на число, равное нулю.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Стандартное отклонение как 68 %-ный доверительный интервал

Вычислим вероятность $P(\sigma)$ того, что результат единичного измерения (если результаты измерений распределены нормально) окажется в пределах одного стандартного отклонения σ от истинного значения X : $X - \sigma \leq X \leq X + \sigma$.

Обозначим $P(\sigma) = P(X - \sigma \leq X \leq X + \sigma)$,

$$P(\sigma) = \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} f_{X,\sigma}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2} dx.$$

Величина интеграла равна площади фигуры S на рис. 1. Для вычисления интеграла сделаем подстановку $z = \frac{(x-X)}{\sigma}$, тогда в новых переменных получим

$$P(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-z^2/2} dz.$$

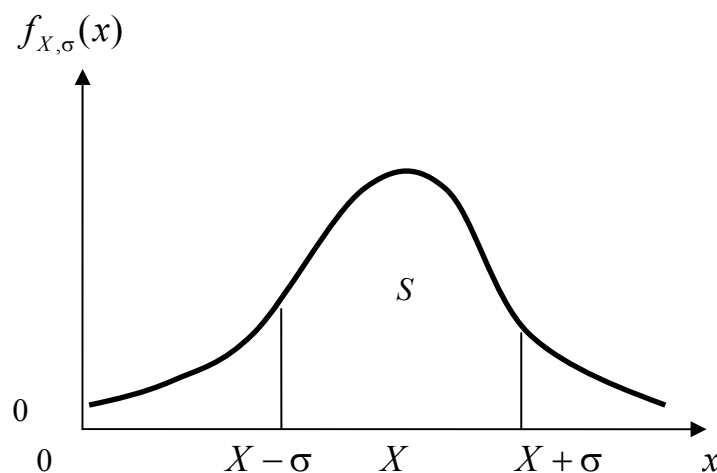


Рис.1. График нормального распределения единичного измерения

Будем искать вероятность $P(t\sigma)$ того, что единичный результат будет лежать в пределах $X - t\sigma \leq X \leq X + t\sigma$.

Тогда после аналогичных преобразований получим

$$P(t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^t e^{-z^2/2} dz$$

Это стандартный интеграл математической физики, который

называется интегралом (функцией) ошибок и обозначается как $erf(t)$. Его нельзя вычислить аналитически, но он протабулирован. Некоторые значения $P(t\sigma)$ представлены ниже:

t	0	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
$P(t\sigma), \%$	0	38	68	87	95,4	99,7	99,99

График функции $P(t\sigma)$ изображен на рис. 2. Из таблицы и графика следует, что с увеличением t вероятность $P(t\sigma)$ быстро стремится к 100%. При $t=1$ $P(t\sigma) = 68\%$. Это означает, что вероятность того, что результат единичного измерения окажется в пределах одного стандартного отклонения от истинного значения X ($X - \sigma \leq X \leq X + \sigma$) составляет 68 %. Отсюда ясен смысл заголовка данного параграфа.

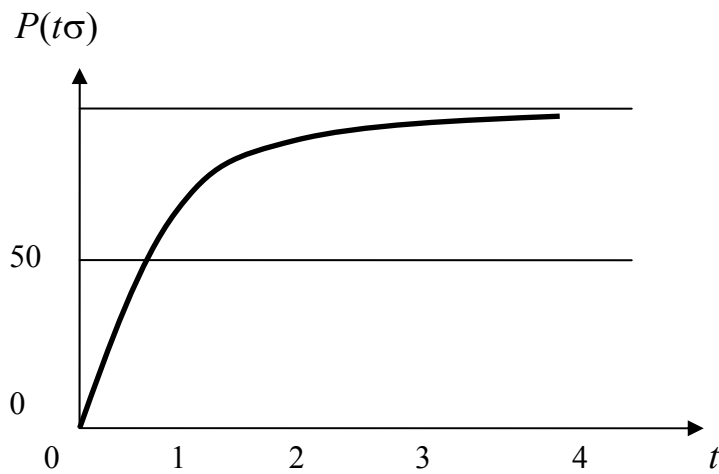


Рис.2. График зависимости функции вероятности $P(t\sigma)$ от количества измерений

Для результатов измерений, которые распределены нормально, вводится еще одно понятие – вероятная ошибка: $P(t\sigma) = 50\%$ при значении $t = 0,674$.

