Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный государственный
университет путей сообщения»

Кафедра «Высшая математика»

Е.Н. Мурая

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Методические указания
по выполнению контрольной работы

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2018

УДК 519.853 (075.8)
ББК В 183.5я73
М 911

Рецензент:
Кандидат физико-математических наук,
Доцент кафедры «Высшая математика»
Дальневосточного государственного
университета путей сообщения
В.Я. Прудников

Мурая, Е.Н.

М 911 Методы оптимальных решений : метод. указания по выполнению контрольной работы / Е.Н. Мурая. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2018. – 32 с.

Методические указания соответствуют рабочей программе дисциплины «Методы оптимальных решений».

Содержат требования, предъявляемые к студентам при выполнении заданий контрольной работы, задачи для самостоятельной работы и разобранные примеры.

Предназначены для студентов заочной формы обучения 2-го и 4-го курсов направления 38.03.01 «Экономика». А так же может быть полезно для студентов дневной формы обучения в качестве справочного материала.

УДК 519.853 (075.8)
ББК В 183.5я73

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания разработаны для студентов ИИФО направлений подготовки 38.03.01 «Экономика» заочной формы обучения по дисциплине «Методы оптимальных решений». Обучающийся изучив данную дисциплину должен обладать способностью на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и экономические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты.

Цель создания пособия – помочь студенту освоить материал по темам «нелинейное программирование», «динамическое программирование», знать основные математические модели в экономике, свойства изучаемых объектов, методы абстрактного мышления, анализа и синтеза, методы получения и обработки информации о свойствах изучаемых объектов в новой области знания, уметь применять методы оптимальных решений и моделирования, теоретического и экспериментального исследования для решения экономических задач, овладеть навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач, методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.

Методические указания содержат примеры решения типовых задач контрольной работы. Все задания составлены автором, решение пробного варианта подробно описано. Предполагается, что студент владеет навыками самостоятельной работы, имеет теоретическую подготовку по теме, владеет основными понятиями и знаком с методами решения.

1. ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Работа должна быть выполнена аккуратно, написана от руки или напечатана.
2. Работа снабжается титульным листом, на котором приводятся следующие данные: фамилия студента, шифр студента (образец титульного листа приведен в приложении).
3. Решения задач внутри работы должны быть приведены в той же последовательности, что их формулировки.
4. Перед решением указывается порядковый номер задачи, который необходимо выделить. Обязательно перед решением приводиться условие задачи. В конце решения приводиться ответ по форме: «Ответ:…..».

Вариант контрольной работы определяется по последней цифре зачетной книжки!!!

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

2.1. Оптимальные решения в условиях неопределенности

Различают задачи, формулировка и решения которых принимается при наличии полной информации. В реальной деятельности чаще приходиться принимать решения, учитывая множество факторов, которые часто обладают свойствами неопределенности. Неопределенность или недостаток информации о действительных условиях, при которых развивается объект управления, является характеристиками внешний среды, в рамках которой принимается оптимальное решение о развитии объекта.

В таких случаях для определения наилучших решений используются следующие критерии: Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

Критерий Вальда. Данный критерий опирается на принцип наибольшей осторожности и основывается на выборе наилучшего из наихудшего решения.

Если в исходной матрице по условию задачи результат a_{ij} представляет выигрыш лица, принимающего решение, то выбирается решение, для которого достигается значение $W = \max\min a_{ij}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ – *максиминный критерий*.

Если в исходной матрице по условию задачи результат представляет потери лица, принимающего решение, то выбирается решение, для которого достигается значение $W = \min\max a_{ij}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ – *минимаксный критерий*.

В соответствии с критерием Вальда из всех самых неудачных результатов выбирается лучшей. Это перестраховочная позиция крайнего пессимизма, рассчитанная на худший случай.

Критерий минимаксного риска Сэвиджа. Выбор стратегии аналогичен выбору стратегии по принципу Вальда с тем отличием, что решение принимается на основе матрицы рисков *R*:

$$S = \min\max r_{ij} \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

Применение критерия Сэвиджа позволяет любыми путями избежать большого риска при выборе стратегии, а значит, избежать больших потерь.

Критерий пессимизма–оптимизма Гурвица. Этот критерий при выборе решения рекомендует руководствоваться некоторым средним результатом, характеризующим состояние между крайним пессимизмом и безудержным оптимизмом.

Критерий основан на следующих двух предположениях: «природа» может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятность (1–p) и в самом выгодном состоянии с вероятностью p, где p – коэффициент пессимизма.

Согласно этому критерию стратегия в матрице А выбирается в соответствии со значением:

$H_A = \max \{p \max a_{ij} + (1–p) \min a_{ij}\}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, если a_{ij} – выигрыш;

$H_A = \min \{p \min a_{ij} + (1–p) \max a_{ij}\}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, если a_{ij} – потери (затраты).

При p = 0 критерий Гурвица совпадает с критерием Вальда. При p = 1 приходим к решающему правилу вида $\max\max a_{ij}$, к так называемой стратегии «здорового оптимизма», критерий максимакса.

Применительно к матрице рисков R критерий пессимизма-оптимизма Гурвица имеет вид:

$$H_R = \min \{p \max r_{ij} + (1–p) \min r_{ij}\},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

При p = 0 выбор стратегии игрока 1 осуществляется по условию наименьшего из всех возможных рисков ($\min r_{ij}$); при p = 1 – по критерию минимаксного риска Сэвиджа.

Значение p от 0 до 1 может определяться в зависимости от склонности лица, принимающего решение, к пессимизму или оптимизму. При отсутствии ярко выраженной склонности p = 0,5 представляет наиболее разумный вариант.

Пример 1. Транспортное предприятие должно определить уровень своих производственных возможностей так, чтобы удовлетворить спрос клиентов на транспортные услуги на планируемый период. Спрос на транспортные услуги не известен, но прогнозируется, что он может принять одно из четырех значений: 10, 15, 20 или 25 тыс. т. Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень провозных возможностей транспортного предприятия. Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным затратам либо из-за превышения провозных возможностей над спросом (из-за простоя подвижного состава), либо из-за неполного удовлетворения спроса на транспортные услуги. Возможные прогнозируемые затраты на развитие провозных возможностей представлены в таблице.

Варианты провозных возможностей транспортного предприятия	Варианты спроса на транспортные услуги			
	1	2	3	4
1	6	12	20	24
2	9	7	9	28
3	23	18	15	19
4	27	24	21	15

Необходимо выбрать оптимальную стратегию. Использовать: критерий Вальда, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица.

Решение

Имеются четыре варианта спроса на транспортные услуги, что равнозначно наличию четырех состояний «природы»: П1, П2, П3, П4. Известны так же четыре стратегии развития провозных возможностей транспортного предприятия: А1, А2, А3, А4. Затраты на развитие провозных возможностей при каждой паре Пi и Ai заданы следующей матрицей:

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} & П1 & П2 & П3 & П4 \\ \hline A1 & 6 & 12 & 20 & 24 \\ A2 & 9 & 7 & 9 & 28 \\ A3 & 23 & 18 & 15 & 19 \\ A4 & 27 & 24 & 21 & 15 \end{array}\right)$$

Построим матрицу рисков. В данном примере a_{ij} представляет затраты, т.е. потери значит для построения матрицы рисков используется принцип $r_{ij} = a_{ij} - \beta_j$, где $\beta_j = \min a_{ij}$.

Для П1: $\beta_j = 6$.

Для П2: $\beta_j = 7$.

Для П3: $\beta_j = 9$.

Для П4: $\beta_j = 15$.

Матрица рисков имеет следующий вид:

$$R = \left(\begin{array}{c|cccc} & П1 & П2 & П3 & П4 \\ \hline A1 & 0 & 5 & 11 & 9 \\ A2 & 3 & 0 & 0 & 13 \\ A3 & 17 & 11 & 6 & 4 \\ A4 & 21 & 17 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

Критерий Вальда

Так как в данном примере a_{ij} представляет затраты, т.е. потери, то применятся минимаксный критерий.

Для А1: $\max a_{ij} = 24$.
Для А2: $\max a_{ij} = 28$.
Для А3: $\max a_{ij} = 23$.
Для А4: $\max a_{ij} = 27$.

$W = \min \max a_{ij} = 23 \Rightarrow$ наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с минимаксным критерием Вальда будет третья стратегия (А3).

Критерий минимаксного риска Сэвиджа

Для А1: $\max r_{ij} = 11$
Для А2: $\max r_{ij} = 13$
Для А3: $\max r_{ij} = 17$
Для А4: $\max r_{ij} = 21$

$S = \min \max r_{ij} = 11 \Rightarrow$ наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с критерием Сэвиджа будет первая стратегия (А1).

Критерий пессимизма–оптимизма Гурвица

Положим значение коэффициента пессимизма $p = 0{,}5$.

Так как в данном примере a_{ij} представляет затраты (потери), то применятся критерий:

$$H_A = \min \{p \min a_{ij} + (1–p) \max a_{ij}\}.$$

	$\min a_{ij}$	$\max a_{ij}$	$p \min a_{ij} + (1–p) \max a_{ij}$
Для А1	6	24	15
Для А2	7	28	17,5
Для А3	15	23	19
Для А4	15	27	21

Оптимальное решение заключается в выборе стратегии А1.

Рассчитаем оптимальную стратегию применительно к матрице рисков

$$H_R = \min \{p \max r_{ij} + (1–p) \min r_{ij}\}.$$

	$\min r_{ij}$	$\max r_{ij}$	$p \max r_{ij} + (1–p) \min r_{ij}$
Для А1	0	11	5,5
Для А2	0	13	6,5
Для А3	4	17	10,5
Для А4	0	21	10,5

Оптимальное решение заключается в выборе стратегии А1/

Ответ.

по критерию Вальда – выбор стратегии А3;
по критерию Сэвиджа – выбор стратегии А1;
по критерию Гурвица – выбор стратегии А1.

2.2. Нелинейное программирование

Нелинейное программирование (НП) – это математический аппарат для поиска экстремума нелинейных функций при наличии ограничений.

В общем виде задача нелинейного программирования (НП) записывается следующим образом:

Найти

$$\min f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

при условиях

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0. \end{cases} \qquad (2)$$

где $f(x_1, x_2, \ldots, x_3)$ и/или ограничения $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_3)$ – нелинейные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_3$. Условие $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_3) = 0$ можно заменить на два: $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_3) \le 0$ и $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_3) \ge 0$.

В отличие от линейного при нелинейном программировании отсутствуют универсальные методы решения типа симплекс-метода. Это связанно с тем, что допустимое множество решений $R(x_1, x_2, \ldots, x_3)$, определяемое условиями (2), в общем случае не является выпуклым, а кроме того, даже в случае выпуклости $R(x_1, x_2, \ldots, x_3)$ множество его крайних точек не будет конечным.

В связи с указанными обстоятельствами методы нелинейного программирования разрабатываются лишь для решения специальных классов задач.

Решение задачи нелинейного программирования состоит в определении такого оптимального плана (вектора) $x^* \in X(X \subset R^n)$, что f(x*)   f(x) на множестве X векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Если f – выпуклая функция, то (−f) называется вогнутой функцией. При этом x* – точка минимума   является точкой максимума (−f) и наоборот.

Свойства выпуклых функций таковы:

1. Если $\forall g_i(x)$ (2) – выпуклы, то X – выпуклое множество.

2. Сумма выпуклых функций является выпуклой функцией.

3. Если выпуклая функция f имеет в точке x^0 локальный минимум, то этот минимум является и глобальным.

4. Стационарная точка выпуклой дифференцируемой функции является точкой глобального минимума. В случае строгой выпуклости функции эта точка – единственная.

Наличие этих свойств объясняет тот факт, что из всех методов решения задач нелинейного программирования наиболее разработанными являются методы решения задач выпуклого программирования, которые в основном приведены далее.

Так как max (f) = –min f, достаточно рассмотреть задачи на минимум.

Основным среди точных методов решения задач нелинейного программирования данного типа является метод множителей Лагранжа.

Теорема 1.

Если x* *– точка локального минимума дифференцируемой функции* f(x), *то при ограничениях* $g_i(x)=0$, *удовлетворяющих некоторому условию регулярности, для функции Лагранжа*

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x) \tag{3}$$

существует вектор множителей Лагранжа $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_m^*)$ *такой, что*

$$\frac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_j}=\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j}=0,\ j=\overline{1,n}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_j}=g_j(x^*)=0,\ j=\overline{1,m}. \tag{5}$$

Замечания:

1. Множители Лагранжа $\lambda_1^*=(i=1,...,m)$ имеют произвольные знаки.

2. Если f и $\forall g_i$ выпуклы, то необходимые условия (3)–(4) являются и достаточными для существования решения x* задачи (1)–(2).

3. Требование регулярности связано с существованием решения системы (3)–(4).

Метод множителей Лагранжа позволяет отыскивать максимум или минимум функции при ограничениях – равенствах, т. е. в (2) все ограничения являются равенствами. Основная идея метода заключается в переходе от задачи на условный экстремум к задаче отыскания безусловного экстремума некоторой специально построенной функции Лагранжа.

Пусть требуется найти

$$\min f(x_1, x_2,\ldots, x_n) \tag{6}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2,...,x_n)=0,\\ g_2(x_1,x_2,...,x_n)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ g_3(x_1,x_2,...,x_n)=0. \end{cases} \tag{7}$$

Составим функцию Лагранжа следующего вида:

$$L(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x_1,x_2,...,x_n). \tag{8}$$

Для того чтобы вектор $X_0 = x_j^0$, $j=\overline{1,n}$ являлся решением задачи (6)–(7), необходимо существование такого вектора $\Lambda_0 = \{\lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0\}$ чтобы пара векторов (X_0, Λ_0) удовлетворяла системе уравнений:

$$\frac{\partial L(X_0, \Lambda_0)}{\partial x_j} = 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial L(X_0, \Lambda_0)}{\partial \lambda_j} = g_j(X_0),\ j = \overline{1,m}. \tag{10}$$

Метод множителей Лагранжа состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Составляем функцию Лагранжа вида (8).

Шаг 2. Составляем систему нелинейных уравнений (9)–(10).

Шаг 3. Находим решения системы нелинейных уравнений (X_s^*, Λ_s^*) и исследуем функцию f(X) в окрестности точек X_s^* на максимум (минимум).

Пример 2. Найти условный экстремум следующей задачи НП:

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \min$$

при условии $x_1 + x_2 = 7$.

Решение

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + \lambda(7 - x_1 - x_2).$$

Уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 2\,(x_1 - 2) - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 2\,(x_2 - 3) - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 7 - x_1 - x_2 = 0.$$

Решая эту систему, находим ее корни: $x_1^0 = 3$, $x_2^0 = 4$, $\lambda^0 = 2$. Далее исследуем характер функции f(x_1, x_2) окрестности точки ($x_1^0 = 3$, $x_1^0 = 4$), для этого находим

$$f_{11} = \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1^2} = 2 > 0; \quad f_{22} = \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2^2} = 2 > 0; \quad f_{12} = f_{21} = \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Так как $f_{11} = (X^0) > 0$ и $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, функция выпукла, и в точке X^0 имеем абсолютный минимум.

Ответ. Оптимальный план $x^* = (3, 4)$.

Пример 3. В двух цехах предприятия нужно изготовить 20 изделий некоторой продукции. Затраты, связанные с изготовлением x_1 изделий в первом цехе, равны $5x_1^2$ руб., а затраты на изготовление x_2 изделий во втором цехе равны $10x_2 + 5x_2^2$ руб. Составить план производства изделий в двух цехах с минимальными затратами.

Математическая модель задачи:

$$f = 5x_1^2 + 10x_2 + 5x_2^2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20, \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение

Запишем функцию Лагранжа:

$$L = 5x_1^2 + 10x_2 + 5x_2^2 + \lambda\,(20 - x_1 - x_2).$$

Для данной функции получим в точке экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 10x_1 + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 10 + 10x_2 + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 20 - x_1 - x_2 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$x_1 = 10{,}5,\ x_2 = 9{,}5,\ \lambda = -105.$$

Ответ. Минимальные затраты, связанные с изготовлением x_1 изделий равны 10,5, а затраты на изготовления x_2 равны 9,5 (функция f выпукла как сумма выпуклых функций на выпуклом множестве: отрезке прямой $x_1 + x_2 = 20$, лежащем в первой четверти, полученная стационарная точка x = (10,5; 9,5) является точкой глобального минимума).

2.3. Динамическое программирование

2.3.1. Задача об оптимальном распределении инвестиций

Динамическое программирование – математический метод нахождения оптимального решения многошаговых задач. Дает возможность принять ряд последовательных решений, обеспечивающих оптимальность процесса в целом.

Принцип оптимальности Беллмана – на любом этапе принимать решения, которые обеспечивают оптимальность с данного этапа до конца процесса, поэтому анализируют с конца процесса.

Функциональное уравнение Беллмана – математическая формулировка принципа оптимальности Беллмана.

Оптимальное управление – каковы бы ни были начальные состояния S_0 и решения в начальный момент времени, последующие решения должны составить оптимальное управление относительно состояния, полученного в результате предыдущих решений.

Задача подобрать управленческого решения X так, чтобы за «n» шагов достичь экстремума $Z = (S_0, X)$.

Целевая функция имеет вид:

$$Z(S_0, X) = \sum_{k=0}^{1} F_n(S_{k-1}, X_k).$$

Пусть ищем максимум целой функции.

На шаге n:

$$\max_{x_n} F_n(S_{n\text{-}1}, x_k) = \underset{\text{зависит только от выбора } x_n}{Z_n(S_{n\text{-}1})}.$$

На шаге n–1:

$$\max_{x_{n-1}} \{F_{n-1}(S_{n-2}, x_{n-1}) + Z_n(S_{n-1})\} = \max_{x_{n-1}} \{F_{n-1}(S_{n-2}, x_{n-1}) +$$
$$+ Z_n(S_{n-1}(S_{n-2}, x_{n-1}))\} = Z_{n-1}(S_{n-2}).$$

На шаге n–2:

$$\max_{x_{n-2}} \{F_{n-2}(S_{n-3}, x_{n-2}) + Z_{n-1}(S_{n-2})\} = \max_{x_{n-2}} \{F_{n-2}(S_{n-3}, x_{n-2}) +$$
$$+ Z_{n-1}(S_{n-2}(S_{n-3}, x_{n-2}))\} = Z_{n-2}(S_{n-3}).$$

На любом шаге k, $k = \overline{1, n}$:

$$\max_{x_k} \{F_k(S_{k-1}, x_k) + Z_{k+1}(S_k(S_{k-1}, x_k))\} = Z_k(S_{k-1}).$$

Схема решения:

1) определить все состояния системы $S_0, ..., S_n$;

2) определить вид целевой функции $F_k(S_{k-1}, X_k), k = \overline{1, n}$;

3) составить функции перехода $S_k(S_{k-1}, X_k), k = \overline{1,n}$;

4) из уравнения Беллмана для $Z_1(S_0)$ по S_0 найти оптимальное решение на первом шаге X_1^*;

5) по S_0 и X_1^* определяем системы $S_1 = S_1(S_0, X_1^*)$ – после первого шага;

6) из уравнения $Z_2(S_1)$ по S_1 определяем X_2^*;

7) по S_1 и X_2^* определяем состояние системы $S_2 = S_2(S_0, X_2^*)$ – после второго шага и т. д.

Задачи динамического программирования решаются в два этапа.

1. Условная оптимизация: отыскания функции Беллмана и оптимального управления для всех возможных состояний на каждом шаге, начиная с последнего в соответствии с алгоритмом решения.

2. Безусловная оптимизация: после того, как функция Беллмана и соответствующие оптимальные управления найдены для всех шагов, находится оптимальное управление на первом шаге X_2, применение которого переводит систему $S_1(S_0, X_1^*)$, зная которое, можно, пользуясь результатами условной оптимизации, найти оптимальное управление на втором шаге, и так далее до последнего n-го шага.

Пример 4. На реконструкцию 3-х заводов выделено 5 млн. руб. Увеличение выпуска продукции после реконструкции в зависимости от выделенного i-му заводу x средств обозначим через y(x). Данные представлены в таблице. Найти вариант распределения средств, при котором выпуск продукции будет максимальным.

x	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y_3(x)$
0	0	0	0
1	5	7	6
2	12	10	13
3	16	14	18
4	21	20	21
5	23	25	22

Решение

Условная оптимизация:

1 шаг x_1: = где x_1 – деньги первому заводу.

2 шаг x_2: = , где x_2 – деньги второму заводу.

3 шаг x_3: = , где x_3 – деньги третьему заводу.

Запишем уравнение Беллмана на k-м шаге:

$$\max_{0 \le x_k \le S_{k-1}} \{y_k(x_k) + Z_{k+1}(S_{k-1} - x_k)\}.$$

Итак, k = 3: $Z_3(S_3) = \max_{0 \le x_3 \le S_3} \{y_3(x_3) + Z_3(S_2)\}$.

Заполним таблицу, рассмотрев все возможные значения для x_3 = = {1,2,3,4,5}

Значения $y_3(x_3)$ берутся из исходной таблицы (третий столбец), и записываются в табл. 1 по диагонали, т. к. остальные элементы таблицы равны нулю по выше представленной формуле.

x_3^* – *значение при котором достигается максимум* $Z_3(S_3)$.

Таблица 1

S_2 \ x_3	0	1	2	3	4	5	$Z_3(S_3)$	x_3^*
0	0					0	0	0
1		6					6	1
2			13				13	2
3				18			18	3
4					21		21	4
5						22	22	5

При k = 2: $Z_2(S_2) = \max\limits_{0 \le x_2 \le S_1} \{y_2(x_2) + Z_3(S_1 - x_2)\}$.

Значения $y_2(x_2)$ берутся из исходной таблицы (второй столбец).

$Z_3(S_1 - x_2) = Z_3(S_3)$ значения берутся из табл. 1.

x_2^* – *значение при котором достигается максимум* $Z_2(S_2)$.

Таблица 2

S_1 \ x_2	0	1	2	3	4	5	$Z_2(S_2)$	x_2^*
0	$y_2(0)$ + $Z_2(0–0)$, 0–0=0	–	–	–	–	–	0	0
1	$y_2(0)$ + $Z_3(1–0)$, 0+6=6	$y_2(1)$ + $Z_3(1–1)$, 7+0=7	–	–	–	–	7	1
2	0+13=13	$y_2(1)$ + $Z_3(2–1)$, 7+6=13	$y_2(2)$ + $Z_3(2–2)$, 10+0=10	–	–	–	13	0 и 1
3	0+18=18	7+13=20	10+6=16	$y_2(3)$ + $Z_3(3–3)$, 14+0=14	–	–	20	1
4	0+21=21	7+18=25	10+13=23	14+6=20	$y_2(3)$ + $Z_3(3–3)$, 20+0=20		25	1
5	0+22=22	7+21=28	10+18=28	14+13=27	20+6=26	$y_2(5)$ + $Z_2(5–5)$ 25+0=25	28	1 и 2

При k = 1: $Z_1(S_1) = \max\limits_{0 \le x_1 \le S_0} \{y_1(x_1) + Z_2(S_0 - x_1)\}$.

Значения $y_1(x_1)$ берутся из исходной таблицы (первый столбец).

$Z_2(S_0 - x_1) = Z_2(S_2)$ значения берутся из табл. 2.

x_1^* – *значение при котором достигается максимум* $Z_1(S_1)$.

Таблица 3

S_0 \ x_1	0	1	2	3	4	5	$Z_1(S_1)$	x_1^*
0	0	–	–	–	–	–	0	0
1	0+7	5+0=5	–	–	–	–	7	0
2	0+13	5+7=12	12+0=12	–	–	–	12	1 и 2
3	0+20	5+13=18	12+7=19	16+0=16	–	–	20	0
4	0+25	5+20=25	12+13=25	16+7=23	21+0=21	–	25	1,2 и 0
5	0+28	5+25=30	12+20=32	16+13=29	21+7=28	23+0=23	32	2

Безусловная оптимизация

1 шаг. По данным последней таблицы максимальный доход при инвестировании 5 млн руб. между тремя предприятиями составляет $Z_1(5) = 32$. При этом первому предприятию нужно выделить $x_1^* = 2$ млн. руб.

2 шаг. Определим величину оставшихся денежных средств, приходящуюся на долю 2-го и 3-го предприятия:

$$S_2 = S_1 - x_1^* = 5 - 2 = 3.$$

По данным табл. 2 находим, что оптимальный вариант распределения денежных средств в сумме 3 млн руб. между 2 и 3-им предприятием составляют $S_2(3) = 20$ млн руб. При этом 2-му предприятию нужно выделить 1 млн руб.

3 шаг. Определяем величину оставшихся денежных средств приходящихся на долю 3-го предприятия:

$$S_3 = S_2 - x_2^* = 3 - 1 = 2.$$

По данным табл. 1 находим $Z_3(2) = 13$ и $x_3^* = 2$.

Ответ. Оптимальный план инвестирования предприятий равен (2,1,2), обеспечивающих максимальный доход в размере 32 млн руб.

2.3.2. Задача выбора стратегии обновления оборудования

Суть: определение оптимальных сроков замены старого оборудования.

Критерии оптимальности: доход от эксплуатации оборудования (задача максимизации), суммарные затраты на эксплуатацию (задача минимизации).

Задача. Эксплуатация оборудования планируется в течении n лет, оборудование со временем стареет и приносит меньшую годовую прибыль r(t), t – возраст оборудования. При этом есть возможность в начале года продать оборудование за цену S(t), купить новое оборудование за цену P, либо оставить оборудование в эксплуатации. Требуется найти оптимальный план замены оборудования, чтобы суммарная прибыль за все n лет была максимальной, учитывая, что к началу эксплуатационного периода возраст оборудования составляет t_0 лет.

Входные данные:

r(t) – доход от эксплуатации в течении одного года;

S(t) – остаточная стоимость;

P – цена нового оборудования;

t_0 – начальный возраст оборудования.

0	1	…	n
r(0)	r(t)	…	r(n)
S(0)	S(1)	…	S(n)

Переменной управления на k-м шаге является переменная, которая может принимать два значения: сохранить (с), заменить оборудование в начале k-го года (з).

Функция Беллмана: $F_k(t)$ – максимально возможная прибыль от эксплуатации оборудования за годы с k-го по n-й, если к началу k-го года возраст оборудования составляет t-лет.

Условная оптимизации: при каком управлении достигает максимальная прибыли за годы со 2-го по n-й и т.д.

Функция Беллмана для 1-го шага (k = n)

$$F_n(t) = \max\begin{cases} r(t) & (с) \\ S(t) - P + r(t) & (з) \end{cases}$$

Уравнение Беллмана на каждом шаге имеет вид

$$F_n(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_{k+1}(t+1) & (с) \\ S(t) - P + r(0) + F_{k+1}(1) & (з) \end{cases}$$

Безусловная оптимизация: отыскиваются годы, в начале которых следует произвести замену оборудования.

Пример 5. Найти оптимальный план замены оборудования продолжительностью 6 лет (n = 6), если годовая прибыль и остаточная стоимость в зависимости от возраста задаются таблицей. Стоимость нового оборудования составляет 14 у.е., возраст оборудования к началу эксплуатационного периода(p = 14) составляет 1 год.

T	0	1	2	3	4	5	6
r(t)	10	9	9	8	8	7	6
S(t)	12	10	9	8	6	5	4

Решение

Условная оптимизации.

1-й шаг: k = 6. Возможные состояния системы t = 1,2,…,6. Расчет ведем по формуле

$$F_n(t) = \max\begin{cases} r(t) & (с) \\ S(t) - P + r(0) & (з) \end{cases}$$

Получим:

$$F_6(1) = \max\begin{Bmatrix} 9 \\ 10 - 14 + 10 \end{Bmatrix} = 9\ (с)$$

$$F_6(2) = \max\begin{Bmatrix} 9 \\ 9 - 14 + 10 \end{Bmatrix} = 9\ (с)$$

$$F_6(3) = \max\begin{Bmatrix} 8 \\ 8 - 14 + 10 \end{Bmatrix} = 8\ (с)$$

$$F_6(4) = \max\begin{Bmatrix} 8 \\ 6 - 14 + 10 \end{Bmatrix} = 8\ (с)$$

$$F_6(5) = \max\begin{Bmatrix} 7 \\ 5 - 14 + 10 \end{Bmatrix} = 7\ (с)$$

$$F_6(6) = \max\begin{Bmatrix} 6 \\ 4 - 14 + 10 \end{Bmatrix} = 6\ (с)$$

2-й шаг: k = 5. Возможные состояния системы t = 1,2,…,5. Расчет ведем по формуле:

$$F_n(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_{k+1}(t+1) & (с) \\ S(t) - P + r(0) + F_{k+1}(1) & (з) \end{cases}$$

Получим:

$$F_5(1) = \max\begin{Bmatrix} 9 + F_6(1+1) \\ 10 - 14 + 10 + F_6(1) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 9 + 9 \\ 10 - 14 + 10 + 9 \end{Bmatrix} = 18\ (с)$$

$$F_5(2) = \max\begin{Bmatrix} 9 + 8 \\ 9 - 14 + 10 + 9 \end{Bmatrix} = 17\ (с)$$

$$F_5(3) = \max\begin{Bmatrix} 8 + 8 \\ 8 - 14 + 10 + 9 \end{Bmatrix} = 16\ (с)$$

$$F_5(4) = \max\begin{Bmatrix} 8+7 \\ 6-14+10+9 \end{Bmatrix} = 15\ (c)$$

$$F_5(5) = \max\begin{Bmatrix} 7+6 \\ 5-14+10+9 \end{Bmatrix} = 13\ (c)$$

3-й шаг: k = 4. Возможные состояния системы t = 1,2,…,4. Расчет ведем по формуле:

$$F_n(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_{k+1}(t+1) & (c) \\ S(t) - P + r(0) + F_{k+1}(1) & (з) \end{cases}$$

Получим:

$$F_4(1) = \max\begin{Bmatrix} 9+17 \\ 10-14+10+18 \end{Bmatrix} = 26\ (c)$$

$$F_4(2) = \max\begin{Bmatrix} 9+16 \\ 9-14+10+18 \end{Bmatrix} = 25\ (c)$$

$$F_4(3) = \max\begin{Bmatrix} 8+15 \\ 8-14+10+18 \end{Bmatrix} = 23\ (c)$$

$$F_4(4) = \max\begin{Bmatrix} 8+13 \\ 6-14+10+18 \end{Bmatrix} = 21\ (c)$$

4-й шаг: k = 3. Возможные состояния системы t = 1,2,3. Расчет ведем по формуле:

$$F_n(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_{k+1}(t+1) & (c) \\ S(t) - P + r(0) + F_{k+1}(1) & (з) \end{cases}$$

Получим:

$$F_3(1) = \max\begin{Bmatrix} 9+25 \\ 10-14+10+26 \end{Bmatrix} = 34\ (c)$$

$$F_3(2) = \max\begin{Bmatrix} 9+23 \\ 9-14+10+26 \end{Bmatrix} = 32\ (c)$$

$$F_3(3) = \max\begin{Bmatrix} 8+21 \\ 8-14+10+26 \end{Bmatrix} = 30\ (c)$$

5-й шаг: k = 2. Возможные состояния системы t = 1,2. Расчет ведем по формуле:

$$F_n(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_{k+1}(t+1) & (c) \\ S(t) - P + r(0) + F_{k+1}(1) & (з) \end{cases}$$

Получим:

$$F_2(1) = \max\begin{Bmatrix} 9+32 \\ 10-14+10+34 \end{Bmatrix} = 41\,(c)$$

$$F_2(2) = \max\begin{Bmatrix} 9+30 \\ 9-14+10+34 \end{Bmatrix} = 39\,(c/з)$$

6-й шаг: k = 1. Возможные состояния системы t = 1. Расчет ведем по формуле:

$$F_n(t) = \max\begin{cases} r(t) + F_{k+1}(t+1) & (c) \\ S(t) - P + r(0) + F_{k+1}(1) & (з) \end{cases}$$

Получим:

$$F_1(1) = \max\begin{Bmatrix} 9+39 \\ 10-14+10+41 \end{Bmatrix} = 48\,(c)$$

Безусловная оптимизация

Представим результаты вычисления функции Беллмана в виде таблицы.

к	t					
	1	2	3	4	5	6
1	48					
2	41	39				
3	34	32	**30**			
4	26	25	23	21		
5	18	17	16	15	13	
6	9	9	8	8	7	6

Выделенная цифра соответствует замене.

Ответ. Максимальная прибыль $F_1(1)$ = 48 и достигается, если замену оборудования произвести один раз – в начале 3-ого года его эксплуатации.

2.3.3. Выбор оптимального пути в транспортной сети

Есть транспортная сеть из n-узлов, которая соединена магистралями (рис. 1).

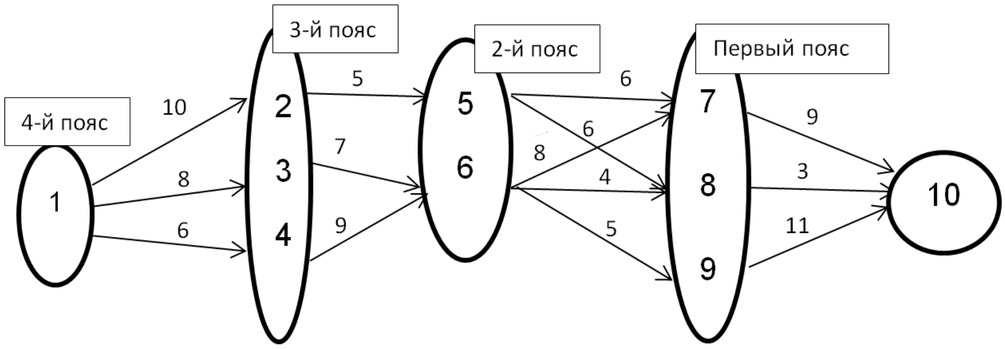

Рис. 1. Транспортная сеть

Требуется найти оптимальный маршрут проезда из первого пункта в первый.

Уравнение Беллмана:

$$F_k(S) = \min(t_{sj} + F_{k-1}(j)).$$

S – пункт отправления, *j* – пункт назначения, t_{sj} – стоимость проезда отправления в пункт назначения

Функция Беллмана – минимально возможные затраты по перемещению из 1-го в 10-й пункт.

Задачу начинаем решать с конца!

Будем считать, что пункт принадлежит k-му поясу, если из него можно попасть в конечный (10-й) ровно за k шагов

т.е. с заездом в k–1 промежуточный пункт

1 шаг. $F_1(S) = t_{s10}$

Из пункта 10 можно попасть в пункты 7, 8, 9 (первый столбец табл. 4) при этом расстояния до этих пунктов 9, 3, 11 берутся из рис. 1 (второй столбец табл. 4), третий столбец табл. 4 определяется по формуле на 1-м шаге, а j^* – в каком пункте достигается минимальное значение.

Таблица 4

S \ *j*	10	$F_1(S)$	j^*
7	9	9	10
8	3	3	10
9	11	11	10

2-й шаг. $F_2(S) = \min(t_{sj} + F_1(j))$.

Из пунктов 7, 8, 9 можно попасть в пункты 5, 6 (первый столбец табл. 5) при этом расстояния до них определяется формулой $t_{sj} + F_1(j)$, где t_{sj} – расстояние от пунктов (берется из рис. 1), $F_1(j)$ – столбец три табл. 4. Остальные столбцы табл. 5 определяются аналогично шагу 1.

Таблица 5

S \ *j*	7	8	9	$F_2(S)$	j^*
5	6+9=15	6+3=9	–	9	8
6	8+9=17	4+3=7	5+11=16	7	8

3-й шаг. $F_3(S) = \min(t_{sj} + F_2(j))$.

Расчет в табл. 6 производиться аналогично шагу 2.

Таблица 6

j / S	5	6	$F_3(S)$	j^*
2	5+9=14	–	14	5
3	7+9=16	–	16	5
4	–	9+7=16	16	6

4-й шаг. $F_4(S) = \min(t_{sj} + F_3(j))$.

Расчет в табл. 7 производиться аналогично шагу 3.

Таблица 7

	2	3	4	$F_4(S)$	j^*
1	10+14=24	8+16=24	6+16=22	22	4

Безусловная оптимизация

На этапе условной оптимизации получено, что минимальные затраты на проезд из пункта 1 в 10 пункт составляют $F_4(S)$ = 22, что достигается следующим движением по магистралям: из пункта 1 следует направиться в пункт 4, затем из него в пункт 6, потом в пункт 8, и из него в пункт 10.

Ответ. Оптимальный маршрут будет $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10$, затраты при этом составят 22 у.е.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.1. Задачи 1–10. Принятие решений в условиях неопределенности

Задача 1

Десять экспертов оценивали по 10-балльной шкале модели летних шин для автомобилей, учитывая их тормозной путь, надежность управления автомобилем на прямой и на поворотах, поперечные сцепные свойства, цену и др. по минимуму затрат. Результаты экспертов представлены в таблице потерь.

По данным этих оценок по критериям Вальда, Гурвица (а = 0,6), Сэвиджа выбрать наиболее удачную модель.

Вид модели шин	Эксперт									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Barum Bravuris	9	9	8	9	8	8	7	7	6	9
Continental PC	9	8	8	10	10	10	10	9	8	9
Dunlop SP	8	8	7	6	6	6	9	8	8	5
Goodyear EV	9	9	10	10	10	9	7	8	10	8
Michelin Energy	9	7	6	9	8	7	9	9	10	7
Nokian NRH2	8	8	7	10	9	7	9	9	8	6
Pirelli P6	10	8	8	8	9	10	8	10	10	9

Задача 2

Дана матрица игры с природой в условиях полной неопределенности (элементы матрицы – выигрыши):

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 10 & 6 & 0 & -4 \\ 12 & 6 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Требуется: проанализировать оптимальные стратегии игрока, используя критерии пессимизма-оптимизма Гурвица применительно к платежной матрице A и матрице рисков R при коэффициенте пессимизма p = 0; 0,5; 1. При этом выделить критерии максимакса, Вальда и Сэвиджа.

Задача 3

Дана следующая матрица выигрышей:

$$A = \left(\begin{array}{c|cccccc} & П1 & П2 & П3 & П4 & П5 & П6 \\ \hline A1 & 15 & 12 & 1 & -3 & 18 & 20 \\ A2 & 2 & 15 & 9 & 7 & 1 & 3 \\ A3 & 0 & 6 & 15 & 21 & -2 & 5 \\ A4 & 8 & 20 & 12 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Определите, оптимальную стратегию используя критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица (коэффициент пессимизма равен 0,4).

Задача 4

На Новый год в детский сад родительский комитет хочет поставить наборы подарков, производимых пятью фабриками. При выборе фабрики руководствуются экспертными оценками о стоимости подарков, приведенными в таблицы. С какой из фабрик родительскому комитету следует заключить договор о поставке наборов подарков, обеспечивая минимальную их стоимость (использовать критерии Вальда, Гурвица (a = 0,5), Сэвиджа).

Фабрики	Экспертные оценки					
	1	2	3	4	5	6
№ 1	20	25	18	15	21	16
№ 2	25	24	18	10	24	15
№ 3	15	28	20	12	19	18
№ 4	9	21	22	18	20	17
№ 5	18	26	20	20	15	22

Задача 5

При выборе стратегии A_j по каждому возможному состоянию природы S_i соответствует один результат V_{ij}. Элементы V_{ij} являющиеся мерой потерь при принятии решения, приведены в таблице.

Стратегии	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	2	6	5	8
A_2	3	9	1	4
A_3	5	1	6	2

Выберите оптимальное решение в соответствии с критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица (при коэффициенте пессимизма равном 0,5).

Задача 6

Имеются четыре варианта проекта автомобиля R_j. Определена экономическая эффективность V_{ji} каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении трех сроков S_i рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в таблице.

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	20	25	15
R_2	25	24	10
R_3	15	28	12
R_4	9	30	20

Требуется выбрать лучший проект легкового автомобиля для производства, используя критерий Вальда, Сэвиджа, Гурвица при коэффициенте пессимизма 0,1. Сравнить решения и сделать выводы.

Задача 7

Определите тип электростанции (используя критерии, Вальда, Гурвица (а = 0,6), Сэвиджа), которую необходимо построить для удовлетворения энергетических потребностей комплекса крупных промышленных предприятий. Множество возможных стратегий в задаче включает следующие параметры:

R_1 – сооружается гидростанция;

R_2 – сооружается теплостанция;

R_3 – сооружается атомная станция.

Экономическая эффективность сооружения электростанции зависит от влияния случайных факторов, образующих множество состояний природы S_i.

Результаты расчета экономической эффективности приведены в таблице.

Тип станции	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	40	70	30	25	45
R_2	60	50	45	20	30
R_3	50	30	40	35	60

По критериям выбрать наиболее удачную модель.

Задача 8

Определите, какой тип самолета необходимо построить (использовать критерий Вальда, Сэвиджа, Гурвица), чтобы удовлетворить потребность авиаперевозчиков. Множество возможных стратегий включает следующие параметры:

R_1 – строить самолет на 250 мест и дальностью полета 6000 км.

R_2 – строить самолет на 180 мест и дальностью полета 8000 км.

R_3 – строить самолет на 300 мест и дальностью полета 7000 км.

R_4 – строить самолет на 280 мест и дальностью полета 5500 км.

R_5 – строить самолет на 200 мест и дальностью полета 10 000 км.

Экономическая эффективность строительства самолетов зависит от влияния случайных факторов, образующих множество состояний «природы» S_i. Результаты расчета экономической эффективности приведены в таблице. Для критерия Гурвица взять $a = 0{,}45$.

Тип самолета	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	30	60	30	20	45
R_2	40	50	40	40	40
R_3	60	80	45	45	30
R_4	50	70	60	25	50
R_5	70	40	50	30	60

Задача 9

Магазин может завести один из трех типов товара A_i; их реализация и прибыль магазина зависит от типа товара и состояния спроса. Предполагается, что спрос может иметь три состояния B_i (таблице). Гарантированная прибыль представлена в матрице прибыли.

Тип товара	Спрос		
	B_1	B_2	B_3
A_1	20	15	10
A_2	16	12	14
A_3	13	18	15

Определить, какой товар закупать магазину, используя критерии Вальда Сэвиджа, Гурвица (коэффициент пессимизма равен 0,6).

Задача 10

Дана следующая матрица выигрышей:

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} & П1 & П2 & П3 & П4 \\ \hline A1 & 20 & 30 & 15 & 15 \\ A2 & 75 & 20 & 35 & 20 \\ A3 & 25 & 80 & 25 & 25 \\ A4 & 85 & 5 & 45 & 5 \end{array}\right)$$

Определите, оптимальную стратегию используя критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица (коэффициент пессимизма равен 0,6).

3.2. Задачи 11–20. Нелинейное программирование

Предприятие производит металлорежущие станки двумя технологическими способами, причем издержки производства при первом способе x_1 тонн продукции составляет $a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2$ руб., а при втором способе изготовления x_2 тонн продукции равны $b_0 + b_1x_1 + b_2x_1^2$ руб.. Составить план производства, при котором будет произведено d тонн продукции при минимальных издержках (решить методом множителей Лангранжа).

Задачи	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	d
11	1	2	2	1	3	2	1
12	1	2	1	2	1	4	1
13	2	1	4	1	2	1	1
14	1	3	1	4	1	4	2
15	3	1	2	1	4	3	1
16	1	4	3	3	1	2	1
17	4	1	4	1	3	1	2
18	1	4	1	3	2	4	2
19	4	1	2	2	3	3	1
20	1	4	1	3	2	4	2

3.3. Задачи 21–30. Оптимальное распределение инвестиций

Имеются четыре предприятия и сведения о том, какой прирост продукции они дадут в конце года, если между ними распределить 100 тыс. у.е. средств. Значения прироста выпуска продукции на предприятиях в зависимости от выделенных средств X представлены в таблице. Составить оптимальный план распределения средств, позволяющий максимизировать общий прирост выпуска продукции.

Задача 21

X	g1(x)	g2(x)	g3(x)	g4(x)
0	0	0	0	0
20	16	15	15	15
40	30	32	36	25
60	49	50	45	22
80	51	48	57	36
100	72	60	70	51

Задача 22

X	g1(x)	g2(x)	g3(x)	g4(x)
0	0	0	0	0
20	12	10	16	19
40	26	22	28	33
60	51	52	48	56
80	42	41	47	40
100	68	71	58	54

Задача 23

X	g1(x)	g2(x)	g3(x)	g4(x)
0	0	0	0	0
20	12	14	15	13
40	36	32	36	33
60	34	50	45	35
80	47	48	57	37
100	57	60	70	47

Задача 24

X	g1(x)	g2(x)	g3(x)	g4(x)
0	0	0	0	0
20	12	14	20	29
40	36	32	36	33
60	34	42	27	46
80	49	56	32	50
100	55	59	38	44

Задача 25

X	g1(x)	g2(x)	g3(x)	g4(x)
0	0	0	0	0
20	11	14	12	15
40	24	32	39	25
60	34	50	40	22
80	27	48	37	36
100	37	60	47	57

Задача 26

X	g1(x)	g2(x)	g3(x)	g4(x)
0	0	0	0	0
20	12	14	15	19
40	37	32	36	45
60	27	50	45	38
80	40	48	57	48
100	56	60	70	77

Задача 27

X	g1(x)	g2(x)	g3(x)	g4(x)
0	0	0	0	0
20	29	24	28	25
40	36	23	39	23
60	45	32	47	36
80	47	46	37	40
100	41	57	50	34

Задача 28

X	g1(x)	g2(x)	g3(x)	g4(x)
0	0	0	0	0
20	19	14	33	25
40	45	32	45	53
60	38	52	33	66
80	48	61	67	70
100	77	79	61	84

Задача 29

X	g1(x)	g2(x)	g3(x)	g4(x)
0	0	0	0	0
20	10	12	14	19
40	14	37	48	45
60	34	27	37	38
80	42	40	48	48
100	66	36	64	77

Задача 30

X	g1(x)	g2(x)	g3(x)	g4(x)
0	0	0	0	0
20	14	19	33	41
40	48	45	59	81
60	37	38	33	52
80	48	58	77	73
100	64	67	61	92

3.4. Задачи 31–40. Выбора стратегии обновления оборудования

Найти оптимальный план замены оборудования на шестилетний период, если известны производительность оборудования r(t) и остаточная стоимость оборудования S(t) в зависимости от возраста, стоимости P нового оборудования. Возраст оборудования к началу эксплуатации равен одному году.

Задача 31

T	0	1	2	3	4	5	6	*P*
R(t)	10	9	8	7	6	4	2	12
S(t)	11	10	9	7	6	5	4	

Задача 32

T	0	1	2	3	4	5	6	P
R(t)	12	12	11	9	7	6	6	11
S(t)	11	10	9	7	6	5	3	

Задача 33

T	0	1	2	3	4	5	6	P
R(t)	8	8	7	7	7	6	6	10
S(t)	7	6	5	4	3	2	1	

Задача 34

T	0	1	2	3	4	5	6	P
R(t)	9	8	7	6	6	5	4	9
S(t)	9	9	8	7	6	4	3	

Задача 35

T	0	1	2	3	4	5	6	P
R(t)	15	14	14	13	12	10	8	16
S(t)	16	14	12	10	8	6	5	

Задача 36

T	0	1	2	3	4	5	6	P
R(t)	15	14	13	13	12	12	10	16
S(t)	16	14	13	11	10	8	6	

Задача 37

T	0	1	2	3	4	5	6	P
R(t)	10	9	9	7	7	6	6	11
S(t)	11	9	7	5	4	3	2	

Задача 38

T	0	1	2	3	4	5	6	P
R(t)	12	12	11	10	8	6	3	14
S(t)	13	12	11	10	8	5	2	

Задача 39

T	0	1	2	3	4	5	6	P
R(t)	10	9	8	8	6	5	4	11
S(t)	9	8	7	5	3	3	2	

Задача 40

T	0	1	2	3	4	5	6	P
R(t)	8	8	8	8	7	7	7	8
S(t)	6	5	5	5	5	4	4	

3.5. Задачи 41–50. Выбор оптимального пути в транспортной сети

В транспортной сети (рис. 2) имеется несколько маршрутов по проезду из начального пункта 1 в конечный пункт 11. Стоимость проезда между отдельными пунктами транспортной сети представлена в соответствующей таблице. Необходимо определить оптимальный маршрут проезда из пункта 1 в пункт 11 с минимальными транспортными расходами.

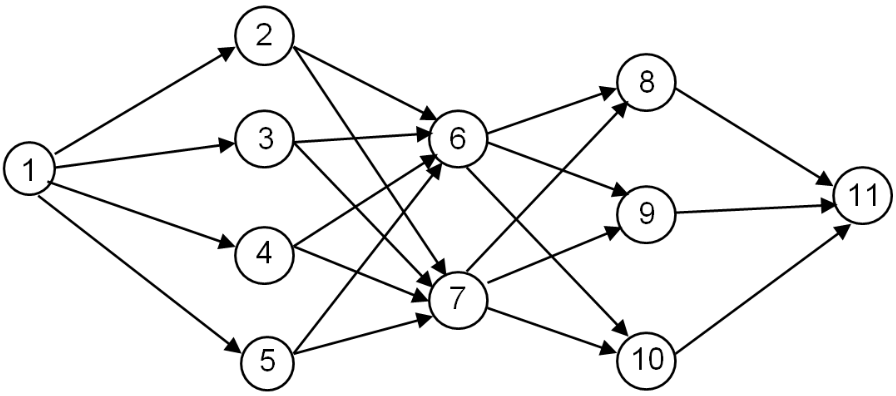

Рис. 2. Транспортная сеть

Задача 41

T(1,2)	T(1,3)	T(1,4)	T(1,5)	T(2,6)	T(2,7)	T(3,6)	T(3,7)	T(4,6)	T(4,7)	T(5,6)
9	10	14	8	7	7	6	5	14	9	12
T(5,7)	T(6,8)	T(6,9)	T(6,10)	T(7,8)	T(7,9)	T(7,10)	T(8,11)	T(9,11)	T(10,11)	
10	7	6	4	9	5	11	7	6	10	

Задача 42

T(1,2)	T(1,3)	T(1,4)	T(1,5)	T(2,6)	T(2,7)	T(3,6)	T(3,7)	T(4,6)	T(4,7)	T(5,6)
8	11	13	7	6	8	7	14	13	8	11
T(5,7)	T(6,8)	T(6,9)	T(6,10)	T(7,8)	T(7,9)	T(7,10)	T(8,11)	T(9,11)	T(10,11)	
11	9	10	8	7	7	5	3	6	9	

Задача 43

T(1,2)	T(1,3)	T(1,4)	T(1,5)	T(2,6)	T(2,7)	T(3,6)	T(3,7)	T(4,6)	T(4,7)	T(5,6)
7	12	12	6	5	9	8	14	12	7	10
T(5,7)	T(6,8)	T(6,9)	T(6,10)	T(7,8)	T(7,9)	T(7,10)	T(8,11)	T(9,11)	T(10,11)	
6	13	11	5	14	10	9	12	11	6	

Задача 44

T(1,2)	T(1,3)	T(1,4)	T(1,5)	T(2,6)	T(2,7)	T(3,6)	T(3,7)	T(4,6)	T(4,7)	T(5,6)
6	13	11	5	14	10	9	12	11	6	9
T(5,7)	T(6,8)	T(6,9)	T(6,10)	T(7,8)	T(7,9)	T(7,10)	T(8,11)	T(9,11)	T(10,11)	
7	12	12	6	5	9	8	14	12	7	

Задача 45

T(1,2)	T(1,3)	T(1,4)	T(1,5)	T(2,6)	T(2,7)	T(3,6)	T(3,7)	T(4,6)	T(4,7)	T(5,6)
5	14	10	14	13	11	10	11	10	8	5
T(5,7)	T(6,8)	T(6,9)	T(6,10)	T(7,8)	T(7,9)	T(7,10)	T(8,11)	T(9,11)	T(10,11)	
11	15	9	13	12	12	11	10	9	14	

Задача 46

T(1,2)	T(1,3)	T(1,4)	T(1,5)	T(2,6)	T(2,7)	T(3,6)	T(3,7)	T(4,6)	T(4,7)	T(5,6)
11	15	9	13	12	12	11	10	9	8	12
T(5,7)	T(6,8)	T(6,9)	T(6,10)	T(7,8)	T(7,9)	T(7,10)	T(8,11)	T(9,11)	T(10,11)	
5	14	10	14	13	11	10	11	10	13	

Задача 47

T(1,2)	T(1,3)	T(1,4)	T(1,5)	T(2,6)	T(2,7)	T(3,6)	T(3,7)	T(4,6)	T(4,7)	T(5,6)
13	16	8	12	11	12	13	11	8	13	6
T(5,7)	T(6,8)	T(6,9)	T(6,10)	T(7,8)	T(7,9)	T(7,10)	T(8,11)	T(9,11)	T(10,11)	
12	17	7	11	10	14	13	12	7	5	

Задача 48

T(1,2)	T(1,3)	T(1,4)	T(1,5)	T(2,6)	T(2,7)	T(3,6)	T(3,7)	T(4,6)	T(4,7)	T(5,6)
12	17	7	11	10	14	13	12	7	8	5
T(5,7)	T(6,8)	T(6,9)	T(6,10)	T(7,8)	T(7,9)	T(7,10)	T(8,11)	T(9,11)	T(10,11)	
13	16	8	12	11	12	13	11	8	10	

Задача 49

T(1,2)	T(1,3)	T(1,4)	T(1,5)	T(2,6)	T(2,7)	T(3,6)	T(3,7)	T(4,6)	T(4,7)	T(5,6)
11	18	6	10	11	15	14	13	6	11	14
T(5,7)	T(6,8)	T(6,9)	T(6,10)	T(7,8)	T(7,9)	T(7,10)	T(8,11)	T(9,11)	T(10,11)	
10	19	5	11	12	16	14	13	5	13	

Задача 50

T(1,2)	T(1,3)	T(1,4)	T(1,5)	T(2,6)	T(2,7)	T(3,6)	T(3,7)	T(4,6)	T(4,7)	T(5,6)
10	19	5	11	12	16	14	13	5	8	11
T(5,7)	T(6,8)	T(6,9)	T(6,10)	T(7,8)	T(7,9)	T(7,10)	T(8,11)	T(9,11)	T(10,11)	
11	18	6	10	11	15	14	13	11	14	

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный государственный
университет путей сообщения»

Кафедра «Высшая математика»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Вариант №___

Выполнил(а) студент: Ф.И.О.
по направлению__________

профиль________________

Шифр__________________

Проверила: доцент Мурая Е.Н.

Дата ______ оценка________

Хабаровск
201_

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сухарев, А.Г. Методы оптимизации : учеб. и практикум для бакалавриата и магистратуры / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Юрайт, 2016. – 367 с.

2. Сеславин, А.И. Исследование операций и методы оптимизации : учеб. пособие для бакалавров и магистров / А.И. Сеславин, Е.А. Сеславина. – М. : УМЦ ЖДТ, 2015. – 200 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Мурая Елена Николаевна

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Методические указания
по выполнению контрольной работы

Отпечатано методом прямого репродуцирования
Технический редактор *Н.В. Ларионова*

План 2018 г. Поз. 9.5. Подписано в печать 13.02.2018.
Гарнитура Arial. Печать RISO. Усл. печ. л. 1,9. Уч.-изд. л. 2,0.
Зак. 94. Тираж 25 экз. Цена 107 р.

Издательство ДВГУПС.
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.

Кафедра «Высшая математика»

Е.Н. Мурая

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Методические указания
по выполнению контрольной работы

Хабаровск
2018