

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

Л.Е. Путеева, Б.А. Тухфатуллин

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

**ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ
ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ «СТРОИТЕЛЬСТВО»**

Учебное пособие

Томск
Издательство ТГАСУ
2014

УДК 539.3/6 (075.8)
ББК 30.121я7

П90 **Путеева, Л.Е.** Сопротивление материалов. Варианты заданий и примеры решения для студентов заочной формы обучения по направлению подготовки «Строительство» [Текст] : учебное пособие / Л.Е. Путеева, Б.А. Тухфатуллин. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2014. – 124 с.

ISBN 978-5-93057-611-5

В учебном пособии приведены теоретические сведения, примеры решения задач, задания для контрольных работ, вопросы для самоконтроля и подготовки к итоговой аттестации, справочные данные.

Пособие предназначено для специалистов и бакалавров заочной и дистанционной форм обучения направления подготовки «Строительство», изучающих дисциплины «Техническая механика» и «Сопротивление материалов».

УДК 539.3/6 (075.8)
ББК 30.121я7

Рецензенты:

С.Е. Буханченко, к.т.н., заведующий кафедрой «Автоматизация и роботизация в машиностроении» НИ ТПУ;

В.В. Эм, к.т.н., директор ООО «Вогтехпроект»;

Д.Н. Песцов, к.т.н., доцент кафедры «Строительная механика» ТГАСУ.

ISBN 978-5-93057-611-5

© Томский государственный архитектурно-строительный университет, 2014

© Л.Е. Путеева,
Б.А. Тухфатуллин, 2014

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов является одним из разделов механики деформируемого твёрдого тела, в котором изучаются приёмы и методы статических и динамических расчётов несущих элементов конструкций на прочность, жёсткость, устойчивость и долговечность.

Согласно требованиям федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки 270800 «Строительство», студент должен:

знать:

– основные положения и расчётные методы, на которых базируется изучение специальных курсов всех строительных конструкций, машин и оборудования;

уметь:

– разрабатывать конструктивные решения простейших зданий и ограждающих конструкций, вести технические расчёты по современным нормам;

владеть:

– основными современными методами постановки, исследования и решения задач механики;

– навыками расчёта элементов строительных конструкций и сооружений на прочность, жёсткость и устойчивость.

Соответствовать этим требованиям без успешного освоения дисциплин «Техническая механика» и «Сопротивление материалов» невозможно.

В первом разделе пособия приводятся необходимые теоретические сведения и примеры решения контрольных задач на простые виды деформации (центральное растяжение-сжатие, кручение, изгиб), на сложное сопротивление (внецентренное сжатие), на продольный изгиб, на динамическое действие нагрузки (расчет балки на удар). Рассматриваются вопросы определения геометрических характеристик плоских поперечных се-

чений, необходимых для расчётов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций.

Во втором разделе пособия содержатся указания к выполнению контрольных работ, выбору варианта заданий и требования к их оформлению. Приведены сведения о количестве контрольных работ и содержащихся в них задачах.

Условия задач, числовые исходные данные, расчетные схемы вариантов заданий для контрольных работ содержатся в третьем разделе пособия.

В четвертом разделе пособия приведены вопросы для самоконтроля по всем разделам дисциплины.

В приложении к пособию содержатся необходимые для выполнения расчетов справочные данные: эпюры внутренних усилий в балках, геометрические характеристики простых фигур, выборка из сортамента прокатной стали.

При изучении дисциплины следует использовать учебную литературу согласно библиографическому списку [1–9] и ресурсы сети Интернет:

- www.mysopromat.ru (электронный учебник по сопротивлению материалов, авторы: Л.В. Агамиров, Д.В. Васильев и др., МАТИ–РГТУ им. К.Э. Циолковского);
- www.soprotmat.ru (электронный учебный курс по сопротивлению материалов, автор: И.Ш. Каримов, к.т.н., доцент кафедры «Теоретическая и прикладная механика» БГАУ);
- www.window.edu.ru (единое окно доступа к информационным ресурсам, раздел каталога «Сопротивление материалов»);
- www.tsuab.ru (раздел «Информация для студентов» кафедры «Строительная механика» ТГАСУ);
- www.stroymeh.tom.ru (персональная страница Б.А. Тухфатуллина, к.т.н., доцента кафедры «Строительная механика» ТГАСУ: учебные компьютерные программы, инструкции к программам и другие материалы).

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАЧ

1.1. Основные понятия сопротивления материалов

При проектировании строительных конструкций и сооружений инженеру приходится решать множество вопросов, тесно связанных с будущей работой проектируемого объекта. Неверно выполненный расчёт одного элемента может привести к его разрушению, и, в конечном счёте, к выходу из строя всего сооружения. Основной задачей сопротивления материалов является разработка методов расчёта отдельных элементов конструкций на прочность, жёсткость и устойчивость.

Прочность – это способность материала конструкции воспринимать заданные воздействия без разрушения в течение всего периода эксплуатации (рис. 1.1, а).

Жёсткостью называется способность конструкции не допускать возникновения перемещений и деформаций, препятствующих ее нормальной эксплуатации (рис. 1.1, б).

Устойчивость – это способность нагруженной конструкции сохранять первоначальную форму равновесия (рис. 1.1, в).

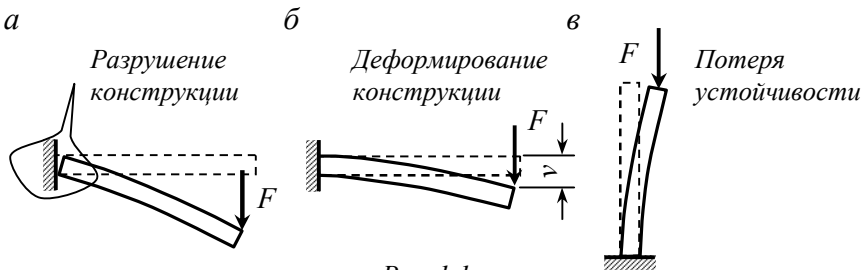


Рис. 1.1

Сооружение в целом состоит из отдельных элементов:

- стержней (рис. 1.2, а);
- пластин, оболочек (рис. 1.2, б);
- массивных тел (рис. 1.2, в).

Основным объектом сопротивления материалов является стержень. Стержень – это элемент конструкции, два размера которого (ширина и высота) много меньше третьего (длины).

В сопротивлении материалов широко используются методы теоретической механики, в первую очередь статики, математического анализа и физики. Большое значение имеют теоретические и экспериментальные исследования в лабораторных и натуральных условиях.

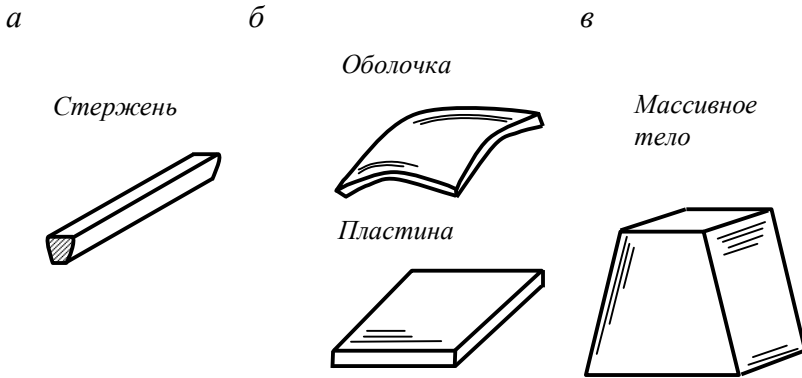


Рис. 1.2

Для вывода расчётных формул в сопротивлении материалов используется ряд гипотез. Эти гипотезы подтверждаются строгими математическими методами расчёта, рассматриваемыми в теории упругости, а также проведенными экспериментальными исследованиями.

1. Материал считается сплошным и однородным, т. е. его свойства не зависят от формы и размеров конструкции и одинаковы во всех его точках. Эта гипотеза позволяет выделить бесконечно малый элемент и приписать ему свойства всей конструкции.

2. Материал конструкции обладает свойством идеальной упругости, т. е. способностью восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки.

3. Материал конструкции считается изотропным, т. е. полагается, что свойства материала одинаковы по всем направлениям. Если же свойства материала по различным направлениям отличаются, то его называют анизотропным.

4. При расчётах полагается, что деформация прямо пропорциональна приложенной нагрузке. Эта гипотеза экспериментально обоснована Робертом Гуком и носит название – закон Гука (под деформацией подразумевается изменение формы и размеров тела под действием приложенной к нему нагрузки).

5. Гипотеза о малости деформаций: деформации элементов конструкций настолько малы, что ими можно пренебречь, и производить расчет по недеформированному состоянию.

6. Принцип суперпозиции (принцип независимости действия сил): результат от действия на конструкцию суммы нагрузок равен сумме результатов от действия каждой нагрузки в отдельности.

7. Гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли): поперечные сечения, плоские и перпендикулярные продольной оси стержня до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными продольной оси стержня после деформации.

8. Принцип Сен-Венана: распределение напряжений на достаточном расстоянии от места приложения нагрузки не зависит от характера нагрузки, а зависит лишь от ее величины.

В сопротивлении материалов решаются три типа инженерных задач: проверочный расчёт; проектный расчет; определение несущей способности.

Проверочный расчёт заключается в проверке обеспечения условий прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций при заданных размерах, материале и нагрузке. Проектный расчет ставит целью определение размеров поперечных сечений всех элементов сооружения, исходя из условий безопасной работы конструкции. Определение несущей способности (максимальной грузоподъемности) заключается в определении максимальной нагрузки, которую может выдержать конструкция при заданных размерах и материале.

1.2. Расчет статически определимых систем при центральном растяжении-сжатии

Центральным растяжением-сжатием называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только одно внутреннее усилие – *продольная сила N* . На центральное растяжение (сжатие) работают колонны, стойки, стержни ферм, тросы, ванты (рис. 1.3) и т. д.

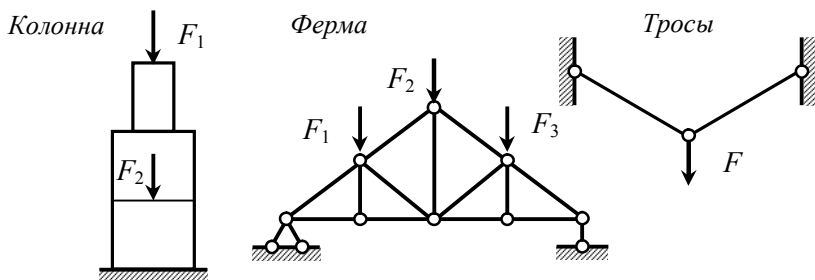


Рис. 1.3

Для определения продольной силы используется метод сечений. График, показывающий изменение продольной силы вдоль оси стержня (бруса), называется *эпюрой продольных сил*.

Для построения эпюры N и выполнения расчетов на прочность и жесткость необходимо:

- определить опорные реакции;
- разбить конструкцию на отдельные участки (границами участка являются места приложения нагрузок и изменения формы и размеров поперечного сечения);
- на каждом участке провести одно (и только одно) сечение, любую из частей мысленно отбросить, а ее действие на оставшуюся часть заменить продольной силой N ;
- для отсеченной части составить уравнение статического равновесия $\sum x = 0$, из которого выразить продольную силу на участке;

– по полученному выражению вычислить значения продольной силы на границах участка;

– по результатам расчёта построить эпюру продольных сил.

При изображении отсеченной части направление продольной силы принимается положительным в соответствии с правилом знаков: продольная сила N считается положительной при растяжении, и отрицательной – при сжатии (рис. 1.4, а).

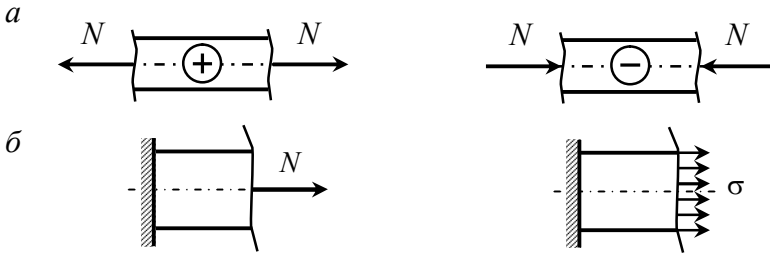


Рис. 1.4

При переходе через внешнюю сосредоточенную силу на эпюре N будет скачок (разрыв в ординатах), равный величине приложенной силы. Эпюра N используется при расчетах на прочность и жёсткость растянутых (сжатых) элементов конструкции.

Между продольной силой N и *нормальными напряжениями*, распределенными по площади поперечного сечения, существует интегральная зависимость $N = \int_A \sigma dA$. На основании гипотезы Бернулли величины нормальных напряжений одинаковы во всех точках сечения (рис. 1.4, б) и определяются по формуле $\sigma = \frac{N}{A}$.

Условие прочности при центральном растяжении (сжатии) имеет вид $\sigma = \frac{N}{A} \leq R$ (R – расчётное сопротивление материала).

При проектировании колонны, выполненной из материала, неодинаково работающего на растяжение и сжатие, требуемая площадь A поперечного сечения определяется дважды.

Из условия прочности при растяжении требуемая площадь $A \geq \frac{N_{\max}^p}{R_p}$, из условия прочности при сжатии – $A \geq \frac{N_{\max}^{сж}}{R_{сж}}$. Окончательно за расчётное значение принимается большее из двух полученных значений площади A .

Эпюра σ показывает изменение нормальных напряжений вдоль оси стержня. Правило знаков для напряжений такое же, как и для продольных сил. В отличие от эпюры продольных сил, на эпюре нормальных напряжений скачки будут и там, где меняется сила, и там, где меняется площадь поперечного сечения.

При центральном растяжении (сжатии) стержня поперечные сечения, оставаясь плоскими, получают осевые перемещения u . Для построения эпюры вертикальных перемещений необходимо предварительно вычислить абсолютные продольные деформации $\Delta \ell$ для каждого участка в отдельности. При постоянной в пределах участка продольной силе N и осевой жесткости EA поперечного сечения величина $\Delta \ell$ определяется по закону Гука $\Delta \ell = \frac{N\ell}{EA}$. Величина E представляет собой коэффициент пропорциональности между напряжениями и деформациями и называется *модулем упругости материала*. Знак деформации на каждом участке определяется знаком продольной силы.

Построение эпюры u начинается с первого от опоры участка. Перемещение в начале участка равно нулю (сечение на опоре неподвижно). Вертикальное перемещение в конце каждого участка равно сумме абсолютных деформаций участков стержня, расположенных между опорой и рассчитываемым сечением. Каждая ордината эпюры u показывает величину вертикального перемещения заданного сечения колонны. Эпюра продольных перемещений u используется при расчете элементов конструкции на жёсткость.

Задача № 1

Ступенчатая колонна квадратного поперечного сечения выполнена из бетона с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^4$ МПа и загружена сосредоточенными силами F_1 , F_2 , F_3 .

Требуется:

- построить эпюру продольных сил N ;
- определить размеры поперечного сечения колонны, учитывая, что материал, из которого она изготовлена, неодинаково работает на растяжение и сжатие;
- построить эпюры напряжений σ и продольных перемещений u .

Числовые данные для расчета:

$$a = 2,5 \text{ м}; \quad b = 2,5 \text{ м};$$

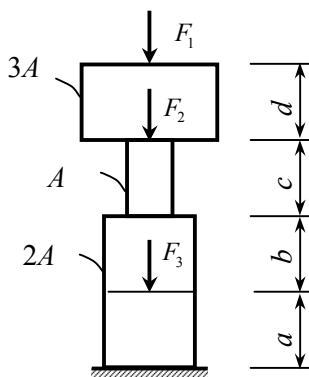
$$c = 2,0 \text{ м}; \quad d = 3,5 \text{ м};$$

$$F_1 = -280 \text{ кН}; \quad F_2 = 420 \text{ кН};$$

$$F_3 = 300 \text{ кН};$$

$$R_{\text{сж}} = 10 \text{ МПа};$$

$$R_{\text{р}} = 1,2 \text{ МПа}.$$



Решение задачи

В условии задачи сила F_1 имеет отрицательное значение.

Для удобства вычислений меняем направление и знак силы F_1 на противоположное (рис. 1.5).

Построение эпюры продольных сил (рис. 1.5).

Опорную реакцию V_B находим из уравнения равновесия:

$$\sum x = V_B + F_1 - F_2 - F_3 = 0;$$

$$V_B = -F_1 + F_2 + F_3 = -280 + 420 + 300 = 440 \text{ кН}.$$

Колонна имеет четыре участка: BC , CD , HD , KH .

На каждом участке проводим одно сечение и вычерчиваем отсеченные части.

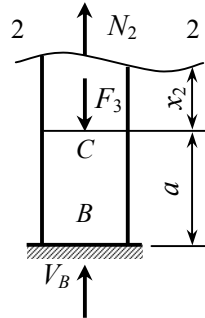
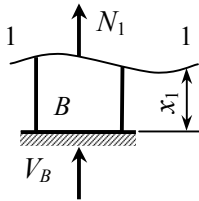
Участок BC , сечение 1-1 $0 \leq x_1 \leq a = 2,5$ м.

$$\sum x = N_1 + V_B = 0; \quad N_1 = -V_B = -440 \text{ кН.}$$

Участок CD , сечение 2-2 $0 \leq x_2 \leq b = 2,5$ м.

$$\sum x = N_2 + V_B - F_3 = 0;$$

$$N_2 = -V_B + F_3 = -440 + 300 = -140 \text{ кН.}$$



Участок HD , сечение 3-3 $0 \leq x_3 \leq c = 2,0$ м.

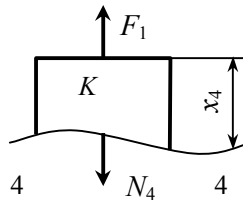
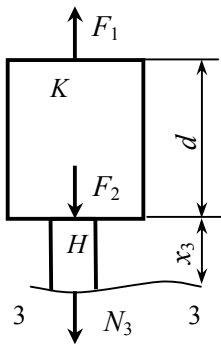
$$\sum x = N_3 - F_1 + F_2 = 0;$$

$$N_3 = F_1 - F_2 = 280 - 420 = -140 \text{ кН.}$$

Участок KH , сечение 4-4 $0 \leq x_4 \leq d = 3,5$ м.

$$\sum x = N_4 - F_1 = 0;$$

$$N_4 = F_1 = 280 \text{ кН.}$$



Из условия прочности находим площади сечений:

$$A_1 = 2,0 A \geq \frac{|N_1|}{R_{сж}} = \frac{440 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 440 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 440 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = 2,0A \geq \frac{|N_2|}{R_{\text{сж}}} = \frac{140 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 140 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 140 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = 1,0A \geq \frac{|N_3|}{R_{\text{сж}}} = \frac{140 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 140 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 140 \text{ см}^2;$$

$$A_4 = 3,0A \geq \frac{N_4}{R_p} = \frac{280 \cdot 10^3}{1,2 \cdot 10^6} = 2333 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2333 \text{ см}^2.$$

Выбираем среди полученных значений наибольшее:

$$A \geq \frac{440}{2} = 220 \text{ см}^2; \quad A \geq \frac{140}{2} = 70 \text{ см}^2; \quad A \geq 140 \text{ см}^2;$$

$$A \geq \frac{2333}{3} = 778 \text{ см}^2.$$

Назначаем площадь поперечного сечения $A = 778 \text{ см}^2$.

Построение эпюры нормальных напряжений σ (рис. 1.5).

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-440 \cdot 10^3}{2 \cdot 778 \cdot 10^{-4}} = -2,83 \cdot 10^6 \text{ Па} = -2,83 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-140 \cdot 10^3}{2 \cdot 778 \cdot 10^{-4}} = -0,90 \cdot 10^6 \text{ Па} = -0,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-140 \cdot 10^3}{778 \cdot 10^{-4}} = -1,80 \cdot 10^6 \text{ Па} = -1,80 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{280 \cdot 10^3}{3 \cdot 778 \cdot 10^{-4}} = 1,20 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,2 \text{ МПа}.$$

На каждом участке определяем абсолютную продольную деформацию:

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \ell_1}{EA_1} = \frac{-440 \cdot 10^3 \cdot 2,5}{2 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 778 \cdot 10^{-4}} = -0,35 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,35 \text{ мм};$$

$$\Delta \ell_2 = \frac{N_2 \ell_2}{EA_2} = \frac{-140 \cdot 10^3 \cdot 2,5}{2 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 778 \cdot 10^{-4}} = -0,11 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,11 \text{ мм};$$

$$\Delta \ell_3 = \frac{N_3 \ell_3}{EA_3} = \frac{-140 \cdot 10^3 \cdot 2,0}{2 \cdot 10^{10} \cdot 778 \cdot 10^{-4}} = -0,18 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,18 \text{ мм};$$

$$\Delta \ell_4 = \frac{N_4 \ell_4}{EA_4} = \frac{280 \cdot 10^3 \cdot 3,5}{2 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 778 \cdot 10^{-4}} = 0,21 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,21 \text{ мм}.$$

Построение эпюры продольных перемещений u (рис. 1.5).
 Определяем продольные перемещения сечений, расположенных на границах участков:

$$u_B = 0 \text{ (опорное сечение);}$$

$$u_C = u_B + \Delta \ell_1 = 0 - 0,35 = -0,35 \text{ мм};$$

$$u_D = u_C + \Delta \ell_2 = -0,35 + (-0,11) = -0,46 \text{ мм};$$

$$u_H = u_D + \Delta \ell_3 = -0,46 + (-0,18) = -0,64 \text{ мм};$$

$$u_K = u_H + \Delta \ell_4 = -0,64 + 0,21 = -0,43 \text{ мм}.$$

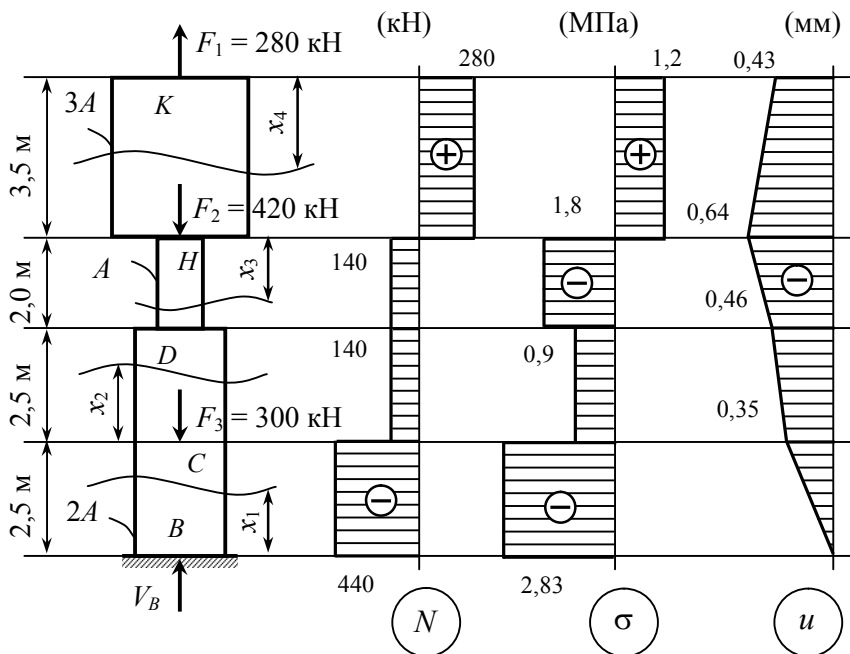


Рис. 1.5

1.3. Расчет статически неопределимых систем при центральном растяжении-сжатии

В задаче № 2 рассматриваются статически неопределимые системы (рис. 1.6). Их отличие от статически определимых заключается в том, что количество неизвестных (опорных реакций, внутренних усилий) превышает количество уравнений равновесия, которые можно записать для таких систем.

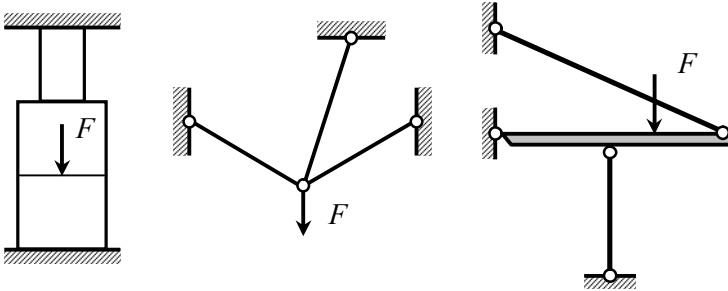


Рис. 1.6

В общем случае для произвольной плоской системы сил, не сходящихся в одной точке, можно составить только три уравнения статического равновесия: $\sum x = 0$; $\sum y = 0$; $\sum m_{(i)} = 0$. Число неизвестных в задаче № 2 (рис. 1.7, а) равно четырем – два усилия в стержнях и две составляющие опорной реакции. Следовательно, рассматриваемая система является один раз статически неопределимой. Для ее решения кроме уравнений статики необходимо составить одно дополнительное уравнение. Это уравнение называется *уравнением совместности деформаций и перемещений*. Для составления уравнения необходимо вычертить деформированную схему конструкции (рис. 1.7, б). Под действием приложенной силы F абсолютно жесткий брус, оставаясь прямым, поворачивается вокруг шарнирно неподвижной опоры, чем вызывает деформацию растяжения или сжатия прикрепленных к нему стержней.

Согласно гипотезе о «малости деформаций» можно считать, что первоначальные углы между брусом и стержнями не изменяются. Следовательно, перемещения точек прикрепления стержней к брусу происходят не по окружности, а по касательной к ней (т. е. перпендикулярно радиусу). Для упрощения изображения деформированной схемы сооружения удобнее сначала показывать удлинения (укорочения) стержней, а лишь затем производить их поворот (рис. 1.7, б).

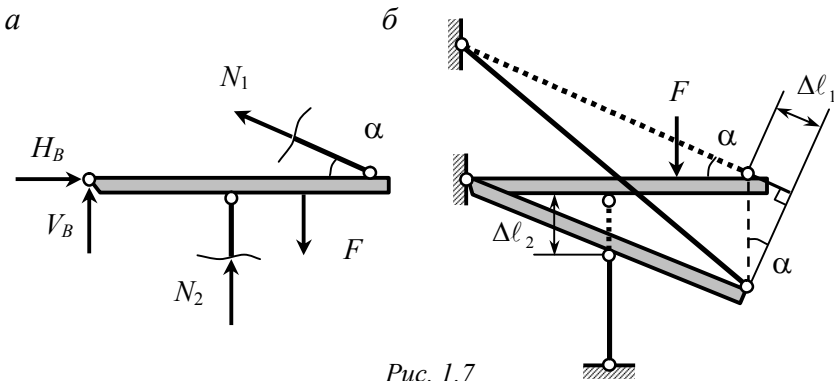


Рис. 1.7

По изображенной на чертеже картине перемещений устанавливаются абсолютные деформации стержней Δl . Для этого необходимо из переместившейся точки опустить перпендикуляр на начальную ось стержня. Далее устанавливается связь между абсолютными деформациями стержней из подобия треугольников, имеющих общую вершину (шарнир неподвижной опоры). Выражая абсолютные деформации стержней Δl через усилия N по закону Гука при центральном растяжении (сжатии) $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$, получают дополнительное уравнение для определения усилий в стержнях системы.

При составлении уравнений равновесия $\sum x = 0$; $\sum y = 0$; $\sum m_{(i)} = 0$ необходимо, чтобы направления усилий соответство-

вали истинным деформациям стержней. В случае, если стержень удлиняется, усилие в нем должно быть растягивающим, т. е. продольная сила направляется от сечения, и наоборот.

Для определения расчетной допускаемой нагрузки $F_{\text{доп}}$ необходимо вычислить напряжения в каждом стержне по формуле $\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}$, где i – номер стержня. Затем большее из полученных напряжений следует приравнять расчетному сопротивлению $\sigma_{\text{max}} = R$ и из этого условия определить величину $F_{\text{доп}}$.

Нагрузка, при которой несущая способность конструкции будет полностью исчерпана, называется *предельной нагрузкой* $F_{\text{пред}}$ (рис. 1.8, а). Величина предельной нагрузки определяется из условия достижения напряжениями в стержнях предела текучести: $N_{1, \text{пред}} = \sigma_T A_1$, $N_{2, \text{пред}} = \sigma_T A_2$. Затем для отсеченной части конструкции (рис. 1.8, б) составляется уравнение статического равновесия, из решения которого находится значение предельной нагрузки $F_{\text{пред}}$.

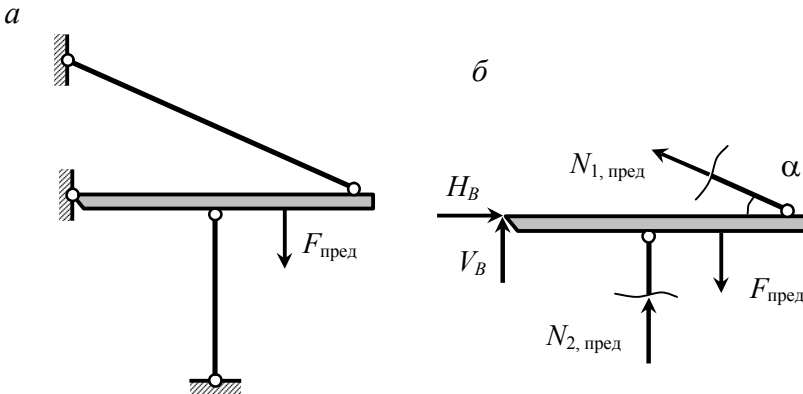


Рис. 1.8

Задача № 2

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен к двум стальным стержням.

Требуется:

– найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу F ;

– найти расчетную допускаемую нагрузку $F_{\text{доп}}$, приравняв большее из напряжений в стержнях расчетному сопротивлению R ;

– найти предельную нагрузку $F_{\text{пред}}$ при заданной величине предела текучести σ_T .

Числовые данные для расчета:

$$A = 11 \text{ см}^2;$$

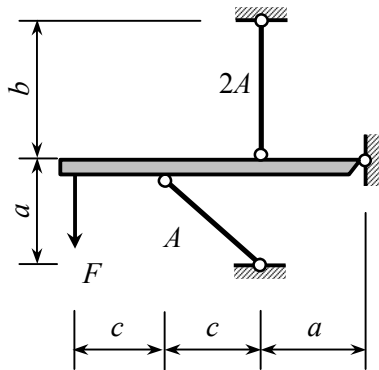
$$a = 3,0 \text{ м};$$

$$b = 2,1 \text{ м};$$

$$c = 1,1 \text{ м};$$

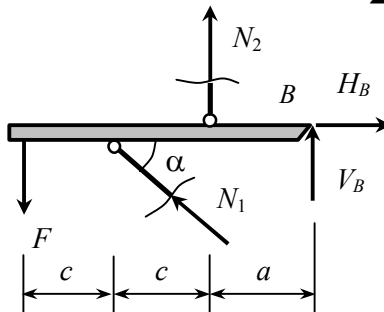
$$R = 210 \text{ МПа};$$

$$\sigma_T = 240 \text{ МПа}.$$



Решение задачи

Составляем уравнение равновесия $\sum m(B) = 0$.



$$N_1 \sin \alpha (c + a) + N_2 a - F(2c + a) = 0.$$

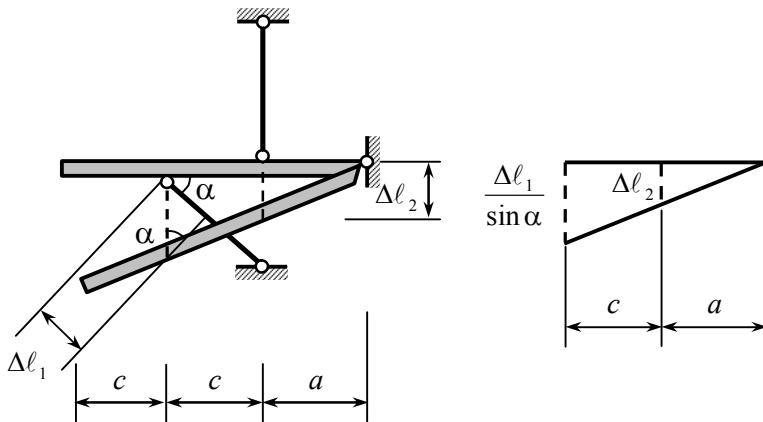
Находим по чертежу для угла α :

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{c^2 + a^2}} = 0,939;$$

$$N_1 \cdot 0,939 \cdot (1,1 + 3,0) + N_2 \cdot 3,0 - F \cdot (2 \cdot 1,1 + 3,0) = 0;$$

$$3,849N_1 + 3,0N_2 = 5,2F.$$

Для записи еще одного уравнения составим условие совместности деформаций и перемещений.



Из чертежа следует: $\frac{\Delta l_2}{a} = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha (c + a)}$.

Деформации стержней найдем по закону Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_1 a}{\sin \alpha EA}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{N_2 b}{E \cdot 2A}.$$

Тогда $\frac{N_2 b}{2EAa} = \frac{N_1 a}{\sin^2 \alpha EA (a + c)}$;

$$N_1 = \frac{b \sin^2 \alpha (a + c)}{2a^2} N_2 = \frac{2,1 \cdot 0,939^2 \cdot (3,0 + 1,1)}{2 \cdot 3,0^2} N_2 = 0,422 N_2.$$

Из уравнения равновесия получим:

$$3,849 \cdot 0,422 N_2 + 3,0 N_2 = 5,2 F; \quad 4,623 N_2 = 5,2 F;$$

$$N_2 = \frac{5,2 F}{4,623} = 1,125 F; \quad N_1 = 0,422 N_2 = 0,422 \cdot 1,125 F = 0,474 F.$$

Находим напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,474F}{A} = 0,474 \frac{F}{A};$$

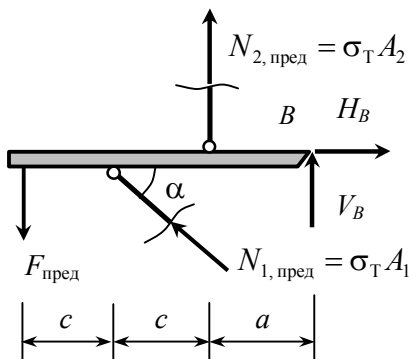
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{1,125F}{2A} = 0,562 \frac{F}{A}.$$

Допускаемую нагрузку находим, приравняв большее из полученных напряжений расчетному сопротивлению:

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = \frac{0,562F_{\text{доп}}}{A} = R;$$

$$F_{\text{доп}} = \frac{R \cdot A}{0,562} = \frac{210 \cdot 10^6 \cdot 11 \cdot 10^{-4}}{0,562} = 410,7 \cdot 10^3 \text{ Н} = 410,7 \text{ кН}.$$

Вычисляем предельную нагрузку, если предел текучести $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$. В предельном состоянии записываем уравнение равновесия $\sum m(B) = 0$.



$$\sigma_T A_2 a + \sigma_T A_1 \sin \alpha (c + a) - F_{\text{пред}} (2c + a) = 0;$$

$$F_{\text{пред}} = \frac{\sigma_T A_2 \cdot a + \sigma_T A_1 \cdot \sin \alpha (c + a)}{2c + a} = \sigma_T A \frac{2a + \sin \alpha (c + a)}{2c + a} =$$

$$= 240 \cdot 10^6 \cdot 11 \cdot 10^{-4} \frac{2 \cdot 3,0 + 0,939(1,1 + 3,0)}{2 \cdot 1,1 + 3,0} = 500,05 \text{ кН}.$$

1.4. Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Кручение – это такой вид деформации, при котором в поперечном сечении стержня возникает только один внутренний силовой фактор, а именно – *крутящий момент* M_x . Стержень, работающий на кручение, называется *валом*.

Кручение прямого стержня происходит при нагружении внешними скручивающими моментами, плоскость действия которых перпендикулярна его продольной оси.

Крутящий момент M_x в произвольном поперечном сечении стержня определяется с помощью метода сечений и численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения: $M_x = \sum m_{\text{лев}} = \sum m_{\text{прав}}$.

График, изображающий изменение крутящих моментов по длине стержня, называется *эпюрой крутящих моментов*. Рекомендуется принять следующее правило знаков: крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец отсеченной части стержня действующий на него момент представляется направленным по ходу часовой стрелки, и отрицательным – если против часовой стрелки.

Для построения эпюры крутящих моментов M_x стержень разбивается на участки, границами которых являются точки приложения внешних скручивающих моментов. В пределах каждого участка определяется внутреннее усилие, и по найденным значениям строится эпюра крутящих моментов M_x . В сечении, в котором к стержню приложен внешний скручивающий момент, на эпюре крутящих моментов будет скачок на величину приложенного момента.

При кручении в плоскости поперечного сечения возникают касательные напряжения τ .

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{|M_x|}{W_\rho} \leq R_{\text{ср}},$$

где $R_{\text{ср}}$ – расчетное сопротивление материала срез; W_ρ – полярный момент сопротивления сечения.

Для определения размеров поперечного сечения вала вычисляется требуемый полярный момент сопротивления

$W_\rho = \frac{|M_x|}{R_{\text{ср}}}$. Для круглого поперечного сечения полярный момент

сопротивления определяется формулой $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}$. Затем по най-

денному полярному моменту сопротивления находят требуемый диаметр вала D . Полученное значение диаметра необходимо округлить в большую сторону до стандартного значения из ряда типоразмеров: 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 70, 80, 90, 100 мм и т. д.

Для построения эпюры углов закручивания φ необходимо вычислить деформации на каждом участке вала. Угол закручивания на i -м участке вычисляется по формуле

$$\varphi_i = \frac{M_{x,i} \ell_i}{GJ_\rho},$$

где $M_{x,i}$ – величина крутящего момента на i -м силовом участке; ℓ_i – длина i -го участка; G – модуль сдвига материала конструкции; J_ρ – полярный момент инерции поперечного сечения.

Для круглого поперечного сечения полярный момент инерции вычисляется по формуле

$$J_\rho = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4.$$

Построение эпюры углов закручивания начинают с опорного сечения, поворот которого заведомо известен ($\varphi = 0$). Затем последовательно, путем алгебраического суммирования уг-

лов закручивания каждого участка в отдельности, строят эпюру углов поворота поперечных сечений.

При расчетах вала на жесткость необходимо определить максимальный относительный угол закручивания на один метр

длины стержня $\theta_{\max} = \frac{|M_{x, \max}|}{GJ_{\rho}}$ и осуществить проверку выполнения условия жесткости: $\theta_{\max} \leq [\theta]$.

Задача № 3

К стальному валу круглого поперечного сечения приложены внешние скручивающие моменты M_1, M_2, M_3, M_4 .

Требуется:

- построить эпюру крутящих моментов M_x ;
- определить диаметр вала из условия прочности;
- построить эпюру углов закручивания φ ;
- найти наибольший относительный угол закручивания

θ_{\max} и проверить жесткость вала.

Модуль сдвига принять $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа.

Числовые данные для расчета:

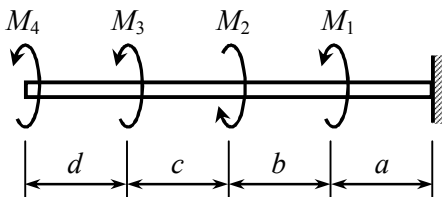
$$a = 1,2 \text{ м}; \quad b = 1,3 \text{ м}; \quad c = 1,1 \text{ м}; \quad d = 1,8 \text{ м};$$

$$M_1 = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2 = 26 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$R_{\text{сп}} = 120 \text{ МПа};$$

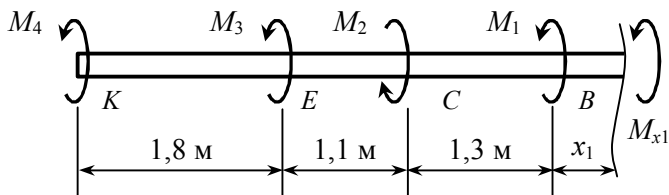
$$[\theta] = 1,9 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$



Решение задачи

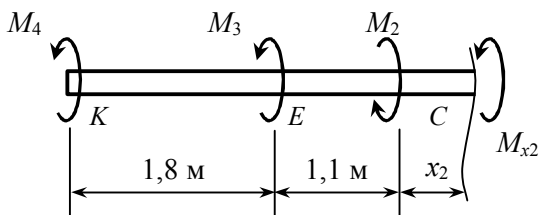
Из условия равновесия определим крутящие моменты в сечениях вала. Вал имеет четыре участка (рис. 1.9).

Участок AB , $0 \leq x_1 \leq a = 1,2$ м.



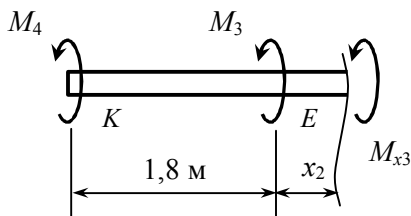
$$M_{x1} = -M_1 + M_2 - M_3 - M_4 = -16 + 26 - 6 - 10 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок BC , $0 \leq x_2 \leq b = 1,3$ м.



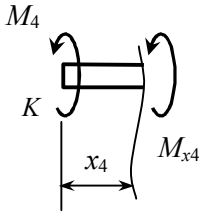
$$M_{x2} = M_2 - M_3 - M_4 = 26 - 6 - 10 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок CE , $0 \leq x_3 \leq c = 1,1$ м.



$$M_{x3} = -M_3 - M_4 = -6 - 10 = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок EK , $0 \leq x_4 \leq d = 1,8$ м.



$$M_{x4} = -M_4 = -10 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По эпюре крутящих моментов определим, что для опасного сечения $M_{x,\max} = 16,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Найдем диаметр вала из условия прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{x,\max}}{W_{\rho}} = \frac{16M_{x,\max}}{\pi D^3} \leq R_{\text{ср}};$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{x,\max}}{3,14R_{\text{ср}}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 16,0 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 120 \cdot 10^{-6}}} = 88 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 88 \text{ мм}.$$

Принимаем с учетом округления: $D = 90 \text{ мм} = 9 \text{ см}$.

Полярный момент инерции сечения

$$J_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (9)^4}{32} = 643,7 \text{ см}^4.$$

Вычислим углы закручивания поперечных сечений, начиная с правого конца вала (сечение на опоре не поворачивается):

$$\varphi_A = 0;$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{M_{x1} \ell_1}{GJ_{\rho}} = 0,000 + \frac{(-6 \cdot 10^3) \cdot 1,2}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 643,7 \cdot 10^{-8}} = -0,0140 \text{ рад};$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \frac{M_{x2} \ell_2}{GJ_{\rho}} = -0,0140 + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1,3}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 643,7 \cdot 10^{-8}} = 0,0112 \text{ рад};$$

$$\varphi_E = \varphi_C + \frac{M_{x3} \ell_3}{GJ_{\rho}} = 0,0112 + \frac{(-16 \cdot 10^3) \cdot 1,1}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 643,7 \cdot 10^{-8}} = -0,0229 \text{ рад};$$

$$\varphi_K = \varphi_E + \frac{M_{x4} \ell_4}{GJ_p} = -0,0229 + \frac{(-10 \cdot 10^3) \cdot 1,8}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 643,7 \cdot 10^{-8}} = -0,0579 \text{ рад.}$$

Максимальный относительный угол закручивания

$$\theta_{\max} = \frac{|M_{x, \max}|}{GJ_p} = \frac{16 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 643,7 \cdot 10^{-8}} = 0,031 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Проверяем условие жесткости:

$$\theta_{\max} = 0,031 \frac{\text{рад}}{\text{м}} = 0,031 \frac{180^\circ}{\pi} = 1,78 \frac{\text{град}}{\text{м}} < [\theta] = 1,9 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Условие жесткости выполняется.

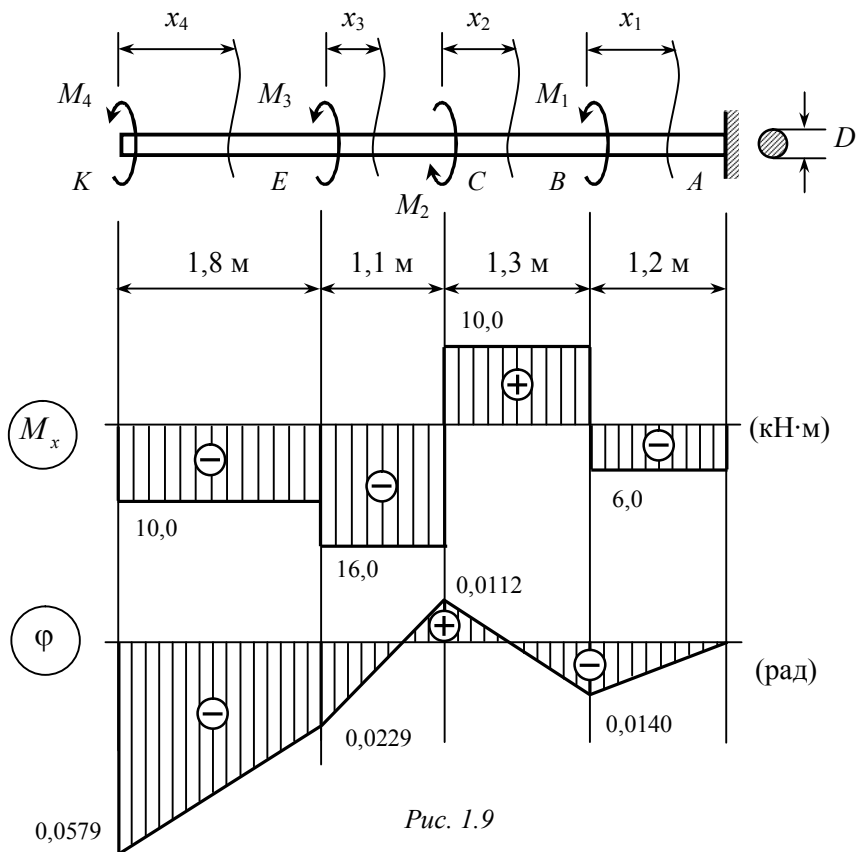


Рис. 1.9

1.5. Геометрические характеристики плоских сечений

Определение геометрических характеристик, зависящих от формы и размеров поперечных сечений, необходимо при выполнении расчетов прочности, жесткости и устойчивости.

Геометрические характеристики сечений простой формы (прямоугольник, прямоугольный треугольник, круг, полукруг и четверть круга) вычисляются по интегральным зависимостям:

$$A = \int_A dA; \quad Sz = \int_A ydA; \quad Sy = \int_A zdA;$$
$$Jz = \int_A y^2 dA; \quad Jy = \int_A z^2 dA; \quad Jzy = \int_A zy dA.$$

Результаты вычислений геометрических характеристик для простых фигур приведены в прил. 2. Геометрические характеристики профилей проката (двутавров, швеллеров, равнополочных уголков) приведены в таблицах сортамента прокатной стали (см. прил. 2).

Для определения координат центра тяжести составное сечение требуется разбить на ряд простых фигур, положение центров тяжести которых заведомо известно. Затем необходимо выбрать произвольную систему координат zOy , вычертить сечение в масштабе и показать собственные центральные оси для каждого элемента z_i, y_i .

Координаты центра тяжести составного сечения вычисляются по формулам:

$$y_C = \frac{Sz_0}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{C,i}}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad z_C = \frac{Sy_0}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot z_{C,i}}{\sum_{i=1}^n A_i},$$

где A_i – площадь i -й простой фигуры; $z_{C,i}, y_{C,i}$ – координаты центров тяжести простых фигур.

Следует иметь в виду, что статические моменты площади могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Затем через центр тяжести сечения проводятся центральные оси z , y , параллельные первоначально выбранным осям.

Если сечение составлено из двух элементов, то общий центр тяжести должен находиться на прямой, соединяющей центры тяжести составляющих его простых фигур.

Далее из сортамента прокатной стали выписываются значения осевых и центробежного моментов инерции для каждого профиля (двутавра, швеллера, равнополочного уголка), образующего составное сечение.

Величины центробежных моментов инерции и их знаки для прокатных уголков приведены не во всех сортаментах. Их величину можно определить по формулам: $J_{zy} = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2}$ – для равнополочного уголка, $J_{zy} = \sqrt{(J_z - J_{\min})(J_y - J_{\min})}$ – для неравнополочного уголка. Знак центробежного момента инерции для прокатных уголков в таблицах сортамента не указывается и его необходимо определить дополнительно, учитывая ориентацию поперечного сечения уголка относительно собственных центральных осей координат (рис. 1.10).

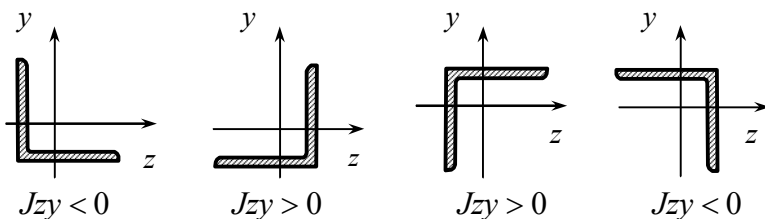


Рис. 1.10

В связи с тем, что оси z и y , центральные для составного сечения, не являются центральными ни для одной из фигур в отдельности, то для вычисления осевых и центробежного моментов инерции всего сечения используют формулы для параллельного переноса осей:

$$Jz_C = \sum_{i=1}^n (Jz_i + a_i^2 A_i);$$

$$Jy_C = \sum_{i=1}^n (Jy_i + b_i^2 A_i);$$

$$Jz_C y_C = \sum_{i=1}^n (Jz_i y_i + a_i b_i A_i),$$

где a_i , b_i – координаты центра тяжести i -й фигуры относительно центральных осей z , y (рис. 1.11).

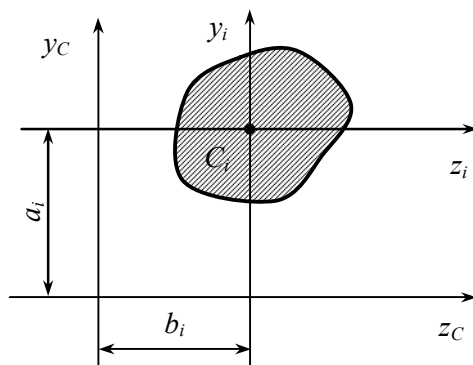


Рис. 1.11

Главными осями называются оси, относительно которых осевые моменты инерции достигают экстремальных значений (max и min), а центробежный момент инерции становится равным нулю. Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются *главными центральными осями*.

Положение главных центральных осей инерции u и v определяется углом α . Тангенс удвоенного угла 2α вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{-2J_{z_c}y_c}{J_{z_c} - J_{y_c}}.$$

Для угла α принимается следующее правило знаков: если $\alpha > 0$, то оси координат поворачиваются против часовой стрелки, если $\alpha < 0$ – по часовой стрелке. Если хотя бы одна из центральных осей сечения является осью симметрии, то и эта ось, и любая ось, ей перпендикулярная, образуют систему главных центральных осей.

Центральная ось сечения, относительно которой величина осевого момента инерции была большей, при повороте вокруг центра тяжести становится осью максимума u . Ось v – ось минимума:

$$J_u = J_{\max}, \quad J_v = J_{\min}.$$

Величины главных центральных моментов инерции вычисляются по формулам:

$$J_{\max} = \frac{J_{z_c} + J_{y_c}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{z_c} - J_{y_c})^2 + 4(J_{z_c}y_c)^2};$$

$$J_{\min} = \frac{J_{z_c} + J_{y_c}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{z_c} - J_{y_c})^2 + 4(J_{z_c}y_c)^2}.$$

При повороте осей вокруг центра тяжести моменты инерции изменяют свои значения, но их сумма остается постоянной. Следовательно, при правильном расчете должно выполняться следующее условие:

$$J_{z_c} + J_{y_c} = J_{\max} + J_{\min}.$$

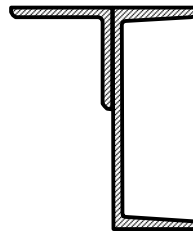
Найденные величины главных центральных моментов инерции используются для определения осевых моментов сопротивления, необходимых при расчете конструкций на изгиб.

Задача № 4

Для поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнополочного уголка, или из двутавра и равнополочного уголка, или из швеллера и двутавра, требуется:

- определить положение центра тяжести;
- найти осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно осей z и y , проходящих через центр тяжести;
- определить положение главных центральных осей u и v ;
- найти моменты инерции относительно главных центральных осей;
- вычертить сечение в масштабе и показать на нем все размеры в числах и все оси.

Числовые данные для расчета:
швеллер № 24,
уголок равнополочный 110×8 .



Решение задачи

Проведем начальные оси z_0 и y_0 (рис. 1.12). Разделим сечение на две фигуры: швеллер № 24; уголок равнополочный 110×8 . Определим по сортаменту прокатной стали (прил. 2) для каждой фигуры координаты центра тяжести и геометрические характеристики относительно собственных центральных осей.

Швеллер № 24.

Координаты центра тяжести:

$$z_{C,1} = z_{01} = 2,42 \text{ см}; \quad y_{C,1} = \frac{h_1}{2} = \frac{24,0}{2} = 12,0 \text{ см}.$$

Площадь поперечного сечения $A_1 = 30,6 \text{ см}^2$.

Осевые моменты инерции: $J_{z_1} = 2900 \text{ см}^4$; $J_{y_1} = 208 \text{ см}^4$.

Центробежный момент инерции $J_{z_1 y_1} = 0,0 \text{ см}^4$.

Уголок равнополочный 110×8 ($110 \times 110 \times 8$).

Координаты центра тяжести:

$$z_{C,2} = -z_{02} = -3,0 \text{ см}; \quad y_{C,2} = h_1 - z_{02} = 24,0 - 3,0 = 21,0 \text{ см}.$$

Площадь поперечного сечения $A_2 = 17,2 \text{ см}^2$.

Осевые моменты инерции: $Jz_2 = Jy_2 = 198,17 \text{ см}^4$.

Центробежный момент инерции $Jz_2y_2 = \pm 116,0 \text{ см}^4$.

Берем знак «минус», так как большая часть площади уголка расположена во второй и четвертой координатных четвертях, где произведение z_2y_2 отрицательное.

Определим положение центра тяжести сечения по формуле:

$$z_C = \frac{Sy_0}{A} = \frac{A_1z_{C,1} + A_2z_{C,2}}{A_1 + A_2} = \frac{30,6 \cdot 2,42 + 17,2(-3,0)}{30,6 + 17,2} = 0,47 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{Sz_0}{A} = \frac{A_1y_{C,1} + A_2y_{C,2}}{A_1 + A_2} = \frac{30,6 \cdot 12,0 + 17,2 \cdot 21,0}{30,6 + 17,2} = 15,24 \text{ см}.$$

Определим осевые и центробежный моменты инерции относительно осей, проведенных через центр тяжести сечения (точку C с координатами z_C, y_C):

$$Jz = Jz^{(1)} + Jz^{(2)};$$

$$a_1 = y_{C,1} - y_C = 12,0 - 15,24 = -3,24 \text{ см};$$

$$a_2 = y_{C,2} - y_C = 21,0 - 15,24 = 5,76 \text{ см};$$

$$Jz^{(1)} = Jz_1 + a_1^2 A_1 = 2900,0 + (-3,24)^2 30,6 = 3221,2 \text{ см}^4;$$

$$Jz^{(2)} = Jz_2 + a_2^2 A_2 = 198,17 + (5,76)^2 17,2 = 768,8 \text{ см}^4;$$

$$Jz = Jz^{(1)} + Jz^{(2)} = 3221,227 + 768,825 = 3990,1 \text{ см}^4;$$

$$Jy_C = Jy^{(1)} + Jy^{(2)};$$

$$b_1 = z_{C,1} - z_C = 2,42 - 0,47 = 1,95 \text{ см};$$

$$b_2 = z_{C,2} - z_C = -3,0 - 0,47 = -3,47 \text{ см};$$

$$Jy^{(1)} = Jy_1 + b_1^2 A_1 = 208,0 + (1,95)^2 30,6 = 324,4 \text{ см}^4;$$

$$Jy^{(2)} = Jy_2 + b_2^2 A_2 = 198,17 + (-3,47)^2 17,2 = 405,3 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = 324,4 + 405,3 = 729,7 \text{ см}^4;$$

$$J_{zy} = J_{zy}^{(1)} + J_{zy}^{(2)};$$

$$J_{zy}^{(1)} = J_{z_1}y_1 + a_1b_1A_1 = 0 + (-3,24) \cdot 1,95 \cdot 30,6 = -193,3 \text{ см}^4;$$

$$J_{zy}^{(2)} = J_{z_2}y_2 + a_2b_2A_2 = -116,0 + 5,76 \cdot (-3,47) \cdot 17,2 = -459,8 \text{ см}^4;$$

$$J_{zy} = J_{zy}^{(1)} + J_{zy}^{(2)} = -193,3 - 459,8 = -653,1 \text{ см}^4.$$

Определим угол наклона главных центральных осей:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{-2J_{zy}}{J_z - J_y} = \frac{-2 \cdot (-653,1)}{3990,1 - 729,7} = 0,401.$$

Угол поворота осей $\alpha = 0,5 \arctg(0,401) = 11^\circ$. Повернем оси z и y на угол $\alpha = 11^\circ$ против часовой стрелки и получим главные оси инерции сечения u , v (рис. 1.12).

Найдём главные центральные моменты инерции сечения:

$$\begin{aligned} J_{\max} &= \frac{J_z + J_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4(J_{zy})^2} = \\ &= \frac{3990,1 + 729,7}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(3990,1 - 729,7)^2 + 4(-653,1)^2} = \\ &= 2359,9 + 1756,2 = 4116,1 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

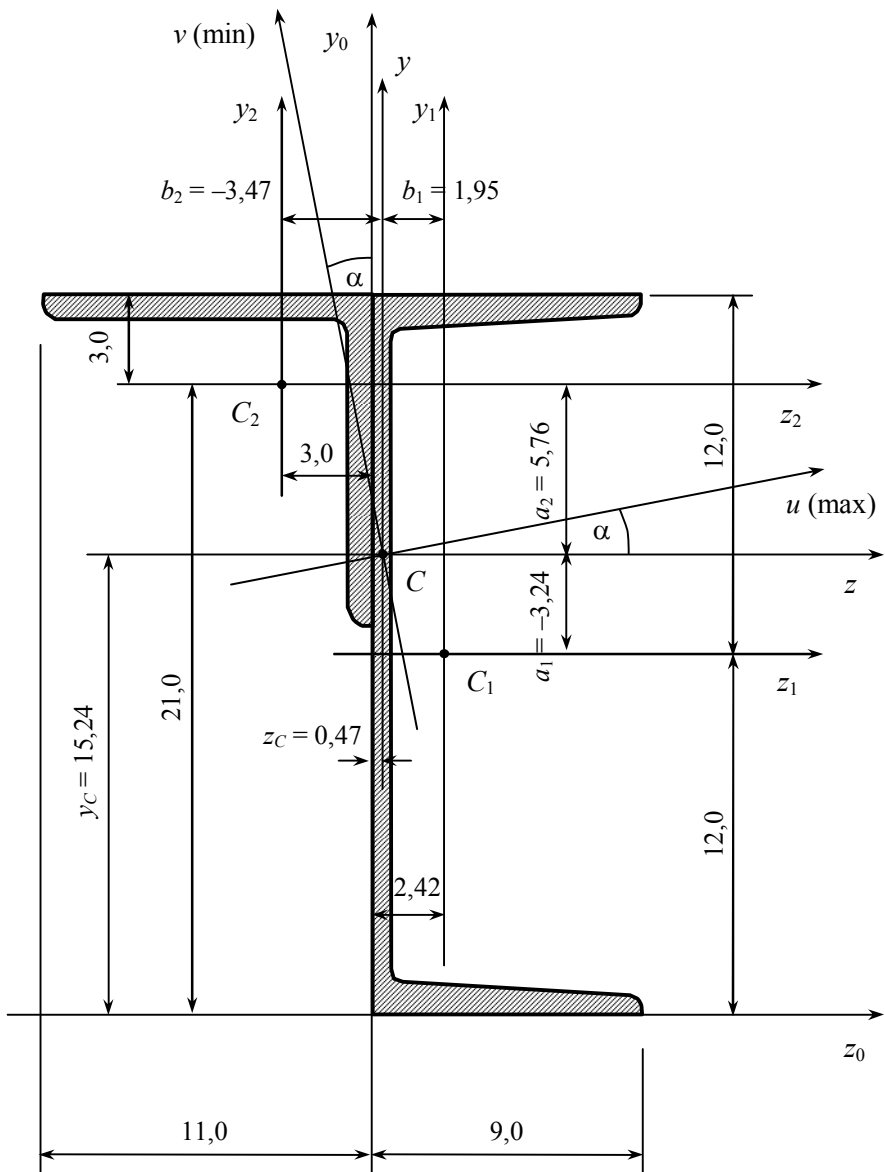
$$\begin{aligned} J_{\min} &= \frac{J_z + J_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4(J_{zy})^2} = \\ &= \frac{3990,1 + 729,7}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(3990,1 - 729,7)^2 + 4(-653,1)^2} = \\ &= 2359,9 - 1756,2 = 603,7 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Проверка:

$$J_z + J_y = 3990,1 + 729,7 = 4719,7 \text{ см}^4;$$

$$J_{\max} + J_{\min} = 4116,1 + 603,7 = 4719,8 \text{ см}^4.$$

Так как J_z больше J_y , то $J_{\max} = J_u$, $J_{\min} = J_v$.



Puc. 1.12

1.6. Расчет балок на прочность при изгибе

Изгибом называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении стержня не равны нулю *изгибающие моменты* M_z и *поперечные силы* Q_y . Стержни, работающие на изгиб, принято называть *балками*.

В зависимости от способов приложения нагрузки различают следующие виды изгиба. Если вся внешняя нагрузка приложена в плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции сечения, то балка будет изгибаться в той же плоскости. Такой изгиб называется *прямым* (рис. 1.13, а).

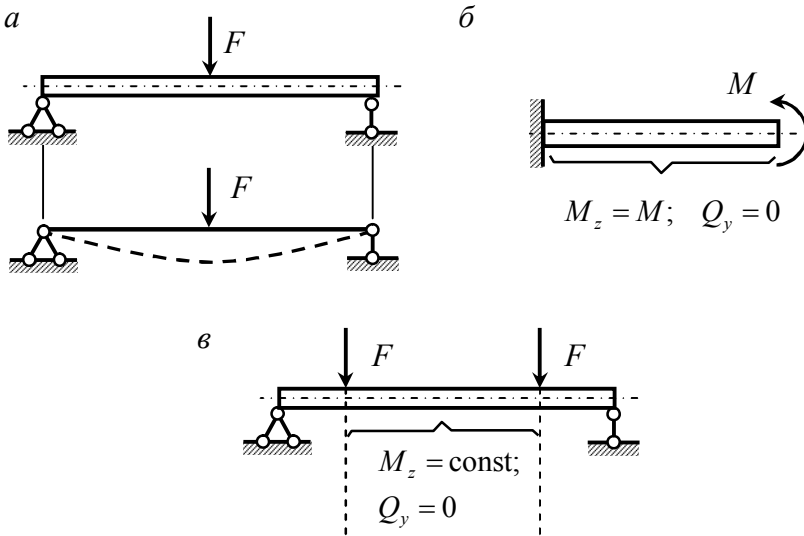


Рис. 1.13

Чистым изгибом называется случай, при котором изгибающий момент в поперечном сечении балки является единственным силовым фактором, а все остальные внутренние усилия равны нулю (рис. 1.13, б, в). Если изгиб происходит при наличии

поперечной силы, то такой случай называется *прямым поперечным изгибом*.

Для определения внутренних усилий при изгибе используется метод сечений. В соответствии с этим методом для определения внутренних усилий проводят сечение и рассматривают равновесие либо левой, либо правой отсеченной части балки.

Из условий равновесия отсеченной части под действием внешних нагрузок, опорных реакций и внутренних усилий определяются поперечные силы и изгибающие моменты в сечении. При рассмотрении равновесия отсеченной части необходимо прикладывать внутренние усилия в соответствии с правилом знаков:

- изгибающий момент считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки, и отрицательным, если вызывает растяжение верхних волокон (рис. 1.14, а);

- поперечная сила считается положительной, если она стремится повернуть отсеченную часть балки по ходу часовой стрелки, и отрицательной – если против (рис. 1.14, б).

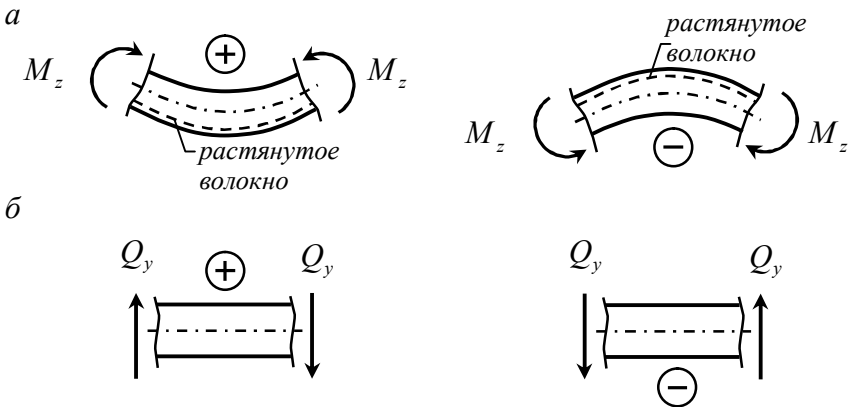


Рис. 1.14

При определении изгибающих моментов и поперечных сил учитываются все внешние нагрузки и опорные реакции, приложенные по одну (и только одну) сторону от рассматриваемого сечения.

Для упрощения записи выражений внутренних усилий при изгибе следует пользоваться правилами:

– поперечная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, приложенных к отсеченной части балки, на вертикальную ось y , $Q_y = \sum F_{iy}$;

– изгибающий момент равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных к отсеченной части относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести сечения, $M_z = \sum m_{iz}$.

При расчете на прочность необходимо знать закон изменения внутренних усилий в поперечных сечениях. Этот закон можно выразить в виде аналитических зависимостей и изобразить с помощью специальных графиков, называемых эпюрами.

Эпюрой изгибающих моментов (поперечных сил) называется график, изображающий закон изменения изгибающих моментов (поперечных сил) по длине балки. Каждая ордината эпюры представляет собой величину изгибающего момента или поперечной силы в соответствующем поперечном сечении.

При построении эпюр внутренних усилий необходимо придерживаться следующих правил:

– ординаты эпюры поперечных сил, соответствующие положительным значениям, откладывают вверх от оси эпюры, а отрицательные – вниз;

– на эпюре изгибающих моментов положительные ординаты принято откладывать вниз, а отрицательные – вверх. В этом случае эпюра моментов будет построена со стороны растянутых волокон. Знак на эпюре моментов ставить не следует.

Порядок построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил в балках следующий:

– из условия равновесия для всей балки определяют опорные реакции (найденные величины реакций следует проверить);

– балку делят на участки, в пределах которых внутренние усилия изменяются по определенному закону;

– границы участков назначают в местах приложения сосредоточенных сил, моментов, начала и конца действия распределенных нагрузок;

– на каждом участке проводят одно, и только одно сечение, координату сечения удобнее отсчитывать от начала участка;

– изображают выбранную отсеченную часть балки (левую или правую), на которой показывают все приложенные к этой части нагрузки и внутренние усилия (внутренние усилия прикладывают в положительном направлении в соответствии с рис. 1.14);

– составляют выражения для поперечных сил и изгибающих моментов;

– вычисляют внутренние усилия в характерных сечениях и по полученным значениям строят эпюры.

Для проверки построенных эпюр необходимо использовать следующие правила (свойства эпюр внутренних усилий):

1. В сечении балки, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре поперечных сил будет скачок на величину этой силы, направленный в сторону действия силы (при движении по балке слева направо). На эпюре моментов будет излом в сторону действия силы (рис. 1.15, а).

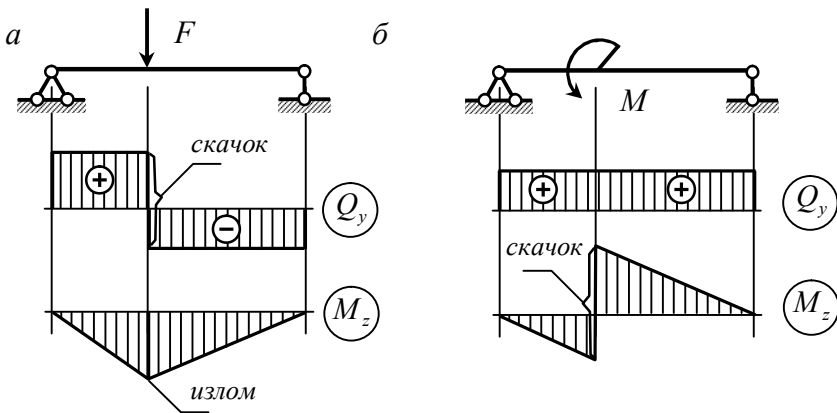


Рис. 1.15

2. В сечении балки, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре моментов будет скачок на величину момента (рис. 1.15, б). При этом, если двигаться по балке слева направо, то скачок будет сверху вниз, если момент направлен по ходу часовой стрелки, и снизу вверх, если момент направлен против часовой стрелки. На эпюре поперечных сил в этом сечении никаких изменений не будет.

3. Между внешней нагрузкой, в частности интенсивностью распределенной нагрузки q , и внутренними усилиями – поперечной силой Q_y , и изгибающим моментом M_z – существуют дифференциальные зависимости:

– первая производная от поперечной силы по абсциссе x равна интенсивности распределенной нагрузки, перпендикулярной к оси балки: $q = \pm \frac{dQ_y}{dx}$ (знак «плюс» соответствует движению по балке слева направо и нагрузке q , направленной снизу вверх);

– первая производная от изгибающего момента по абсциссе x равна поперечной силе: $Q_y = \pm \frac{dM_z}{dx}$.

Тангенс угла α между касательной к эпюре изгибающих моментов и осью балки численно равен поперечной силе $Q_y = \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 1.16, б).

Из приведенных зависимостей можно сформулировать дополнительные свойства эпюр.

4. На участке балки, где поперечная сила положительна, изгибающий момент возрастает (при движении по балке слева направо), на участке, где поперечная сила отрицательна, – убывает (рис. 1.16, а).

5. На участке балки, где поперечная сила постоянна, эпюра изгибающих моментов очерчена по прямой линии.

6. На участке балки, где действует равномерно распределенная нагрузка, поперечные силы изменяются по линейному закону, а изгибающие моменты – по закону квадратной параболы, выпуклость которой обращена в сторону действия распределенной нагрузки.

7. Если на участке поперечная сила меняет знак, то на эпюре моментов в этом сечении будет вершина параболы (рис. 1.16, б).

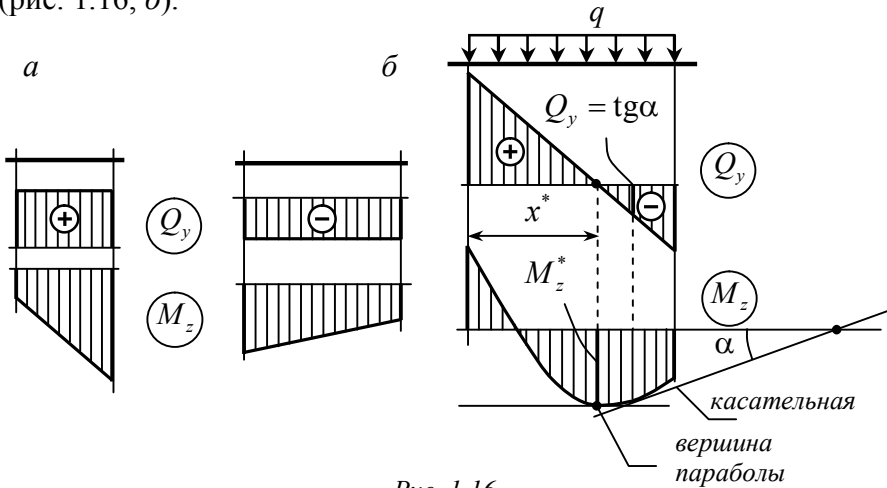


Рис. 1.16

8. На участке, где приложена распределенная нагрузка, изменяющаяся по линейному закону, эпюра поперечных сил очерчена по квадратной параболе, а эпюра изгибающих моментов – по кубической.

Слой, длина которого при изгибе не изменяется, называется *нейтральным*. Нейтральная ось представляет собой линию пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения. Нейтральная ось поперечного сечения является его главной центральной осью инерции и перпендикулярна плоскости действия изгибающего момента.

Расчеты балок на прочность производят по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в *опасном сечении*.

Опасным называется сечение балки, в котором действует наибольший по абсолютной величине изгибающий момент $M_{z, \max}$. Опасными точками опасного сечения называются точки, наиболее удаленные от нейтральной оси. Условие прочности в опасном сечении при изгибе записывается в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z, \max}}{W_z} \leq R,$$

где W_z – момент сопротивления поперечного сечения; R – расчётное сопротивление материала.

Момент сопротивления поперечного сечения определяется по формуле

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}},$$

где y_{\max} – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной точки поперечного сечения.

Для подбора размеров поперечного сечения балки из условия прочности определяется требуемый момент сопротивления

$$W_z \geq \frac{M_{z, \max}}{R}.$$

В зависимости от заданной формы поперечного сечения балки размеры подбираются так, чтобы момент сопротивления был равен требуемой величине или незначительно превышал ее.

Для балки круглого поперечного сечения

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1D^3.$$

Для балки прямоугольного сечения $W_z = \frac{bh^2}{6}$, где h – высота сечения, b – ширина сечения.

Подбор балок из прокатных профилей производится с помощью таблиц сортамента, в которых указаны моменты сопротивления сечений.

Задача № 5

Для балки-консоли требуется:

- определить опорные реакции;
- записать выражения внутренних усилий на каждом участке в аналитическом виде;
- построить эпюры внутренних усилий Q_y и M_z ;
- подобрать диаметр поперечного сечения деревянной балки при условии, что расчетное сопротивление $R = 8$ МПа.

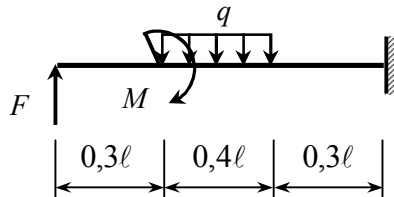
Числовые данные для расчета:

$$\ell = 1,4 \text{ м};$$

$$F = 6 \text{ кН};$$

$$q = 14 \text{ кН/м};$$

$$M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



Решение задачи

Определение опорных реакций (рис. 1.17).

$$\sum M_A = 0:$$

$$M_A + F \cdot 1,4 + M - q \cdot 0,56 \cdot (0,42 + 0,28) = 0;$$

$$\begin{aligned} M_A &= -F \cdot 1,4 - M + q \cdot 0,56 \cdot (0,42 + 0,28) = \\ &= -6 \cdot 1,4 - 10 + 14 \cdot 0,56 \cdot 0,7 = -12,912 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

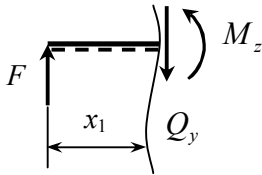
$$\sum y = 0: V_A + F - q \cdot 0,56 = 0;$$

$$V_A = -F + q \cdot 0,56 = -6 + 14 \cdot 0,56 = 1,84 \text{ кН}.$$

Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Балка имеет три участка. Проводим на каждом участке сечение на расстоянии x от начала участка. Из условия равновесия отсеченной части определяем поперечные силы и изгибающие моменты. По полученным значениям строим эпюру поперечных сил Q_y и эпюру изгибающих моментов M_z .

Участок DC , $0 \leq x_1 \leq 0,3\ell = 0,42$ м.



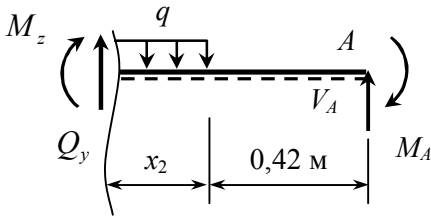
$$Q_y = F = 6 \text{ кН};$$

$$M_z = Fx_1 = 6x_1;$$

при $x_1 = 0$ $M_z = 6 \cdot 0 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м};$

при $x_1 = 0,42$ м $M_z = 6 \cdot 0,42 = 2,52 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Участок BC , $0 \leq x_2 \leq 0,4\ell = 0,56$ м.



$$Q_y = -V_A + qx_2 = -1,84 + 14x_2;$$

при $x_2 = 0$ $Q_y = -1,84 + 14 \cdot 0 = -1,84 \text{ кН};$

при $x_2 = 0,56$ м $Q_y = -1,84 + 14 \cdot 0,56 = 6,0 \text{ кН}.$

Из условия $Q_y = -1,84 + 14x_2^* = 0$ находим вершину параболы:

$$x_2^* = \frac{1,84}{14} = 0,131 \text{ м}.$$

$$M_z = -M_A + V_A(0,42 + x_2) - q \frac{x_2^2}{2} =$$

$$= -(-12,912) + 1,84(0,42 + x_2) - 14 \frac{x_2^2}{2} = 13,685 + 1,84x_2 - 7x_2^2;$$

при $x_2 = 0$

$$M_z = 13,685 + 1,84 \cdot 0 - 7 \cdot 0^2 = 13,685 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

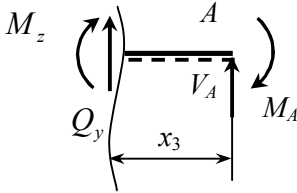
при $x_2^* = 0,131 \text{ м}$

$$M_z = 13,685 + 1,84 \cdot 0,131 - 7 \cdot 0,131^2 = 13,806 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

при $x_2 = 0,56 \text{ м}$

$$M_z = 13,685 + 1,84 \cdot 0,56 - 7 \cdot 0,56^2 = 12,52 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок AB , $0 \leq x_3 \leq 0,3\ell = 0,42 \text{ м}$.



$$Q_y = -V_A = -1,84 \text{ кН};$$

$$M_z = -M_A + V_A x_3 = -(-12,912) + 1,84 x_3;$$

при $x_3 = 0$ $M_z = 12,912 + 1,84 \cdot 0 = 12,912 \text{ кН} \cdot \text{м};$

при $x_3 = 0,42 \text{ м}$ $M_z = 12,912 + 1,84 \cdot 0,42 = 13,685 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Подбор размеров поперечного сечения производится из условия прочности по нормальным напряжениям. По построенной эпюре M_z определим максимальный расчетный изгибающий момент $M_{z, \max} = 13,806 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Требуемый момент сопротивления сечения находим из условия прочности при изгибе:

$$W_z \geq \frac{M_{z, \max}}{R} = \frac{13,806 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^6} = 1725,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 1725,7 \text{ см}^3.$$

Для поперечного сечения в форме круга момент сопротивления

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} = 1725,7 \text{ см}^3.$$

Находим требуемое значение диаметра:

$$D = \sqrt[3]{\frac{32W_z}{3,14}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1725,7}{3,14}} = 26,005 \text{ см.}$$

Принимаем с округлением: $D = 26,1 \text{ см.}$

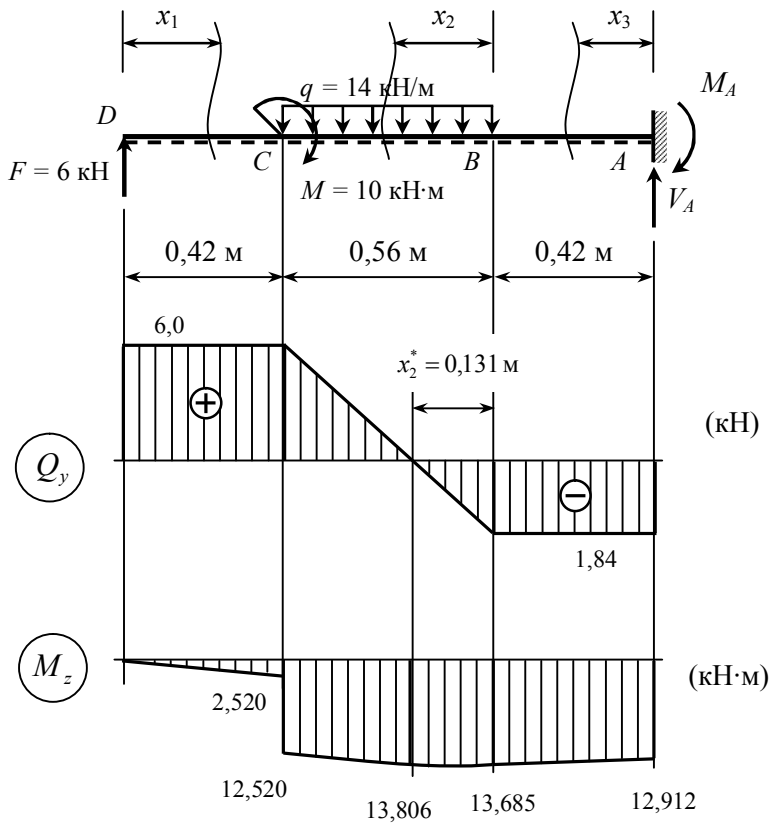


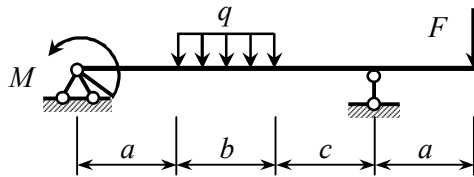
Рис. 1.17

Задача № 6

Для балки на двух опорах требуется:

- определить опорные реакции;
- записать выражения внутренних усилий на каждом участке в аналитическом виде;
- построить эпюры внутренних усилий Q_y и M_z ;
- подобрать номер двутавра.

Числовые данные для расчета: $a = 1,6$ м; $b = 1,8$ м; $c = 1,4$ м; $F = 6$ кН; $q = 14$ кН/м; $M = 10$ кН·м; $R = 210$ МПа.



Решение задачи

Определение опорных реакций (рис. 1.18):

$$\sum M_B = 0:$$

$$V_A \cdot 4,8 + F \cdot 1,6 - M - q \cdot 1,8 \cdot (0,9 + 1,4) = 0;$$

$$V_A = \frac{-F \cdot 1,6 + M + q \cdot 1,8 \cdot (0,9 + 1,4)}{4,8} =$$

$$= \frac{-6 \cdot 1,6 + 10 + 14 \cdot 1,8 \cdot 2,3}{4,8} = 12,158 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0:$$

$$-V_B \cdot 4,8 + F \cdot 6,4 - M + q \cdot 1,8 \cdot (1,6 + 0,9) = 0;$$

$$V_B = \frac{F \cdot 6,4 - M + q \cdot 1,8 \cdot (1,6 + 0,9)}{4,8} =$$

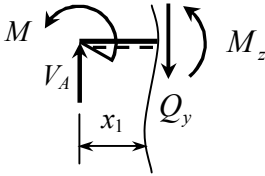
$$= \frac{6 \cdot 6,4 - 10 + 14 \cdot 1,8 \cdot 2,5}{4,8} = 19,042 \text{ кН}.$$

Проверка $\sum y = 0$:

$$V_A + V_B - F - q \cdot 1,8 = 12,158 + 19,042 - 6,0 - 14,0 \cdot 1,8 = 0.$$

Построение эюр изгибающих моментов и поперечных сил. Балка имеет четыре участка. Проводим на каждом участке сечение на расстоянии x от начала участка. Из условия равновесия отсеченной части определим поперечные силы и изгибающие моменты.

Участок AC , $0 \leq x_1 \leq a = 1,6$ м.



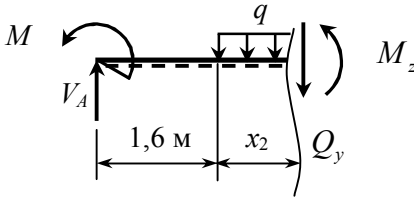
$$Q_y = V_A = 12,158 \text{ кН};$$

$$M_z = -M + V_A x_1 = -10 + 12,158 x_1;$$

$$\text{при } x_1 = 0 \quad M_z = -10 + 12,158 \cdot 0 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } x_1 = 1,6 \text{ м} \quad M_z = -10 + 12,152 \cdot 1,6 = 9,453 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок CD , $0 \leq x_2 \leq b = 1,8$ м.



$$Q_y = V_A - q x_2 = 12,158 - 14 x_2;$$

$$\text{при } x_2 = 0 \quad Q_y = 12,158 - 14 \cdot 0 = 12,158 \text{ кН};$$

$$\text{при } x_2 = 1,8 \text{ м} \quad Q_y = 12,158 - 14 \cdot 1,8 = -13,042 \text{ кН}.$$

Из условия $Q_y = 12,158 - 14 x_2^* = 0$ находим положение вер-

$$\text{шины параболы: } x_2^* = \frac{12,158}{14} = 0,868 \text{ м}.$$

$$\begin{aligned}
 M_z &= -M + V_A(1,6 + x_2) - q \frac{x_2^2}{2} = \\
 &= -10 + 12,158(1,6 + x_2) - 14 \frac{x_2^2}{2} = \\
 &= 9,453 + 12,158x_2 - 7x_2^2;
 \end{aligned}$$

при $x_2 = 0$

$$M_z = 9,453 + 12,158 \cdot 0 - 7 \cdot 0^2 = 9,453 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

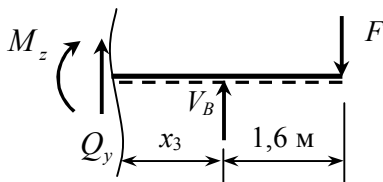
при $x_2^* = 0,868 \text{ м}$

$$M_z = 9,453 + 12,158 \cdot 0,868 - 7 \cdot 0,868^2 = 14,732 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

при $x_2 = 1,8 \text{ м}$

$$M_z = 9,453 + 12,158 \cdot 1,8 - 7 \cdot 1,8^2 = 8,657 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок BD , $0 \leq x_3 \leq c = 1,4 \text{ м}$.



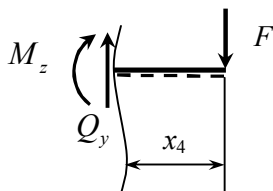
$$Q_y = -V_B + F = -19,042 + 6 = -13,042 \text{ кН};$$

$$M_z = V_B x_3 - F(x_3 + 1,6) = 19,042x_3 - 6(x_3 + 1,6) = 13,042x_3 - 9,6;$$

при $x_3 = 0$ $M_z = 13,042 \cdot 0 - 9,6 = -9,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$

при $x_3 = 1,4 \text{ м}$ $M_z = 13,042 \cdot 1,4 - 9,6 = 8,657 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Участок BE , $0 \leq x_4 \leq a = 1,6 \text{ м}$.



$$Q_y = F = 6 \text{ кН}; \quad M_z = -Fx_4 = -6x_4;$$

при $x_4 = 0$ $M_z = -6 \cdot 0 = 0$ кН·м;

при $x_4 = 1,6$ м $M_z = -6 \cdot 1,6 = -9,6$ кН·м.

Подбор размеров поперечного сечения. По построенной эпюре M_z определим максимальный расчетный изгибающий момент $M_{z,\max} = 14,732$ кН·м. Требуемый момент сопротивления

$$W_z \geq \frac{M_{z,\max}}{R} = \frac{14,732 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^3} = 70,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 70,2 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента прокатной стали (прил. 2) принимаем двутавр № 14, для которого момент сопротивления $W_z = 81,7 \text{ см}^3$.

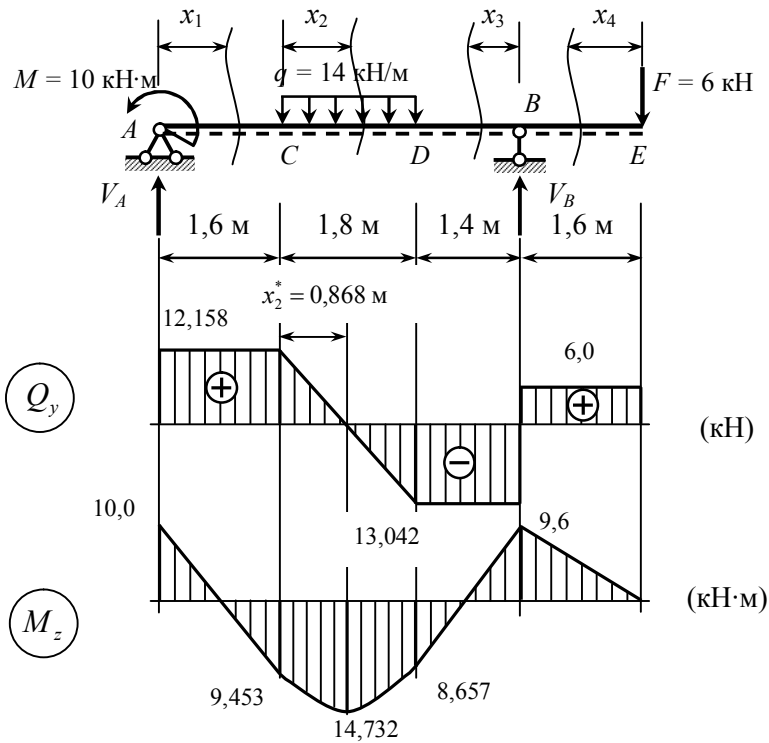


Рис. 1.18

1.7. Определение внутренних усилий в статически определимой раме

Рамой называется стержневая система, в которой все или часть узлов жесткие. При определении внутренних усилий реальную конструкцию (рис. 1.19, *a*) заменяют расчетной схемой (рис. 1.19, *б*). Элементы рамы работают на растяжение-сжатие и (или) изгиб. Для плоской рамы в поперечных сечениях действуют продольные силы N , поперечные силы Q_y и изгибающие моменты M_z . Правила знаков для внутренних усилий в раме аналогичны правилам знаков, установленным при деформациях прямого поперечного изгиба и растяжения-сжатия.

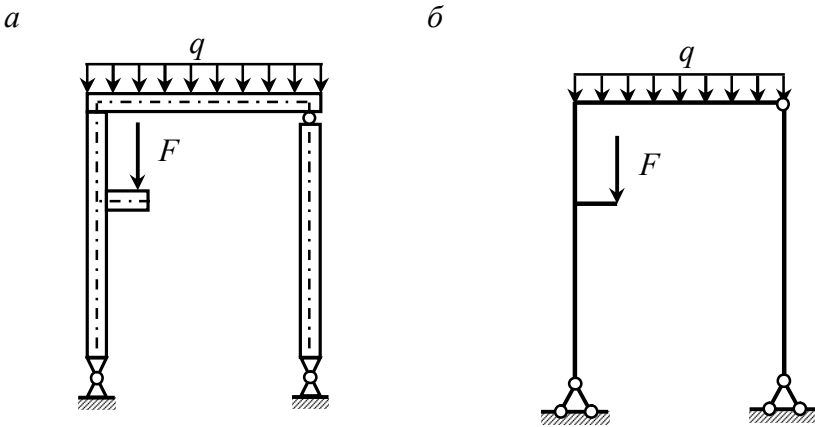


Рис. 1.19

Так как в раме верхние и нижние волокна можно установить только для горизонтально расположенных участков, то при построении эпюры изгибающих моментов придерживаются следующего правила. Предварительно на каждом участке выбирают расположение растянутых волокон – левых или правых, верхних или нижних.

Рекомендуется показывать выбранное расположение растянутых волокон как на исходной схеме рамы, так и на схеме равновесия для каждой отсеченной части. При изображении отсеченной части необходимо изгибающий момент M_z направлять так, чтобы он соответствовал выбранному растянутому волокну.

После выполнения расчета положительные изгибающие моменты откладывают со стороны предполагаемых растянутых волокон, отрицательные – с противоположной от оси стержня стороны.

Для проверки построенных эпюр внутренних усилий используются свойства, аналогичные свойствам эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в балках. Дополнительной является проверка равновесия узлов рамы. Эта проверка выполняется в следующей последовательности:

- вырезают узел рамы сечениями, расположенными бесконечно близко от узла;
- по построенным эпюрам определяют внутренние усилия, действующие в сечениях;
- поперечные и продольные силы направляют в соответствии с принятыми для них правилами знаков;
- по эпюре изгибающих моментов определяют положение растянутых волокон;
- изгибающие моменты направляют в соответствии с расположением растянутых волокон;
- если к узлу приложены сосредоточенная сила, момент, опорная реакция, то их учитывают в уравнениях равновесия, равномерно распределенные нагрузки к вырезанному узлу не откладываются;
- составляют условия статического равновесия для узла и проверяют их выполнение.

Большое количество примеров на построение эпюр внутренних усилий в балках и рамах, задачи по определению размеров поперечного сечения приведены в учебном пособии, подготовленном на кафедре строительной механики ТГАСУ [6].

Задача № 7

Заданная рама загружена внешней нагрузкой.

Требуется:

- найти опорные реакции;
- записать выражения внутренних усилий на каждом участке рамы и построить эпюры M_z , Q_y и N ;

– произвести проверку равновесия узлов рамы.

Числовые данные для расчета:

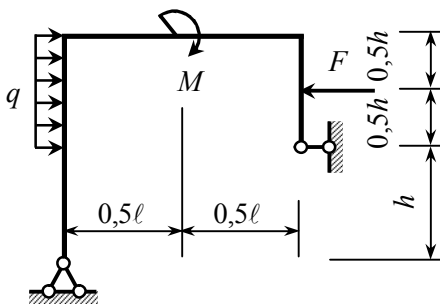
$$\ell = 4,2 \text{ м};$$

$$h = 2,0 \text{ м};$$

$$F = 10 \text{ кН};$$

$$q = 6 \text{ кН/м};$$

$$M = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



Решение задачи

Определение опорных реакций (рис. 1.20):

$$\sum M_A = 0:$$

$$-H_B \cdot 2,0 - F \cdot 3 + M + q \cdot 2,0 \cdot (2,0 + 1,0) = 0;$$

$$H_B = \frac{-F \cdot 3 + M + q \cdot 2,0 \cdot 3,0}{2,0} =$$

$$= \frac{-10 \cdot 3 + 18 + 6 \cdot 2,0 \cdot 3,0}{2,0} = 12,0 \text{ кН};$$

$$\sum x = 0:$$

$$H_A - F - H_B + q \cdot 2,0 = 0;$$

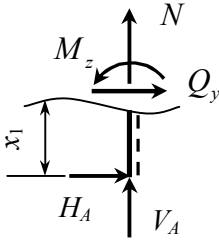
$$H_A = F + H_B - q \cdot 2,0 = 10 + 12 - 6 \cdot 2,0 = 10,0 \text{ кН};$$

$$\sum y = 0: \quad V_A = 0.$$

Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных сил и продольных сил. Рама имеет шесть участков. Проводим на каждом участке сечение на расстоянии x от начала участка. Из

условия равновесия отсеченной части определяем продольные, поперечные силы и изгибающие моменты.

Участок AC, $0 \leq x_1 \leq h = 2 \text{ м}$.



$$N = -V_A = 0 \text{ кН};$$

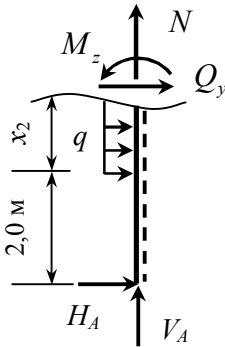
$$Q_y = -H_A = -10,0 \text{ кН};$$

$$M_z = -H_A x_1 = -10x_1;$$

$$\text{при } x_1 = 0 \quad M_z = -10,0 \cdot 0 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } x_1 = 2 \text{ м} \quad M_z = -10,0 \cdot 2,0 = -20,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок CD, $0 \leq x_2 \leq h = 2 \text{ м}$.



$$N = -V_A = 0 \text{ кН};$$

$$Q_y = -H_A - qx_2 = -10,0 - 6x_2;$$

$$\text{при } x_2 = 0 \quad Q_y = -10,0 - 6 \cdot 0 = -10,0 \text{ кН};$$

при $x_2 = 2 \text{ м}$ $Q_y = -10,0 - 6 \cdot 2 = -22,0 \text{ кН}$.

$$M_z = -H_A(2,0 + x_2) - q \frac{x_2^2}{2} = -20,0 - 10,0x_2 - 3x_2^2;$$

при $x_2 = 0$

$$M_z = -20,0 - 10,0 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = -20,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

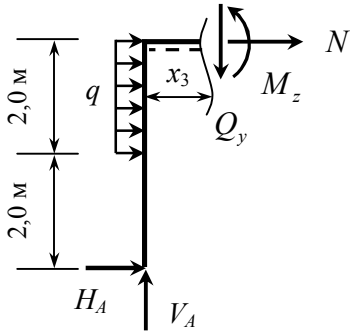
при $x_2 = 1,0 \text{ м}$

$$M_z = -20,0 - 10,0 \cdot 1,0 - 3 \cdot 1,0^2 = -33,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

при $x_2 = 2 \text{ м}$

$$M_z = -20,0 - 10,0 \cdot 2,0 - 3 \cdot 2,0^2 = -52,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок DE , $0 \leq x_3 \leq 0,5\ell = 2,1 \text{ м}$.

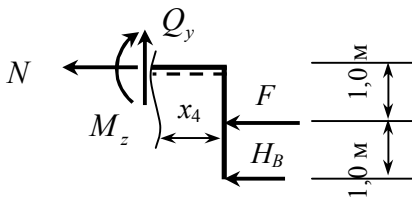


$$N = -H_A - q \cdot 2,0 = -10 - 6 \cdot 2,0 = -22,0 \text{ кН};$$

$$Q_y = V_A = 0 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} M_z &= V_A \cdot x_3 - H_A \cdot 4,0 - q \cdot 2,0 \cdot 1,0 = \\ &= 0 \cdot x_3 - 10,0 \cdot 4,0 - 6 \cdot 2,0 \cdot 1,0 = -52,0 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Участок HE , $0 \leq x_4 \leq 0,5\ell = 2,1 \text{ м}$.

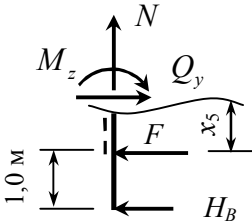


$$N = -H_B - F = -12,0 - 10,0 = -22,0 \text{ кН};$$

$$Q_y = 0;$$

$$M_z = -H_B \cdot 2,0 - F \cdot 1,0 = -12,0 \cdot 2,0 - 10 \cdot 1,0 = -34,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок GH , $0 \leq x_5 \leq 0,5h = 1,0 \text{ м}$.



$$N = 0;$$

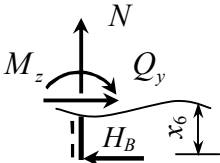
$$Q_y = H_B + F = 12,0 + 10,0 = 22,0 \text{ кН};$$

$$M_z = -H_B \cdot (1,0 + x_5) - Fx_5 = -12,0 \cdot (1,0 + x_5) - 10x_5 = -12,0 - 22,0x_5;$$

при $x_5 = 0$ $M_z = -12,0 - 22 \cdot 0 = -12,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$

при $x_5 = 1,0 \text{ м}$ $M_z = -12,0 - 22,0 \cdot 1,0 = -34,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Участок BG , $0 \leq x_6 \leq 0,5h = 1,0 \text{ м}$.



$$N = 0; \quad Q_y = H_B = 12,0 \text{ кН}; \quad M_z = -H_B x_6 = -12,0 x_6;$$

при $x_6 = 0$ $M_z = -12,0 \cdot 0 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м};$

при $x_6 = 1,0 \text{ м}$ $M_z = -12,0 \cdot 1,0 = -12,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Проверяем равновесие узлов рамы (рис. 1.20).

Узел D : $\sum x = 22 - 22 = 0; \quad \sum M = 52 - 52 = 0.$

Узел H : $\sum x = 22 - 22 = 0; \quad \sum M = 34 - 34 = 0.$

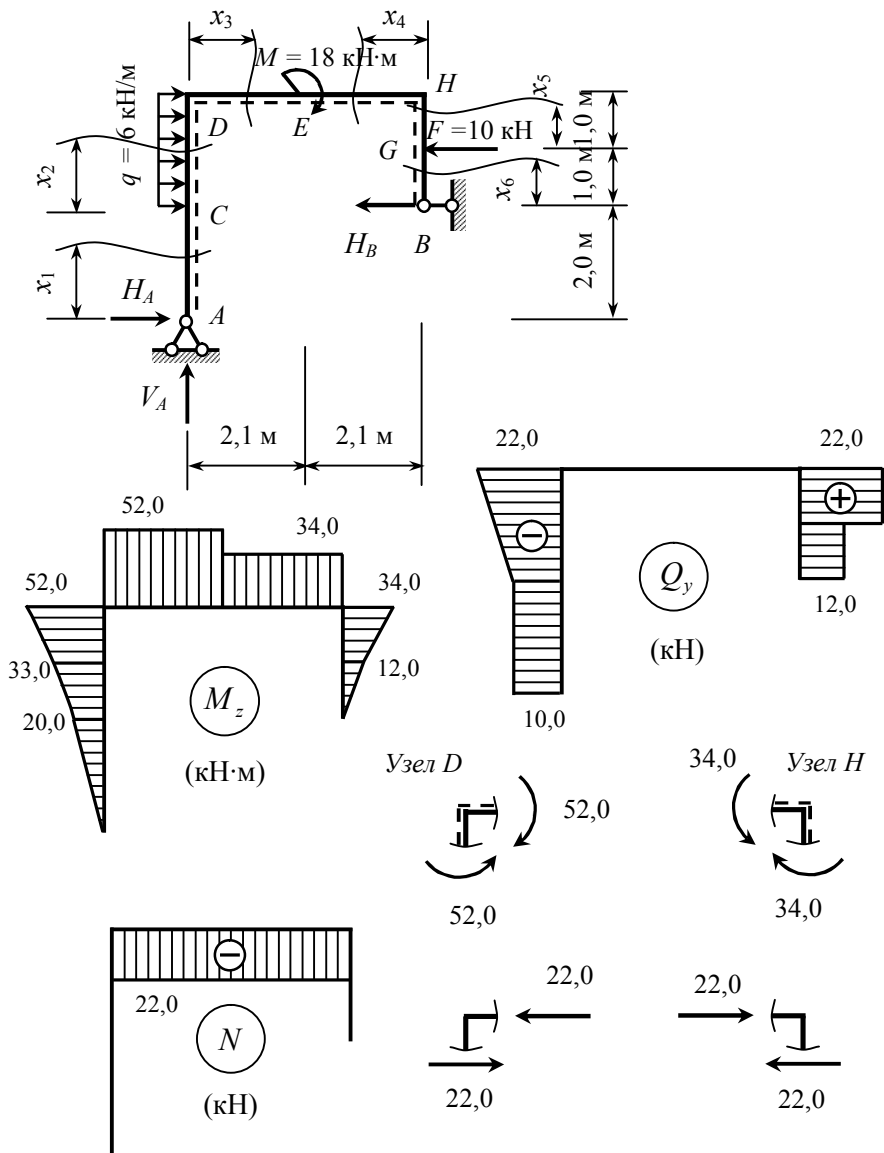


Рис. 1.20

1.8. Расчет стержня на внецентренное сжатие (растяжение)

К сложному сопротивлению относятся такие виды деформации, при которых в поперечных сечениях стержня одновременно действуют несколько внутренних силовых факторов. Рассматриваемая ниже задача № 8 относится к частному случаю сложного сопротивления – внецентренному сжатию (рис. 1.21).

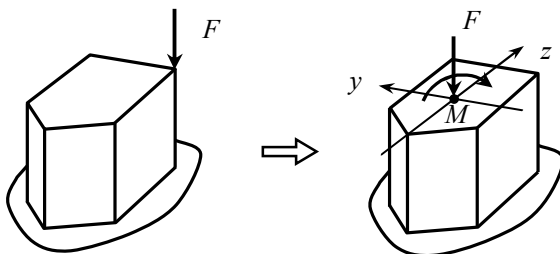


Рис. 1.21

Внецентренное сжатие (растяжение) – это такой вид сложного сопротивления, при котором в поперечном сечении стержня одновременно действуют продольная сила (сжимающая или растягивающая) и изгибающий момент.

Для расчета внецентренно сжатого стержня необходимо вначале определить положение центра тяжести сечения, а затем вычислить значения главных моментов инерции и главных радиусов инерции.

Заданные типы поперечных сечений симметричны относительно одной или обеих центральных осей. Таким образом, центральные оси сечения, одна из которых является осью симметрии, одновременно являются главными центральными осями.

Порядок определения геометрических характеристик поперечного сечения приведен в задаче № 4.

При внецентренном сжатии пространственная эпюра напряжений образует плоскость, линия пересечения которой с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной ли-*

нией. Нейтральная линия, пересекая сечение, делит его на две части – сжатую и растянутую. В части сечения, содержащей точку приложения сжимающей силы, будут возникать сжимающие нормальные напряжения, а в оставшейся части – растягивающие напряжения. Напряжения во всех точках нейтральной линии равны нулю. Для определения положения нейтральной линии вычисляются отрезки, отсекаемые ею на главных центральных осях:

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}, \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_F},$$

где $i_z^2 = \frac{J_z}{A}$, $i_y^2 = \frac{J_y}{A}$ – квадраты главных радиусов инерции сечения; y_F, z_F – координаты точки приложения силы.

Найденные значения отрезков a_y и a_z откладываются на главных центральных осях в соответствии со своим знаком (рис. 1.22).

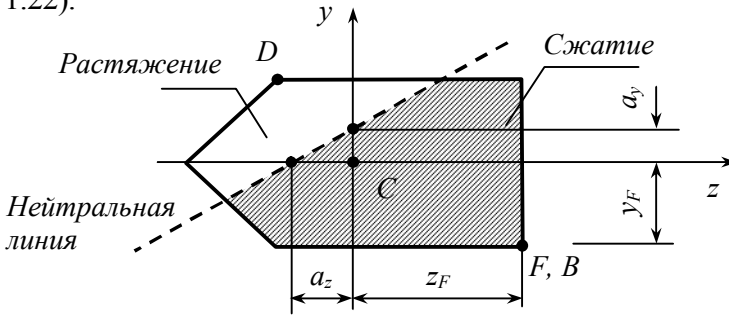


Рис. 1.22

Для контроля правильности определения положения нейтральной линии используются известные свойства:

- нейтральная линия и точка приложения силы находятся во взаимно противоположных четвертях;
- чем дальше от центра тяжести сечения находится точка приложения силы, тем ближе к нему проходит нейтральная линия;

– если точка приложения силы находится на одной из главных центральных осей инерции сечения, то нейтральная линия пройдет через противоположные четверти перпендикулярно этой оси.

Точки, наиболее удаленные от нейтральной линии, являются опасными точками сечения. В этих точках возникают наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения. Для определения положения опасных точек проводятся две прямые, параллельные нейтральной линии по касательной к контуру сечения.

Для определения величины допускаемой нагрузки $F_{\text{доп}}$ записываются условия прочности в опасных точках для растянутой части сечения

$$\max \sigma_p = -\frac{F}{A} \left[1 + \frac{y_F y_D}{i_z^2} + \frac{z_F z_D}{i_y^2} \right] \leq R_p,$$

и для сжатой его части

$$\left| \max \sigma_{\text{сж}} \right| = \left| -\frac{F}{A} \left[1 + \frac{y_F y_B}{i_z^2} + \frac{z_F z_B}{i_y^2} \right] \right| \leq R_{\text{сж}},$$

где R_p , $R_{\text{сж}}$ – расчётные сопротивления материала растяжению и сжатию соответственно; y_D , z_D – координаты опасной точки с наибольшими растягивающими напряжениями; y_B , z_B – координаты опасной точки с наибольшими сжимающими напряжениями.

Из условий прочности для растянутой $\sigma_{(D)} \leq R_p$ и сжатой $|\sigma_{(B)}| \leq R_{\text{сж}}$ частей сечения вычисляют два значения силы F . Окончательно за $F_{\text{доп}}$ принимается меньшее из двух полученных значений.

Задача № 8

Короткий стержень сжимается продольной силой F , приложенной в точке B . Требуется:

- определить положение нейтральной линии;
- вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через силу F ;
- найти допускаемую нагрузку $F_{\text{доп}}$ при заданных размерах сечения и расчетных сопротивлениях на сжатие $R_{\text{сж}}$ и на растяжение $R_{\text{р}}$.

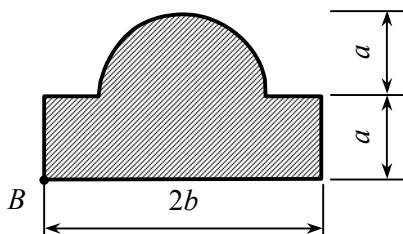
Числовые данные для расчета:

$$a = 6 \text{ см};$$

$$b = 10 \text{ см};$$

$$R_{\text{сж}} = 80 \text{ МПа};$$

$$R_{\text{р}} = 25 \text{ МПа}.$$



Решение задачи

Определим для заданного сечения геометрические характеристики (рис. 1.23). Площадь поперечного сечения:

$$A = A_1 + A_2;$$

$$A_1 = 2b \cdot a = 2 \cdot 10 \cdot 6 = 120 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = \frac{\pi D^2}{8} = \frac{\pi(2a)^2}{8} = \frac{3,14 \cdot 12^2}{8} = 56,52 \text{ см}^2;$$

$$A = A_1 + A_2 = 120 + 56,52 = 176,52 \text{ см}^2.$$

В силу симметрии сечения относительно вертикальной оси, требуется вычислить только одну координату центра тяжести. Координату центра тяжести сечения по оси y вычисляем по формуле

$$y_C = \frac{Sz_0}{A} = \frac{A_1 y_{C,1} + A_2 y_{C,2}}{A_1 + A_2},$$

где $y_{C,1} = 0,5a = 0,5 \cdot 6 = 3$ см;

$$y_{C,2} = a + 0,212D = a + 0,212 \cdot (2a) = 6 + 0,212 \cdot 12 = 8,54 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{120 \cdot 3 + 56,52 \cdot 8,54}{120 + 56,52} = \frac{360 + 482,91}{176,52} = 4,78 \text{ см}.$$

Осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей z и y :

$$J_z = J_z^{(1)} + J_z^{(2)};$$

$$J_z^{(1)} = \frac{a^3 \cdot 2b}{12} + (y_{C,1} - y_C)^2 A_1 = \frac{6^3 \cdot 20}{12} + (3,0 - 4,78)^2 \cdot 120 =$$

$$= 360 + 380,21 = 740,21 \text{ см}^4;$$

$$J_z^{(2)} = 0,0069D^4 + (y_{C,2} - y_C)^2 A_2 =$$

$$= 0,0069 \cdot (12)^4 + (8,54 - 4,78)^2 \cdot 56,52 = 143,08 + 799,06 =$$

$$= 942,14 \text{ см}^4;$$

$$J_z = J_z^{(1)} + J_z^{(2)} = 740,21 + 942,14 = 1682,3 \text{ см}^4.$$

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)};$$

$$J_y^{(1)} = \frac{a(2b)^3}{12} = \frac{6 \cdot 20^3}{12} = 4000 \text{ см}^4;$$

$$J_y^{(2)} = \frac{\pi D^4}{128} = \frac{\pi(2a)^4}{128} = \frac{3,14 \cdot 12^4}{128} = 508,7 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = 4000 + 508,7 = 4508,7 \text{ см}^4.$$

Квадраты радиусов инерции сечения:

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{1682,3}{176,52} = 9,53 \text{ см}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{4508,7}{176,52} = 25,54 \text{ см}^2.$$

Сжимающая сила F приложена в точке B поперечного сечения с координатами:

$$y_B = -y_C = -4,78 \text{ см}; \quad z_B = -b = -10,0 \text{ см}.$$

Определим координаты точек пересечения нейтральной линии с осями z и y :

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_B} = -\frac{25,54}{(-10,0)} = 2,554 \text{ см};$$

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_B} = -\frac{9,53}{(-4,78)} = 1,994 \text{ см}.$$

Проведем нейтральную линию и определим наиболее удаленные от нее точки: точку B в сжатой части сечения ($z_B = -10,0 \text{ см}; y_B = -4,78 \text{ см}$) и точку D в растянутой части сечения ($z_D = b = 10,0 \text{ см}; y_D = a - y_C = 6,0 - 4,78 = 1,22 \text{ см}$).

Найдем напряжения в этих точках:

$$\begin{aligned} \sigma_{(B)} &= -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F z_B}{i_y^2} + \frac{y_F y_B}{i_z^2} \right) = \\ &= -\frac{F}{176,52} \left(1 + \frac{(-10) \cdot (-10)}{25,54} + \frac{(-4,78) \cdot (-4,78)}{9,53} \right) = -0,041F; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(D)} &= -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{z_F z_D}{i_y^2} + \frac{y_F y_D}{i_z^2} \right) = \\ &= -\frac{F}{176,52} \left(1 + \frac{(-10) \cdot 10}{25,54} + \frac{(-4,78) \cdot 1,22}{9,53} \right) = 0,020F. \end{aligned}$$

Определим силу F из условия прочности на сжатие

$$|\sigma_{(B)}| \leq R_{\text{сж}} :$$

$$F \leq \frac{R_{\text{сж}}}{0,041} = \frac{80 \cdot 10^6}{0,041 \cdot 10^4} = 195,12 \cdot 10^3 \text{ Н} = 195,12 \text{ кН}.$$

Определим силу F из условия прочности на растяжение $\sigma_{(D)} \leq R_p$:

$$F \leq \frac{R_p}{0,020} = \frac{25 \cdot 10^6}{0,020 \cdot 10^4} = 125,0 \cdot 10^3 \text{ Н} = 125,0 \text{ кН}.$$

Допускаемая сила равна меньшему из двух полученных значений $F_{\text{доп}} = 125,0 \text{ кН}$.

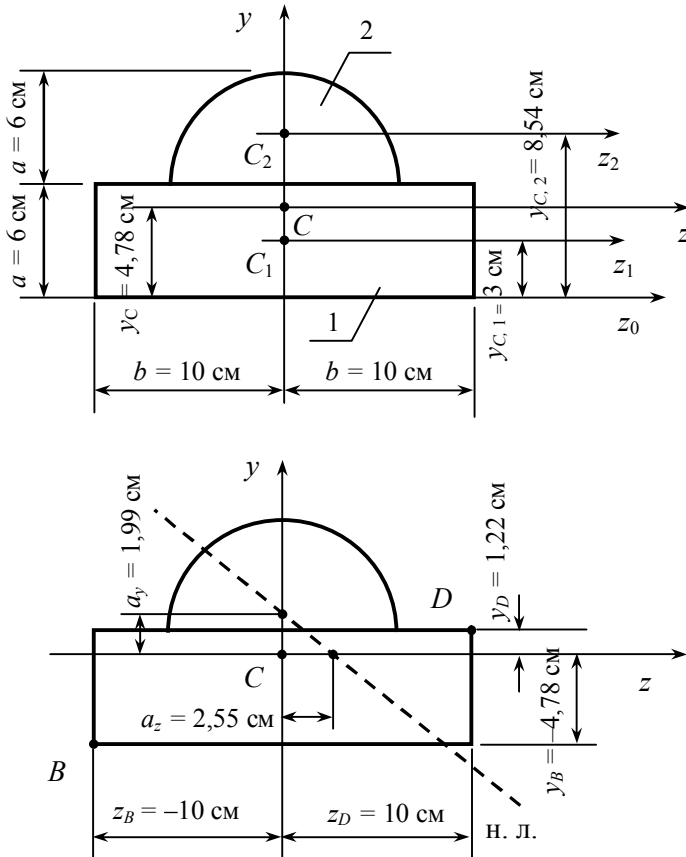


Рис. 1.23

1.9. Расчет сжатого стержня на продольный изгиб

Разрушение короткого сжатого стержня может быть вызвано исчерпанием запаса прочности по нормальным напряжениям (при напряжениях, больших предела текучести для пластичного материала, либо предела прочности для хрупкого материала). Для длинного гибкого стержня разрушению может предшествовать потеря устойчивости, сопровождающаяся искривлением его продольной оси. Нагрузка, вызывающая потерю устойчивости стержня, называется *критической*, ее величина определяется расчетом на устойчивость (рис. 1.24).

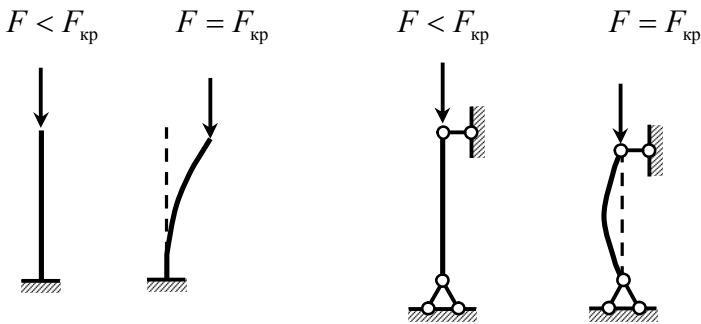


Рис. 1.24

Потеря устойчивости может происходить при напряжениях, меньших предела пропорциональности $\sigma_{пц}$ (упругая стадия работы сжатого стержня). В ряде случаев потеря устойчивости может происходить в упругопластической стадии работы материала, т. е. при $\sigma_{кр} > \sigma_{пц}$.

Сложность определения размеров поперечного сечения обуславливается тем, что заранее неизвестно, в какой стадии работы материала произойдет потеря устойчивости стержня. В нормах проектирования используется методика снижения расчетного сопротивления материала до безопасного уровня $R\phi$, где ϕ – коэффициент продольного изгиба ($0 < \phi < 1,0$).

Величина коэффициента φ табулирована для различных материалов в зависимости от безразмерной величины, называемой *гибкостью* стержня $\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}}$. Для стали зависимость $\varphi(\lambda)$ представлена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Таблица коэффициентов продольного изгиба φ

λ	φ	λ	φ	λ	φ
0	1,00	70	0,81	140	0,36
10	0,99	80	0,75	150	0,32
20	0,96	90	0,69	160	0,29
30	0,94	100	0,60	170	0,26
40	0,92	110	0,52	180	0,23
50	0,89	120	0,45	190	0,21
60	0,86	130	0,40	200	0,19

Для вычисления гибкости необходимо предварительно вычислить наименьший радиус инерции сечения $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$, величина коэффициента приведения длины μ определяется условиями закрепления сжатого стержня (рис. 1.25).

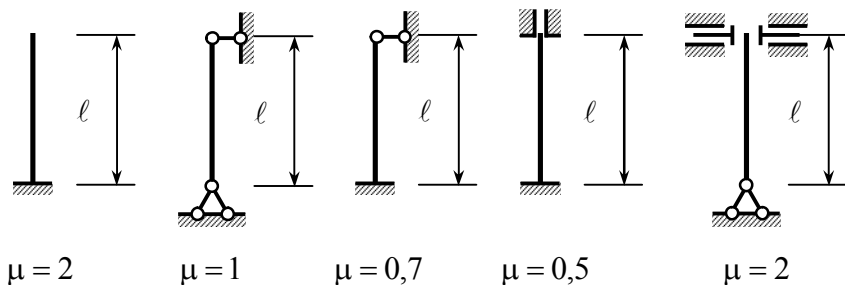


Рис. 1.25

Условие устойчивости при продольном изгибе стержня записывается в виде $\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi R$.

Для определения требуемой площади поперечного сечения $A \geq \frac{N}{\varphi R}$ необходимо знать величину φ , которая зависит от неизвестных размеров сечения. Задача по определению размеров решается последовательными приближениями в следующем порядке:

– предварительно задаются значением коэффициента φ , (например, $\varphi_1 = 0,5$);

– из условия устойчивости определяется требуемая площадь поперечного сечения $A \geq \frac{N}{\varphi_1 R}$;

– по полученной площади A подбираются размеры сечения (номер профиля из сортамента проката);

– вычисляется гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}}$;

– определяется коэффициент продольного изгиба φ_1^* в зависимости от полученной гибкости (при необходимости используется интерполяция между табличными значениями);

– проверяется выполнение условия устойчивости по формуле $\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi_1^* R$.

Вычисления прекращаются, если условие устойчивости выполняется (с небольшим запасом в 3–5%), либо невозможно уменьшить номер прокатного профиля.

В противном случае выполняется следующее приближение с новым значением: $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2}$. Как правило, для определения размеров сечения достаточно сделать четыре-пять приближений.

При интерполяции между двумя табличными значениями считается, что зависимость $\varphi(\lambda)$ кусочно-линейная (рис. 1.26). Предполагается, что величины коэффициента продольного изгиба на левой и правой границе интервала известны и равны соответственно $\varphi(\lambda_{\text{лев}})$ и $\varphi(\lambda_{\text{прав}})$. По чертежу определяется значение $\varphi(\lambda)$:

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_{\text{прав}}) + \Delta\varphi = \varphi(\lambda_{\text{прав}}) + \frac{\varphi(\lambda_{\text{лев}}) - \varphi(\lambda_{\text{прав}})}{\lambda_{\text{прав}} - \lambda_{\text{лев}}} [\lambda_{\text{прав}} - \lambda],$$

где $\lambda_{\text{лев}} < \lambda < \lambda_{\text{прав}}$.

В ряде случаев величина гибкости λ может превышать предельное значение λ_{max} , приведенное в таблицах норм проектирования. Определение размера сечения d следует производить по предельной гибкости $\lambda = \lambda(d) \leq \lambda_{\text{max}}$ (этот случай рассмотрен в приведенном ниже примере).

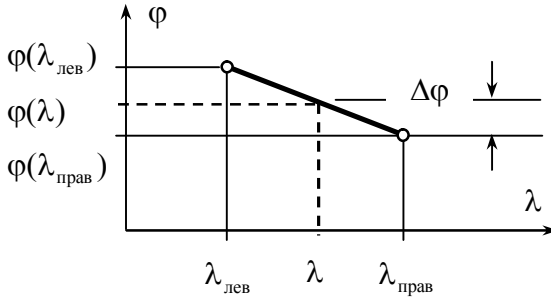


Рис. 1.26

Критическая сила для сжатого стержня определяется в зависимости от гибкости λ по одной из трех формул:

– $F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min}}}{(\mu\ell)^2}$, если $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$ (формула Эйлера);

– $F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A = (a - b\lambda)A$, если $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{пред}}$ (формула Ясинского);

$$- F_{\text{кр}} = \sigma_T A, \text{ если } \lambda < \lambda_1.$$

Величина предельной гибкости, при которой следует использовать формулу Эйлера, определяется по формуле

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}.$$

Для стального стержня следует принять:

$$\lambda_{\text{пред}} = 100; \lambda_1 = 40; a = 310 \text{ МПа}; b = 1,14 \text{ МПа}.$$

Коэффициент запаса по устойчивости определяется по формуле $n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F}$.

Задача № 9

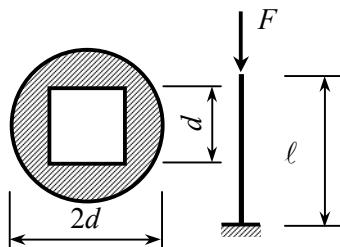
Стальной стержень длиной ℓ загружен силой F . Требуется:

- определить размер d поперечного сечения;
- найти величину критической силы $F_{\text{кр}}$ и коэффициент запаса по устойчивости n_y .

Числовые данные для расчета:

$$F = 200 \text{ кН}; \ell = 4,2 \text{ м};$$

$$R = 210 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$



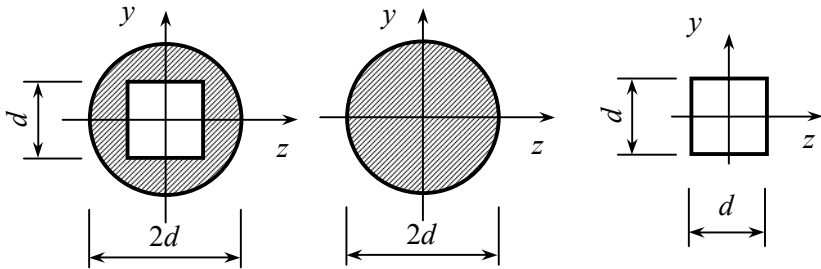
Решение задачи

$$\text{Условие устойчивости: } \sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi R.$$

$$\text{Продольная сила } N = F = 200 \text{ кН}.$$

$$\text{Площадь поперечного сечения } A = \frac{\pi(2d)^2}{4} - d^2 = 2,14d^2.$$

Определим моменты инерции сечения:



$$J_z = \frac{\pi(2d)^4}{64} - \frac{d^4}{12} = 0,702d^4; \quad J_y = \frac{\pi(2d)^4}{64} - \frac{d^4}{12} = 0,702d^4.$$

Радиусы инерции сечения

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{0,702d^4}{2,14d^2}} = 0,573d; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{0,702d^4}{2,14d^2}} = 0,573d.$$

Минимальный радиус инерции $i_{\min} = i_z = i_y = 0,573d$.

Гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}}$ при коэффициенте приведения

длины $\mu = 2,0$ $\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 4,2 \cdot 10^2}{0,573d} = \frac{1466}{d}$.

Расчет ведем последовательными приближениями. В первом приближении принимаем $\varphi_1 = 0,5$:

$$A \geq \frac{N}{\varphi_1 R} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 1,905 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 19,05 \text{ см}^2.$$

Находим размер сечения:

$$d \geq \sqrt{\frac{A}{2,14}} = \sqrt{\frac{19,05}{2,14}} = 2,98 \text{ см}.$$

Назначаем $d = 3,0$ см.

Находим гибкость: $\lambda = \frac{1466}{d} = \frac{1466}{3,0} = 489$.

Полученная величина много больше максимальной гибкости $\lambda_{\max} = 200$, имеющейся в табл. 1.1.

Подбираем сечение из условия предельной гибкости:

$$\lambda_{\max} = \frac{1466}{d} = 200; \quad d = \frac{1466}{200} = 7,33. \text{ Принимаем } d = 7,4 \text{ см.}$$

$$\text{Находим гибкость: } \lambda = \frac{1466}{7,4} = 198.$$

Интерполяцией между двумя значениями находим:

$$\varphi(200) = 0,19; \quad \varphi(190) = 0,21;$$

$$\varphi_1^* = \varphi(198) = 0,19 + \frac{0,21 - 0,19}{10}(200 - 198) = 0,194.$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{A} = \frac{N}{2,14d^2} = \frac{200 \cdot 10^3}{2,14(7,4)^2 \cdot 10^{-4}} = 1,706 \cdot 10^7 \text{ Па} = \\ &= 17,06 \text{ МПа} < R\varphi_1^* = 210 \cdot 0,194 = 40,7 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Критическую силу при гибкости $\lambda = 198 > 100$ находим по формуле Эйлера:

$$\begin{aligned} F_{\text{кр}} &= \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu\ell)^2} = \frac{\pi^2 E \cdot 0,702d^4}{(\mu\ell)^2} = \\ &= \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,702 \cdot (7,4)^4 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 4,2)^2} = 588 \text{ кН.} \end{aligned}$$

$$\text{Коэффициент запаса по устойчивости } n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{588}{200} = 2,94.$$

В рассмотренном выше примере сечение было подобрано из условия предельной гибкости, без использования последовательных приближений.

Для иллюстрации этого метода решим аналогичную задачу при следующих исходных данных:

$$F = 400 \text{ кН}; \quad \ell = 2,1 \text{ м.}$$

В этом случае гибкость составит: $\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 2,1 \cdot 10^2}{0,573d} = \frac{733}{d}$.

В первом приближении принимаем $\varphi_1 = 0,5$:

$$A \geq \frac{N}{\varphi_1 R} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 3,809 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 38,09 \text{ см}^2;$$

$$d \geq \sqrt{\frac{A}{2,14}} = \sqrt{\frac{38,09}{2,14}} = 4,22 \text{ см.}$$

Назначаем $d = 4,3 \text{ см}$.

$$\text{Находим гибкость: } \lambda = \frac{733}{4,3} = 170,5.$$

Интерполяцией между двумя значениями находим:

$$\varphi(170) = 0,26; \quad \varphi(180) = 0,23;$$

$$\varphi_1^* = \varphi(170,5) = 0,23 + \frac{0,26 - 0,23}{10} (180 - 170,5) = 0,259.$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{N}{2,14d^2} = \frac{400 \cdot 10^3}{2,14(4,3)^2 \cdot 10^{-4}} = 10,11 \cdot 10^7 \text{ Па} =$$

$$= 101,1 \text{ МПа} > R\varphi_1^* = 210 \cdot 0,259 = 54,4 \text{ МПа}.$$

Для второго приближения вычисляем:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2} = \frac{0,5 + 0,259}{2} = 0,38;$$

$$A \geq \frac{N}{\varphi_2 R} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,38 \cdot 210 \cdot 10^6} = 5,013 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 50,13 \text{ см}^2;$$

$$d \geq \sqrt{\frac{A}{2,14}} = \sqrt{\frac{50,13}{2,14}} = 4,84 \text{ см};$$

$$d = 4,9 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{733}{4,9} = 150;$$

$$\varphi_2^* = \varphi(150) = 0,32.$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{N}{A} = \frac{N}{2,14d^2} = \frac{400 \cdot 10^3}{2,14(4,9)^2 \cdot 10^{-4}} = 7,785 \cdot 10^7 \text{ Па} = \\ &= 77,9 \text{ МПа} > R\varphi_2^* = 210 \cdot 0,32 = 67,2 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Третье приближение:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2^*}{2} = \frac{0,38 + 0,32}{2} = 0,35;$$

$$A \geq \frac{N}{\varphi_3 R} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,35 \cdot 210 \cdot 10^6} = 5,442 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 54,42 \text{ см}^2;$$

$$d \geq \sqrt{\frac{A}{2,14}} = \sqrt{\frac{54,42}{2,14}} = 5,04 \text{ см};$$

$$d = 5,1 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{733}{5,1} = 143,7;$$

$$\varphi_3^* = \varphi(143,7) = 0,29 + \frac{0,32 - 0,29}{10} (150 - 143,7) = 0,309.$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{N}{A} = \frac{N}{2,14d^2} = \frac{400 \cdot 10^3}{2,14(5,1)^2 \cdot 10^{-4}} = 7,186 \cdot 10^7 \text{ Па} = \\ &= 71,86 \text{ МПа} > R\varphi_3^* = 210 \cdot 0,309 = 64,9 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Четвертое приближение:

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi_3^*}{2} = \frac{0,35 + 0,309}{2} = 0,330;$$

$$A \geq \frac{N}{\varphi_4 R} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,330 \cdot 210 \cdot 10^6} = 5,772 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 57,72 \text{ см}^2;$$

$$d \geq \sqrt{\frac{A}{2,14}} = \sqrt{\frac{57,72}{2,14}} = 5,19 \text{ см};$$

$$d = 5,2 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{733}{5,2} = 141;$$

$$\varphi_4^* = \varphi(141) = 0,29 + \frac{0,32 - 0,29}{10}(150 - 141) = 0,317.$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{A} = \frac{N}{2,14d^2} = \frac{400 \cdot 10^3}{2,14(5,2)^2 \cdot 10^{-4}} = 6,913 \cdot 10^7 \text{ Па} = \\ &= 69,13 \text{ МПа} > R\varphi_4^* = 210 \cdot 0,317 = 66,6 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Пятое приближение:

$$\varphi_5 = \frac{\varphi_4 + \varphi_4^*}{2} = \frac{0,309 + 0,317}{2} = 0,313;$$

$$A \geq \frac{N}{\varphi_5 R} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,313 \cdot 210 \cdot 10^6} = 6,086 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 60,86 \text{ см}^2;$$

$$d \geq \sqrt{\frac{A}{2,14}} = \sqrt{\frac{60,86}{2,14}} = 5,3 \text{ см}; \quad d = 5,3 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{733}{5,3} = 138,3;$$

$$\varphi_5^* = \varphi(138,3) = 0,36 + \frac{0,40 - 0,36}{10}(140 - 138,3) = 0,367.$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{A} = \frac{N}{2,14d^2} = \frac{400 \cdot 10^3}{2,14(5,3)^2 \cdot 10^{-4}} = 6,654 \cdot 10^7 \text{ Па} = \\ &= 66,54 \text{ МПа} < R\varphi_5^* = 210 \cdot 0,367 = 77,1 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Сечение подобрано. Критическую силу при $\lambda > 100$ находим по формуле Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E \cdot 0,702d^4}{(\mu\ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,702 \cdot (5,3)^4 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 2,1)^2} = 882 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса по устойчивости

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{882}{400} = 2,21.$$

1.10. Динамические задачи. Расчет балки при ударе

В рассмотренных выше примерах нагрузка прикладывалась статически, т. е. не изменяла своей величины и места приложения. Расчет на действие динамической нагрузки ведётся с использованием принципа Даламбера. На основании этого принципа к конструкции прикладываются амплитудное значение внешней нагрузки и силы инерции, и решается статическая задача. Для системы с одной степенью свободы вычисляется динамический коэффициент k_d , показывающий, во сколько раз возрастают напряжения при динамическом воздействии, по сравнению с аналогичным по величине статическим.

В рассмотренной ниже задаче № 10 требуется определить максимальные нормальные напряжения в балке при ударе (рис. 1.27, а).

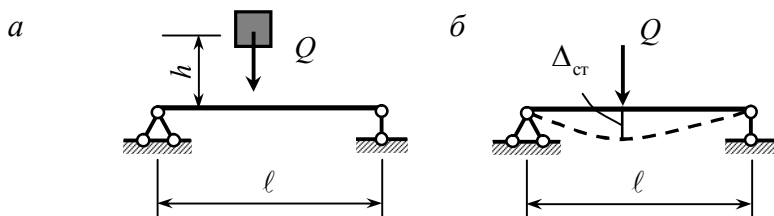


Рис. 1.27

Нормальные напряжения в балке определяются по формуле:

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст},$$

где $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}$ – динамический коэффициент при ударе;

$\Delta_{ст}$ – вертикальное перемещение (прогиб) в месте удара от статического действия веса груза Q (рис. 1.27, б).

Для определения перемещения $\Delta_{ст}$ используется метод Мора-Верещагина [1, 3], в котором требуется построить эпюру

изгибающих моментов от статически приложенного груза $M_{ст}$ (рис. 1.28, а) и эпюру изгибающих моментов M_1 от действия на балку единичной силы (рис. 1.28, б). Силу $\bar{F} = 1$ следует приложить в сечении, перемещение которого определяется.

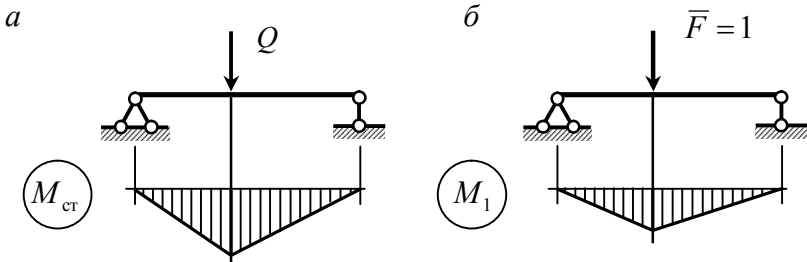


Рис. 1.28

Построенные эпюры перемножаются по способу А.Н. Верещагина в следующем порядке. Эпюры моментов разбиваются на отдельные участки, в пределах которых хотя бы одна из эпюр изменяется по линейному закону. По одной из эпюр вычисляется площадь ω_i , а на другой эпюре определяется ордината y_i под центром тяжести первой эпюры (рис. 1.29). Суммируя результаты перемножения эпюр по участкам балки, находим искомый прогиб по формуле $\Delta = \pm \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i y_i}{EJz}$.

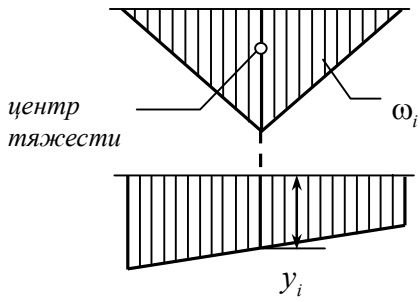


Рис. 1.29

При перемножении эпюр следует придерживаться следующего правила знаков: если площадь и ордината располагаются по одну сторону от оси балки, то при перемножении ставится знак «+», в противном случае – знак «-».

При замене правой опоры на упругую опору (пружину) следует заново определить перемещение $\Delta_{ст}^*$ и динамический коэффициент k_d^* . Величина сжатия пружины при известной опорной реакции $V_{оп}$ и коэффициенте податливости α определяется по формуле $\Delta_{оп} = V_{оп} \alpha$. Перемещение в месте падения груза за счет сжатия пружины можно найти по чертежу, используя подобие треугольников (рис. 1.30, а).

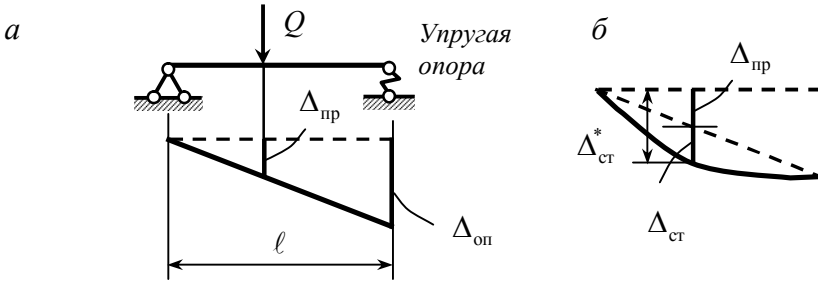


Рис. 1.30

Суммированием перемещений, вызванных изгибом балки $\Delta_{ст}$ и сжатием пружины $\Delta_{пр}$, находится перемещение в месте падения груза при замене опоры на упругую (рис. 1.30, б):

$$\Delta_{ст}^* = \Delta_{пр} + \Delta_{ст}.$$

Затем определяются напряжения при ударе в балке с упругой опорой при новых значениях: $\Delta_{ст}^*$, k_d^* .

Задача № 10

На стальную двутавровую балку с высоты h падает груз весом Q .

Требуется:

- найти наибольшие нормальные напряжения, возникающие в балке в момент удара;
- решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена упругой с коэффициентом податливости α ;
- сравнить полученные результаты.

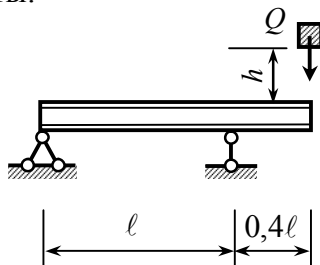
Числовые данные для расчета:

сечение балки – двутавр № 24;

$$\ell = 4,0 \text{ м};$$

$$Q = 0,8 \text{ кН};$$

$$h = 5 \text{ см}; \quad \alpha = 0,4 \text{ см/кН}.$$



Решение задачи

Для определения динамического коэффициента $k_d = \frac{\sigma_d}{\sigma_{ст}}$

определяем перемещение в месте удара. Строим эпюру изгибающих моментов $M_{ст}$ (рис. 1.31).

Определим опорные реакции из уравнений равновесия:

$$\sum M_B = 0: \quad V_A \cdot 4,0 + Q \cdot 1,6 = 0; \quad V_A = -0,4Q = -0,32 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: \quad -V_B \cdot 4,0 + Q \cdot 5,6 = 0; \quad V_B = 1,4Q = 1,12 \text{ кН}.$$

Найдем изгибающие моменты в сечениях: $M_A = M_C = 0$,
 $M_B = V_A \cdot \ell = -0,32 \cdot 4,0 = -1,28 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Аналогично строим эпюру изгибающих моментов от единичной силы M_1 (рис. 1.31). Определим по сортаменту величину момента инерции двутавровой балки № 24 $J_z = 3460 \text{ см}^4$ и момента сопротивления $W_z = 289 \text{ см}^3$.

Перемножением эпюры M_1 на эпюру M_{cr} по способу А.Н. Верещагина находим перемещение:

$$\Delta_{cr} = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{1,28 \cdot 4,0}{2} \frac{2}{3} \cdot 1,6 + \frac{1,28 \cdot 1,6}{2} \frac{2}{3} \cdot 1,6 \right) = \frac{3,823}{EJ_z} =$$

$$= \frac{3,823 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 0,00055 \text{ м} = 0,055 \text{ см.}$$

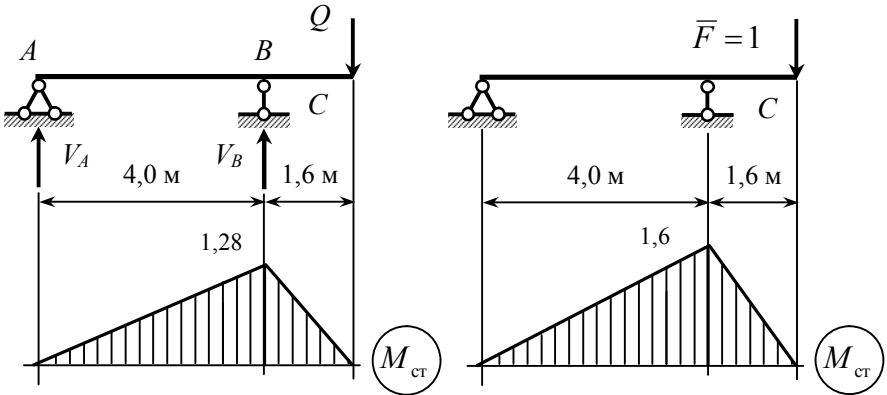


Рис. 1.31

Динамический коэффициент при ударе

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cr}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5}{0,055}} = 14,5.$$

Максимальные нормальные напряжения в балке

$$\sigma_d = \frac{M_{\max}}{W_z} k_d = \frac{1,28 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} 14,5 = 64,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 64,2 \text{ МПа.}$$

Решаем задачу при замене правой опоры балки на упругую с податливостью α (рис. 1.32). Осадка опоры от действия на неё опорной реакции

$$\Delta_{оп} = \Delta_B = V_B \alpha = 1,12 \cdot 0,4 = 0,448 \text{ см.}$$

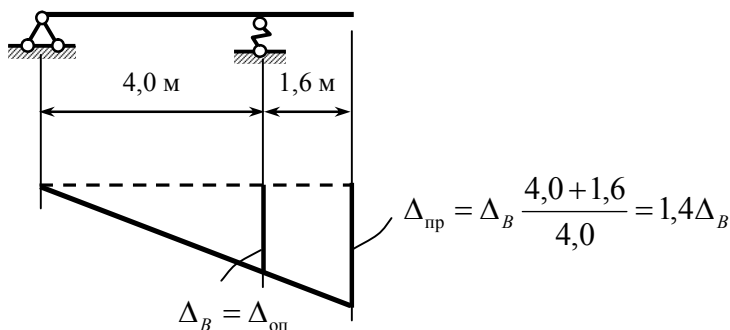


Рис. 1.32

Перемещение в месте удара составит:

$$\Delta_{\text{ст}}^* = \Delta_{\text{ст}} + 1,4\Delta_B = 0,055 + 1,4 \cdot 0,448 = 0,682 \text{ см.}$$

Новое значение динамического коэффициента

$$k_{\text{д}}^* = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}^*}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5}{0,682}} = 4,96.$$

Максимальные нормальные напряжения в балке

$$\sigma_{\text{д}}^* = \frac{M_{\text{max}}}{W_z} k_{\text{д}}^* = \frac{1,28 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} 4,96 = 21,97 \cdot 10^6 \text{ Па} \approx 22,0 \text{ МПа.}$$

При замене правой опоры на упругую опоры напряжения

уменьшились в $\frac{\sigma_{\text{д}}}{\sigma_{\text{д}}^*} = \frac{64,2}{22,0} = 2,92$ раза.

2. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Успешное изучение дисциплин «Техническая механика» и «Сопротивление материалов» невозможно без самостоятельного решения практических задач. Задачи контрольных работ подобраны таким образом, чтобы студент, самостоятельно изучив теоретические разделы соответствующих дисциплин, смог закрепить их на практике и приобрести навыки расчета элементов конструкций. В контрольных работах содержатся задачи по различным разделам дисциплин, изучение которых предусмотрено федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования.

Исходные данные для решения задач выбираются из таблиц, приведенных в разделе № 3 учебного пособия, в соответствии с личным шифром студента и первыми шестью буквами русского алфавита, которые следует расположить под шифром. Личный шифр студента соответствует номеру, указанному в зачетной книжке, например:

шифр	1	8	1	0	3	8
буквы	а	б	в	г	д	е

шифр	1	1	8	1	0	3	8
буквы		а	б	в	г	д	е

Из каждого вертикального столбца таблицы данных, обозначенного внизу определенной буквой, следует взять число в той горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы в личном шифре студента.

Например, при шифре 181038 студент должен взять по табл. 1 (стр. 82) из столбцов *е* восьмую строку (схема № 8; $F_1 = 270 \text{ кН}$), из столбцов *д* – третью строку ($a = 2,2 \text{ м}$;

$b = 2,8 \text{ м}; \quad c = 1,7 \text{ м}; \quad d = 3,8 \text{ м}; \quad F_2 = -280 \text{ кН}$), из столбца a – первую строку ($F_3 = 350 \text{ кН}$).

На титульном листе контрольной работы должны быть указаны:

- название факультета и специальности;
- название дисциплины;
- номер контрольной работы;
- фамилия, имя и отчество студента;
- личный учебный шифр.

В контрольной работе должны быть сформулированы: условие задачи, приведены исходные данные, сделаны необходимые чертежи с указанными на них размерами, нагрузками и т. д.

Для замечаний рецензента должны быть оставлены поля 5 см (с одной стороны страницы). Решение должно сопровождаться последовательными пояснениями и чертежами. Необходимо указывать размерность всех величин в системе СИ.

Получив после проверки контрольную работу, студент должен устранить все отмеченные ошибки и замечания.

Если исходные данные, принятые студентом для решения задач, не соответствуют его личному шифру, то работа возвращается без проверки правильности ее решения.

Предлагаемые для решения задачи объединены в четыре контрольные работы.

Номер контрольной работы	Номера задач
1	1, 2, 3
2	4, 5, 6
3	7, 8
4	9, 10

Количество контрольных работ, выполняемых в семестре, определяется согласно графику учебного процесса.

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Задача № 1

Ступенчатая колонна квадратного поперечного сечения (рис. 3.1, 3.2) выполнена из бетона с модулем упругости $E = 2,0 \cdot 10^4$ МПа и загружена сосредоточенными силами F_1, F_2, F_3 . Требуется:

1. Построить эпюру продольных сил.
2. Определить площади поперечных сечений колонны, учитывая, что материал, из которого она изготовлена, неодинаково работает на растяжение и сжатие (расчетное сопротивление материала сжатию $R_{сж} = 10$ МПа; растяжению $R_p = 1,2$ МПа).
3. Построить эпюру нормальных напряжений.
4. Построить эпюру вертикальных перемещений сечений колонны.

Исходные данные для решения задачи определить согласно шифру по табл. 3.1.

Таблица 3.1

Номер строки	Схема	a , м	b , м	c , м	d , м	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН
1	1	2,0	3,0	1,5	4,0	200	-300	350
2	2	2,1	2,9	1,6	3,9	210	290	-360
3	3	2,2	2,8	1,7	3,8	220	-280	370
4	4	2,3	2,7	1,8	3,7	230	270	-380
5	5	2,4	2,6	1,9	3,6	240	-260	390
6	6	2,5	2,5	2,0	3,5	250	250	-400
7	7	2,6	2,4	2,1	3,4	260	-240	390
8	8	2,7	2,3	2,2	3,3	270	230	-380
9	9	2,8	2,2	2,3	3,2	280	-220	370
0	10	2,9	2,1	2,4	3,1	290	210	-360
	е	д	д	д	д	е	д	а

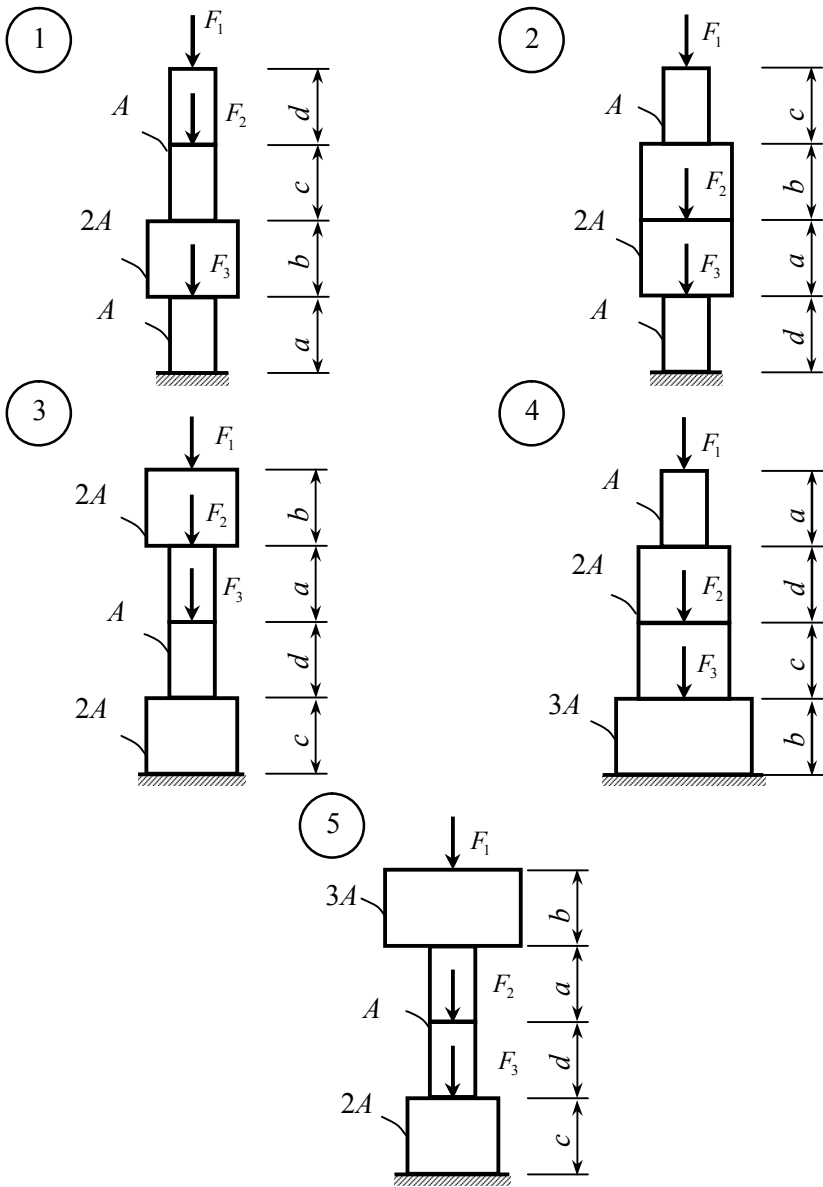
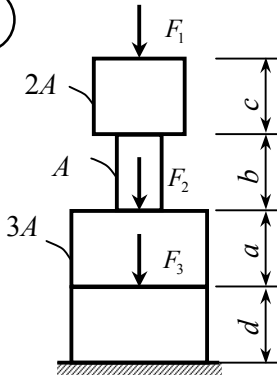
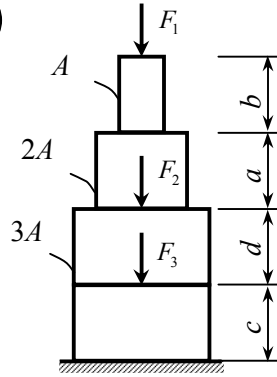


Рис. 3.1

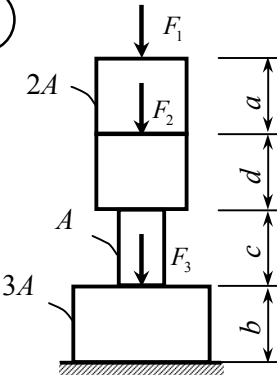
6



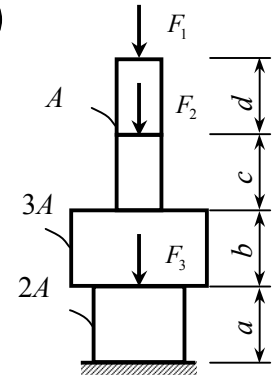
7



8



9



10

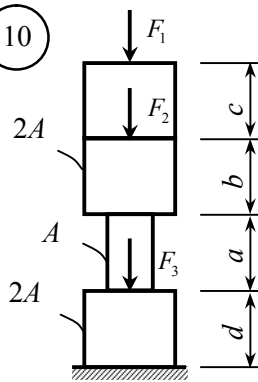


Рис. 3.2

Задача № 2

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен к двум стальным стержням (рис. 3.3, 3.4).

Требуется:

1. Найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу F .

2. Определить допускаемую нагрузку $F_{\text{доп}}$, приравняв наибольшее из напряжений, возникающих в стержнях, расчетному сопротивлению $R = 210$ МПа .

3. Определить предельную нагрузку $F_{\text{пред}}$, если предел текучести материала стержней $\sigma_T = 240$ МПа .

Данные взять из табл. 3.2.

Таблица 3.2

Номер строки	Схема	A , см ²	a , м	b , м	c , м
1	1	11	2,1	3,0	1,1
2	2	12	2,2	2,9	1,2
3	3	13	2,3	2,8	1,3
4	4	14	2,4	2,7	1,4
5	5	15	2,5	2,6	1,5
6	6	16	2,6	2,5	1,6
7	7	17	2,7	2,4	1,7
8	8	18	2,8	2,3	1,8
9	9	19	2,9	2,2	1,9
0	10	20	3,0	2,1	2,0
	е	а	б	д	в

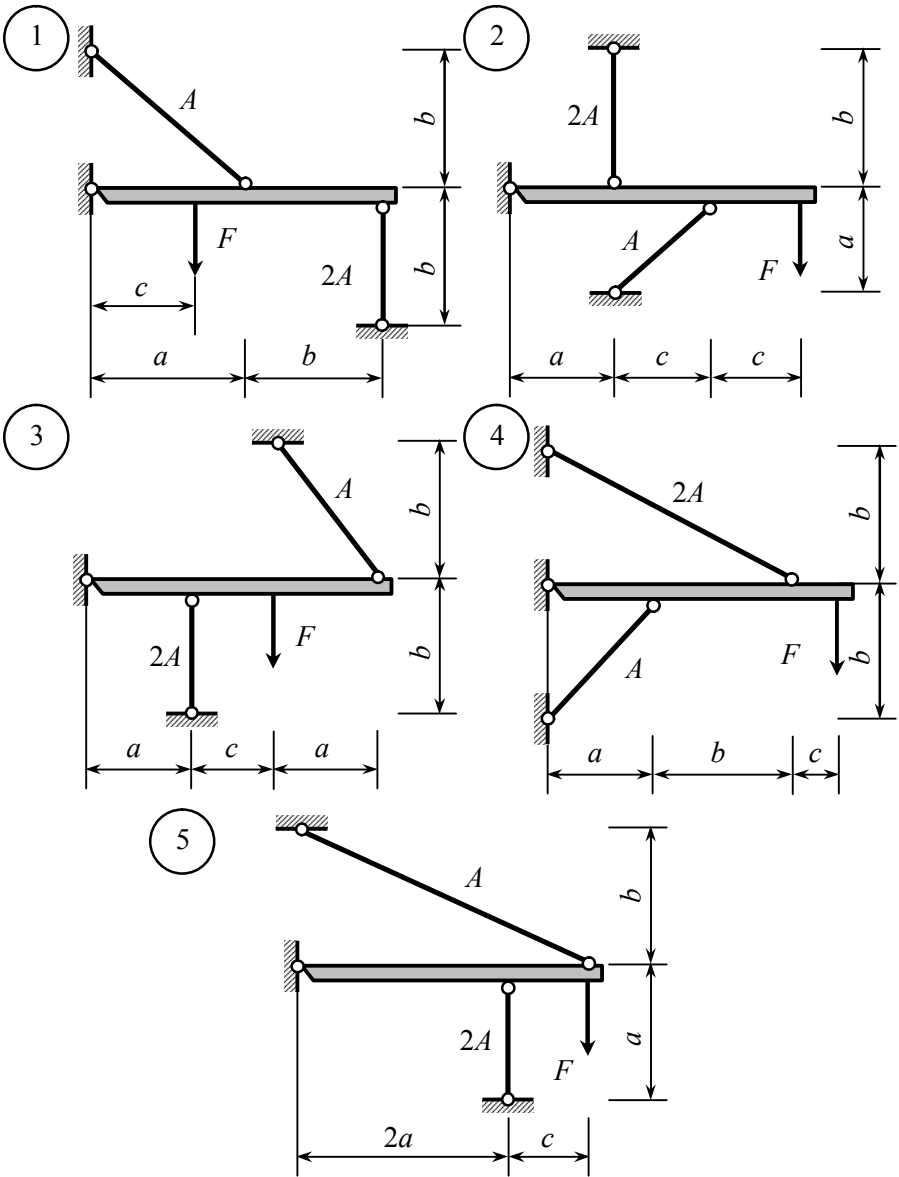


Рис. 3.3

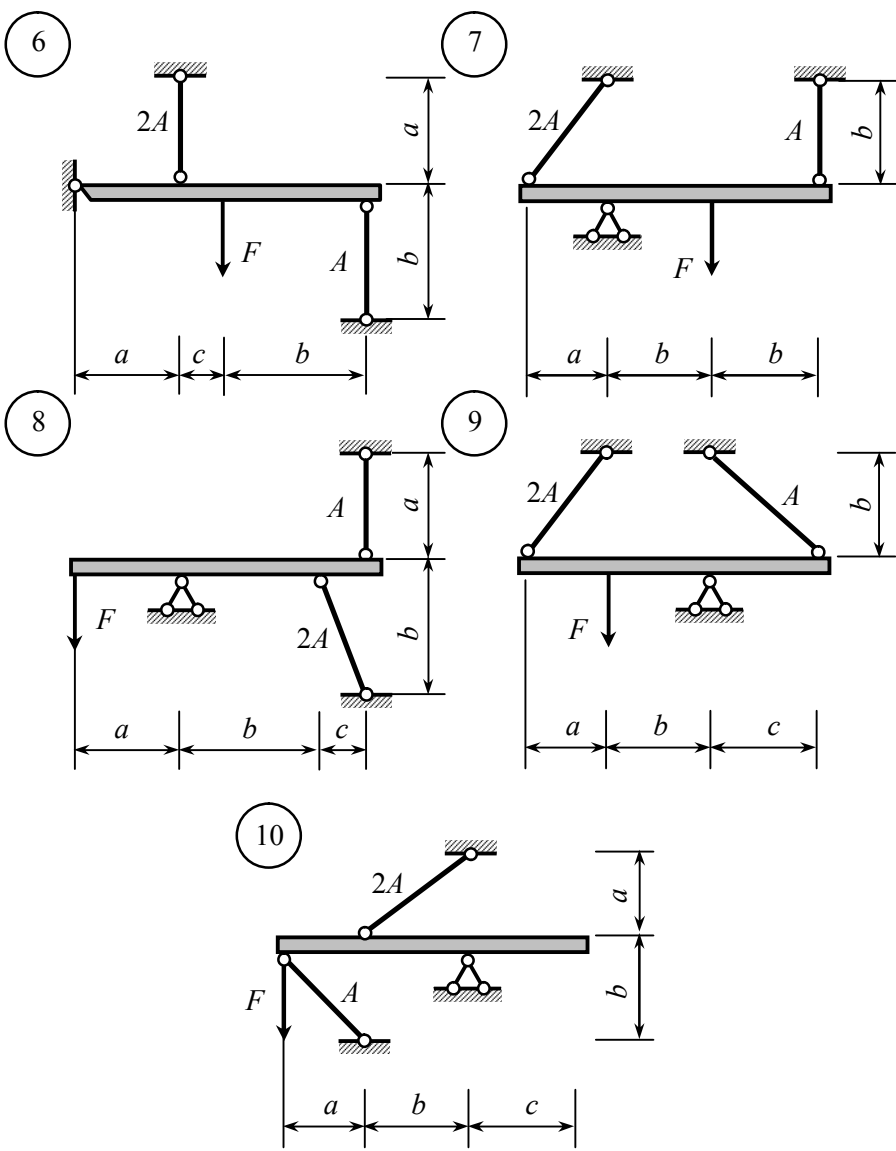


Рис. 3.4

Задача № 3

К стальному валу круглого поперечного сечения приложены внешние скручивающие моменты M_1 , M_2 , M_3 , M_4 (рис. 3.5, 3.6).

Требуется:

1. Построить эпюру крутящих моментов.
2. Определить из условия прочности диаметр вала (расчетное сопротивление материала на срез R_{cp}).
3. Построить эпюру углов закручивания поперечных сечений вала.
4. Найти наибольший относительный угол закручивания и проверить жесткость вала, если задано допускаемое значение относительного угла закручивания $[\theta]$.

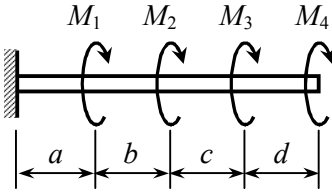
Модуль сдвига принять $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа .

Данные взять из табл. 3.3.

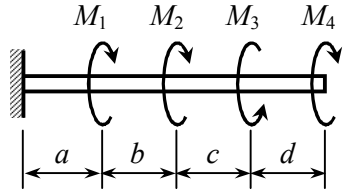
Таблица 3.3

Номер строки	Схема	a ,	b ,	c ,	d ,	M_1 ,	M_2 ,	M_3 ,	M_4 ,	R_{cp} ,	$[\theta]$,
		м	м	м	м	кН·м	кН·м	кН·м	кН·м	МПа	град м
1	1	1,1	1,1	1,1	1,1	10	28	6	15	80	1,0
2	2	1,2	1,2	1,2	1,2	12	26	7	14	90	1,1
3	3	1,3	1,3	1,3	1,3	14	24	8	13	100	1,2
4	4	1,4	1,4	1,4	1,4	16	22	9	12	110	1,3
5	5	1,5	1,5	1,5	1,5	18	20	19	11	120	1,4
6	6	1,6	1,6	1,6	1,6	20	18	11	10	130	1,5
7	7	1,7	1,7	1,7	1,7	22	16	12	9	140	1,6
8	8	1,8	1,8	1,8	1,8	24	14	13	8	150	1,7
9	9	1,9	1,9	1,9	1,9	26	12	14	7	160	1,8
0	10	2,0	2,0	2,0	2,0	28	10	15	6	170	1,9
	е	в	д	а	е	д	а	д	в	е	е

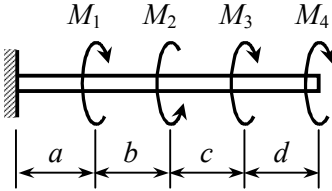
1



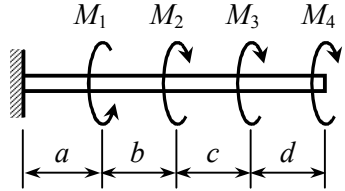
2



3



4



5

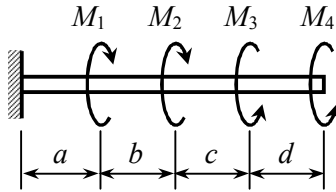
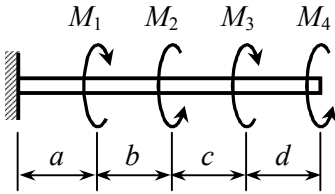
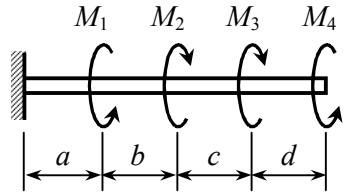


Рис. 3.5

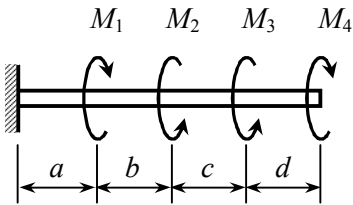
6



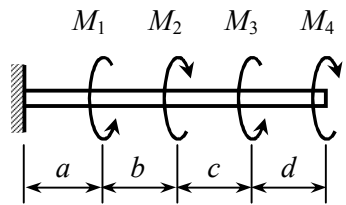
7



8



9



10

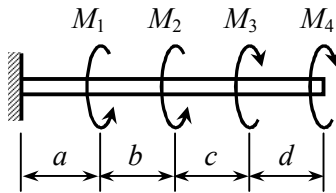


Рис. 3.6

Задача № 4

Поперечное сечение элемента строительной конструкции состоит из двух прокатных профилей (рис. 3.7).

Требуется:

1. Определить положение центра тяжести сечения.
2. Вычислить осевые и центробежные моменты инерции относительно осей z_c и y_c , проходящих через центр тяжести сечения.
3. Определить положение главных центральных осей инерции u и v .
4. Найти значения главных центральных моментов инерции сечения.
5. Вычертить поперечное сечение в масштабе и указать все размеры и все оси координат, в том числе и главные центральные оси.

Данные взять из табл. 3.4.

Таблица 3.4

Номер строки	Схема	Номер швеллера	Равнополочный уголок	Номер двутавра
1	1	14	80×80×6	12
2	2	16	80×80×8	14
3	3	18	90×90×6	16
4	4	20	90×90×7	18
5	5	22	90×90×8	20
6	6	24	100×100×8	20
7	7	27	100×100×10	22
8	8	30	100×100×12	22
9	9	33	125×125×10	24
0	10	36	125×125×12	24
	е	в	д	а

Примечание. Размеры равнополочного уголка приведены в мм.

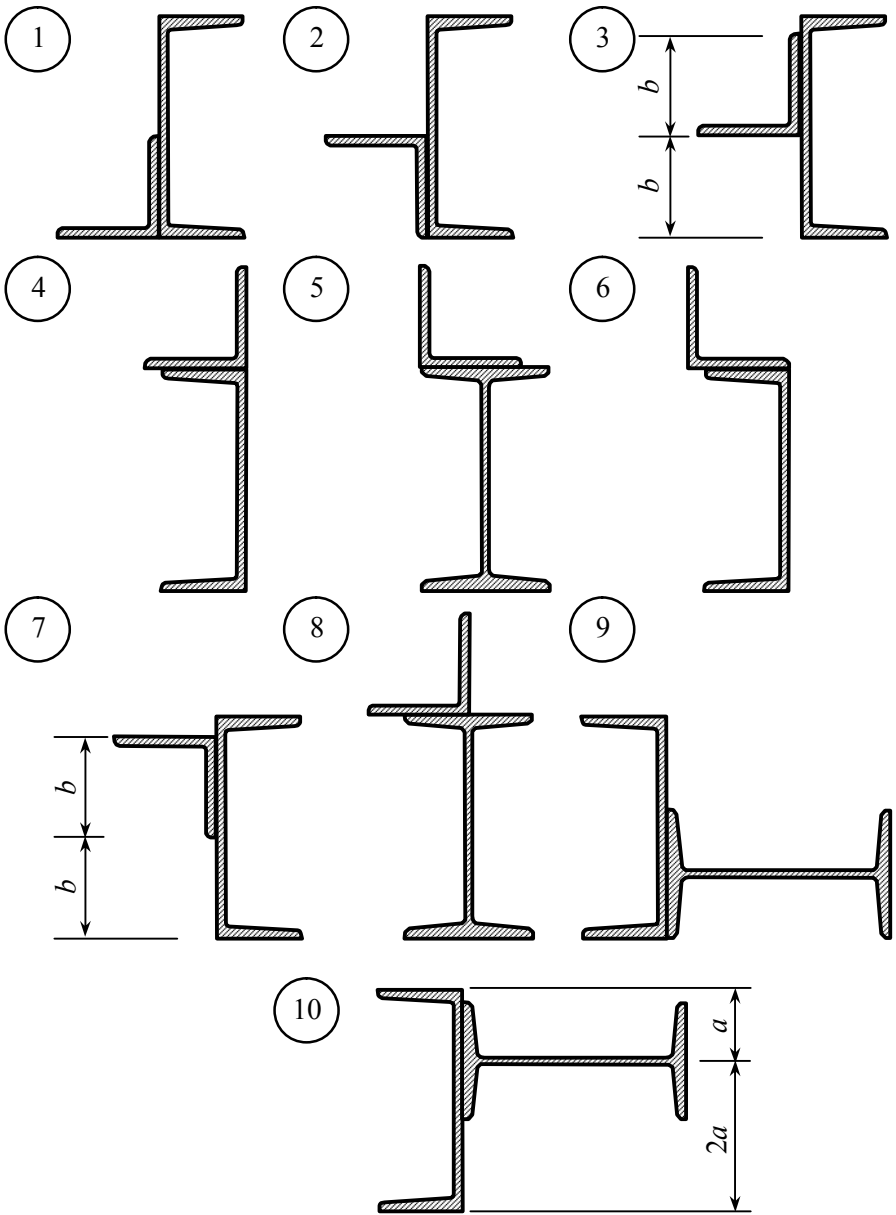


Рис. 3.7

Задача № 5

Для балки-консоли (рис. 3.8) требуется:

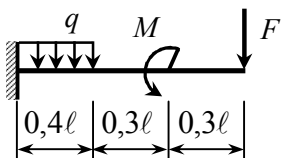
1. Определить опорные реакции.
2. Записать в аналитическом виде выражения для внутренних усилий Q_y и M_z на каждом участке балки.
3. Построить эпюры внутренних усилий Q_y и M_z .
4. Определить размеры поперечного сечения при условии, что балка выполнена из дерева ($R = 8 \text{ МПа}$) и имеет круглое поперечное сечение.

Данные взять из табл. 3.5.

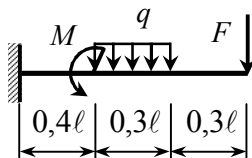
Таблица 3.5

Номер строки	Схема	ℓ , м	F , кН	q , кН/м	M , кН·м
1	1	1,1	1	14	10
2	2	1,2	2	13	11
3	3	1,3	3	12	12
4	4	1,4	4	11	13
5	5	1,5	5	10	14
6	6	1,6	6	9	15
7	7	1,7	7	8	16
8	8	1,8	8	7	17
9	9	1,9	9	6	18
0	10	2,0	10	5	19
	е	д	е	в	а

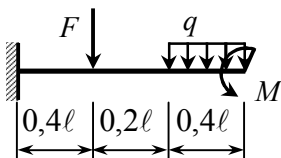
1



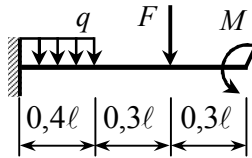
2



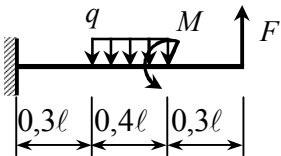
3



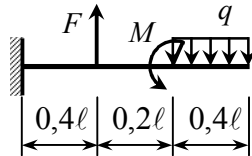
4



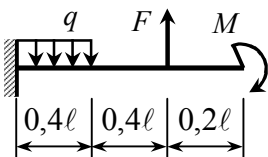
5



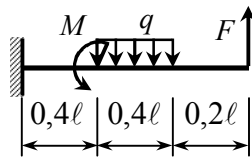
6



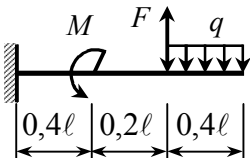
7



8



9



10

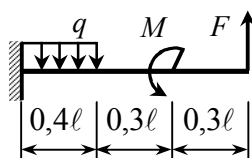


Рис. 3.8

Задача № 6

Для шарнирно-опертой балки с консолью (рис. 3.9) требуется:

1. Определить опорные реакции.
2. Записать в аналитическом виде выражения для внутренних усилий Q_y и M_z на каждом участке балки.
3. Построить эпюры внутренних усилий Q_y и M_z .
4. Подобрать номер прокатного профиля двутавра из условия прочности при расчетном сопротивлении $R = 210$ МПа.

Данные взять из табл. 3.6.

Таблица 3.6

Номер строки	Схема	a , м	b , м	c , м	F , кН	q , кН/м	M , кН·м
1	1	1,2	1,4	1,6	1	14	10
2	2	1,6	1,6	1,4	2	13	11
3	3	1,6	1,6	1,6	3	12	12
4	4	1,6	1,8	1,8	4	11	13
5	5	1,2	2,0	2,2	5	10	14
6	6	1,2	2,0	2,0	6	9	15
7	7	1,4	2,0	1,6	7	8	16
8	8	1,8	2,2	2,0	8	7	17
9	9	1,6	2,6	2,0	9	6	18
0	10	1,2	2,6	2,6	10	5	19
	е	д	д	д	е	в	а

Задача № 7

Статически определимая рама, расчетная схема которой показана на рис. 3.10, 3.11, загружена внешней нагрузкой.

Требуется:

1. Определить опорные реакции.
 2. Записать выражения для внутренних усилий M_z , Q_y и N на каждом из участков рамы.
 3. Построить эпюры внутренних усилий M_z , Q_y и N .
 4. Выполнить проверку равновесия узлов рамы.
- Данные взять из табл. 3.7.

Таблица 3.7

Номер строки	Схема	ℓ , м	h , м	F , кН	q , кН/м	M , кН·м
1	1	4,2	4,0	1	14	10
2	2	4,4	4,2	2	13	11
3	3	4,6	4,4	3	12	12
4	4	4,8	4,6	4	11	13
5	5	5,0	4,8	5	10	14
6	6	5,2	5,0	6	9	15
7	7	5,4	5,2	7	8	16
8	8	5,6	5,4	8	7	17
9	9	5,8	5,6	9	6	18
0	10	6,0	5,8	10	5	19
	е	д	д	е	в	а

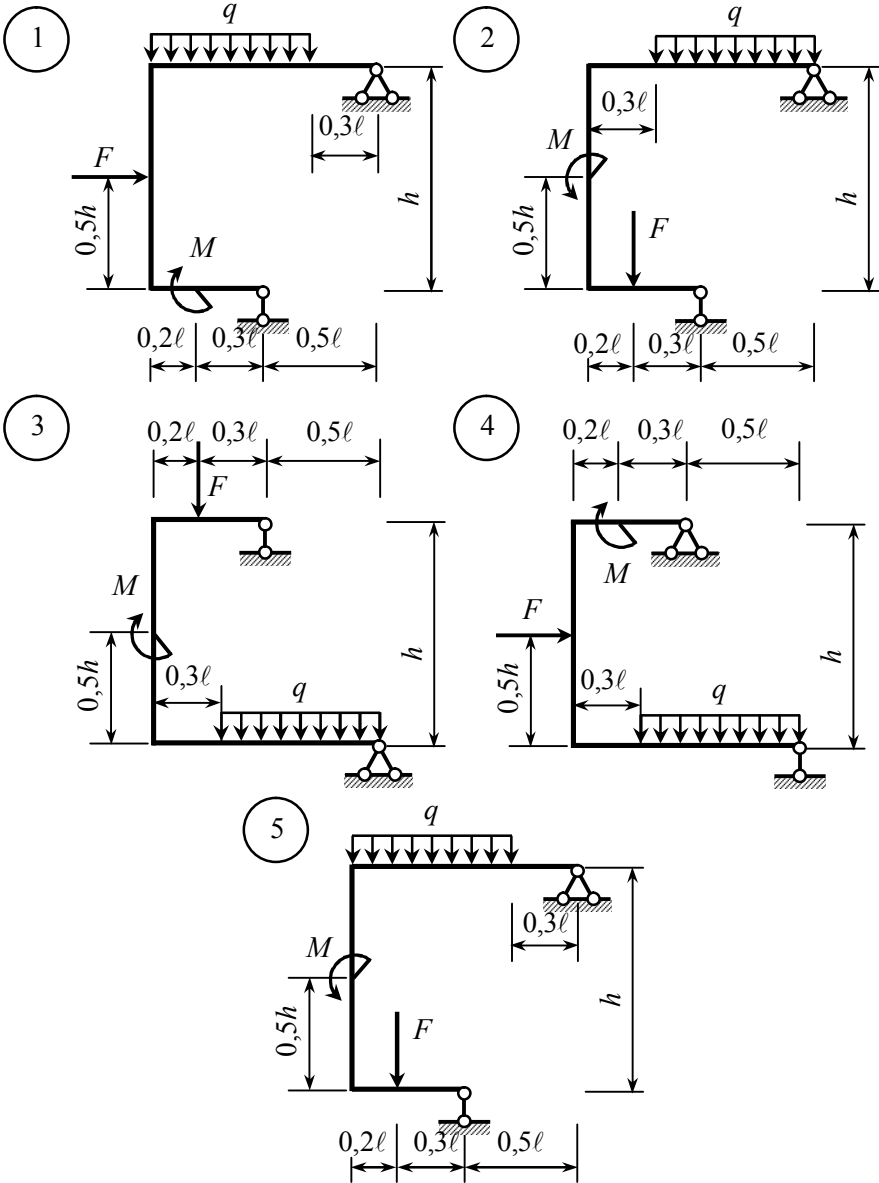
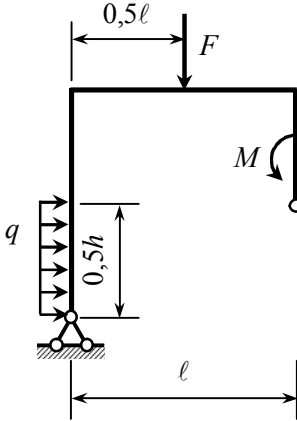
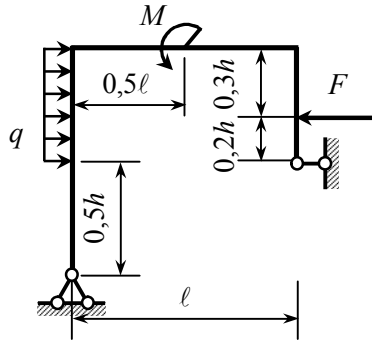


Рис. 3.10

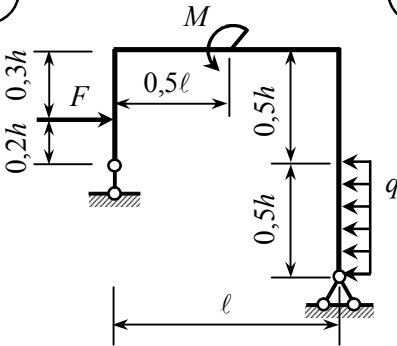
6



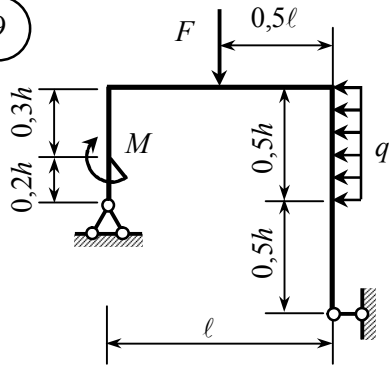
7



8



9



10

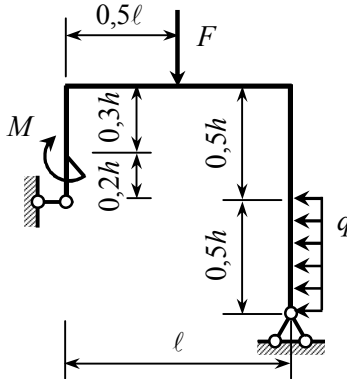


Рис. 3.11

Задача № 8

Короткий стержень, поперечное сечение которого показано на рис. 3.12, 3.13, сжат продольной силой F , приложенной в точке B .

Требуется:

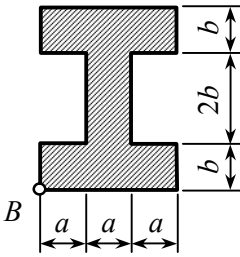
1. Определить положение нейтральной линии.
2. Определить в общем виде наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения, возникающие в поперечном сечении, выразив их через силу F .
3. Найти величину допускаемой нагрузки $F_{\text{доп}}$ при заданных размерах поперечного сечения и расчетных сопротивлений материала на сжатие $R_{\text{сж}}$ и растяжение $R_{\text{р}}$.

Данные взять из табл. 3.8.

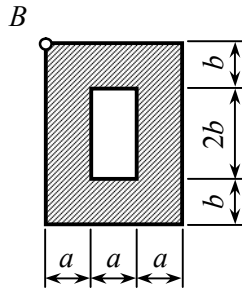
Таблица 3.8

Номер строки	Схема	a , см	b , см	$R_{\text{сж}}$, МПа	$R_{\text{р}}$, МПа
1	1	6	4	60	21
2	2	5	3	70	22
3	3	4	5	80	23
4	4	7	4	90	24
5	5	8	5	100	25
6	6	9	6	110	26
7	7	10	8	120	27
8	8	8	4	130	28
9	9	9	5	140	29
0	10	10	6	150	30
	е	д	д	а	в

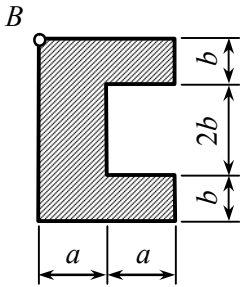
1



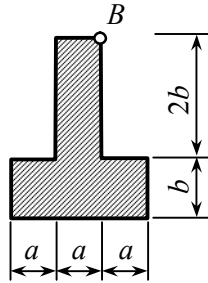
2



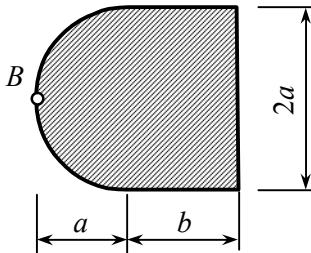
3



4

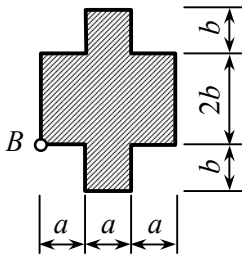


5

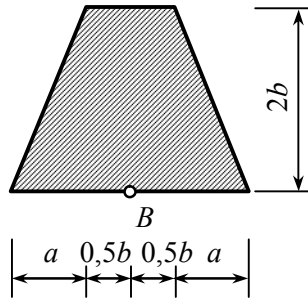


Puc. 3.12

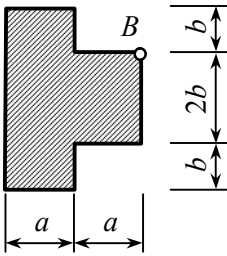
7



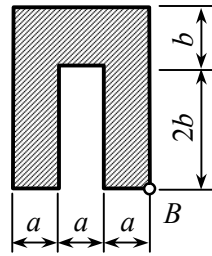
6



8



9



10

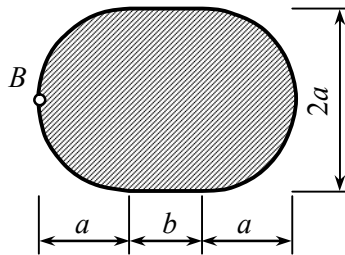


Рис. 3.13

Задача № 9

Стальной стержень длиной ℓ загружен продольной силой F (рис. 3.14). Форма поперечного сечения стержня показана на рис. 3.15. При выполнении расчетов принять $R = 210$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Требуется:

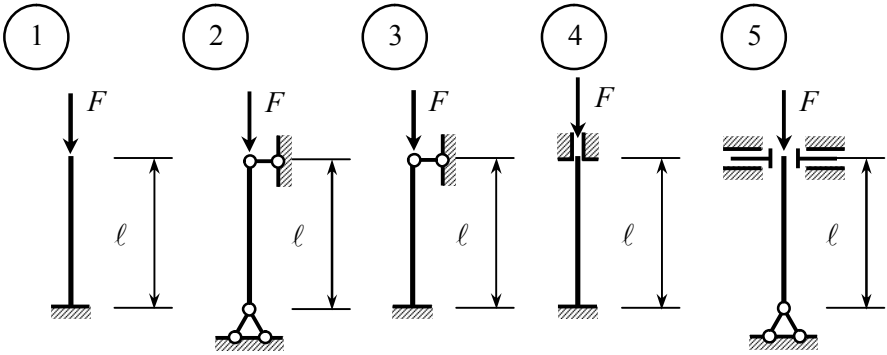
1. Методом последовательных приближений определить размеры поперечного сечения стержня.

2. Определить величину критической силы и коэффициент запаса по устойчивости.

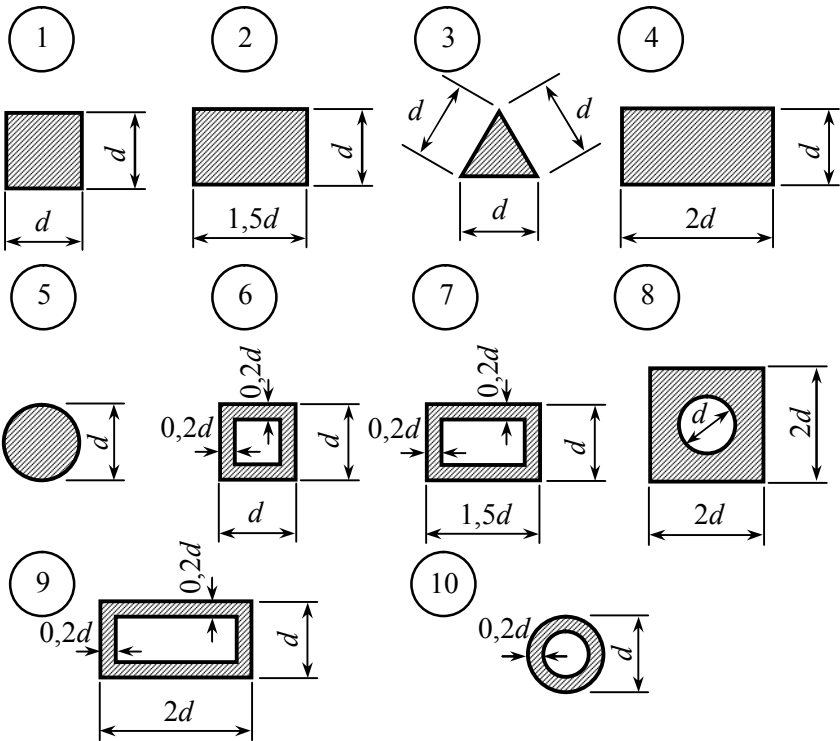
Данные взять из табл. 3.9.

Таблица 3.9

Номер строки	F , кН	ℓ , м	Схема колонны	Форма поперечного сечения
1	200	3,2	1	1
2	250	3,4	2	2
3	300	3,6	3	3
4	350	3,8	4	4
5	400	4,0	5	5
6	450	4,2	1	6
7	500	4,4	2	7
8	550	4,6	3	8
9	600	4,8	4	9
0	650	5,0	5	10
	а	д	д	е



Puc. 3.14



Puc. 3.15

Задача № 10

На стальную двутавровую балку (рис. 3.16, 3.17) с высоты h падает груз весом Q .

Требуется:

1. Найти наибольшие нормальные напряжения, возникающие в балке в момент удара.

2. Решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена упругой с коэффициентом податливости α .

3. Сравнить полученные результаты.

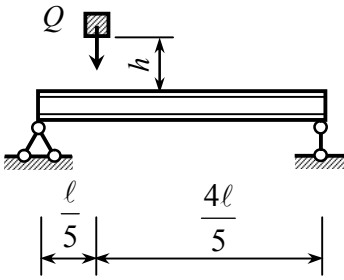
Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Данные взять из табл. 3.10.

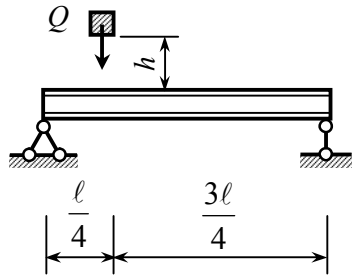
Таблица 3.10

Номер строки	Схема	Номер двутавра	ℓ , м	Q , кН	h , см	α , см/кН
1	1	20	3,0	0,8	5	0,30
2	2	20	3,5	0,9	6	0,35
3	3	24	4,0	1,0	7	0,40
4	4	24	4,5	1,1	8	0,45
5	5	27	5,0	1,2	9	0,50
6	6	27	5,5	1,3	10	0,55
7	7	30	6,0	1,4	11	0,60
8	8	30	6,5	1,5	12	0,65
9	9	33	7,0	1,6	13	0,70
0	10	36	7,5	1,7	14	0,75
	е	д	в	а	б	д

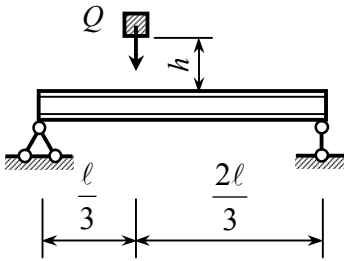
1



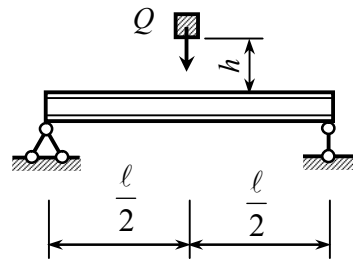
2



3



4



5

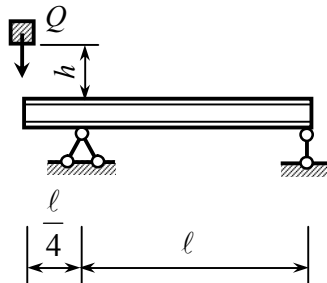
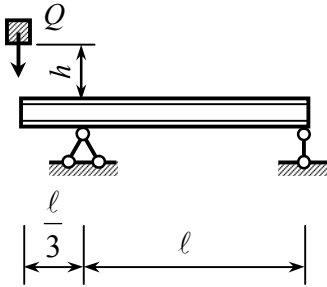
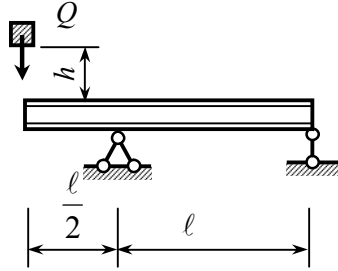


Рис. 3.16

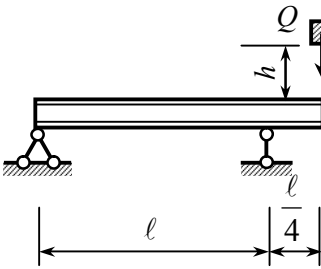
6



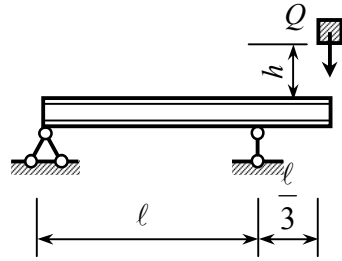
7



8



9



10

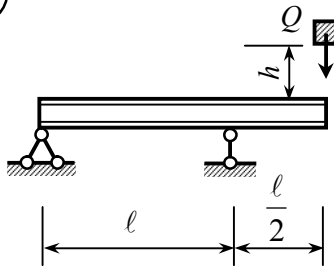


Рис. 3.17

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ПО РАЗДЕЛАМ ИЗУЧАЕМОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Какие объекты изучаются в сопротивлении материалов?
2. Что понимают под прочностью (жесткостью, устойчивостью) элементов конструкции?
3. Какие гипотезы приняты в сопротивлении материалов?
4. Что представляет собой деформация тела?
5. Что представляет собой расчетная схема конструкции? Чем она отличается от реальной системы?
6. Какие внутренние усилия (внутренние силовые факторы) могут возникать в поперечных сечениях стержня? Какие виды деформации с ними связаны?
7. В чем суть метода сечений?
8. Что такое полное напряжение? Какова его размерность?
9. Что представляют собой нормальные и касательные напряжения?
10. Назовите виды задач, которые решаются в сопротивлении материалов?
11. Какой случай деформации называется центральным растяжением (сжатием)?
12. Как определяется продольная сила в поперечных сечениях стержня? Какое правило знаков принято для нее?
13. Что представляет собой эпюра продольных сил?
14. По какой формуле определяются нормальные напряжения при центральном растяжении (сжатии)?
15. Какие величины называются абсолютной и относительной продольной деформацией? В каких единицах они измеряются?
16. Сформулируйте закон Гука.
17. Какие системы называются статически неопределимыми?
18. Какие существуют принципиальные отличия в работе статически определимых и неопределимых систем?
19. Какие уравнения называются уравнениями неразрывности (совместности) деформаций и перемещений? Как они составляются?

20. Какие состояния конструкций называются предельными? Какие группы предельных состояний Вы знаете?

21. Сформулируйте основные положения расчета конструкций по методу предельных состояний.

22. Запишите условия прочности и жесткости при центральном растяжении-сжатии.

23. Что представляет собой предельная нагрузка? Как она определяется?

24. Что называется статическим моментом площади сечения? Какова его размерность?

25. Чему равен статический момент площади относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения?

26. Как определяются координаты центра тяжести сечения?

27. Какие оси называются центральными?

28. Что называется осевым, полярным, центробежным моментами инерции сечения? Какова их размерность?

29. Как определяется знак центробежного момента инерции сечений?

30. Чему равна сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей?

31. Как определить момент инерции сечения относительно оси, параллельной центральной?

32. Меняется ли сумма осевых моментов инерции относительно взаимно перпендикулярных осей при их повороте?

33. Какие оси называются главными центральными осями инерции?

34. Чему равен центробежный момент инерции относительно главных центральных осей?

35. Для каких сечений можно без вычислений установить положение главных осей?

36. Как определяется положение главных центральных осей инерции?

37. Что такое осевой и полярный моменты сопротивления? В каких единицах они измеряются?

38. Что называется радиусом инерции сечения?
39. Какой вид деформации называется кручением?
40. Какое внутреннее усилие возникает при кручении стержня круглого поперечного сечения?
41. Какое правило знаков принято для крутящих моментов?
42. Запишите условие прочности при кручении.
43. Как определяются углы закручивания поперечных сечений при кручении?
44. Что представляет собой жесткость сечения при кручении?
45. Как определяется относительный угол закручивания?
46. Запишите условие жесткости при кручении стержня круглого поперечного сечения.
47. Какой изгиб стержня называют чистым, а какой поперечным?
48. Какие внутренние усилия возникают при прямом поперечном изгибе?
49. Сформулируйте правила знаков для внутренних усилий при изгибе.
50. Что представляет собой нейтральный слой балки?
51. Какая линия называется нейтральной?
52. Какая зависимость существует между внутренними усилиями при изгибе?
53. Сформулируйте основные закономерности, которые можно использовать для проверки правильности построения эпюр внутренних усилий при изгибе.
54. Как определить сечение балки, в котором изгибающий момент принимает экстремальное значение?
55. Запишите формулу для определения нормальных напряжений при изгибе.
56. Что называется сложным сопротивлением?
57. Можно ли использовать принцип независимости действия сил при определении внутренних усилий и напряжений при сложном сопротивлении?
58. Какой вид сложного сопротивления называется внецентренным сжатием (растяжением)?

59. Запишите формулу для определения нормальных напряжений при внецентренном сжатии (растяжении)?

60. Как определяется положение нейтральной линии при внецентренном сжатии (растяжении)?

61. В каких точках поперечного сечения возникают максимальные и минимальные напряжения при внецентренном сжатии бруса?

62. Запишите условие прочности при внецентренном сжатии (растяжении).

63. Какая форма равновесия деформируемых систем называется устойчивой, а какая неустойчивой?

64. Что представляет собой потеря устойчивости?

65. Какая сила называется критической?

66. Какие методы определения критических сил Вы знаете?

67. По какой формуле определяется гибкость стержня?

68. В каких единицах измеряется гибкость стержня?

69. Запишите формулу Ясинского для определения критических сил и укажите пределы ее применимости.

70. Как определяются критическая сила и критическое напряжение для стержней малой гибкости?

71. Что представляет собой коэффициент запаса по устойчивости?

72. Как записывается условие устойчивости центрально сжатого стержня?

73. Как определить размер (размеры) поперечного сечения центрально сжатого стержня?

74. Какие нагрузки называются статическими, а какие – динамическими?

75. Какое явление называется ударом?

76. Что представляет собой динамический коэффициент при ударе?

77. Как определяются напряжения и перемещения при ударе?

78. Применение каких конструктивных мероприятий позволяет уменьшить напряжение при ударе?

79. Какие методы определения перемещений Вы знаете?

80. Как производится перемножение эпюр?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. *Александров, А.В.* Сопротивление материалов : учеб. для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – М. : Высшая школа, 2009. – 560 с.

2. *Баранникова, С.А.* Сопротивление материалов : методические указания и контрольные задания для студентов заочного факультета специальностей ПГС, АДИА, МиТТ / С.А. Баранникова [и др.]. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2009. – 44 с.

3. *Дарков, А.В.* Сопротивление материалов : учебник для техн. вузов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М. : Альянс, 2014. – 622 с.

4. *Миролюбов, И.Н.* Сопротивление материалов : пособие по решению задач / И.Н. Миролюбов, Ф.З. Алмаметов [и др.]. – СПб. : Лань, 2009. – 508 с.

5. *Тухфатуллин, Б.А.* Программы для решения задач по дисциплинам «Теория упругости», «Строительная механика», «Сопротивление материалов». Часть I : методические указания / Б.А. Тухфатуллин. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. – 42 с.

6. *Тухфатуллин, Б.А.* Сопротивление материалов. Определение внутренних усилий при изгибе. Варианты заданий и примеры решения : учебное пособие / Б.А. Тухфатуллин, Л.Е. Путьева, Д.Н. Песцов. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2013. – 84 с.

Дополнительная литература

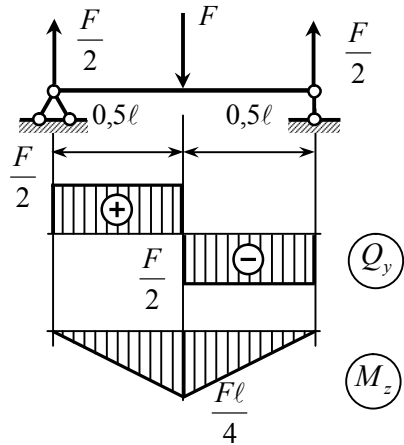
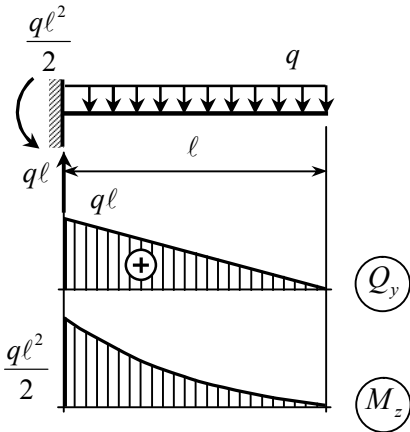
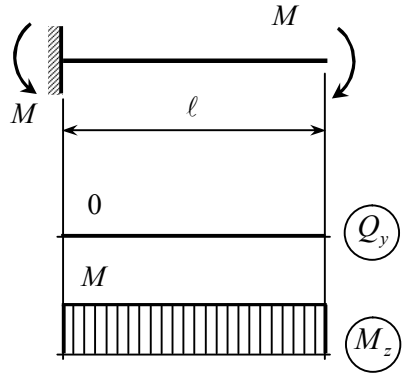
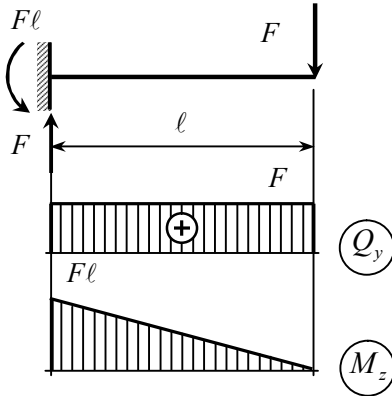
7. *Икрин, В.А.* Сопротивление материалов с элементами теории упругости и пластичности : учеб. для вузов по направле-

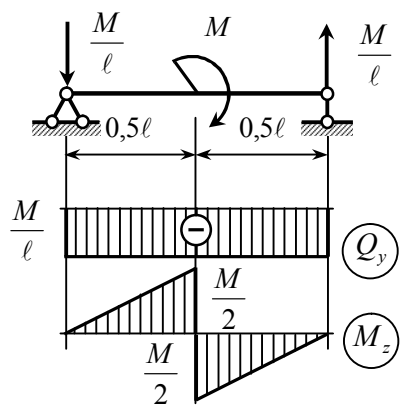
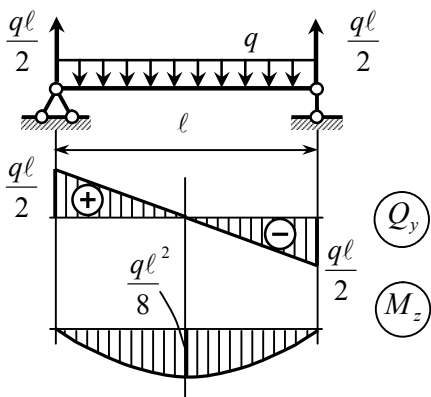
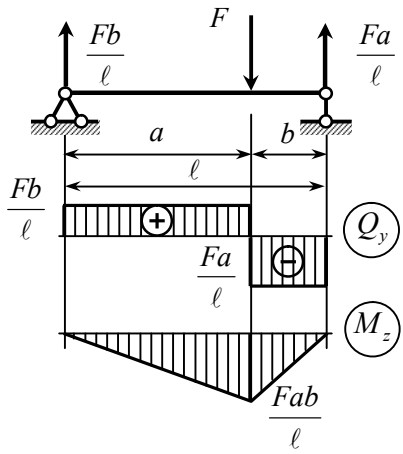
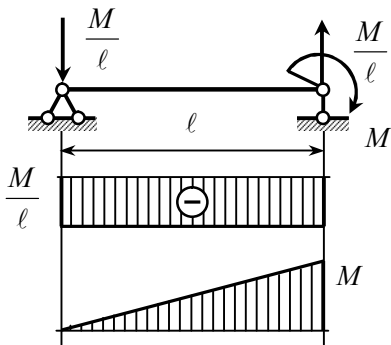
нию 653500 «Строительство» / В.А. Икрин. – М. : Изд-во АСВ, 2005. – 424 с.

8. *Писаренко, Г.С.* Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – Киев : Наукова думка, 1988. – 734 с.

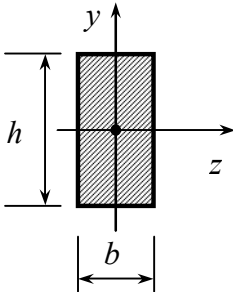
9. *Феодосьев, В.И.* Сопротивление материалов : учеб. для вузов / В.И. Феодосьев. – М. : Изд-во Моск. техн. ун-та, 2001. – 592 с.

**Опорные реакции, эпюры поперечных сил
и изгибающих моментов в статически определимых балках**



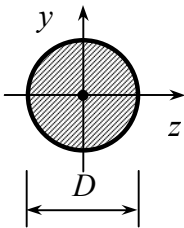


Справочные данные по геометрическим характеристикам



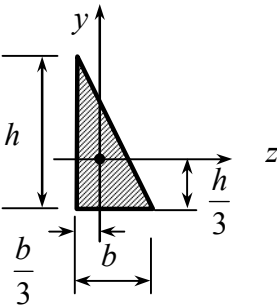
$$J_z = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{b^3h}{12};$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{b^2h}{6}.$$



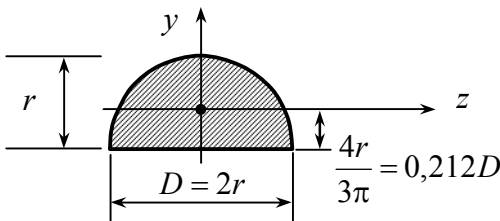
$$J_z = J_y = \frac{\pi D^4}{64}; \quad J_\rho = \frac{\pi D^4}{32};$$

$$W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32}; \quad W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}.$$



$$J_z = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{b^3h}{36};$$

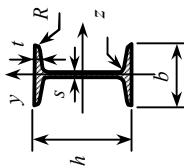
$$J_{zy} = \pm \frac{b^2h^2}{72}.$$



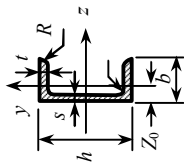
$$J_z = 0,0069D^4 = 0,11r^4;$$

$$J_y = \frac{\pi D^4}{128}.$$

ГОСТ 8239–89. Двутавры стальные горячекатаные. Сортамент



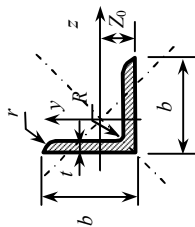
№	h , мм	b , мм	s , мм	t , мм	R , мм	r , мм	A , см ²	J_z , см ⁴	W_z , см ³	i_z , см	S_z , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	Вес 1 мп., кг
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108,0



ГОСТ 8240–89. Швеллеры с уклоном внутренних граней полок. Сортамент

№	h , мм	b , мм	s , мм	t , мм	R , мм	r , мм	A , мм ²	J_z , мм ⁴	W_z , мм ³	i_z , мм	S_z , мм ³	J_y , мм ⁴	W_y , мм ³	i_y , мм	Z_0 , мм	Вес 1 мп., кг
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80	14,2
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

ГОСТ 8509–93. Уголки стальные горячекатаные равнополочные. Сортамент



№	b, мм	d, мм	R, мм	r, мм	A, см ²	J _z , см ⁴	W _z , см ³	i _z , см	J _{max} , см ⁴	i _{max} , см	J _{min} , см ⁴	W _{min} , см ³	i _{min} , см	J _{yz} , см ⁴	Z ₀ , см	Вес 1 мп., кг
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
40×4	40	4,0	5,0	1,7	3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42
40×5	40	5,0	5,0	1,7	3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98
45×3	45	3,0	5,0	1,7	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08
45×4	45	4,0	5,0	1,7	3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73
45×5	45	5,0	5,0	1,7	4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37
50×3	50	3,0	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32
50×4	50	4,0	5,5	1,8	3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05
50×5	50	5,0	5,5	1,8	4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77
50×6	50	6,0	5,5	1,8	5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47
56×4	56	4,0	6,0	2,0	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44
56×5	56	5,0	6,0	2,0	5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25
63×4	63	4,0	7,0	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,00	1,69	3,90
63×5	63	5,0	7,0	2,3	6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74	4,81
63×6	63	6,0	7,0	2,3	7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78	5,72
70×4,5	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,00	1,88	4,87
70×5	70	5,0	8,0	2,7	6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	5,38
70×6	70	6,0	8,0	2,7	8,15	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	6,39
70×7	70	7,0	8,0	2,7	9,42	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99	7,39

№	b , MM	d , MM	R , MM	r , MM	A , CM ²	J_{z_0} , CM ⁴	W_{z_0} , CM ³	i_{z_0} , CM	J_{\max}^4 , CM ⁴	i_{\max}^4 , CM	J_{\min}^4 , CM ⁴	W_{\min}^3 , CM ³	i_{\min}^3 , CM	J_{zy}^3 , CM	Z_0 , CM	Бес 1 МП., КГ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
70×8	70	8,0	8,0	2,7	10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02	8,37
75×5	75	5,0	9,0	3,0	7,39	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02	5,80
75×6	75	6,0	9,0	3,0	8,78	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,30	2,06	6,89
75×7	75	7,0	9,0	3,0	10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10	7,96
75×8	75	8,0	9,0	3,0	11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,00	2,15	9,02
75×9	75	9,0	9,0	3,0	12,83	66,10	12,43	2,27	104,7	2,86	27,48	8,91	1,46	38,60	2,18	10,07
80×5,5	80	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17	6,78
80×6	80	6,0	9,0	3,0	9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19	7,36
80×7	80	7,0	9,0	3,0	10,85	65,31	11,32	2,45	103,6	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,23	8,51
80×8	80	8,0	9,0	3,0	12,30	73,36	12,80	2,44	116,4	3,08	30,32	9,44	1,57	43,00	2,27	9,65
90×6	90	6,0	10,0	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130,0	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43	8,33
90×7	90	7,0	10,0	3,3	12,28	94,30	14,45	2,77	149,7	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47	9,64
90×8	90	8,0	10,0	3,3	13,93	106,1	16,36	2,76	168,4	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51	10,93
90×9	90	9,0	10,0	3,3	15,60	118,0	18,29	2,75	186,0	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55	12,20
100×6,5	100	6,5	12,0	4,0	12,82	122,1	16,69	3,09	193,5	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68	10,06
100×7	100	7,0	12,0	4,0	13,75	130,6	17,90	3,08	207,0	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71	10,79
100×8	100	8,0	12,0	4,0	15,60	147,2	20,30	3,07	233,5	3,87	60,92	15,66	1,98	86,30	2,75	12,25
100×10	100	10,0	12,0	4,0	19,24	178,9	24,97	3,05	283,8	3,84	74,08	18,51	1,96	110,0	2,83	15,10
100×12	100	12,0	12,0	4,0	22,80	208,9	29,47	3,03	330,9	3,81	86,84	21,10	1,95	122,0	2,91	17,90
100×14	100	14,0	12,0	4,0	26,28	237,2	33,83	3,00	375,0	3,78	99,32	23,49	1,94	138,0	2,99	20,63
100×16	100	16,0	12,0	4,0	29,68	263,8	38,04	2,98	416,0	3,74	111,6	25,79	1,94	152,0	3,06	23,30

№	b , MM	d , MM	R , MM	r , MM	A , CM ²	J_z , CM ⁴	W_z^3 , CM ³	i_z , CM	J_{\max}^4 , CM ⁴	i_{\max} , CM	J_{\min}^4 , CM ⁴	W_{\min}^3 , CM ³	i_{\min} , CM	$ J_{zy} $, CM ⁴	Z_0 , CM	Бес 1 МП., КГ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
110×8	110	8,0	12,0	4,0	17,20	198,2	24,77	3,39	314,5	4,28	81,83	19,29	2,18	116,0	3,00	13,50
125×8	125	8,0	14,0	4,6	19,69	294,4	32,20	3,87	466,8	4,87	122,0	25,67	2,49	172,0	3,36	15,46
125×9	125	9,0	14,0	4,6	22,00	327,5	36,00	3,86	520,0	4,86	135,9	28,26	2,48	192,0	3,40	17,30
125×10	125	10,0	14,0	4,6	24,33	359,8	39,74	3,85	571,0	4,84	148,6	30,45	2,47	211,0	3,45	19,10
125×12	125	12,0	14,0	4,6	28,89	422,2	47,06	3,82	670,0	4,82	174,4	34,94	2,46	248,0	3,53	22,68
125×14	125	14,0	14,0	4,6	33,37	481,8	54,17	3,80	763,9	4,78	199,6	39,10	2,45	282,0	3,61	26,20
125×16	125	16,0	14,0	4,6	37,77	538,6	61,09	3,78	852,8	4,75	224,3	43,10	2,44	315,0	3,68	29,65
140×9	140	9,0	14,0	4,6	24,72	465,7	45,55	4,34	739,4	5,47	192,0	35,92	2,79	274,0	3,76	19,41
140×10	140	10,0	14,0	4,6	27,33	512,3	50,32	4,33	813,6	5,46	211,0	39,05	2,78	301,0	3,82	21,45
140×12	140	12,0	14,0	4,6	32,49	602,5	59,66	4,31	957,0	5,43	248,0	44,97	2,76	354,0	3,90	25,50
160×10	160	10,0	16,0	5,3	31,43	774,2	66,19	4,96	1229,1	6,25	319,3	52,52	3,19	455,0	4,30	24,67
160×11	160	11,0	16,0	5,3	34,42	844,2	72,44	4,95	1340,1	6,24	347,8	56,53	3,18	496,0	4,35	27,02
160×12	160	12,0	16,0	5,3	37,39	912,9	78,62	4,94	1450,0	6,23	375,8	60,53	3,17	537,0	4,39	29,35
160×16	160	16,0	16,0	5,3	49,07	1175,2	102,6	4,89	1865,7	6,17	484,6	75,92	3,14	690,0	4,55	38,52
160×18	160	18,0	16,0	5,3	54,79	1290,2	114,2	4,87	2061,0	6,13	537,5	82,08	3,13	771,0	4,63	43,01
160×20	160	20,0	16,0	5,3	60,40	1418,8	125,6	4,85	2248,3	6,10	589,4	90,02	3,12	830,0	4,70	47,41
180×11	180	11,0	16,0	5,3	38,80	1216,4	92,47	5,60	1933,1	7,06	499,8	72,86	3,59	716,0	4,85	30,47
180×12	180	12,0	16,0	5,3	42,19	1316,6	100,4	5,59	2092,8	7,04	540,5	78,15	3,58	776,0	4,89	33,12
200×12	200	12,0	18,0	6,0	47,10	1822,8	124,6	6,22	2896,2	7,84	749,4	98,68	3,99	1073,0	5,37	36,97
200×13	200	13,0	18,0	6,0	50,85	1960,8	134,4	6,21	3116,2	7,83	805,4	105,1	3,98	1156,0	5,42	39,92
200×14	200	14,0	18,0	6,0	54,60	2097,0	144,2	6,20	3333,0	7,81	861,0	111,5	3,97	1236,0	5,46	42,80
200×16	200	16,0	18,0	6,0	61,98	2362,6	163,4	6,17	3755,4	7,78	969,7	123,8	3,96	1393,0	5,54	48,65

№	b , MM	d , MM	R , MM	r , MM	A , CM ²	J_z , CM ⁴	W_z , CM ³	v_z , CM	J_{max} , CM ⁴	i_{max} , CM	J_{min} , CM ⁴	W_{min} , CM ³	i_{min} , CM	$ J_{z,y} $, CM ⁴	Z_0 , CM	Бес 1 MIL., КГ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
200×20	200	20,0	18,0	6,0	76,54	2871,5	200,4	6,12	4860,4	7,72	1181,9	146,6	3,93	1689,0	5,70	60,08
200×25	200	25,0	18,0	6,0	94,29	3466,2	245,6	6,06	5494,0	7,63	1438,4	172,7	3,91	2028,0	5,89	74,02
200×30	200	30,0	18,0	6,0	111,54	4019,6	288,6	6,00	6351,1	7,55	1698,2	193,1	3,89	2332,0	6,07	87,56
220×14	220	14,0	21,0	7,0	60,38	2814,4	175,2	6,83	4470,1	8,60	1158,5	138,6	4,38	1655,0	5,91	47,40
220×16	220	16,0	21,0	7,0	68,58	3175,4	198,7	6,80	5045,4	8,58	1305,5	153,3	4,36	1869,0	6,02	53,83
250×16	250	16,0	24,0	8,0	78,40	4717,1	258,4	7,76	7492,1	9,78	1942,1	203,4	4,98	2775,0	6,75	61,55
250×18	250	18,0	24,0	8,0	87,72	5247,2	288,8	7,73	8336,7	9,75	2157,8	223,4	4,96	3089,0	6,83	68,86
250×20	250	20,0	24,0	8,0	96,96	5764,9	318,8	7,71	9159,7	9,72	2370,0	242,5	4,94	3395,0	6,91	76,11
250×22	250	22,0	24,0	8,0	106,12	6270,3	348,3	7,69	9961,3	9,69	2579,0	260,5	4,93	3691,0	7,00	83,31
250×25	250	25,0	24,0	8,0	119,71	7006,4	391,7	7,65	11126	9,64	2887,3	287,1	4,91	4119,0	7,11	93,97
250×28	250	28,0	24,0	8,0	133,12	7716,9	434,3	7,61	12244	9,59	3189,9	312,0	4,90	4527,0	7,23	104,50
250×30	250	30,0	24,0	8,0	141,96	8176,8	462,1	7,59	12965	9,56	3388,9	327,8	4,89	4788,0	7,31	111,44
250×35	250	35,0	24,0	8,0	163,71	9281,0	530,1	7,53	14683	9,47	3879,4	366,1	4,87	5401,7	7,53	128,51

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Теоретические сведения и примеры решения контрольных задач	5
1.1. Основные понятия сопротивления материалов	5
1.2. Расчет статически определимых систем при центральном растяжении-сжатии.....	8
1.3. Расчет статически неопределимых систем при центральном растяжении-сжатии.....	15
1.4. Расчеты на прочность и жесткость при кручении	21
1.5. Геометрические характеристики плоских сечений.....	27
1.6. Расчет балок на прочность при изгибе.....	35
1.7. Определение внутренних усилий в статически определимой раме.....	50
1.8. Расчет стержня на внецентренное сжатие (растяжение)	57
1.9. Расчет сжатого стержня на продольный изгиб	64
1.10. Динамические задачи. Расчет балки при ударе.....	74
2. Указания к выполнению контрольных работ	80
3. Задачи для контрольных работ	82
4. Вопросы для самоконтроля по разделам изучаемой дисциплины	108
Библиографический список	112
Приложение 1. Опорные реакции, эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в статически определимых балках.....	114
Приложение 2. Справочные данные по геометрическим характеристикам.....	116

Учебное издание

*Лариса Евгеньевна Путеева
Борис Ахатович Тухфатуллин*

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

**ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ
ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ «СТРОИТЕЛЬСТВО»**

Учебное пособие

Редактор М.В. Пересторонина
Оригинал-макет подготовлен авторами

Подписано в печать 15.10.2014.
Формат 60×84/16. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 7,21. Уч.-изд. л. 6,53. Тираж 100 экз. Заказ № 298.

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.