Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

РЯДЫ

Методические указания
для самостоятельной работы студентов

Составители О.А. Сергеева,
О.В. Иванова

Томск 2013

Ряды/Сост. О.А. Сергеева, О.В. Иванова. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. – 44 с.

Рецензент Р.И. Лазарева

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине Б2.Б.1 – «Математика» при изучении темы «Ряды» студентами второго курса заочной формы обучения всех специальностей и всех направлений и профилей подготовки специалистов и бакалавров.

Печатаются по решению методического семинара кафедры высшей математики, протокол № 4 от 10 декабря 2012 г.

Утверждены и введены в действие проректором по учебной работе В.В. Дзюбо.

с 1.09. 2013
до 1.09.2018

Оригинал-макет подготовлен О.А. Сергеевой.

Подписано в печать . .13.
Формат 60×84. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 2,37. Тираж 100 экз. Заказ № .

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемые методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов заочного факультета в процессе выполнения контрольной работы при изучении темы «Ряды». Математическое содержание данного раздела направлено на формирование у студентов общекультурных и профессиональных компетенций: студент должен владеть культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения. У студентов должна сформироваться способность к целенаправленному применению базовых знаний в области математических, естественных, гуманитарных и экономических наук в профессиональной деятельности. Данные методические указания помогут развить у студентов способность к использованию законов и методов математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении профессиональных задач. В результате изучения материала студент должен освоить основные понятия теории числовых и функциональных рядов, применять ряды к приближённым вычислениям, уметь использовать математические методы в технических приложениях, владеть методами математического анализа.

Ряды широко используются в математике и в её приложениях. Учение о рядах возникло в 17-м веке. Свойства простейших рядов, начиная с геометрических прогрессий, возникающих из представления обыкновенных дробей в виде периодических десятичных, изучил английский математик Джон Валлис (1685).

Немецкий математик Николаус Меркатор, интегрируя разложение $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$, получил разложение логарифмической функции в степенной ряд:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ \ldots(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$ – первый (после геометрической прогрессии) пример степенного разложения (1668).

Исаак Ньютон вывел формулу бинома для любого показателя α. Интегрируя разложение $(1-x^2)^{-1/2}$, он получил разложение для $\arcsin x$.

В развитии учения о рядах приняли участие почти все математики 17-го века (Грегори, Гюйгенс, Лейбниц, Бернулли и др.).

Для преодоления трудностей, связанных с интегрированием, Ньютон и Лейбниц выражали подынтегральную функцию в виде многочлена с бесконечным числом слагаемых. Применяя к таким выражениям обычные правила алгебры, математики 18-го века сделали множество замечательных открытий. Однако обнаружилось, что к бесконечным суммам не всегда можно применять правила, справедливые для выражений, содержащих конечное число слагаемых, это могло привести к ошибкам. Стало необходимым точно сформулировать основные понятия и строго доказать свойства бесконечных рядов. Эта задача решена в 19-м веке.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Определение числового ряда, его сходимости и суммы ряда.

2. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточный признак расходимости ряда.
3. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.
3.1. Интегральный признак Маклорена−Коши.
3.2. Признаки сравнения.
3.3. Признак Даламбера.
3.4. Радикальный признак Коши.
4. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимости.
5. Определение функционального ряда, область сходимости.
7. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
8. Разложение функций в степенной ряд. Ряд Тейлора. Условия разложения функции в ряд Тейлора.
10. Определение ряда Фурье. Условия разложения функции в ряд Фурье. Разложение функции в ряд Фурье.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Пусть задана бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...,$ где $a_n = f(n)$ – числовая функция, определенная на множестве натуральных чисел N.

Составленная из этих чисел сумма $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, называется числовым рядом, числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ – членами ряда, и a_n – общим членом ряда. Иногда нумерацию членов ряда бывает удобнее начинать не с единицы, а с нуля или же с какого-либо натурального числа, большего единицы. Рассмотрим примеры рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n!} = \frac{3}{1} - \frac{4}{1\cdot 2} + \frac{5}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

Составим суммы следующего вида, складывая члены ряда:

$S_1 = a_1$;

$S_2 = a_1 + a_2$;

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$;

…………………

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

Полученная числовая последовательность $\{S_n\}$ называется последовательностью частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Сумма S_n конечного числа n первых членов ряда называется n - частичной суммой ряда.

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм ряда $\{S_n\}$, то есть $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется сходящимся, число S - суммой ряда, а число $R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ - остатком ряда.

Если $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует, либо $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называют расходящимся и не имеет суммы.

Таким образом, вопрос о сходимости числового ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ по определению равносилен вопросу о существовании конечного предела последовательности частичных сумм ряда.

Исследуем на сходимость геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, члены которого образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q. Установим, при каких значениях q ряд сходится.

Поскольку

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1},$$
$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n \Rightarrow$$
$$S_n - qS_n = a - aq^n \Rightarrow S_n\left(1-q\right) = a\left(1-q^n\right),$$

то при $q \neq 1$

$$S_n = \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}.$$

Следовательно, наличие предела последовательности частичных сумм ряда зависит от величины q, а именно:

при $\left|q\right| < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}, S = \dfrac{a}{1-q}$;

при $\left|q\right| > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд расходится;

при q=1 ряд принимает вид $a + a + \ldots + a + \ldots$, для него $S_n = na,\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$; ряд расходится;

при q=-1 ряд принимает вид, $a - a + \ldots + \left(-1\right)^{n-1} a + \ldots$, для него $S_{2m} = 0, S_{2m+1} = a,$ последовательность частичных сумм не имеет предела, ряд расходится.

Следовательно, геометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} : \begin{cases} \text{при } |q| < 1 - \text{сходится,} \\ \text{при } |q| \geq 1 - \text{расходится.} \end{cases}$$

и его сумма $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Критерий Коши сходимости числового ряда

Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число N, что для всех $n \geq N$ и любого натурального k выполняется неравенство:

$$\left|\sum_{s=n+1}^{n+k} a_s\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}\right| < \varepsilon .$$

Необходимый признак сходимости ряда

Из критерия Коши сразу получается: общий член a_n сходящегося ряда должен стремиться к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Достаточный признак расходимости ряда

Если же общий член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Приведенные признаки следует понимать так:

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится точно, но,

если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может сходиться, а может и расходиться.

Так, например:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+1+\ldots \quad \text{расходится, т.к. } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{1}{4}+\frac{3}{7}+\frac{5}{10}...$$ расходится,т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n}=\frac{2}{3}\neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ то ряд может, как сходиться, так и расходиться. Поэтому исследование нужно продолжить, используя достаточные признаки сходимости числовых рядов.

Заметим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ называется простейшим гармоническим рядом.

ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЗНАКОПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Рассмотрим вопрос об установлении сходимости или расходимости числовых рядов, члены которых неотрицательны.

Интегральный признак Маклорена−Коши

Пусть дан ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\equiv\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$, где $f(n)$ − значение некоторой функции $f(x)$, при $x=n$, определённой при $x\geq n_0$. Если $f(x)$ положительная и монотонно убывающая функция, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$.

Если $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx = \begin{cases} A, \text{то ряд сходится}, \\ \infty \text{ илинесуществует,то рядрасходится.} \end{cases}$

Использование данного признака вязано с исследованием на сходимость несобственного интеграла, что не всегда является простой задачей. Поэтому признак используется только в тех случаях, когда общий член ряда при замене *n* на *x* представляет собой интегрируемую функцию и остальные, ниже изложенные признаки бессильны.

Исследуем с помощью интегрального признака Коши обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^p}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^p} = \frac{a}{1^p} + \frac{a}{2^p} + \frac{a}{3^p} + \ldots + \frac{a}{n^p} + \ldots.$$

Сопоставим членам ряда значения положительной, монотонно убывающей функции $f(x) = \frac{a}{x^p}$ при $x = 1, 2, \ldots, n, \ldots$

Известно, что несобственный интеграл

$$a\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{a}{p-1}, \ p > 1 \\ +\infty, \ p \le 1 \end{cases}$$

при $p > 1$ сходится, а при $p \le 1$ расходится.

Следовательно, заданный обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^p} : \begin{cases} \text{при } p > 1 \text{ сходится}, \\ \text{при } p \le 1 \text{ расходится}. \end{cases}$$

В частности, при $p=1, a=1$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$, который расходится.

Исследуем ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ с помощью интегрального признака Коши, так как общий член ряда при замене n на x представляет собой интегрируемую, положительную и монотонно убывающую функцию. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{d\left(\ln x\right)}{\ln x}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln\left(\ln x\right)\Big|_{2}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left(\ln b\right)-\ln\left(\ln 2\right)\right)=+\infty.$$

Интеграл расходится, следовательно, данный ряд тоже расходится.

Признаки сравнения

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда часто устанавливают путём сравнения его с одним из, так называемых, эталонных рядов (геометрическим рядом или обобщенным гармоническим рядом), заведомо сходящимся или расходящимся.

1. Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Если существует натуральное число N, такое, что неравенство $a_n\le b_n$ выполнено для всех $n\ge N$, то из

сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=K$ (в частности, если $a_n \sim b_n$), то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, при $K \le \infty$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Таким образом, при 0 < $K < \infty$, оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Суть использования признака сравнения, особенно его предельной формы, состоит в том, что нужно для данного ряда организовать эквивалентный ему ряд в виде одного из эталонных рядов и сделать вывод о его сходимости. Чтобы привести данный ряд к эквивалентному ряду вида $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ или $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^p}$, можно выделить главные члены в выражении общего члена ряда, заменить бесконечно малые (бесконечно большие) величины эквивалентными и т.д.

Напомним эквивалентные величины.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\quad \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x),$$
$$tg\alpha(x)\sim\alpha(x),\quad arctg\alpha(x)\sim\alpha(x),$$
$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x),\quad \ln\alpha(x)\sim\alpha(x).$$

Пусть $P_n(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_1 x + A_0$ - многочлен степени n.

Тогда при $x \to \infty$ $P_n(x) \sim A_n x^n$,

А при $x \to 0$ $P_n(x) \sim A_0$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$ сходится по признаку сравнения 1, так как $\frac{1}{(n+1)3^n} < \frac{1}{3^n}$ при $n \to \infty$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходится как геометрический при $q = \frac{1}{3} < 1$.

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ сходится по признаку сравнения 1, так как $\frac{1}{n^2 \ln n} < \frac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $p = 2 > 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3n^2}{1+n^3}$ расходится, так как члены его для достаточно больших n эквивалентны членам гармонического ряда

$\frac{2+3n^2}{1+n^3} \sim \frac{3n^2}{n^3} \sim \frac{3}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$ расходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^2}+2}{\sqrt[3]{n^5-n+1}}$ сходится, так как $\frac{\sqrt[5]{n^2}+2}{\sqrt[3]{n^5-n+1}} \sim \frac{\sqrt[5]{n^2}}{\sqrt[3]{n^5}} = \frac{n^{\frac{2}{5}}}{n^{\frac{5}{3}}} = n^{\frac{2}{5}-\frac{5}{3}} = n^{-\frac{19}{15}} = \frac{1}{n^{\frac{19}{15}}}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{19}{15}}}$

сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $p=\frac{19}{15}>1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot arctg\frac{1}{n^4}$ сходится, так как

$n\cdot arctg\frac{1}{n^4}\sim\frac{n}{n^4}=\frac{1}{n^3}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $p=3>1$.

Здесь использована эквивалентность $arctg\frac{1}{n^4}\sim\frac{1}{n^4}$.

Признак Даламбера

Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел отношения последующего члена ряда a_{n+1} к предыдущему a_n, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$, то при $p<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $p>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. При $p=1$ предельный признак Даламбера не даёт ответа на вопрос, сходится данный ряд или расходится.

Признак Даламбера применяется при решении вопроса о сходимости таких рядов, общие члены которых содержат факториалы, либо комбинации степенных и показательных выражений.

При применении признака Даламбера (а также радикального признака Коши) может встретиться необходимость использования второго замечательного предела:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ исследуем с помощью признака Даламбера, так как он содержит факториал. Ряд сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n!(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(2n+1)^2}$ исследуем с помощью признака Даламбера, так как он содержит комбинацию показательной и степенной функции. Ряд расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{\left(2(n+1)+1\right)^2}\cdot\frac{(2n+1)^2}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{(2n+3)^2}\cdot\frac{(2n+1)^2}{5^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5(2n+1)^2}{(2n+3)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5(2n)^2}{(2n)^2}=5>1.$$

Предельный признак Коши

Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ существует предел корня n-ой степени из общего члена ряда, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, то при $q<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q>1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. При $q=1$ предельный признак Коши не даёт ответа на вопрос, сходится данный ряд или расходится.

Радикальный признак Коши применяется для решения вопроса о сходимости рядов, общий член которых представляет собой n-ю или кратную n степень какого-либо выражения.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+3}{5n+1}\right)^n$ сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{5n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{5n}=\frac{2}{5}<1.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n}{5n+1}\right)^{n^2}$ сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{5n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{5n+1}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{5n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0<1.$$

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимости

Ряд называется знакочередующимся, если его члены являются поочерёдно положительными и отрицательными. Такой ряд записывается в виде:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots$, где $a_n>0$ для любого n.

Признак Лейбница

Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится, если члены знакочередующегося ряда по абсолютной величине монотонно убывают, а предел общего члена равен 0: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$, и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

При этом сумма ряда меньше его первого члена по абсолютной величине и имеет одинаковый с ним знак $|S| \leq |a_1|$

Абсолютная и условная сходимости

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ называется условно сходящимся, если он сходится по признаку Лейбница, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

Таким образом, чтобы исследовать сходимость знакочередующегося ряда, прежде всего, исследуют сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ с помощью признаков, приведённых выше.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится абсолютно. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, то для ряда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}a_n$ проверяем выполнение признака Лейбница. Если признак Лейбница выполняется, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}a_n$ сходится условно. Если признак Лейбница не выполняется, то ряд расходится.

Выделение класса абсолютно сходящихся рядов целесообразно потому, что они обладают рядом важных свойств:

Абсолютно сходящийся ряд остается сходящимся и не меняет величины суммы ряда при любой перестановке его членов. В условно сходящемся ряде, изменяя порядок следования членов, можно сделать сумму ряда равной любому наперед заданному числу или даже сделать ряд расходящимся.

Абсолютно сходящиеся ряды в отличие от условно сходящихся, можно перемножать. При этом сумма произведения рядов будет равна произведению сумм рядов сомножителей.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{3n+2}{5n+3}$ исследуем на абсолютную сходимость. Для этого составляем ряд из модулей членов данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{5n+3}$. Общий член ряда представляет собой отношение двух многочленов первой степени и, следовательно, не выполнен необходимый признак сходимости числового ряда: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{5n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{5n}=\frac{3}{5}\neq 0$. Следовательно, оба ряда расходятся.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+2}{5n+3}\right)^n$ исследуем на абсолютную сходимость. Для этого составляем ряд из модулей членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{5n+3}\right)^n$. Так как общий член ряда представляет собой n-ю степень выражения, применим радикальный признак Коши. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{5n+3}\right)^n$ сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{5n+3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{5n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{5n}=\frac{3}{5}<1.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+2}{5n+3}\right)^n$ сходится абсолютно.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(3n^2-1)}$ исследуем на абсолютную сходимость. Для этого составляем ряд из модулей членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n^2-1}$. Ряд расходится, так как члены его для достаточно больших n эквивалентны членам гармонического ряда

$$\frac{2n+1}{3n^2-1}\sim\frac{2n}{3n^2}\sim\frac{2}{3n},$$ а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2/3}{n}$ расходится.

Проверяем выполнение признака Лейбница:

$\frac{3}{2}>\frac{5}{11}>\frac{7}{26}>\ldots$, и $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3n}=0$.

Ряд сходится по признаку Лейбница и, следовательно, ряд сходится условно.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Функциональным называется ряд, члены которого есть непрерывные функции от x

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x).$$

При конкретном значении $x=x_0$ функциональный ряд становится числовым, который либо сходится, либо расходится.

Совокупность значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости ряда.

Степенные ряды. Интервал сходимости.

Из всех функциональных рядов наиболее простейшими и употребительными являются степенные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - действительные числа.

Для степенных рядов справедлива следующая теорема Абеля:

Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ сходится при $x=x_1$, то он абсолютно сходится для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|<|x_1|$.

Если степенной ряд расходится при $x=x_2$, то он расходится и для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>|x_2|$.

Из теоремы Абеля следует, что существует интервал $-r < x < r$, для всех точек x которого степенной ряд сходится, а для всех $|x| > r$ - расходится.

Число r называется радиусом сходимости степенного ряда. Интервал $(-r, r)$ называется интервалом сходимости.

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n = a_0 + a_1 \left(x - x_0\right) + a_2 \left(x - x_0\right)^2 + \ldots + a_n \left(x - x_0\right)^n + \ldots$$

называется степенным рядом общего вида. Для такого ряда интервал сходимости определяется неравенством $|x - x_0| < r$, т.е. интервал сходимости $\left(-r + x_0, r + x_0\right)$.

Радиус сходимости может быть равен нулю, и тогда ряд сходится только в одной точке, но может быть и неограниченно большим $(r = \infty)$, тогда ряд сходится на всей числовой оси.

В каждой внутренней точке интервала сходимости степенной ряд сходится абсолютно.

Для нахождения интервала сходимости степенного ряда удобно пользоваться достаточными признаками сходимости знакоположительных рядов и, в частности, признаками Даламбера и Коши. В соответствии с этими признаками степенной ряд сходится, если

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1, \text{ или } \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1.$$

Исследовать степенной ряд на сходимость – значит найти его интервал сходимости и выяснить, сходится или расходится ряд в граничных точках интервала сходимости.

Для исследования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n^2}$ используем признак Даламбера. Составим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему и потребуем, чтобы он был по модулю меньше единицы.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{2^n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2xn^2}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty} 2|x| < 1.$$

Откуда получаем $|x| < \frac{1}{2}$ интервал значений x, в котором ряд сходится, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Проверяем сходимость на концах интервала. Для этого подставляем в исходный ряд значения $x = \pm 1/2$, получаем числовые ряды и исследуем их на сходимость.

При $x = 1/2$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(1/2)^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Ряд сходится как обобщенный гармонический ряд, т.к $p = 2 > 1$.

При $x = -1/2$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(-1/2)^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Ряд сходится абсолютно, так как сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда.

Итак, ряд сходится на промежутке $-1/2 \le x \le 1/2$.

Для исследования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n}$ используем признак Коши.

Запишем предел корня степени n из общего члена ряда и потребуем, чтобы он был по модулю меньше единицы.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x+1)^n}{2^n}\right|} = \left|\frac{x+1}{2}\right| < 1.$$

Откуда получаем $|x+1|<2$, $-2<x+1<2$, следовательно, интервал сходимости $-3<x<1$.

Проверяем сходимость на концах интервала.

При $x=-3$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+1)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

Ряд расходится, так как предел его общего члена не равен нулю.

При $x=1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1$.

Ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда.

Итак, ряд сходится на промежутке $-3<x<1$.

Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора

Степенные ряды во многом сходны с многочленами, и это делает их удобным средством для приближённых вычислений. В связи с этим очень важен вопрос о возможности разложения заданной функции $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$, в частности, по степеням x, то есть представления её в виде суммы рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ или $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Предположим, что функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в интервале $|x-x_0|<r$. Тогда ряд:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется рядом Тейлора.

Чаще всего приходится иметь дело со случаем, когда $x_0 = 0$, и $f(x)$ разлагается в ряд по степеням x:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \quad .$$

Этот ряд обычно называют рядом Маклорена.
Коэффициенты рядов Тейлора и Маклорена вычисляются через значения производных всех порядков:

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \ldots \text{и}$$

носят название коэффициентов Тейлора.

Но существование производных любого порядка не является достаточным условием разложения функции в ряд Тейлора.

Чтобы установить достаточное условие представления функции $f(x)$ степенным рядом, обратимся к формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

где $S_n(x)$ - n-я частичная сумма ряда Тейлора, $R_n(x)$ остаточный член формулы Тейлора, причем остаточный член в форме Лагранжа имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(a + \theta(x - x_0)\right)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \text{ где } (0 < \theta < 1).$$

Из равенства $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$ следует, что для того, чтобы ряд Тейлора сходился к $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член ряда стремился к нулю, при $n \to \infty : \lim_{n\to\infty} R_n\left(x\right) = 0$.

Перейдём к конкретным разложениям функций в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} ;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \left(-1\right)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!} ;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \left(-1\right)^n \frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n x^{2n}}{\left(2n\right)!} .$$

Все эти разложения справедливы для $\forall\ x \in \left(-\infty; +\infty\right)$.

$$\operatorname{arctg}\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \left(-1\right)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^{n-1} x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)} ;\ x \in \left[-1; 1\right].$$

$$\ln\left(1 + x\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \left(-1\right)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n-1} \frac{x^n}{n} ; x \in \left(-1; 1\right].$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n ; x \in \left(-1; 1\right).$$

$$\left(1 + x\right)^m = 1 + m\,x + \frac{m\left(m-1\right)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m\left(m-1\right)\ldots\left(m-n+1\right)}{n!} x^n + \ldots ;$$

$$x \in \left(-1; 1\right).$$

Этот ряд называют биномиальным рядом.

Разложение функций в степенные ряды можно проводить двумя способами.

Можно непосредственно вычислять коэффициенты ряда через значения производных функций по формуле $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$.

Можно использовать шаблонные ряды элементарных функций. Для этого нужно исходную функцию преобразовать к соответствующему виду, после чего можно использовать стандартное разложение. Этот способ более простой.

Разложим функцию $f(x) = \dfrac{1}{7-x}$ в ряд Тейлора по степеням x, непосредственно вычисляя коэффициенты ряда по формуле $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$.

Вычислим производные:

$$f'(x) = \frac{(-1)(-1)}{(7-x)^2} = \frac{1}{(7-x)^2},\ f'(0) = \frac{1}{7^2};$$

$$f''(x) = \frac{(-2)(-1)}{(7-x)^3} = \frac{2\cdot 1}{(7-x)^3},\ f''(0) = \frac{2\cdot 1}{7^3};$$

$$f'''(x) = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{(7-x)^4},\ f'''(0) = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{7^4} = \frac{3\,!}{7^4};$$

…………………………………………………………

$$f^{(n)}(x) = \frac{n\,(n-1)\ldots 1}{(7-x)^{n+1}},\ f^{(n)}(0) = \frac{n\,!}{7^{n+1}}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{7-x} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2}x + \frac{1}{7^3}x^2 + \frac{1}{7^4}x^3 + \ldots + \frac{1}{7^{n+1}}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7^{n+1}}x^n.$$

Исследуем полученный ряд на сходимость, применяя признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}\cdot 7^{n+1}}{7^{n+2}\cdot x^n}\right| = \dfrac{|x|}{7}$.

Ряд сходится при условии $\frac{|x|}{7} < 1$, то есть $|x| < 7$, или для $-7 < x < 7$.

Исследуем ряд на сходимость на концах интервала сходимости. На левой границе интервала при $x = -7$, получим числовой ряд:

$\frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \ldots$, который расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 0$.

При $x = 7$ (правая граница интервала сходимости), получим числовой ряд: $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{7} + \ldots$, который тоже расходится.

Таким образом, областью сходимости является интервал $(-7; 7)$.

Покажем, что полученный ряд, сходится к функции $f(x) = 1/(7 - x)$. Для этого покажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$.

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x)^{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{7}\left(\frac{\theta}{7}\right)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{7}\left(\frac{\theta x}{7}\right)^{n+1} = 0, \text{ т.к. } \frac{\theta x}{7} < 1.$$

Разложим функцию $f(x) = \frac{1}{7 - x}$ в ряд Тейлора по степеням x, используя шаблонный ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1} x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n,$$

Преобразуем исходную функцию $\frac{1}{7-x} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1 - (x/7)}$ и в стандартном разложении заменяем x на $-(x/7)$:

$$\frac{1}{7-x}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1+\left(-x/7\right)}=\frac{1}{7}\left(1+\frac{x}{7}+\frac{x^2}{7^2}+\frac{x^3}{7^3}+\ldots\right).$$

Ряды Фурье

В науке и технике приходится иметь дело с периодическими явлениями, то есть с явлениями, которые воспроизводятся в прежнем виде через определённый промежуток времени T, называемый периодом (работа двигателя внутреннего сгорания, переменный ток и т. д.). Различные величины, связанные с рассматриваемым периодическим явлением, по истечении периода T возвращаются к своим прежним значениям и представляют, следовательно, периодические функции, характеризуемые равенством $\varphi\left(x+T\right)=\varphi\left(x\right)$.

Простейшей из периодических функций, удовлетворяющих этому условию, является функция $A\sin\left(\omega t+\alpha\right)$, где A, α – постоянные; ω − частота, связанная с периодом T соотношением $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$.

Из подобных простейших периодических функций могут быть составлены и более сложные. Ясно, что составляющие синусоидальные величины должны быть разных частот, так как сложение синусоидальных величин одной и той же частоты не даёт ничего нового. Если же сложить несколько величин вида: $y_0=A_0$, $y_1=A_1\sin\left(\omega t+\alpha_1\right)$, $y_2=A_2\sin\left(2\omega t+\alpha_2\right)$, $y_3=A_3\sin\left(3\omega t+\alpha_3\right)\ldots$ с частотами $\omega, 2\omega, 3\omega$ и периодами T, $T/2$, $T/3$, то получится периодическая функция с периодом T, но уже существенно отличная от величин $y_0=A_0$, $y_1=A_1\sin\left(\omega t+\alpha_1\right)$, $y_2=A_2\sin\left(2\omega t+\alpha_2\right)$, $y_3=A_3\sin\left(3\omega t+\alpha_3\right)\ldots$

Можно ли данную периодическую функцию $f(x)$ представить в виде суммы конечного или бесконечного множества величин вида $y_0 = A_0$, $y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$, $y_2 = A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2)$, $y_3 = A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3)$...?

Для того, чтобы установить возможность тригонометрического разложения для заданной функции $f(x)$ с периодом 2π, в ряд по тригонометрическим функциям вида $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, нужно исходить из определённого набора коэффициентов $a_0, a_1, b_0, b_1, ..., a_n, b_n, ...$. Приведём формулы для их нахождения:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \ (n = 0, 1, 2, ...);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \ (n = 1, 2, 3 ...).$$

Ряд вида $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ называется рядом Фурье для функции $f(x)$; a_n, b_n коэффициентами Фурье функции $f(x)$.

Теорема Дирихле

Пусть периодическая с периодом $T = 2\pi$ функция $f(x)$ удовлетворяет на промежутке $[-\pi; \pi]$ так называемым условием Дирихле:

а) интервал $(-\pi; \pi)$ можно разбить на конечное число интервалов, в которых $f(x)$ непрерывна и монотонна;

б) если x_0 является точкой разрыва функции $f(x)$, то существуют односторонние пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$.

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится, и имеет место равенство:

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\right]=$$

$$=\begin{cases} f(x), \quad \text{если } f(x) \text{ непрерывна;} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, \quad \text{если} f(x) \text{ разрывна;} \\ \dfrac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2} \text{ в концевых точках промежутков} \\ \text{периодичности функции.} \end{cases}$$

Если представить функцию $f(x)$ периодически продолженной с периодом 2π на всю числовую ось, то утверждение теоремы Дирихле будет справедливо для всех x.

Если раскладываемая в ряд Фурье функция имеет период $2l$, то рассматривают промежуток $[-l;l]$. При этом коэффициенты ряда Фурье вычисляются по формулам:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad (n=0,1,2,...);$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad (n=1,2,3,...).$$

Ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Если $f(x)$ на промежутке $[-\pi; \pi]$ – чётная функция, то есть выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, то коэффициенты Фурье находятся по формулам:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx\,, \qquad (n = 0, 1, 2, ...);$$

$$b_n = 0.$$

При этом ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\,.$$

Если $f(x)$ нечётная функция, то есть выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, то коэффициенты Фурье находятся по формулам:

$$a_n = 0\,;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx\,.$$

При этом ряд Фурье для функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,.$$

Разложение на промежутке $[0; \pi]$.

Если функция $f(x)$ задана на промежутке $[0; \pi]$ и удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то её можно разложить в ряд по косинусам вида $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\,x$ или в ряд по синусам вида $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\,x$. Оба ряда на промежутке $[0; \pi]$ дают значение функции $f(x)$ в точках непрерывности функции и величину $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в точках разрыва функции $f(x)$. Однако вне промежутка $[0;\pi]$ эти разложения описывают разные функции. Ряд по косинусам даёт такую функцию, которая получается из функции $f(x)$ путём чётного продолжения на соседний промежуток $[-\pi;0)$ и периодического продолжения с периодом 2π вне этого промежутка $[-\pi;\pi]$. Ряд по синусам даёт такую функцию, которая получается из $f(x)$ путём нечётного продолжения на промежуток $[-\pi;0)$ и периодического продолжения с периодом 2π вне промежутка $[-\pi;\pi]$.

Если $f(x)$ задана на промежутке $[0;l]$, то формулы для вычисления коэффициентов записываются в следующем виде:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx;\quad b_n=0.$$

$$a_n=0,\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Тогда ряд Фурье принимает вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\text{ или}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Разложим функцию в ряд Фурье:

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{при } -\pi<x<0\\ 0, & \text{при } 0\le x<\pi\end{cases}\text{ на промежутке } [-\pi;\pi].$$

Заметим, что задача на разложение функции в ряд Фурье состоит в том, чтобы, используя соответствующие формулы, найти коэффициенты ряда и записать ряд Фурье. Очень важно затем выяснить вопрос о сходимости ряда и тем самым установить связь между заданной функцией $f(x)$ и функцией $S(x)$, являющейся суммой полученного тригонометрического ряда.

Так как функция $f(x)$ задана на промежутке $[-\pi;\pi]$, коэффициенты ряда Фурье находятся по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

В нашем случае будет:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\,dx + \int_{0}^{\pi} 0\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{0} = -\frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,x\,\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\bigg|_{-\pi}^{0} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\left(\cos 0 - \cos n\pi\right) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n = 2k; \\ \dfrac{2}{\pi\,n^2}, & \text{если} \quad n = 2k-1. \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\,x\cos nx\bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\sin nx\bigg|_{-\pi}^{0} =$$

$$=\frac{1}{n}\cos n\pi=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Таким образом, ряд Фурье данной функции имеет вид:

$$-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[-\pi;\pi]$, то ряд сходится в каждой точке промежутка $[-\pi;\pi]$ к функции $f(x)$, это значит, что на промежутке $[-\pi;\pi]$ имеет место равенство:

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Например, при $x=0$ будет:

$$0=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

На концах промежутка $[-\pi;\pi]$ сумма ряда Фурье будет равна:

$$f(-\pi+0)+f(\pi-0)=\frac{0-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

Разложим в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$ на интервале $(-1;1)$.

Функция $f(x)$ задана на интервале $(-l;l)$ чётная, поэтому коэффициенты ряда Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\,\pi}{l}\,x\,dx\,;$$

$$b_n = 0\,.$$

В нашем случае будет:

$$a_0 = 2\int\limits_0^1 x\,dx = 1\,;$$

$$a_n = 2\int\limits_0^1 x\cos nx\,\pi\,dx = 2\left(\frac{x\sin n\,\pi\,x}{n\,\pi} + \frac{\cos n\,\pi\,x}{n^2\,\pi^2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{n^2\,\pi^2}\left(\cos n\,\pi - 1\right) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n = 2k; \\ -\dfrac{4}{n^2\,\pi^2}, & \text{если} \quad n = 2k-1. \end{cases}$$

Таким образом, ряд Фурье данной функции имеет вид:

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\pi\,x\,.$$

Так как $f(x)$ непрерывна на интервале $(-1;\ 1)$, во всех точках этого интервала имеет место равенство:

$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\,\pi\,x\,.$$

Например, при $x = 0$ будет:

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1–10. Исследовать ряды на сходимость:

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2^n n!}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \dfrac{1}{3^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^4+2}$.

2. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(n+1)}{2^n (n-1)!}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+2}{3n+1}\right)^{n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2-1}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{(n+2)!}$;

б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^3-3}$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{(n+2)!\,4^n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{\sqrt{n^3+1}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n}\frac{1}{5^{n}}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^{n}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3e^n}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}}$;

в). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{n+2}}{5^n}$

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n(n+1)}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^3+4}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{3^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^5+4n^3+2n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+1)!}{3^n \, n!}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!\, 6^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^6+2n^5+n^4+n^3+7}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+1}{3n+2}\right)^{n^2}$.

11−20. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды:

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n^2}{n^4-n^2+1}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(3/2)^n}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$.

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,2^{2n+1}}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2}{n^5-n^3+1}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)(5/4)^n}$.

21−30. Найти область сходимости функционального ряда:

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\,4^n}$.

22. . $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{4^n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\,9^n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)\,2^n}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{4^n}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{n+1}}{3n+8}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{(n+1)5^n}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-4)^{2n}}{(n+1)^{2n}}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{6^n}$.

31−40. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x:

31. $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$.

32. $f(x)=\dfrac{1}{3+x}$.

33. $f(x)=\dfrac{1}{4+x}$.

34. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

35. $f(x)=\dfrac{1}{5-x}$.

36. $f(x)=\dfrac{1}{6-x}$.

37. $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$.

38. $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$.

39. $f(x)=\dfrac{1}{(3-2x)}$.

40. $f(x)=\dfrac{1}{(2-3x)}$.

41−50. Разложить функцию в ряд Фурье в указанном интервале:

41. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

42. $f(x)=|x|$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

43. $f(x)=x^2$ в интервале $(0;2\pi)$.

44. $f(x)=x+1$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

45. $f(x)=1+|x|$ в интервале $(-1;1)$.

46. $f(x)=|1-x|$ в интервале $(-2;2)$.

47. $f(x)=x^2+1$ в интервале $(-2;2)$.

48. $f(x)=x-2$ в интервале $(-2;2)$.

49. $f(x)=1-x$ в интервале $(0;2)$.

50. $f(x)=|2-x|$ в интервале $(-2;2)$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Ниже приведена таблица номеров задач, входящих в задание на контрольную работу «Ряды». Студент должен выполнить контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного номера (шифра).

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Номера задач контрольных заданий	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. – Т.2. - М.: Наука, 2008. – 551 с.

2. Высшая математика в управлениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова [и др.]. – М.: ОНИКС, 2005 – 415 с.

3. Щипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Щипачев. – М.: Высшая школа, 2007. – 465 с.

4. Воробьев, Н.Н. Теория рядов / Н.Н. Воробьев. – СПб.: Лань, 2008. – 408 с.

Дополнительная литература

1. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – Т.2. – М.: Высшая школа, 1981. – 720 с.

2. Высшая математика. Часть 4 / Л.И. Терехина, И.И. Фикс. – Томск: Дельтаплан, 2003. – 264 с.

3. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике / Л.А. Кузнецов. – М.: Высшая школа, 1983. – 175 с.

4. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ