

Расчет электрических цепей синусоидального тока

Схема цепи приведена на рисунке 1.

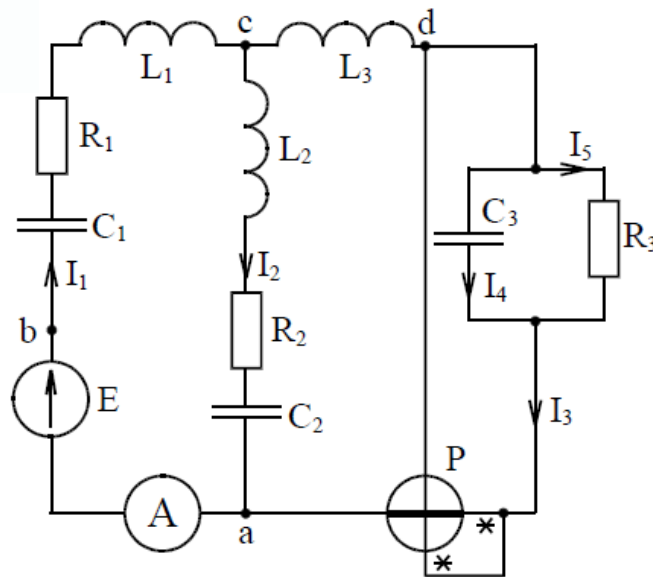


Рис. 1

Параметры цепи:

$$L_1 = 31,8 \text{ мГн}; L_2 = 63,66 \text{ мГн}; L_3 = 79,58 \text{ мГн};$$

$$C_1 = 159,15 \text{ мкФ}; C_2 = 79,58 \text{ мкФ}; C_3 = 318 \text{ мкФ};$$

$$R_1 = 8 \text{ Ом}; R_2 = 16 \text{ Ом}; R_3 = 27 \text{ Ом};$$

$$E = 130 \text{ В}; \beta = 120^\circ; f = 50 \text{ Гц}.$$

Для электрической схемы, соответствующей номеру варианта, выполнить следующее:

1. На основании законов Кирхгофа составить в общем виде систему уравнений для расчета токов во всех ветвях цепи, записав ее в двух формах:

- а) дифференциальной;
- б) символической.

2. Определить комплексы действующих значений токов во всех ветвях, воспользовавшись одним из методов расчета линейных электрических цепей.

3. По результатам расчета в п.2 произвести проверку выполненных расчетов при помощи законов Кирхгофа.

4. Определить комплексную мощность источника питания и проверить баланс мощностей.

5. Определить показания ваттметра.
6. Используя данные расчетов, записать мгновенные значения токов и напряжений.
7. Построить топографическую диаграмму, совмещенную с векторной диаграммой токов. При этом потенциал точки a , указанной на схеме, принять равным нулю.

Решение

1. Для заданной цепи

$$n_y = 3 - \text{число узлов};$$

$$n_\varepsilon = 5 - \text{число ветвей}.$$

Количество уравнений по первому закону Кирхгофа

$$n_1 = n_y - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Количество уравнений по второму закону Кирхгофа

$$n_2 = n_\varepsilon - (n_y - 1) = 5 - (3 - 1) = 3.$$

На основании законов Кирхгофа составим в общем виде систему уравнений для расчета токов во всех ветвях цепи, записав ее в двух формах:

- а) дифференциальной;
- б) символической.

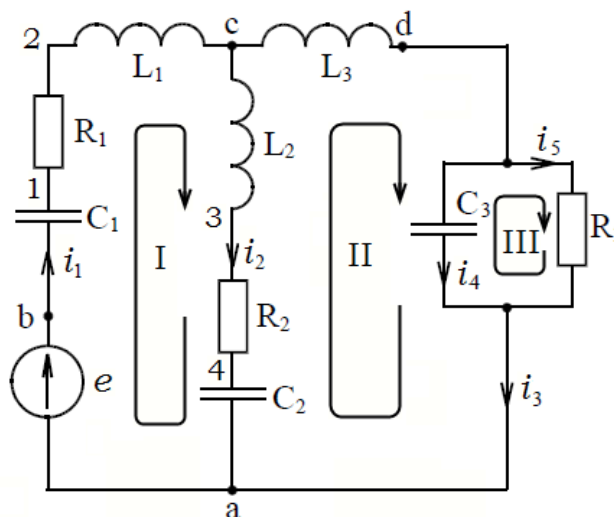


Рис.2

Уравнения электрической цепи, составленные по законам Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и токов (рис. 2) при установившихся

значениях и отсутствии постоянных составляющих токов и напряжений, имеют вид:

баланс токов в узлах

$$\begin{aligned} a: & \begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0; \\ i_3 - i_4 - i_5 = 0, \end{cases} \\ d: & \end{aligned}$$

баланс напряжений в контурах

$$\begin{aligned} \text{I:} & \begin{cases} u_{C1} + u_{R1} + u_{L1} + u_{L2} + u_{R2} + u_{C2} = e; \\ u_{L3} + u_{C3} - u_{C2} - u_{R2} - u_{L2} = 0; \\ u_{R3} - u_{C3} = 0. \end{cases} \\ \text{II:} & \\ \text{III:} & \end{aligned}$$

или с учетом $u_C = \frac{1}{C} \int i dt$, $u_L = L \frac{di}{dt}$

$$\begin{aligned} \text{I:} & \begin{cases} \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 R_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = e; \\ L_3 \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_3} \int i_4 dt - \frac{1}{C_2} \int i_2 dt - i_2 R_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} = 0; \\ i_5 R_3 - \frac{1}{C_3} \int i_4 dt = 0. \end{cases} \\ \text{II:} & \\ \text{III:} & \end{aligned}$$

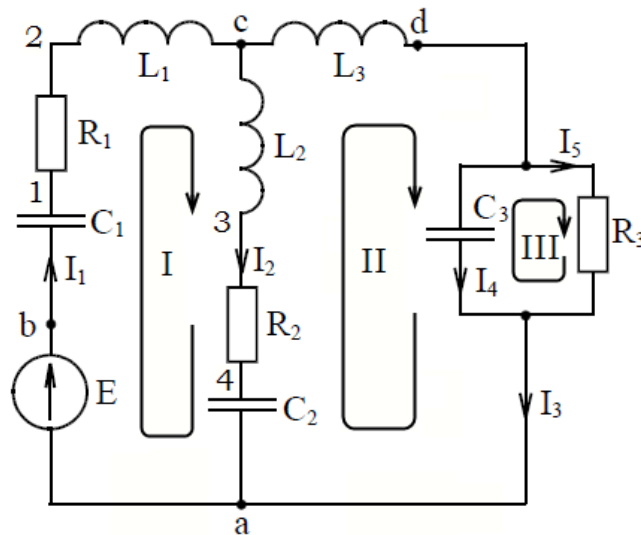


Рис. 3

Комплексный, или символический, метод расчета цепей синусоидального тока позволяет заменить дифференцирование операцией умножения, а интегрирование – операцией деления.

Так как

$$u_L = L \frac{di}{dt} \div \dot{U}_L = j\omega L \cdot \dot{I} = jx_L \cdot \dot{I};$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt \div \dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I} = -jx_C \cdot \dot{I},$$

то система уравнений, составленная для мгновенных значений, приобретает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0; \\ \dot{I}_3 - \dot{I}_4 - \dot{I}_5 = 0; \\ \frac{1}{j\omega C_1} \dot{I}_1 + R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \dot{I}_2 = \dot{E}; \\ j\omega L_3 \dot{I}_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \dot{I}_4 - \frac{1}{j\omega C_2} \dot{I}_2 - R_2 \dot{I}_2 - j\omega L_2 \dot{I}_2 = 0; \\ R_3 \dot{I}_5 - \frac{1}{j\omega C_3} \dot{I}_4 = 0. \end{array} \right.$$

2. Определим комплексы действующих значений токов во всех ветвях, воспользовавшись методов эквивалентных преобразований.

Комплексная действующая ЭДС

$$\dot{E} = E e^{j\beta} = 130 e^{j120^\circ} \text{ В.}$$

Угловая частота

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 50 = 314 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Реактивные сопротивления

$$x_{L1} = \omega L_1 = 314 \cdot 0,0318 = 10 \text{ Ом};$$

$$x_{L2} = \omega L_2 = 314 \cdot 0,06366 = 20 \text{ Ом};$$

$$x_{L3} = \omega L_3 = 314 \cdot 0,07958 = 25 \text{ Ом};$$

$$x_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{314 \cdot 159,15 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом};$$

$$x_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{314 \cdot 79,85 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ Ом};$$

$$x_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{314 \cdot 318 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ Ом}.$$

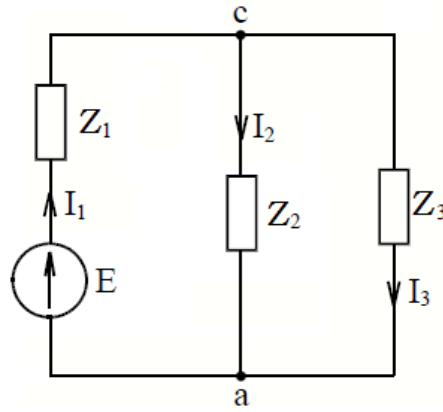


Рис. 4

Комплексные сопротивления ветвей (рис. 4)

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jx_{L1} + (-jx_{C1}) = 8 - j10 = 12,806e^{-j53,34^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jx_{L2} + (-jx_{C2}) = 16 - j20 = 25,612e^{-j53,34^\circ} \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3 &= jx_{L3} + \underline{Z}_{da} = jx_{L3} + \frac{R_3 \cdot (-jx_{C3})}{R_3 + (-jx_{C3})} = j25 + \frac{27 \cdot (-j10)}{27 + (-j10)} = \\ &= j25 + \frac{270e^{-j90^\circ}}{28,792e^{-j20,323^\circ}} = j25 + 9,377e^{-j69,677^\circ} = j25 + (3,257 - j8,793) = \\ &= 3,257 + j16,207 = 16,530e^{j78,637^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Эквивалентная одноконтурная схема представлена на рисунке 5.

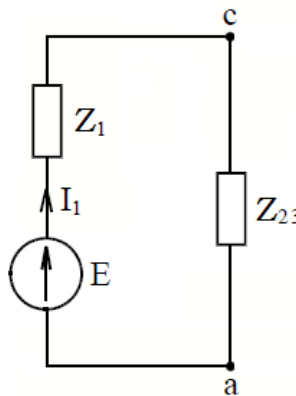


Рис. 5

Эквивалентное сопротивление разветвленного участка

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{23} &= \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{25,612e^{-j53,34^\circ} \cdot 16,53e^{j78,637^\circ}}{(16 - j20) + (3,257 + j16,207)} = \\ &= 21,57e^{j38,44^\circ} = 16,90 + j13,41 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Полное сопротивление цепи относительно зажимов ЭДС

$$\underline{Z}_\Sigma = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = (8 - j10) + (16,90 + j13,41) = 24,90 + j3,41 = 25,13e^{j7,80^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексный действующий ток в ветви с ЭДС по закону Ома

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_3} = \frac{130e^{j120^\circ}}{25,13e^{j7,80^\circ}} = 5,173e^{j112,20^\circ} = -1,955 + j4,790 \text{ А.}$$

Комплексное действующее напряжение разветвленного участка *ca*

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_3 = \dot{U}_{23} = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_{23} = 5,173e^{j112,20^\circ} \cdot 21,57e^{j38,44^\circ} = 111,6e^{j150,64^\circ} \text{ В.}$$

Комплексные действующие токи разветвленного участка *ca*

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{111,6e^{j150,64^\circ}}{25,612e^{-j53,34^\circ}} = 4,538e^{-j158,02^\circ} = -4,041 - j1,631 \text{ А;}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{111,6e^{j150,64^\circ}}{16,530e^{j78,64^\circ}} = 6,751e^{j72,00^\circ} = 2,086 + j6,421 \text{ А.}$$

Комплексное действующее напряжение разветвленного участка *da*

$$\begin{aligned} \dot{U}_{R3} = \dot{U}_{C3} = \dot{U}_{da} &= \dot{I}_3 \cdot \underline{Z}_{da} = \\ &= 6,751e^{j72,00^\circ} \cdot 9,377e^{-j69,68^\circ} = 63,31e^{j2,32^\circ} = 63,26 + j2,57 \text{ В.} \end{aligned}$$

Комплексные действующие токи разветвленного участка *da*

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_{C3}}{-jx_{C3}} = \frac{63,31e^{j2,32^\circ}}{10e^{-j90^\circ}} = 6,331e^{j92,32^\circ} = -0,257 + j6,326 \text{ А;}$$

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{U}_{R3}}{R_3} = \frac{63,31e^{j2,32^\circ}}{27} = 2,345e^{j2,32^\circ} = 2,343 + j0,095 \text{ А.}$$

Комплексные действующие напряжения элементов цепи

$$\dot{U}_{R1} = \dot{I}_1 \cdot R_1 = 5,173e^{j112,20^\circ} \cdot 8 = 41,4e^{j112,20^\circ} = -15,6 + j38,3 \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{L1} = \dot{I}_1 \cdot jx_{L1} = 5,173e^{j112,20^\circ} \cdot 10e^{j90^\circ} = 51,7e^{-j158,80^\circ} = -47,9 - j19,5 \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{C1} = \dot{I}_1 \cdot (-jx_{C1}) = 5,173e^{j112,20^\circ} \cdot 20e^{-j90^\circ} = 103,5e^{j22,20^\circ} = 95,8 + j39,1 \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{R2} = \dot{I}_2 \cdot R_2 = 4,538e^{-j158,02^\circ} \cdot 16 = 69,7e^{j158,02^\circ} = -64,6 - j26,1 \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{L2} = \dot{I}_2 \cdot jx_{L2} = 4,538e^{-j158,02^\circ} \cdot 20e^{j90^\circ} = 87,1e^{-j68,02^\circ} = 32,6 - j80,8 \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{C2} = \dot{I}_2 \cdot (-jx_{C2}) = 4,538e^{-j158,02^\circ} \cdot 40e^{-j90^\circ} = 174,3e^{j111,98^\circ} = -65,2 + j161,6 \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{L3} = \dot{I}_3 \cdot jx_{L3} = 6,751e^{j72,00^\circ} \cdot 25e^{j90^\circ} = 168,8e^{j162,00^\circ} = -160,5 + j52,1 \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{R3} = \dot{U}_{C3} = \dot{U}_{da} = 63,31e^{j2,32^\circ} = 63,26 + j2,57 \text{ В.}$$

Мгновенные значения токов ветвей и напряжений элементов

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_i);$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_u)$$

по найденным комплексным действующим токам ветвей и комплексным действующим напряжениям элементов цепи

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= 5,173\sqrt{2} \sin(\omega t + 112,20^\circ), \text{ A;} \\
 i_2(t) &= 4,357\sqrt{2} \sin(\omega t - 158,02^\circ), \text{ A;} \\
 i_3(t) &= 6,751\sqrt{2} \sin(\omega t + 72,00^\circ), \text{ A;} \\
 i_4(t) &= 6,331\sqrt{2} \sin(\omega t + 92,33^\circ), \text{ A;} \\
 i_5(t) &= 2,345\sqrt{2} \sin(\omega t + 2,32^\circ), \text{ A;} \\
 e(t) &= 130\sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ), \text{ B;} \\
 u_{R1}(t) &= 41,4\sqrt{2} \sin(\omega t + 112,20^\circ), \text{ B;} \\
 u_{L1}(t) &= 51,7\sqrt{2} \sin(\omega t - 157,80^\circ), \text{ B;} \\
 u_{C1}(t) &= 103,5\sqrt{2} \sin(\omega t + 22,20^\circ), \text{ B;} \\
 u_{R2}(t) &= 69,7\sqrt{2} \sin(\omega t - 158,02^\circ), \text{ B;} \\
 u_{L2}(t) &= 87,1\sqrt{2} \sin(\omega t - 80,02^\circ), \text{ B;} \\
 u_{C2}(t) &= 174,3\sqrt{2} \sin(\omega t + 111,98^\circ), \text{ B;} \\
 u_{L3}(t) &= 168,8\sqrt{2} \sin(\omega t + 162,00^\circ), \text{ B;} \\
 u_{R3}(t) &= u_{C3}(t) = 63,3\sqrt{2} \sin(\omega t + 2,32^\circ), \text{ B.}
 \end{aligned}$$

3. Проверка выполненных расчетов при помощи законов Кирхгофа:

баланс токов в узлах

$$\begin{aligned}
 -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0; \\
 -(-1,955 + j4,790) + (-4,041 - j1,631) + (2,086 + j6,421) &= 0; \\
 \dot{I}_3 - \dot{I}_4 - \dot{I}_5 &= 0; \\
 (2,086 + j6,421) - (-0,257 + j6,326) - (2,343 + j0,095) &= 0,
 \end{aligned}$$

баланс напряжений в контурах

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_{C1} + \dot{U}_{R1} + \dot{U}_{L1} + \dot{U}_{L2} + \dot{U}_{R2} + \dot{U}_{C2} &= \dot{E} = 130e^{j120^\circ} = -65 + j112,6 \text{ B;} \\
 (95,8 + j39,1) + (-15,6 + j38,3) + (-47,9 - j19,5) + \\
 + (32,6 - j80,8) + (-64,6 - j26,1) + (-65,2 + j161,6) &= -65 + j112,6 \text{ B;} \\
 \dot{U}_{L3} + \dot{U}_{C3} - \dot{U}_{C2} - \dot{U}_{R2} - \dot{U}_{L2} &= 0; \\
 (-160,5 + j52,1) + (63,3 + j2,6) - \\
 -(-65,2 + j161,6) - (-64,6 - j26,1) - (32,6 - j80,8) &= 0.
 \end{aligned}$$

4. Баланс мощностей.

Комплексная мощность источника питания

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{ист} &= P_{ист} + jQ_{ист} = \dot{E} \cdot \dot{I}_1^* = 130e^{j120^\circ} \cdot 5,173e^{-j112,20^\circ} = 672,5e^{j7,80^\circ} \text{ ВА} = \\ &= 666,3 \text{ Вт} + j91,3 \text{ вар}.\end{aligned}$$

Активная мощность потребителей

$$\begin{aligned}P_{номп} &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_5^2 R_3 = \\ &= 214,1 + 303,8 + 148,4 = 666,3 \text{ Вт}.\end{aligned}$$

Реактивная мощность потребителей

$$\begin{aligned}Q_{номп} &= I_1^2 (x_{L1} - x_{C1}) + I_2^2 (x_{L2} - x_{C2}) + I_5^2 x_{L3} + I_4^2 (-x_{C3}) = \\ &= (-267,6) + (-379,7) + 1139,5 + (-400,8) = 91,3 \text{ вар}.\end{aligned}$$

Получили баланс активных и реактивных мощностей

$$\begin{aligned}P_{ист} &= P_{номп} = 666,3 \text{ Вт}; \\ Q_{ист} &= Q_{номп} = 91,3 \text{ вар}.\end{aligned}$$

5. Показания ваттметра.

Из расположения генераторных зажимов (*) ваттметра (рис. 1) напряжение на ваттметре

$$\dot{U}_W = \dot{U}_{ad} = -\dot{U}_{da} = -63,31e^{j2,32^\circ} = 63,31e^{-j177,68^\circ} \text{ В},$$

ток ваттметра

$$\dot{I}_W = \dot{I}_3 = 6,751e^{j72,00^\circ} \text{ А},$$

показание ваттметра

$$\begin{aligned}P_W &= \text{Re} \left[\dot{U}_W \cdot \dot{I}_W^* \right] = \text{Re} \left[63,31e^{-j177,68^\circ} \cdot 6,751e^{-j72,00^\circ} \right] = \text{Re} \left[427,4e^{-j249,68^\circ} \right] = \\ &= \text{Re} \left[-148,4 + j400,8 \right] = -148,4 \text{ Вт}.\end{aligned}$$

Знак «-» в выражении активной мощности означает, что для правильного подключения ваттметра в цепи (рис. 1) необходимо поменять местами подключение клемм либо токовой обмотки, либо вольтной обмотки ваттметра. Тогда показание ваттметра

$$P_W = 148,4 \text{ Вт}.$$

Показание амперметра – действующее значение тока в первой ветви

$$I_A = I_1 = 5,17 \text{ А}.$$

6. Построим топографическую векторную диаграмму напряжений, совмещенную с векторной лучевой диаграммой токов.

Потенциал точки a , указанной на схеме, примем равным нулю $\varphi_a = 0$. Тогда потенциалы узлов и точек цепи:

$$\dot{\varphi}_b = \dot{\varphi}_a + \dot{E} = -65 + j112,6 \text{ В};$$

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_b - \dot{U}_{C1} = -160,8 + j73,5 \text{ В};$$

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1 - \dot{U}_{R1} = -145,2 + j35,2 \text{ В};$$

$$\dot{\varphi}_4 = \dot{\varphi}_a + \dot{U}_{C2} = -65,2 + j161,6 \text{ В};$$

$$\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_4 + \dot{U}_{R2} = -129,9 + j135,5 \text{ В};$$

$$\dot{\varphi}_c = \dot{\varphi}_3 + \dot{U}_{L2} = -97,3 + j54,7 \text{ В};$$

$$\dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_a + \dot{U}_{da} = 63,3 + j2,6 \text{ В}.$$

При построении векторной диаграммы на комплексной плоскости учитываем направления векторов напряжения на пассивных элементах. Например, вектор напряжения $\dot{U}_{R1} = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2$ на комплексной плоскости направлен от точки **2** к точке **1**.

Топографическая векторная диаграмма напряжений и совмещенная с ней векторная лучевая диаграмма токов в масштабе изображена на рис. 5.

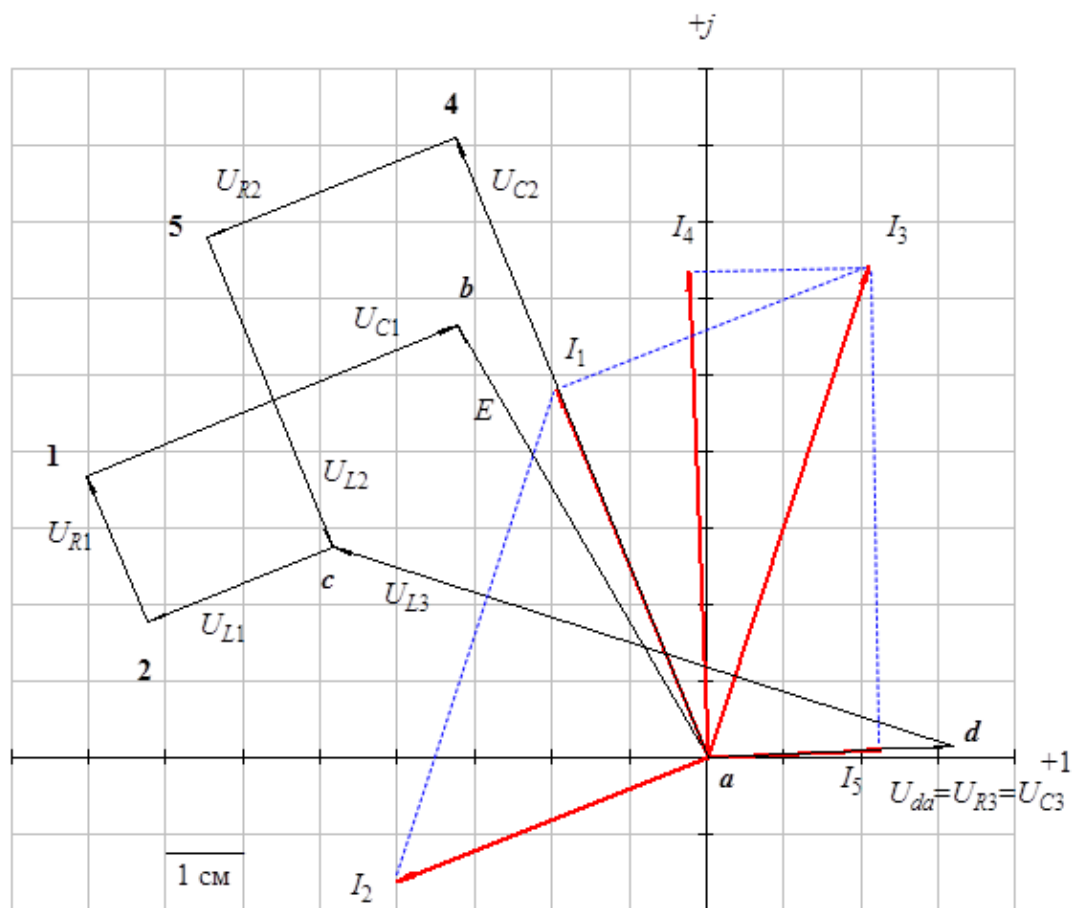
Для построенной векторной диаграммы справедлив первый закон Кирхгофа:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3;$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_4 + \dot{I}_5.$$

Также для построенной векторной диаграммы справедливо взаимное расположение векторов токов и напряжений:

- напряжения на резисторах совпадают по фазе с токами резисторов;
- токи катушек индуктивности отстает по фазе на угол 90° от напряжений;
- токи конденсаторов опережают по фазе на угол 90° напряжения.



Масштаб: $m_u = 20\text{ В/см}$; $m_i = 1\text{ А/см}$

Рис. 5