

Лабораторная работа № 4. Численное решение краевой задачи для нестационарного одномерного уравнения теплопроводности методом контрольного объема.

Постановка задачи. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T \quad (1)$$

начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\begin{cases} u(0, t) = \alpha(t) \\ u(l, t) = \beta(t) \end{cases}, \quad 0 < t < T \quad (3)$$

где $x \in [0, l]$, $t \in [0, T]$, $l = 1$, $T = 3$, $a = \text{const} > 0$.

Задание

Используя метод контрольного объема, найти решение смешанной задачи (1) - (3). Провести три расчета: 1) при $n = 10$, 2) при $n = 100$ и 3) при $n = 1000$.

Указание. Результаты расчетов вывести на печать с пятью значащими цифрами после запятой. Значения y_i^T численного решения $y(x, t)$ и значения u_i^T аналитического решения $u(x, t)$ для момента времени $t = T$ вывести в точках $x = x_i = i \cdot h$, $h = l/n$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$:

1) при $n = 10$ $x = x_i$, $i = j$, $j = 0, 1, 2, \dots, 10$;

2) при $n = 100$ $x = x_i$, $i = 10 \cdot j$, $j = 0, 1, 2, \dots, 10$;

3) при $n = 1000$ $x = x_i$, $i = 100 \cdot j$, $j = 0, 1, 2, \dots, 10$;

Варианты лабораторной работы

№	a	$\varphi(x)$	$\alpha(t)$	$\beta(t)$	$f(x, t)$	$u(x, t)$
1	1	0	$\sin t$	$e \cdot \sin t$	$e^x \cdot (\cos t - \sin t)$	$e^x \cdot \sin t$
2	$\frac{1}{4}$	$1 + 4x^3$	e^t	$4 + e^t$	$e^t - 6x$	$4x^3 + e^t$
3	$\frac{1}{2}$	$12,5 + 2 \ln(1 + x)$	$\frac{(t+5)^2}{2}$	$\frac{(t+5)^2}{2} + 2 \ln 2$	$\frac{1}{(1+x)^2} + t + 5$	$\frac{(t+5)^2}{2} + 2 \ln(1 + x)$
4	$\frac{1}{(\ln 3)^2}$	3^x	$t^2 + 1$	$3(t^2 + 1)$	$3^x(-t^2 + 2t - 1)$	$3^x(t^2 + 1)$
5	1	$\ln(1 + x)$	0	$\ln 2 \cdot e^t$	$e^t \cdot \left[\ln(1 + x) + \frac{1}{(1+x)^2} \right]$	$e^t \cdot \ln(1 + x)$
6	$\frac{1}{6}$	$4x^3$	0	$4e^t$	$4x(x^2 - 1)e^t$	$4x^3 \cdot e^t$
7	$\frac{1}{2}$	e^x	e^t	e^{1+t}	$\frac{1}{2}e^{x+t}$	e^{x+t}
8	1	1	1	e^t	$(x - t^2) \cdot e^{x \cdot t}$	$e^{x \cdot t}$
9	$\ln 3$	$(x^3 + 1)$	3^t	$2 \cdot 3^t$	$\ln 3 \cdot 3^t \cdot (x^3 - 6x + 1)$	$3^t \cdot (x^3 + 1)$
10	$\frac{1}{6}$	x^3	t	$1 + t$	$1 - x$	$x^3 + t$