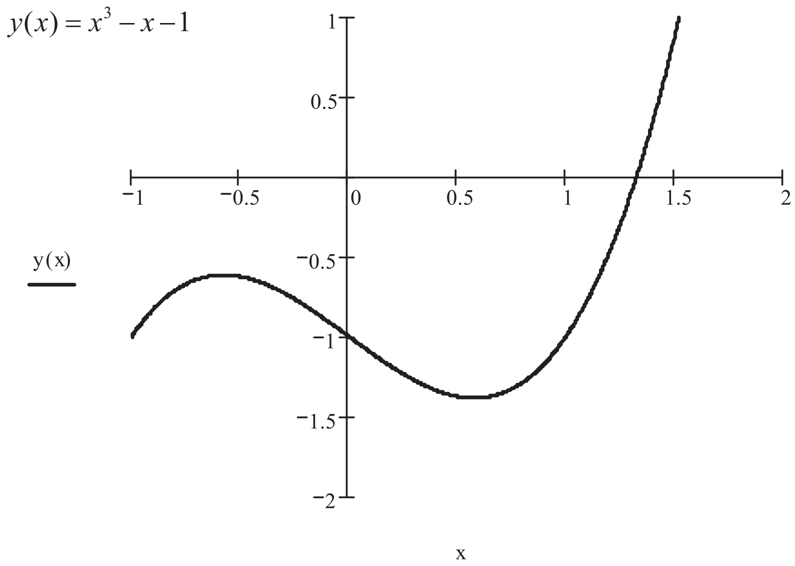
I. Методы решения нелинейных уравнений

Пример

1) Отделить корни уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ графически или аналитически;
2) вычислить один из них с точностью до 0.001
   а) методом половинного деления,
   б) методом хорд,
   в) методом Ньютона.

Решение.

1) Строим график функции $y = x^3 - x - 1$:



Из графика видно, что уравнение имеет один корень (обозначим его x^*), лежащий в промежутке $[1; 1.5]$, причем на левом конце отрезка $y(1) < 0$, на правом $y(1.5) > 0$.

При отсутствии возможности построить график функции воспользуемся аналитическим методом: вычисляем значения функции в равноотстоящих точках, например,

$$f(0) = -1, \quad f(0.5) = -1.375, \quad f(1) = -1, \quad f(1.5) = 0.875.$$

На отрезке $[1; 1.5]$ функция изменила знак. Значит, корень принадлежит этому отрезку.

2а) Вычислим этот корень с точностью до 0.001 методом половинного деления. Вычисления удобно производить, используя таблицу:

n	a_n $(y(a_n) < 0)$	b_n $(y(b_n) > 0)$	$x_n = (a_n + b_n)/2$	$y(x_n)$
0	1	1.5	1.25	−0.2969
1	1.25	1.5	1.375	0.2246
2	1.25	1.375	1.3125	−0.0494
3	1.3125	1.375	1.3438	0.0826
4	1.3125	1.3438	1.3281	0.0145
5	1.3125	1.3281	1.3203	−0.0188
6	1.3203	1.3281	1.3242	−0.0022
7	1.3242	1.3281	1.3262	0.0063
8	1.3242	1.3262		

Так как $b_8 - a_8 \leqslant 2 \times 0.001 = 0.002$, то за приближенное значения корня возьмем $x^* \approx \dfrac{a_8 + b_8}{2} \approx 1.325$.

2б) Теперь вычислим этот корень с точностью до 0.001 методом хорд. Определяем знак второй производной функции $y = x^3 - x - 1$ на отрезке $[1; 1.5]$:

$$y' = 3x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad y'' = 6x$$

и на рассматриваемом отрезке $y'' > 0$. Так как знак второй производной совпадает со знаком $y(1.5)$, то за начальное приближение берем $x_0 = 1$ и $b = 1.5$ и для вычислений применяем формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{y(x_n)}{y(b) - y(x_n)}(b - x_n) = x_n - \frac{y(x_n)}{0.875 - y(x_n)}(1.5 - x_n).$$

З а м е ч а н и е. В методе хорд неподвижным оставляют тот конец отрезка $[a, b]$, для которого знак функции совпадает со знаком ее второй производной, и применяют одну из формул

$$x_{n+1} = x_n - \frac{y(x_n)}{y(x_n) - y(a)}(x_n - a), \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{y(x_n)}{y(b) - y(x_n)}(b - x_n).$$

Вычисления удобно распологать в таблице:

n	x_n	$y(x_n)$	$h_n = y(x_n)(b - x_n)/(y(b) - y(x_n))$	$x_{n+1} = x_n - h_n$
0	1	−1	−0.2667	1.2667
1	1.2667	−0.2344	−0.0493	1.3160
2	1.316	−0.037	−0.0075	1.3234
3	1.3234	−0.0055	−0.0011	1.3245
4	1.3245	−0.0008	−0.0002	1.3247

Так как разность $|x_5 - x_4| = 1.3247 - 1.3245 = 0.0002 < 0.001$, то за приближенное значение корня берем $x_4 = 1.3245 \approx 1.325$.

2в) Теперь вычислим этот корень с точностью до 0.001 методом Ньютона. Обозначим концы отрезка $[1; 1.5]$: $a = 1$, $b = 1.5$. Так как

$$\frac{f(a)}{f''(a)} = -0.167 < 0, \qquad \frac{f(b)}{f''(b)} = 0.097 > 0,$$

то за начальное приближение берем $x_0 = b = 1.5$ (там где значение рассмотренных отношений положительно). Применяя формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{y(x_n)}{y'(x_n)},$$

последовательно находим

$$x_1 = 1.3478, \quad x_2 = 1.3252, \quad x_3 = 1.3247.$$

Так как $|x_2 - x_3| = 0.0005 < 0.001$, то искомый корень ≈ 1.325.

Индивидуальные задания

Для соответстующего уравнения

1) отделить корни графически;
2) вычислить один из них с точностью до 0.001
   а) методом половинного деления,
   б) методом хорд,
   в) методом Ньютона.

Вариант 1.	$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$	**Вариант 2.**	$x^3 - 6x - 8 = 0$
Вариант 3.	$x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$	**Вариант 4.**	$x^3 + x - 5 = 0$
Вариант 5.	$x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$	**Вариант 6.**	$x^3 + 3x + 1 = 0$
Вариант 7.	$x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$	**Вариант 8.**	$x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$
Вариант 9.	$x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$	**Вариант 10.**	$x^3 + 4x - 6 = 0$

II. Квадратурные формулы

Пример

Сравнить точность вычисления интеграла $I = \int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} = 2$ по формулам трапеций, Симпсона и Гаусса с приведенным точным значением.

Решение.

В рассматриваемом случае $a = 2$, $b = 6$. Разбиваем отрезок на 6 частей $h = 4/6 = 2/3$.

Составляем таблицу значений узлов и значений подынтегральной функции в этих узлах (вычисления выполняем с пятью знаками после запятой):

k	x_k	$f(x_k)$
0	2	1
1	2.66667	0.65465
2	3.33333	0.52223
3	4	0.44721
5	4.66667	0.39736
6	5.33333	0.36116
7	6	0.33333

По формуле трапеций получаем

$$I \approx \frac{2}{3}\left(\frac{y_0 + y_6}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5\right) = 2.03286,$$

а по формуле Симпсона

$$I \approx \frac{2}{9}\Big[y_0 + y_6 + 2\,(y_2 + y_4) + 4\,(y_1 + y_3 + y_5)\Big] = 2.00547.$$

В квадратурных формулах Гаусса

$$\int\limits_{-1}^{1} f(t)\,dt \approx \sum_{k=1}^{n} C_k f(t_k)$$

коэффициенты C_k и узлы t_k $(k = 1, \ldots, n)$ подбираются так, чтобы формула была точной для всех многочленов наивысшей возможной степени.

Параметры квадратур Гаусса для стандартного отрезка $[-1, 1]$ и $n = 7$:

t_k	C_k
$-0.949\,107\,912$	$0.129\,484\,966$
$-0.741\,531\,186$	$0.279\,705\,391$
$-0.405\,845\,151$	$0.381\,830\,051$
0	$0.417\,959\,184$
$0.405\,845\,151$	$0.381\,830\,051$
$0.741\,531\,186$	$0.279\,705\,391$
$0.949\,107\,912$	$0.129\,484\,966$

С помощью замены переменной $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\,t$ переходят к формулам на произвольном отрезке $[a, b]$:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} C_k f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,t_k\right).$$

В нашем случае формула Гаусса с семью узлами приводит к следующему результату $\left(f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}\right)$

$$I \approx 2\sum_{i=1}^{7} C_i f(4 + 2\,t_i) = 1.99998.$$

Сравнивая с точным результатом, получаем, что формула трапеций дает погрешность 0.03286, формула Симпсона — 0.00547, а формула Гаусса — 0.00002.

Индивидуальные задания

Сравнить точность вычисления интегралов по формулам трапеций, Симпсона и Гаусса с приведенным точным значением:

Вариант 1.	$\int\limits_2^5 \sqrt{x-1}\,dx = \dfrac{14}{3}$	**Вариант 2.**	$\int\limits_3^4 \dfrac{dx}{\sqrt{3x-8}} = \dfrac{2}{3}$
Вариант 3.	$\int\limits_2^9 \dfrac{dx}{\sqrt{x+7}} = 2$	**Вариант 4.**	$\int\limits_2^3 \sqrt{7x-5}\,dx = \dfrac{74}{21}$
Вариант 5.	$\int\limits_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \dfrac{26}{3}$	**Вариант 6.**	$\int\limits_1^3 \dfrac{dx}{\sqrt{4x-3}} = 1$
Вариант 7.	$\int\limits_1^8 \dfrac{dx}{\sqrt{5x-4}} = 2$	**Вариант 8.**	$\int\limits_0^1 \sqrt{8x+1}\,dx = \dfrac{13}{6}$
Вариант 9.	$\int\limits_3^6 \sqrt{3x+7}\,dx = \dfrac{122}{9}$	**Вариант 10.**	$\int\limits_4^5 \dfrac{dx}{\sqrt{9x-20}} = \dfrac{2}{9}$