

Лабораторная работа № 5. Численное решение краевой задачи для стационарного одномерного уравнения теплопроводности методом конечных элементов.

Постановка задачи. Найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$-(k(x) \cdot y')' + q(x) \cdot y = f(x), \quad a < x < b \quad (1)$$

и краевым условиям

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (2)$$

где $x \in [a, b]$, y_a и y_b – заданные числа.

Задание

1. Проверить, что функции $k(x)$ и $q(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяют условиям $k(x) \geq k_0 > 0$ и $q(x) \geq 0$, соответственно, а функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2).

2. Используя метод конечных элементов, найти решение краевой задачи (1) и (2). Провести три расчета: 1) при $n=10$, 2) при $n=100$ и 3) при $n=1000$.

Указание. Результаты расчетов вывести на печать с пятью значащими цифрами после запятой. Значения y_i численного решения $y(x)$ и значения u_i аналитического решения $u(x)$ вывести в точках $x = x_i = a + i \cdot h$, $h = (b - a) / n$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$:

1) при $n=10$ $x = x_i$, $i = j$, $j = 0, 1, 2, \dots, 10$;

2) при $n=100$ $x = x_i$, $i = 10 \cdot j$, $j = 0, 1, 2, \dots, 10$;

3) при $n=1000$ $x = x_i$, $i = 100 \cdot j$, $j = 0, 1, 2, \dots, 10$;

Варианты лабораторной работы

1. $[a, b] = [0, 2]$, $y_a = 1$, $y_b = e^2$; $k(x) = x + 1$, $q(x) = 2$, $f(x) = -x \cdot e^x$; $u(x) = e^x$.

2. $[a, b] = [1, 3]$, $y_a = 0$, $y_b = \ln 3$; $k(x) = \ln x + 1$, $q(x) = 2x$, $f(x) = \frac{(1 + 2x^3) \cdot \ln x}{x^2}$; $u(x) = \ln x$.

3. $[a, b] = [0, 2]$, $y_a = 1$, $y_b = e^2$; $k(x) = 2x + 5$, $q(x) = 3$, $f(x) = -(4 + 2x)e^x$; $u(x) = e^x$.

4. $[a, b] = [0, 2]$, $y_a = 0$, $y_b = 4$; $k(x) = e^x$, $q(x) = x^2$, $f(x) = x^4 - 2(x + 1)e^x$;

$$u(x) = x^2.$$

$$5. [a, b] = [1, 3], \quad y_a = 1, \quad y_b = 3; \quad k(x) = \arctg x, \quad q(x) = x, \quad f(x) = \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 1};$$

$$u(x) = x.$$

$$6. [a, b] = [0, 2], \quad y_a = 0, \quad y_b = 8; \quad k(x) = \operatorname{ch} x, \quad q(x) = \operatorname{sh} x, \quad f(x) = 4(x-1) \cdot \operatorname{sh} x;$$

$$u(x) = 4x.$$

$$7. [a, b] = [0, 2], \quad y_a = 1, \quad y_b = 5; \quad k(x) = \operatorname{th} x + 1, \quad q(x) = 2 \operatorname{th} x,$$

$$f(x) = 2 \cdot (x^2 \cdot \operatorname{th} x - \frac{x}{\operatorname{ch}^2 x} - 1); \quad u(x) = x^2 + 1.$$

$$8. [a, b] = [0, 2], \quad y_a = 1, \quad y_b = \operatorname{ch} 2; \quad k(x) = \operatorname{sh} x + 1, \quad q(x) = 1, \quad f(x) = -\operatorname{sh}(2x);$$

$$u(x) = \operatorname{ch} x.$$

$$9. [a, b] = [1, 3], \quad y_a = 3, \quad y_b = 13; \quad k(x) = x^2 + x + 1, \quad q(x) = 6, \quad f(x) = 3;$$

$$u(x) = x^2 + x + 1.$$

$$10. [a, b] = [1, 3], \quad y_a = 2, \quad y_b = 10; \quad k(x) = x^2 + 1, \quad q(x) = 7, \quad f(x) = x^2 + 5;$$

$$u(x) = x^2 + 1.$$