

Занятие №2.

Исследование характеристик ИС как сети систем массового обслуживания.

Пример решения задачи

Исследование характеристик ИС имеет большое практическое значение в построении ИС. По характеристикам можно оценить многие свойства исследуемого объекта и наметить пути его оптимизации, а так же учитывать эти оценки при построении новых ИС. Каждый компонент ИС мы рассматриваем как СМО – простейшую систему массового обслуживания. На рис 2.2 представлена схема сети из 4 СМО.

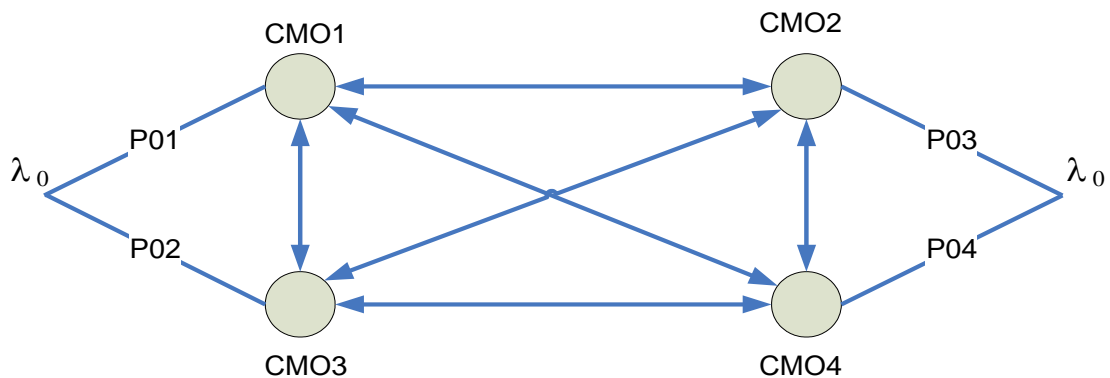


Рис. 2.2 Сеть ИС.

Все узлы в сети есть простейшие. СМО типа М/М/м с Пуассоновым входным потоком, экспоненциальным обслуживанием.

В качестве примера рассмотрим ИС (рис.2.3)

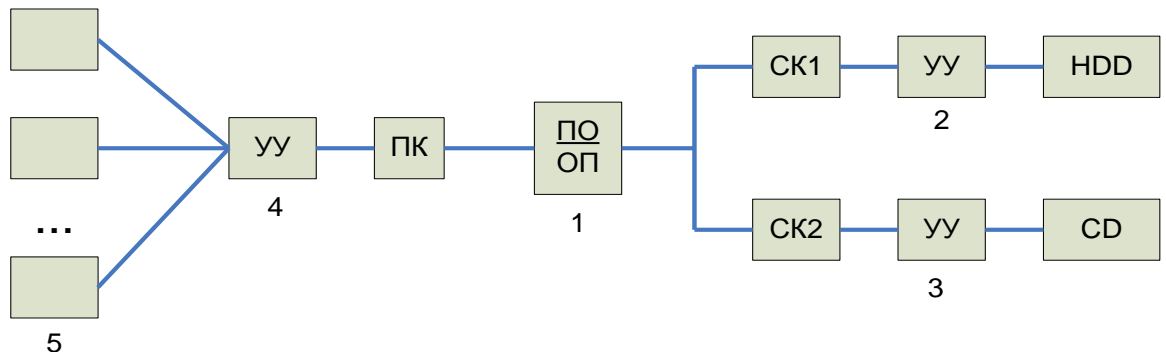


Рис. 2.3 ИС обработки заявок

Ниже перечислены понятия из теории массового обслуживания, являющиеся параметрами системы, с помощью которых определяются интересующие нас характеристики системы.

λ_0 – интенсивность входного потока заявок. Определяется как $\lambda_0 = 1/T_{вх}$.

λ_i – среднее число операций, реализуемых на i -м элементе системы за цикл проектирования. Определяется как отношение интенсивности потока требований в i -м элементе λ_i к интенсивности входного потока λ_0 .

μ_i – интенсивность обслуживания заявки i -м элементом системы.

ρ_i – загрузка или приведенная плотность потока заявок. Это среднее число заявок, приходящееся на среднее время обслуживания одной заявки.

$$\rho_i = \lambda_i / \mu_i$$

h_{ij} – частота обращения i -го элемента к j -му.

P_{ij} – вероятность перехода заявки с i -го элемента на j -й.

Работа ИС, представленной на рис. 2.3, как сети СМО описывается следующими свойствами:

- 1) Задания поступают в систему через устройство ввода, причем задания вводятся последовательно. Ввод считается законченным после того как задание загружено в оперативную память.
- 2) Когда приходит очередь, задание передается на обработку. Оно обрабатывается центральным процессором без прерывания до тех пор, пока не возникает обращение к внешним устройствам системы.
- 3) Задание может потребовать обращения к устройствам памяти или вывода. Все эти устройства являются автономными.
- 4) Устройство вывода одно – принтер.

Для расчета характеристик ИС, построим схему которая представлена на рисунке 2.4:

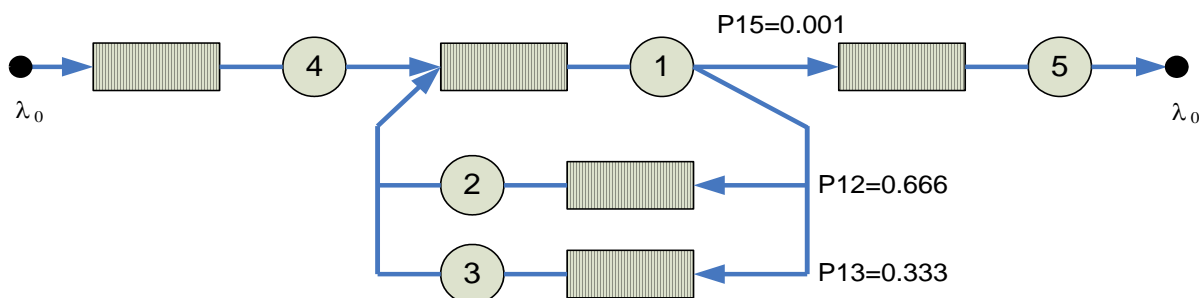


Рис 2.4. Пример ИС

1 - процессор

2 – жесткий диск

3 - CD

4 – устройство ввода

5 – устройство вывода

Параметрами и характеристиками являются:

T_n – время пребывания заявки в сети;

T_w – время ожидания заявки во всех очередях сети;

T_o – время обслуживания заявки;

N_w - среднее количество заявок, находящихся в очереди.

N_s - среднее количество заявок в системе

ρ_i - загрузка элементов системы

Базовые параметры сети СМО являются параметрами простейшей СМО, рассмотренной в практической работе №1 и связаны следующими формулами:

Время пребывания заявки в системе:

$$T_n = T_w + T_o$$

$$T_n = \sum_{i=1}^N \alpha_i * T_{ni}, \text{ где } i - \text{номера узлов СМО, а } \alpha_i \text{ показывает сколько раз заявка}$$

проходит через i -ю СМО.

Время ожидания в очереди:

$$T_w = \sum_{i=1}^N \alpha_i * T_{wi}.$$

$$\rho_i = \lambda_i / m_i * \mu_i \qquad \lambda_i = 1 / T_{exi} \qquad \mu_i = 1 / T_{oi}$$

при $m_i = 1$ значения $\rho_i = \lambda_i / \mu_i = T_{oi} / T_{exi}$

T_{ex} – среднее время интервала между приходом двух заявок;

Начальные данные для нашей задачи:

$$T01 = 20 \text{ мс}$$

$$T02 = 30 \text{ мс}$$

$$T03 = 80 \text{ мс}$$

$$T04 = 20 \text{ сек}$$

$$T05 = 120 \text{ сек}$$

$$h_{12} = 666$$

$$h_{13} = 333$$

$$h_{15} = 1$$

Основой для расчета характеристик сети является уравнение сохранения потока через i -ю СМО: $\lambda_i = \sum_{j=0}^N P_{ij} \cdot \lambda_j$, где λ_0 - входной поток

Составим систему линейных уравнений сохранения потока, описывающих нашу сеть:

$$\begin{cases} \lambda_1 = P_{41}\lambda_4 + P_{21}\lambda_2 + P_{31}\lambda_3 \\ \lambda_2 = P_{12} \cdot \lambda_1 \\ \lambda_3 = P_{13} \cdot \lambda_1 \\ \lambda_4 = \lambda_0 \\ \lambda_5 = P_{15} \cdot \lambda_1 \end{cases}$$

Но уравнений сохранения потока для всей СМО недостаточно. Необходимо добавить уравнение консервативности сети, т.е.: $\lambda_{\text{вх}} = \lambda_{\text{вых}}$

В нашем случае: $\lambda_5 = \lambda_0$

Учитывая, что $P_{21} = P_{31} = P_{41} = 1$, перепишем системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_4 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 = \frac{666}{1000} \cdot \lambda_1 \\ \lambda_3 = \frac{333}{1000} \cdot \lambda_1 \\ \lambda_4 = \lambda_0 \\ \lambda_5 = \frac{1}{1000} \cdot \lambda_1 \\ \lambda_5 = \lambda_0 \end{cases}$$

Откуда выразим все λ_i через λ_0

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_4 = \lambda_0 \\ \lambda_5 = \lambda_0 \\ \lambda_1 = 1000 \cdot \lambda_0 \\ \lambda_2 = 666 \cdot \lambda_0 \\ \lambda_3 = 333 \cdot \lambda_0 \end{array} \right.$$

Для расчета загрузки системы вычислим интенсивность обслуживания на каждом её элементе ($\mu = 1 / T_o$)

$$\mu_1 = 1 / 30 \text{ 1/мсек}$$

$$\mu_2 = 0.05 \text{ 1/мсек}$$

$$\mu_3 = 1 / 80 \text{ 1/мсек}$$

$$\mu_4 = 0.05 \text{ 1/сек}$$

$$\mu_5 = 1 / 120 \text{ 1/сек}$$

Вычислим загрузку i -й СМО:

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \lambda_i \cdot T_{oi}$$

$$\rho_1 = 1000 \cdot \lambda_0 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 20000 \cdot 0,03 = 0,06$$

$$\rho_2 = 666 \cdot 0,003 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 0,06$$

$$\rho_3 = 333 \cdot 0,003 \cdot 80 \cdot 10^{-3} = 0,08$$

$$\rho_4 = 0,003 \cdot 20 = 0,06$$

$$\rho_5 = 0,003 \cdot 120 = 0,36$$

Частота прохождения заявок через i -ю СМО: $\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$

$$\alpha_1 = 1000$$

$$\alpha_2 = 666$$

$$\alpha_3 = 333$$

$$\alpha_4 = 1$$

$$\alpha_5 = 1$$

$$\alpha_5 = 1$$

Время пребывания в каждой СМО: $T_{ni} = T_{oi} \cdot \frac{1}{1 - \rho_i}$

$$T_{n1} = 20 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{1 - \rho_1} = 32 \text{ мс}$$

$$T_{n2} = 30 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{1 - \rho_2} = 20,8 \text{ мс}$$

$$T_{n3} = 80 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{1 - \rho_3} = 87 \text{ мс}$$

$$T_{n4} = 20 \cdot \frac{1}{1 - \rho_4} = 21,3 \text{ с}$$

$$T_{n5} = 120 \cdot \frac{1}{1 - \rho_5} = 187,5 \text{ с}$$

Общее время пребывания заявки в сети:

$$T_n = \sum_{i=1}^N \alpha_i * T_{ni}$$

$$T_n = 32 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 + 20,8 \cdot 10^{-3} \cdot 666 + 87 \cdot 10^{-3} \cdot 333 + 21,3 + 187,5 = 284,6$$

Определим пропускную способность системы, которая определяется узким местом. Узкое место имеет несколько критериев, один из которых $\max \{\rho_i\}$.

Пропускная способность определяется как интенсивность входного потока или эффективная загрузка узкого места:

$$\rho_{iy..m.}(\text{эф}) \cong 0,66$$

$$П = 1 / \max\{\lambda_i T_{ni}\}$$

Через $\max\{\rho_i\}$ можно определить $\max T_{ex}$ при помощи следующих преобразований. Допустим:

$$\max \{\rho_i\} = \rho_k$$

$$\rho_k = \frac{\lambda_k}{\mu_k}$$

$$\lambda_k = \lambda_k \lambda_0$$

$$\lambda_k \lambda_0 / \mu_k = 1$$

$$\max \lambda_0 = \mu_k / \lambda_k$$

$$\max T_{ex} = \lambda_k / \mu_k$$

Сделав вышеприведенные расчеты, устраним узкое место (в нашем случае это достигается путем добавления к системе еще нескольких принтеров для вывода информации).

По значению ρ видно, что наиболее загружен пятый компонент устройства.

$$\text{Узкое место } \rho_5 = \frac{\lambda_5}{\mu_5} = \alpha_5 \cdot \lambda_0 \cdot T_{o5}$$

Для разрешения «проблемы узкого места» необходимо перейти от системы М/М/1 к М/М/м.

Необходимо снизить загрузку на 5-м элементе до среднего уровня остальных устройств.

Для СМО₅

$$\text{Т.е. } \rho_5 \approx 0,6 = \lambda_5 / (\mu_5 \cdot 6)$$

и для устранения «узкого места» СМО необходимо поставить в параллель 6 устройств ($m_5=6$).

Аналогично поступаем с остальными СМО «выравнивая» загрузки. Остальные характеристики вычисляются по формулам для систем М/М/м.