Занятие №1

Анализ характеристик простейших систем массового обслуживания

Пример решения задачи

Характеристики системы

К основным характеристикам системы относятся:

1. $T_{вх}$- среднее время между двумя соседними заявками.
2. λ – интенсивность входного потока.
3. T_0- среднее время обслуживания заявки прибором.
4. μ – интенсивность обслуживания.
5. T_n- среднее время пребывания заявки в системе.
6. T_w- среднее время ожидания в очереди. T_n, T_w и T_0 связаны соотношением:

$$T_n = T_w + T_0$$

7. ρ - загрузка элементов системы. Показывает, каждую часть рабочего времени прибор занят обслуживанием. Величина ρ не может быть больше 1. Считается, что система оптимально загружена при $\rho \approx 0,6 – 0,7$.
8. N_w- среднее количество заявок, находящихся в очереди.
9. Ns - среднее количество заявок в системе.

Рассмотрим отрезок времени продолжительностью 100 мин. Допустим что за это время в систему поступает 10 заявок (Рис. 1)

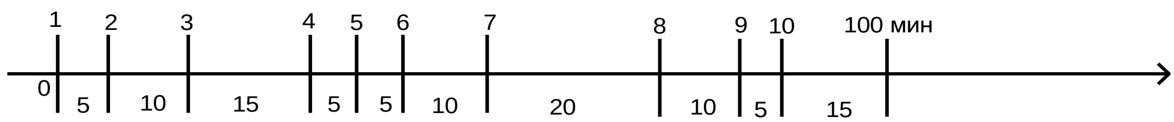

Рис.1 График поступления заявок в систему

Времена обслуживание заявок заданы таблицей 1:

Таблица 1

Время обслуживания заявок

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	10	5	10	5	10	5	5	10	5

Рассчитаем исходные характеристики системы для нашей задачи.

Всего приходит 10 заявок.

Общее время рассматриваемого интервала:

$$\Sigma T_{вх} = 100\ мин.$$

Среднее время между заявками:

$$T_{вх} = \frac{100}{10}\,_{мин} = 10\ мин.$$

Интенсивность входного потока:

$$\lambda = 1/\ T_{вх} = 1/10 = 0{,}1\ заяв/мин$$

Общее время обработки заявок:

$$\Sigma T_0 = 75мин.$$

Среднее время обработки одной заявки:

$$T_0 = \frac{50}{10} = 7{,}5\ мин$$

Интенсивность обслуживания:

$$\mu = 1/\ T_0 = 1/7{,}5 = 2/15$$

Определим характеристики системы экспериментально, интуитивно, путем имитационного моделирования.

Построим диаграмму работы системы (рис 2)

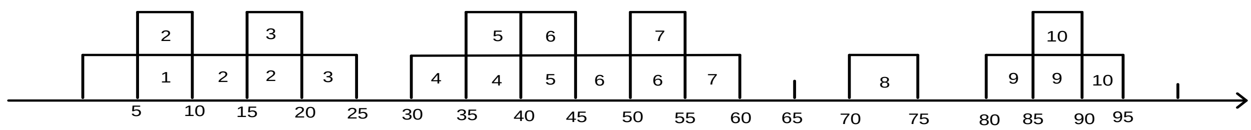

Рис 2 Диаграмма работы системы

Предполагая, что СМО является простейшей, т.е. входной поток пуассоновский, а обслуживания экспоненциальное, вычислим основные характеристики системы.

Как видно из диаграммы, обслуживая первую заявку в течении 10 минут, система ставит в очередь вторую заявку, которая приходит через 5 минут после первой, и начинает её обслуживание через 5 минут после её прихода. Из диаграммы видно, что в определенную часть времени система загружена, а периодически она простаивает (к примеру, между 3-4, 7-8, 8-9 заявками). Подсчитав эти времена, получим, что система занята 75 мин, свободна – 25 мин.

Вычислим загрузку системы ρ как часть времени, которую система занята, т.е. обслуживает заявки. Это можно наглядно увидеть на диаграмме.

Из 100 мин., работы, система «пуста» 25 мин, т.е. общее время обработки заявок

$$T_\rho = 75 \text{ мин.}$$

Тогда загрузка:

$$\rho = \frac{T_{работы}}{T_{вкл.}} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Фактически ρ – определяется также как среднее число заявок, поступающих в систему за среднее время обслуживания одной заявки.

Перерисуем с нашей диаграммы только «квадратики» стоящие на «втором» этаже диаграммы (рис 3).

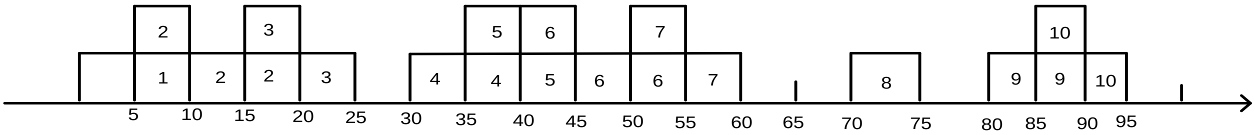

Рис 3 Диаграмма заявок, стоящих в очереди

На диаграмме указаны заявки, которые простояли в очереди. Если подсчитать общее время ожидания, то получим, что все заявки в общей сложности простояли в очереди 6*5мин = 30 мин. Если поделить эту цифру на количество заявок, т.е. 10, то получим среднее время ожидания на одну заявку:

$$T_w = \frac{\sum_i T_{wi}}{N} = \frac{30}{10} = 3 \text{ мин}$$

Определим время пребывания заявок в системе. Для этого посчитаем на диаграмме работы системы (рис. 1.6) сколько заявок находятся в системе в каждый момент времени (нам удобно считать отрезки времени, равные 5 минутам). Получается что у нас девять пятиминутных интервалов, когда в системе находилась одна заявка и шесть пятиминутных интервалов, когда в системе было 2 заявки одновременно (одна на обслуживании и одна в очереди). Иными словами:

$$T_n = (9*5*1+6*5*2)/10 = 10{,}5 \text{ мин}$$

Теперь определим среднее число заявок в очереди за единицу времени N_w.

За первые 5 минут заявки в очереди не находились, за вторые 5 минут в очереди была одна заявка, за третьи 5 минут заявок в очереди не было, за четвёртые – одна заявка и т.д. Суммируя произведения числа заявок за одинаковые промежутки времени(5 мин) и поделив все это на общий отрезок времени, мы получим N_w, т.е.

$$N_w = \frac{\sum_i n_i}{T_{инт}} = \frac{0*5+1*5+0*5+1*5+0*5+0*5+0*5+1*5+1*5+0*5+\ldots}{100}$$

$$\frac{\ldots+1.5+0.5+0.5+0.5+0.5+0.5+0.5+1.5+0.5+0.5}{} = \frac{30}{100} = 0{,}3 заявки$$

где i – количество моментов времени (единиц времени в интервале)

Аналогично определяем N_S:

Определим среднее количество заявок в системе:

$$N_S = \frac{\sum_i n_i}{T_{инт}} = \frac{9*5*1+6*5*2}{100} = 1.05 \text{ заявки}$$

Результаты вычислений запишем в таблицу 1.2.

Рассчитаем эти же характеристики системы по формулам теории массового обслуживания

Загрузка системы:

$$\rho = \lambda/\mu = 0{,}75$$

Среднее время ожидания в очереди.

$$T_w = T_0 \,.\, \rho\,/\,(1-\rho) = 22{,}5 \text{ мин}$$

Время пребывания,

$$T_n = T_0\,/\,(1-\rho) = 30 \text{ мин}$$

Среднее количество заявок в очереди,

$$N_w = \rho^2\,/\,(1-\rho) = 2{,}25 \text{ заявки}$$

Среднее количество заявок в системе,

$$N_s = \rho\,/\,(1-\rho) = 3 \text{ заявки}$$

Рассмотрим детерминированный случай, представлены на рисунке (рис 4), когда все заявки приходит через одно и тоже время $t_{вхi}=T_{вх}$ и обслуживается одно и тоже время $t_{0i}=T_0$.

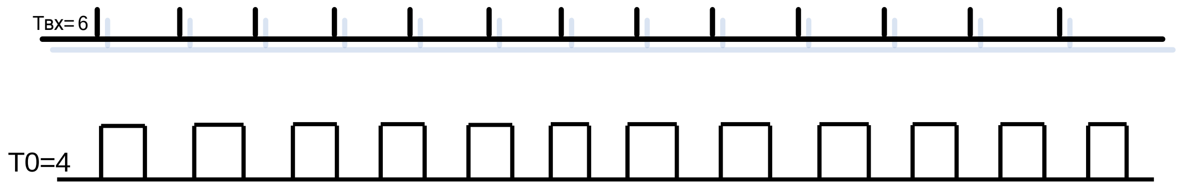

Рис. 4 Представление работы системы с точки зрения детерминированного подхода.

По аналогии с первым подходом рассчитаем характеристики для данного представления.

Результаты расчетов по формулам теории массового обслуживания (теоретический расчет), интуитивный расчет, и расчет для детерминированного случая, сведен в таблицу 2.

Таблица 2

Начальные данные и результаты расчета параметров СМО

Характеристики системы	Интуитивный подход	Теор. подсчет.	Детермин. поток
$T_{вх}$(мин)	10	10	10
T_0(мин)	7,5	7,5	7,5
P	¾	¾	¾
N_w(заяв)	0,3	2,25	0
T_w(мин)	3	22,5	0
N_s(заявки)	1,05	3,0	¾
T_n (мин)	10,5	30	7,5

Рассмотрим причины расхождения результатов интуитивного и теоретического расчетов.

Понятие входного потока λ одно из основных в теории массового обслуживания. Оно определяется как среднее число требований за единицу времени, входящих в систему за определенный отрезок времени. Построим график функции *A(t)* (рис .1.9):

Пусть t =5,10,15.

$e^{-0.5} \cong 0.6$ $\quad P(5) \cong 0.4$

$e^{-1} \cong 0.37$ $\quad P(10) \cong 0.63 \approx 0.6$

$e^{-1.5} \cong 0.22$ $\quad P(15) \cong 0.78 \approx 0.8$

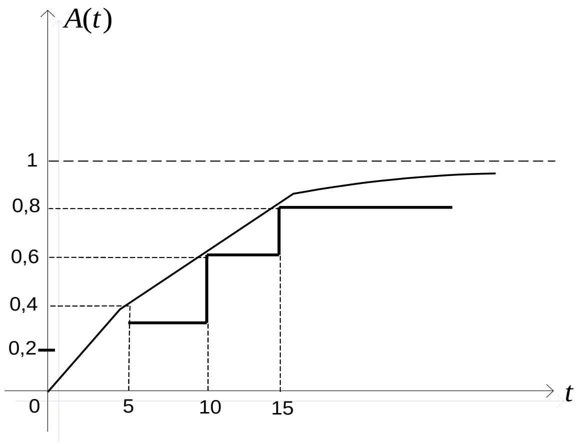

Рис .1.9 График вероятностей прихода заявки через определенные моменты времени.

Практически, экспонента заменяется ломаной кривой, т.е. на рассматриваемом интервале времени мы имеем ярко выраженное дискретное распределение.

Теория массового обслуживания дает нам верхнюю границу характеристик.

Детерминированный поток всегда дает нижнюю границу характеристик. Время ожидания равно нулю, а время пребывания равняется времени обслуживания.