Занятие №2.

Исследование характеристик ИС как сети систем массового обслуживания.

Теоретические сведения

В основу расчетов характеристик сети СМО положены характеристики системы М /М /1:

1. Интенсивность входного потока $-\lambda$;
2. Интенсивность обслуживания $-\ \mu$.

Вероятность того, что в системе находится k требований:

$P(k) = (1-\rho)\cdot\rho^k$, где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ - загрузка системы.

3. Время ожидания $T_w = \dfrac{T_0\rho}{1-\rho}$.
4. Время пребывания в системе $T_П = T_W + T_0 = T_0 + \dfrac{T_0\rho}{1-\rho} = T_0\cdot\dfrac{1}{1-\rho}$.
5. Среднее количество заявок в очереди - $N_W = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$.
6. Среднее количество заявок в системе:

$$N_S = N_W + \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho = \frac{\rho}{1-\rho}(0<\rho<1)$$

Для оптимизации сети от СМО типа M/M/1 переходим к системе M /M /m:

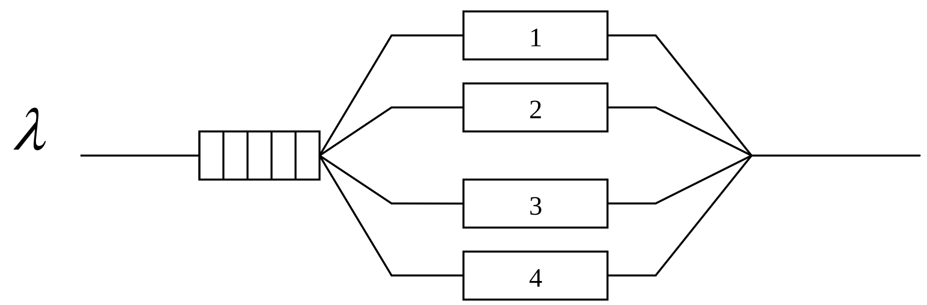


Рис. 1 Пример СМО M/M/т

Характеристики системы M/M/м:

1. $\rho = \dfrac{\lambda}{m \cdot \mu}$.

2. Вероятность того, что в системе будет k требований:

$$P(k) = \begin{cases} P_0 = \dfrac{(m \cdot \rho)^k}{k!}, k \le m \\ P_0 = \dfrac{\rho^k \cdot m^k}{m!}, k > m \end{cases}.$$

3. $P_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \dfrac{(m \cdot \rho)^k}{k!} + \dfrac{(m \cdot \rho)^m}{m!(1-\rho)} \right]^{-1}$

Определим количество заявок в очереди:

4. $N_\partial = \dfrac{\widetilde{k}^{m+1}}{m! \cdot m \cdot (1 - \dfrac{\widetilde{k}}{m})^2} p_0$.

5. $\widetilde{k} = \dfrac{\lambda}{\mu}$ - число занятых приборов.

6. Среднее количество заявок в системе:

$$N = \frac{\widetilde{k}^{m+1}}{m! \cdot m \cdot (1 - \dfrac{\widetilde{k}}{m})^2} p_0 + \widetilde{k}.$$

7. Среднее время ожидания в очереди:

$$T_W = \frac{T_0 \widetilde{k}^m}{m! \cdot m \cdot (1 - \dfrac{\widetilde{k}}{m})^2} p_0.$$

8. $T_П = T_W + T_0$.

Сеть систем массового обслуживания.

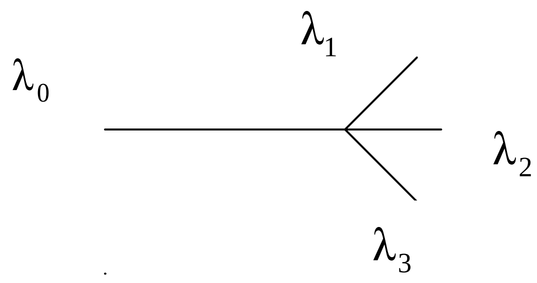
Рассмотрим сеть, содержащую n СМО:

$$\widetilde{S} = \{S_1, S_2, \ldots S_n\}$$

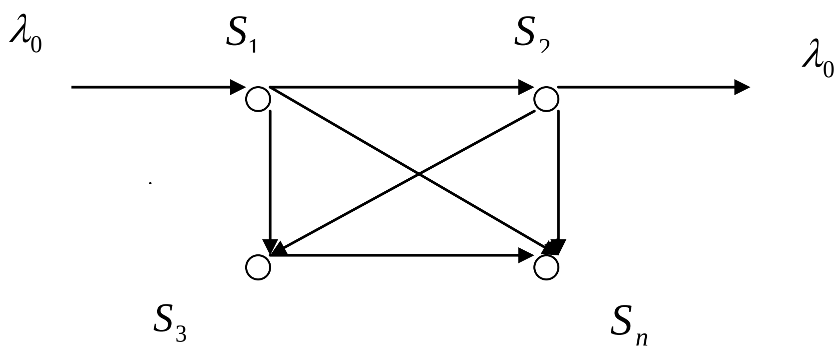
Предполагаем, что в сети заявки не создаются и не исчезают. Сумма вероятностей прихода заявки из *i*-й СМО в остальные:

$$\sum_j P_{ij} = 1$$

Сети представляются в виде графа, где вершины соответствуют СМО, а связи переходам заявок из одной СМО в другую. Рассмотрим сети, у которых один внешний источник заявок и выходной поток каждой СМО разделяется по входам других СМО.



Сеть представлена в виде:



Основой работы сети является закон сохранения потока:

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_j P_{ij} \lambda_j$$

Такая сеть называется консервативной.

В теории рассматриваются разомкнутые и замкнутые сети.

Разомкнутая – сеть, у которой выделяются входные и выходные потоки.

Стационарность сети выражается следующим образом:

$$\lambda_{вх} = \lambda_{вых}$$

Замкнутые сети – у которых считают все выходные заявки замкнутыми на вход.

$$\lambda_i = \sum_j P_{ij} \lambda_j$$

Сеть считается стационарной, если для всех компонентов выполняется следующее условие:

$$\rho = \frac{\lambda_i}{m_i \mu_i} < 1$$

Характеристики открытой сети:

1. Среднее число требований в сети:

$$N_S = \sum_{1}^{n} N_{Si}$$

2. Среднее количество требований во всех очередях:

$$N_W = \sum_{1}^{n} N_{Wi}$$

3. Среднее время ожидания заявок во всех очередях сети:

$$T_W = \sum_{1}^{n} \alpha_i \cdot T_{Wi}$$

4. Время пребывания заявки в сети:

$$T_П = \sum_{1}^{n} \alpha_i \cdot T_{Пi}$$

α_i - коэффициент передачи, показывающий, во сколько раз интенсивность потока на данной СМО отличается от входного потока.

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0},$$

иными словами - α_i - среднее число раз, которое любая заявка попадает в *i*-й компонент.

Время пребывания для замкнутой системы определяется интервалом между первым прохождением любой заявки в какой-либо системе сети.

Свойства линейных стохастических сетей.

1. Выходящий поток системы M /M /m, на который поступают требования других таких же систем, является пуассоновским с той же интенсивностью.

$$\lambda_i = \sum_{j} P_{ij} \lambda_j$$

2. Разделение потока. Если поток, поступающий от пуассоновского источника, распределен между системами с постоянной вероятностью P_{ij}, то любой такой поток также является пуассоновским.
3. Композиция нескольких потоков из разных пуассоновских источников является пуассоновским потоком с суммарной интенсивностью.

Стационарный режим такой сети является суперпозицией режимов отдельных СМО.

Узкое место сети – это тот компонент (СМО), который в наибольшей степени определяет характеристики сети.

Критерии узкого места сети:

Компонент, для которого выполнено следующее соотношение:

$$\max_i \left(\frac{\lambda_i}{m_i \mu_i} \right)$$

называется узким местом.

Аналогично:

$$\max_i \left(\alpha_i \cdot T_{\Pi i} \right)$$

или:

$$\max_i \left(\frac{\partial \lambda_{вых}}{\partial \mu_i} \right)$$