ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

КРЕКНИН А.И.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Ч.3 ДИНАМИКА

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для студентов заочной формы обучения специальностей:

ПГС, АДиА, ТГВ, ВиВ, ЭУН, ГСХ, ПТ.

(Издание 2-е, переработанное)

Тюмень, 2009

УДК: 531
К - 79

Крекнин А.И. Теоретическая механика. Ч. 3. Динамика: контрольные задания и методические указания для студентов специальностей: 270102 «Промышленное и гражданское строительство», 270205 «Автомобильные дороги и аэродромы», 270109 «Теплогазоснабжение и вентиляция», 270112 «Водоснабжение и водоотведение», 270115 «Экспертиза и управление недвижимостью», 270105 «Городское строительство и хозяйство», 270106 «Производство строительных материалов, изделий и конструкций», 140104 «Промышленная теплоэнергетика», 280201 «Охрана окружающей среды и рациональное использование природных ресурсов» заочной формы обучения. Издание 2-е, переработанное. - Тюмень: РИО ГОУ ВПО ТюмГАСУ, 2009. – 104с.

Сборник разработан на основании рабочих программ ГОУ ВПО ТюмГАСУ дисциплины «Теоретическая механика» для студентов специальностей 270102 «Промышленное и гражданское строительство», 270205 «Автомобильные дороги и аэродромы», 270109 «Теплогазоснабжение и вентиляция», 270112 «Водоснабжение и водоотведение», 270115 «Экспертиза и управление недвижимостью», 270105 «Городское строительство и хозяйство», 270106 «Производство строительных материалов, изделий и конструкций», 140104 «Промышленная теплоэнергетика», 280201 «Охрана окружающей среды и рациональное использование природных ресурсов» заочной формы обучения. Сборник предлагается методические указания и примеры выполнения контрольных заданий по каждой теме дисциплины, а так же контрольные вопросы для самопроверки. Во втором издание откорректированы некоторые задач первого издания и дополнительно включены 7 заданий.

Рецензент:
В.Н.Кутрунов д.ф.-м.н., профессор Тюменского государственного университета;

Тираж: 450 экз.

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО «Тюменский государственный архитектурно-строительный университет».

ОГЛАВЛЕНИЕ

[1] В скобках даны номера соответствующих задач в 1-ом издании брошюры «Крекнин А.И. Теоретическая механика. Ч.3. Динамика. Контрольные задания и методические указания. Для студентов заочной формы обучения специальностей: ПГС, ПСК, АДиА, ТГВ, ВиВ, ЭУН, ГСХ, ПТ, ООС. 2006 г».

I. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

При изучении третьего раздела курса теоретической механики – динамики необходимо руководствоваться следующим.

1. Необходимо иметь соответствующую математическую подготовку. В разделе широко используется векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить аналитически (по проекциям на координатные оси) сумму векторов, вычислять скалярное и векторное произведение двух векторов и знать свойства этих произведений, дифференцировать векторы. Надо также уметь свободно пользоваться системой прямоугольных координат на плоскости и в пространстве, знать что такое единичные векторы (орты) этих осей и как выражаются составляющие вектора на координатные оси с помощью ортов.

Для изучения динамики надо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

2. При изучении материала курса по учебнику нужно, прежде всего, уяснить существо каждого излагаемого там вопроса. Главное – это понять изложенное в учебнике, а не «заучить».

Изучать материал рекомендуется по темам (пунктам приводимой ниже программы) или по главам (параграфам) учебника. Сначала следует прочитать весь материал темы (параграфа), особенно не задерживаясь на том, что показалось не совсем понятным; часто это становится понятным из последующего. Затем надо вернуться к местам, вызвавшим затруднения, и внимательно разобраться в том, что было неясно. Особое внимание при повторном чтении обратите на формулировки соответствующих теорем, определений и т.п. (они обычно бывают набраны в учебнике курсивом или разрядкой); в точных формулировках, как правило, бывает существенно каждое слово и очень полезно понять, почему данное выражение сформулировано именно так. Однако не следует стараться заучивать формулировки; важно понять их смысл и уметь изложить результат своими словами.

Необходимо понять ход всех доказательств (в механике они обычно не сложны) и разобраться в их деталях. Доказательства надо уметь воспроизводить самостоятельно, что нетрудно сделать, поняв идею доказательства; пытаться просто их «заучивать» не следует, никакой пользы это не приносит.

Закончив изучение темы, полезно составить краткий конспект, по возможности не заглядывая в учебник.

При изучении курса особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач. Для этого, изучив материал данной темы, надо сначала обязательно разобраться в решениях соответствующих задач, которые приводятся в учебнике, обратив особое внимание на методические указания по их решению. Затем постарайтесь решить самостоятельно несколько аналогичных задач из сборника задач И. В. Мещерского и после этого решите соответствующую задачу из контрольного задания.

3. Закончив изучение темы, нужно проверить, можете ли вы дать ответы на все вопросы программы по этой теме (осуществить самопроверку).

Поскольку все вопросы, которые должны быть изучены и усвоены, в программе перечислены достаточно подробно, дополнительные вопросы для самопроверки здесь не приводятся. Однако очень полезно составить перечень таких вопросов самостоятельно (в отдельной тетради) следующим образом.

Начав изучение очередной темы программы, выписать сначала в тетради последовательно все перечисленные в программе вопросы этой темы, оставить справа широкую колонку (поле). При этом если, например, в программе сказано «Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и конечной формах», то следует записать отдельно вопросы «Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме» и «Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме» и т. п.

Затем по мере изучения материала темы (чтения учебника) следует в правой колонке указать страницу учебника, на которой излагается соответствующий вопрос, а также номер формулы или уравнения (уравнений), которые выражают ответ на вопрос математически. В результате в данной тетради будет полный перечень вопросов для самопроверки, который можно использовать и при подготовке к экзамену. Кроме того, ответив на вопрос или написав соответствующую формулу (уравнение), вы можете по учебнику быстро проверить, правильно ли это сделано, если в правильности ответа сомневаетесь. Наконец по тетради с такими вопросами вы можете установить, весь ли материал, предусмотренный программой, вами изучен (если изучен весь материал, то против каждого вопроса в правой колонке будет указана соответствующая страница учебника).

Следует иметь в виду, что в различных учебниках материал может излагаться в разной последовательности. Поэтому ответ на какой-нибудь вопрос данной темы может оказаться в другой главе учебника, но на изучение раздела в целом это, конечно, не скажется.

Указания по выполнению контрольных заданий приводятся ниже после рабочей программы. Их надо прочитать обязательно и ими руководствоваться. Кроме того, к каждой задаче даются конкретные методические указания по их решению, и приводится пример решения.

II. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА*

Введение. Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики. Теоретическая механика и ее место среди естественных и технических наук. Механика как теоретическая база ряда областей современной

*Программа составлена на основании Образовательных стандартов для специальностей: ПГС, ТГВ, ВиВ, ЭУН, ГСХ - от 07.03.2000 г. р/н 12 тех/дс; АДиА - от 05.04.2000 г. р/н 301 тех/дс; ПТ- от 27.03.2000 г. р/н 209 тех/дс.

техники. Объективный характер законов механики. Основные исторические этапы развития механики. Связь механики с производством и ее роль в решении задач развития научно технического прогресса в условиях рыночной экономики.

ДИНАМИКА

Ведение в динамику. Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила. Силы, зависящие от времени, от положения точки и от ее скорости. Законы классической механики или законы Галилея – Ньютона. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики.

Динамика точки

Решение первой и второй задач динамики. Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки в декартовых координатах.

Уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника.

Две основные задачи динамики для материальной точки. Решение первой задачи динамики.

Решение второй задачи динамики. Начальные условия. Постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения точки.

Решение второй задачи динамики. Начальные условия. Постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения точки.

Несвободное и относительное движение точки. (Несвободное движение материальной точки. Дифференциальные уравнения движения точки по заданной гладкой неподвижной кривой. Определение закона движения и реакции связи.)

Относительное движение материальной точки. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки; переносная и кориолисова силы инерции. Принцип относительности классической механики. Случай относительного покоя.

Прямолинейные колебания точки. Свободные колебания материальной точки под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию от центра колебаний. Амплитуда, начальная фаза, частота и период колебаний. Затухающие колебания материальной точки при сопротивлении, пропорциональном скорости; период этих колебаний, декремент колебаний. Апериодическое движение.

Вынужденные колебания материальной точки при действии гармонической возмущающей силы и силы сопротивления, пропорциональной скорости; случай отсутствия сопротивления. Амплитуда вынужденных колебаний и сдвиг фаз, их зависимость от отношения частот; коэффициент динамичности. Явление резонанса.

Введение в динамику механической системы. Механическая система. Классификация сил, действующих на механическую систему: силы активные (задаваемые) и реакции связей; силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил. Масса системы. Центр масс; радиус – вектор и координаты центра масс.

Моменты инерции. Момент инерции твердого тела относительно оси; радиус инерции. Моменты инерции тела относительно плоскости и полюса. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей или теорема Гюйгенса. Примеры вычисления моментов инерции: моменты инерции однородного тонкого стержня, тонкого круглого кольца или полого цилиндра и круглого диска или сплошного круглого цилиндра. (Формула для вычисления момента инерции относительно оси любого направления. Центробежные моменты инерции. Главные и главные центральные оси инерции и их свойства.)

Общие теоремы динамики

Теорема о движении центра масс. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс механической системы. Закон сохранения движения центра масс.

Теорема об изменении количества движения. Количество движения материальной точки. Элементарный импульс силы. Импульс силы за конечный промежуток времени и его проекции на координатные оси. Теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной и конечной формах.

Количество движения механической системы; его выражение через массу системы и скорость ее центра масс. Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и конечной формах. Закон сохранения количества движения механической системы.

(Понятие о теле и точке переменной массы. Уравнение Мещерского. Формула Циалковского).

Теорема об изменении момента количества движения. Момент количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Центральная сила. Сохранение момента количества движения материальной точки в случае центральной силы. (Понятие о секторальной скорости. Закон площадей.)

Главный момент количества движения или кинетический момент механической системы относительно центра и относительно оси. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Закон сохранения кинетического момента механической системы. (Теорема об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс.)

Теорема об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия материальной точки. Элементарная работа силы; аналитическое выражение элементарной работы. Работа силы на конечном перемещении точки ее приложения. Работа силы тяжести, силы упругости и силы тяготения. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной и конечной формах.

Кинетическая энергия механической системы. Формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела при поступательном движении, при вращении вокруг неподвижной оси и в общем случае движения (в частности, при плоскопараллельном движении). Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной и конечной формах. Равенство нулю суммы работ внутренних сил в твердом теле. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

Понятие о силовом поле. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Выражение проекции силы через силовую функцию. Поверхности равного потенциала. Работа сил на конечном перемещении точки в потенциальном силовом поле. Потенциальная энергия. Примеры потенциальных силовых полей: однородное поле тяжести и поле тяготения. Закон сохранения механической энергии.

Динамика твердого тела. Дифференциальное уравнение поступательного движения твердого тела. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Физический маятник. Дифференциальное уравнение плоского движения твердого тела.

Принцип Даламбера. Принцип Даламбера для материальной точки; сила инерции. Принцип Даламбера для механической системы. Приведение сил инерции точек твердого тела к центру; главный вектор и главный момент сил инерции.

(Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Случай, когда ось вращения является главной центральной осью инерции тела.)

Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики. Связи, налагаемые на механическую систему. Возможные (или виртуальные) перемещения материальной точки и механической системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.

Уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа). Обобщенные координаты системы; обобщенные скорости. Выражение элементарной работы в обобщенных координатах. Обобщенные силы и их вычисление; случай сил, имеющих потенциал. Условия равновесия системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа 2-го рода. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил; функция Лагранжа (кинетический потенциал). Принцип Гамильтона – Остроградского.

Понятие об устойчивости равновесия. Малые свободные колебания механической системы с двумя (или n) степенями свободы около положения устойчивого равновесия системы и их свойства, собственные частоты и коэффициенты формы.

Элементы теории удара. Явление удара. Ударная сила и ударный импульс. Действие ударной силы на материальную точку. Теорема об изменении количества движения точки при ударе. Прямой центральный удар тела о неподвижную поверхность; упругий и неупругий удары. Коэффициент восстановления при ударе и его опытное определение. Прямой центральный удар двух тел. Теорема Карно.

III. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ

1. Яблонский А.А., В.М. Никифорова. Курс теоретической механики. Учеб. пособие для вузов: 13-е изд., исправ. - М.: Интеграл-Пресс, 2006. - 603с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов / С.М.Тарг. -15-е изд., стер. - М.: Высш. шк.,2005. - 415 с.
3. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики: Учеб.пособие для студ-ов вузов по техн.спец.: В 2-х т./Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. СПб.: Лань. -5-е изд., испр. -1998. -729 с.
4. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: Учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по техн.спец. / И.В. Мещерский; Под ред. В.А. Пальмова, Д.Д. Меркина. -45-е изд., стер. - СПб. и др.: Лань, 2006. - 447 с.
5. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для студ.втузов / [А.А. Яблонский, С. С.Норейко,С.А.Вольфсон и др.]; Под общ. ред. А. А. Яблонского. - 11-е изд., стер. - М.: Интеграл- Пресс, 2004. - 382 с.
6. Бать М.И и др. Теоретическая механика в примерах и задачах. Учеб. пособ. для вузов. В 2-х т. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон.-9-е изд., перераб. - М.: Наука,1990. - 670 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

7. Теоретическая механика: Сб.научно-метод.ст. /М-во образования РФ. Научно-метод. совет по теорет.механике. Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова, Ин-т механики; Под ред. Ю.Г. Мартыненко. - М.: Изд-во МГУ.- Вып.25. - 2004. - 213 с.
8. Курс теоретической механики: Учебник для вузов по направлению подгот.дипломир.специалистов в области техники и технологии/ [В.И.Дронг, В.В.Дубинин,М.М., Ильин и др.]; Под ред.К.С.Колесникова. -3-е изд., стер. М. : Изд- во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. -735 с.- (Механика в техническом университете: В 8 т.; Т.1)
9. Павловский М.А. и др. Теоретическая механика. Динамика: Учеб. для втузов / М.А. Павловский, Л.Ю. Акинфиева, О.Ф. Бойчук; Под общ. ред. М.А. Павловского. - Киев: Выща. шк.,1990. - 479 с.
10. Цывильский В.Л. Теоретическая механика: Учебник для втузов. - М.: Высшая школа, 2001. - 318 с.

IV. ПЕРЕЧЕНЬ НАИБОЛЕЕ ЗНАЧИМЫХ ВОПРОСОВ ПО РАЗДЕЛУ «ДИНАМИКА»

1. Основные понятия и определения динамики.
2. Законы Ньютона.
3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.
4. Понятие начальных условий.
5. Решение основной задачи динамики при прямолинейном движении точки.
6. Количество движения точки. Импульс силы.
7. Теорема об изменении количества движения точки.
8. Теорема об изменении момента количества движения точки.
9. Понятие элементарной работы силы и работы силы на конечном перемещении. Мощность.
10. Частные случаи вычисления работ сил (силы тяжести, силы упругости пружины, силы трения скольжения).
11. Теорема об изменении кинетической энергии точки.
12. Понятие механическая система.
13. Классификация сил, действующих на систему.
14. Понятие центр масс системы. Координаты центра масс системы.
15. Понятие момента инерции тела относительно оси. Примеры вычисления моментов инерции.
16. Теорема о движении центра масс системы.
17. Закон сохранения движения центра масс.
18. Количество движения системы. Вычисление главного вектора количества движения системы.
19. Теорема об изменении количества движения.
20. Закон сохранения количества движения системы.
21. Кинетический момент системы.
22. Вычисление кинетического момента системы в случае ее вращательного движения.
23. Теорема моментов для механической системы.
24. Закон сохранения кинетического момента.
25. Кинетическая энергия системы.
26. Частные случаи вычисления кинетической энергии системы (твердого тела).
27. Частные случаи вычисления работ сил, приложенных к твердому телу.
28. Терема об изменении кинетической энергии системы.
29. Основное допущение элементарной (прецессионной) теории гироскопа.
30. Свободный трехстепенной гироскоп.
31. Гироскоп с двумя степенями свободы. Гироскопический момент.
32. Принцип Даламбера для материальной точки.
33. Принцип Даламбера для механической системы.
34. Вычисление главного вектора и главного момента сил инерции системы.
35. Классификация связей наложенных на механическую систему.
36. Понятие возможных перемещений точки и механической системы.
37. Принцип возможных перемещений.

38. Общее уравнение динамики.
39. Уравнения Лагранжа 2-го рода.
40. Уравнения Лагранжа 2-го рода (случай потенциальных сил).
41. Канонические уравнения механики для консервативной системы.
42. Принцип Гамильтона – Остроградского.
43. Понятие об устойчивости равновесия.
44. Теорема Лагранжа – Дирихле.
45. Дифференциальные уравнения малых свободных колебаний механической системы с двумя степенями свободы.
46. Основное уравнение теории удара.
47. Теорема об изменении количества движения системы при ударе.
48. Теорема об изменении главного момента количества движения системы (теорема моментов) при ударе.
49. Коэффициент восстановления при ударе.
50. Потеря кинетической энергии при неупругом ударе. Теорема Карно.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

V. СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ, ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Студенты по динамике выполняют 2 контрольных задания (работы).

Задание 3 – перечень задач, определенных кафедрой (преподавателем) для данной специальности, из числа задач Д1 – Д10.

Задание 4 – перечень задач, определенных кафедрой (преподавателем) для данной специальности, из числа задач Д11 – Д15.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рисунок Д1.4 – это рисунок 4 к задаче Д1 и т. д. (в тексте задач при повторных ссылках на рисунок пишется просто рисунок 4 и т. д.). Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рисунок 4 и условие № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указывается: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность и адрес. На первой странице тетради записывается: номер работы, номера решаемых задач и год издания контрольных заданий.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй, иначе работу трудно проверять). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано, и что требуется определить (текст задачи не переписывается). *Чертеж выполняется с учетом условия решаемого варианта задачи*; на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение должны соответствовать этим условиям. В результате в целом ряде задач чертеж получается более простым, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др. Показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно*. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы и теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и *подробно излагать весь ход расчетов*. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращены для переделки.

К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

На экзамене (зачете) необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы, в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштабов. На рисунках к задачам Д1 – Д15 все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам – вертикальными и это в тексте специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса катятся по плоскости без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, l_1, r_1 и т. п. означают вес или размеры тела *1*; P_2, l_2, r_2 – тела *2* и т. д. Аналогично, V_B, a_B – означает скорость и ускорение точки *B*; V_C, a_C – точки *C*; ω_1 ε_1 – угловую скорость и угловое ускорение тела *1*; ω_2, ε_2 – тела *2* и т. д. В каждой задаче подобные обозначения могут также специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к *вашему варианту*, т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после ее текста под рубрикой «Указания», затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. *Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями*; в конце должны быть даны ответы.

VI. ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

Задача Д1 (Д1) [2]

Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки

Автомобиль D массой m, имея в точке A начальную скорость V_0 , движется по трассе ABC; участки трассы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рисунки Д1.0 – Д1.9).

На участке трассы AB на автомобиль кроме силы тяжести действует постоянная сила $\vec{Q}$. В точке B автомобиль, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трассы, где на него кроме силы тяжести действует сила трения (коэффициент трения автомобиля о дорожное полотно f = 0,1) и переменная сила $\vec{F}$, проекция которой F_x на ось x задана в таблицах Д1а), Д1б).

Считая автомобиль материальной точкой и зная время t_1 движения автомобиля от точки A до точки B, найти закон движения груза на участке BC, т.е. $x = f(t)$, где $x = BD$, а также скорость автомобиля в точке C, если автомобиль проходит участок BC за время t_2 секунд.

Таблица Д1а). Данные к задачам Д1.

Номер условия	m, т	V_0, м/с	Q, Н	t_1, с	t_2, с	$F_x = at + bt^2$, Н	
						a	b
0	2,0	20	6000	2,5	3	0	1500
1	2,4	12	6000	1,0	4	– 200	2000
2	4,5	18	4000	3,0	3,0	3500	3000
4	1,6	18	4000	2,0	2,5	3000	– 200
7	4,0	24	2000	3,0	1,5	0	250

Таблица Д1б). Данные к задачам Д1.

Номер условия	m, т	V_0, м/с	Q, Н	t_1, с	t_2, с	$F_x = a\sin(\pi t/8) + b\cos(\pi t/8)$, Н	
						a	b
3	6,0	24	2200	3	4/3	0	150
5	8,0	20	1600	2,5	4/3	– 50	0
6	1,8	24	2500	2	2,0	0	– 300
8	3,0	22	2900	1,5	8/3	150	0
9	4,8	20	3200	2	4/3	0	– 200

---

[2] В скобках даны номера соответствующих задач в 1-ом издании брошюры «Крекнин А.И. Теоретическая механика. Ч.3. Динамика. Контрольные задания и методические указания. Для студентов заочной формы обучения специальностей: ПГС, АДиА, ТГВ, ВиВ, ЭУН, ГСХ, ПТ, ООС. 2006 г».

Рисунки к задачам Д1

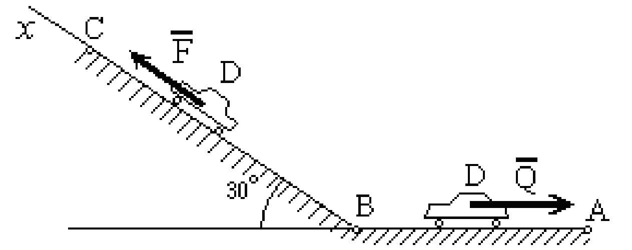


Рисунок Д1.0

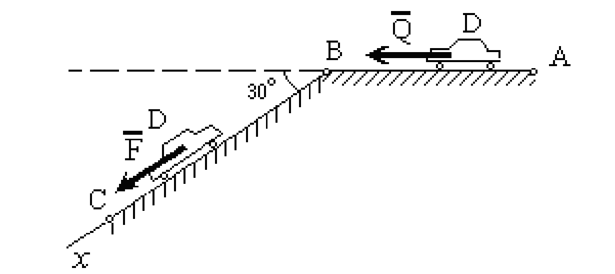


Рисунок Д1.1

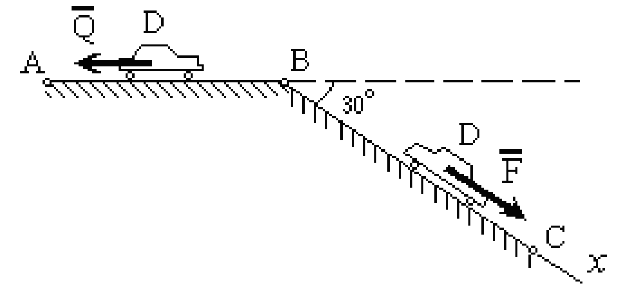


Рисунок Д1.2

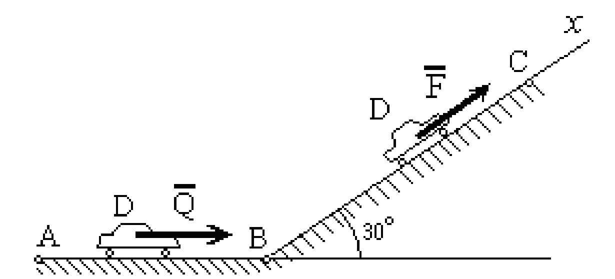


Рисунок Д1.3

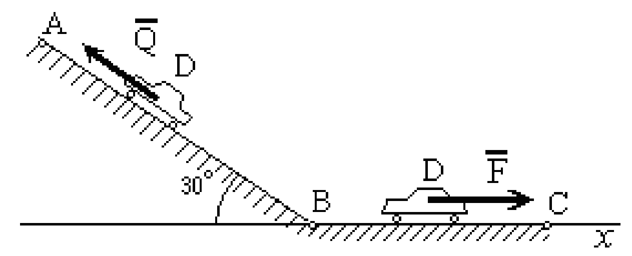


Рисунок Д1.4

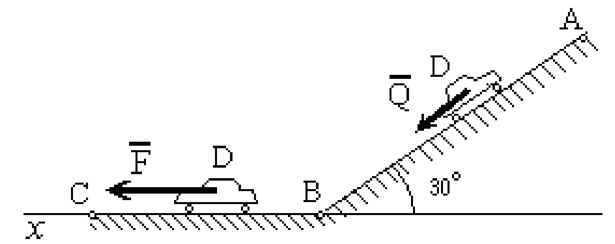


Рисунок Д1.5

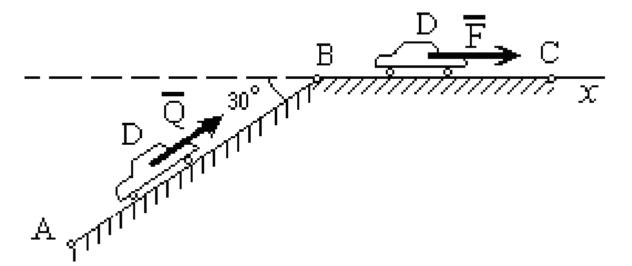


Рисунок Д1.6

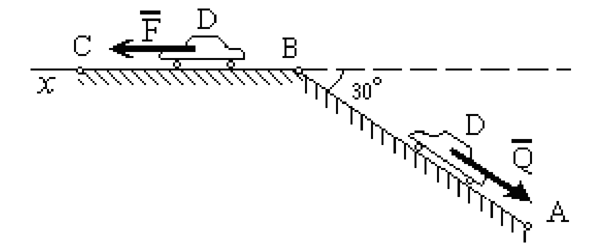


Рисунок Д1.7

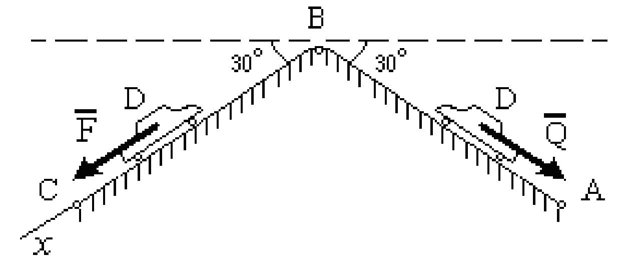


Рисунок Д1.8

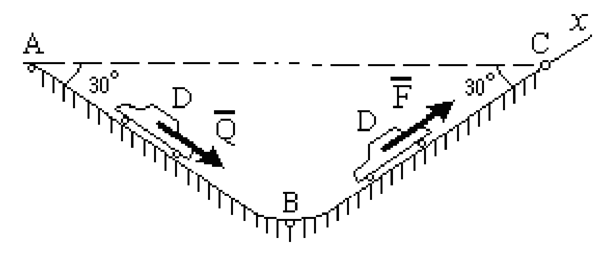


Рисунок Д1.9

Указания к решению задачи Д1

Задача Д1 – на составление и интегрирование дифференциальных уравнений движения точки. Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (автомобиля) на участке AB, учтя начальные условия. Затем, зная время движения автомобиля на участке AB или длину этого участка, определить скорость автомобиля в точке B. Эта скорость будет начальной для движения автомобиля на участке BC. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения автомобиля на участке BC тоже с учетом начальных условий, ведя отчет времени от момента, когда автомобиль находится в точке B, и полагая в этот момент $t = 0$.

При решении задачи целесообразно следовать алгоритму, предложенному в примере.

Пример решения задачи Д1

Задача. Автомобиль D массой $m = 0{,}5$ т, имея в точке A начальную скорость $V_0 = 10$ м/с, движется по трассе $ABCE$ (рисунок 1).

На участке AB трассы автомобиль тормозит, и на него кроме силы тяжести действует сила трения скольжения $\vec{F}_{ТР}$ (коэффициент трения автомобиля о дорожное полотно $f = 0{,}1$). В точке B автомобиль, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC, где на него действует постоянная сила $\vec{Q}$, модуль которой $Q = 2000$ н.

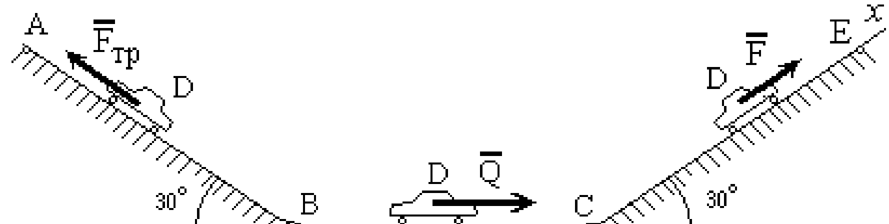


Рисунок 1

В точке C автомобиль, не изменяя своей скорости переходит на участок трассы CE, где на него кроме силы тяжести действует переменная сила, проекция которой F_x на ось x $F_x = 1000 \cdot t + 3000 \cdot \sin(\pi \cdot t/8)$ н.

Считая автомобиль материальной точкой и, зная время $t_1 = 4$ c движения автомобиля от точки A до точки B, а также расстояние $BC = 50$ м, найти закон движения груза на участке CE, т.е. $x = f(t)$, где $x = CE$, и скорость автомобиля в точке E, если автомобиль проходит участок CE за время $t_3 = 8/3$ секунд.

Решение.

I. Рассмотрим участок AB трассы.

При решении задач на составление и интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки целесообразно использовать следующий алгоритм действий

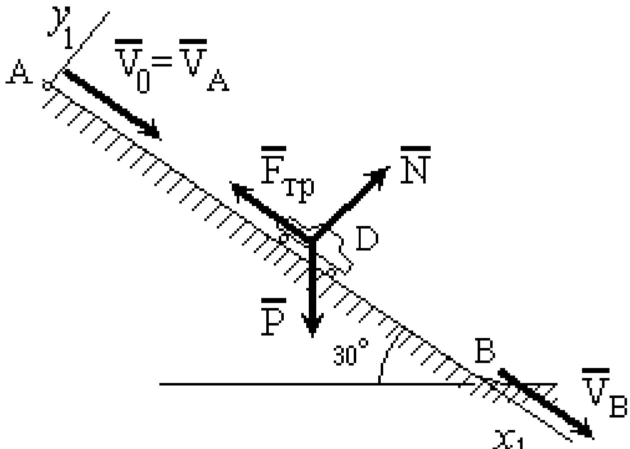


Рисунок 2

1. Изобразим точку в произвольном положении (между начальным и конечным ее положениями – рисунок 2).

2. Приложим к точке все действующие на нее силы.

3. Запишем применительно к данной задаче основное уравнение динамики

$$m\vec{a}_1 = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}. \qquad (1)$$

4. Выберем оси координат, направляя ось x_1 в сторону движения. Начало координат поместим в точку A, откуда начинается движение.

5. Спроектируем векторное равенство (1) на выбранные оси координат

$$ma_{1x_1} = P \cdot cos(60^0) - F_{тр}, \qquad (2)$$

$$ma_{1y_1} = -P \cdot cos(30^0) + N. \qquad (3)$$

6. Преобразуем выражения (2) и (3).

Так как $a_{1y_1} = 0$ (точка не движется вдоль оси y_1) из уравнения (3) найдем $N = P \cdot \cos(30^0)$. Тогда, с учетом того, что $a_{1x_1} = \ddot{x}_1$, $P = m \cdot g$, $F_{тр} = f \cdot N$, поделив уравнение (2) на m, получим

$$\ddot{x}_1 = g \cdot (cos60^0 - f \cdot cos30^0). \qquad (4)$$

7. Проинтегрируем уравнение (4).

Первоначально, представ вторую производную $\ddot{x}_1$ в виде $\ddot{x}_1 = \dfrac{d\dot{x}_1}{dt}$,
вместо уравнения (4) получим

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt} = g \cdot (cos60^0 - f \cdot cos30^0). \tag{5}$$

Умножим на dt и проинтегрируем уравнение (5)

$$\int d\dot{x}_1 = \int g \cdot (cos60^0 - f \cdot cos30^0)dt. \tag{6}$$

8. Вычисляя интегралы в последнем выражении, получим

$$\dot{x}_1 = g \cdot (cos60^0 - f \cdot cos30^0) \cdot t + C_1. \tag{7}$$

9. Запишем для участка AB начальные условия

$$при \quad t = 0 \qquad x_{10} = 0, \qquad \dot{x}_{10} = V_0.$$

10. Используя начальные условия, определим постоянную C_1.

Подставим в правую часть решения (7) $t = 0$, тогда в левую часть по начальным условиям вместо $\dot{x}_1$ необходимо подставить V_0. В результате, получим

$$V_0 = g \cdot (cos60^0 - f \cdot cos30^0) \cdot 0 + C_1$$

или $C_1 = V_0$.

Тогда закон изменения скорости точки на участке AB будет иметь вид

$$\dot{x}_1 = g \cdot (cos60^0 - f \cdot cos30^0) \cdot t + V_0. \tag{8}$$

При $t = t_1$ скорость точки равна $V_В$. Подставляя эти величины в закон (8), найдем

$$V_В = g \cdot (cos60^0 - f \cdot cos30^0) \cdot t_1 + V_0 \approx 26{,}2 \text{ м/с}.$$

II. Рассмотрим участок BC.

Применим алгоритм действий, рассмотренный при исследовании участка трассы AB.

1. Изобразим точку в произвольном положении (рисунок 3).
2. Приложим к точке все действующие на нее силы.

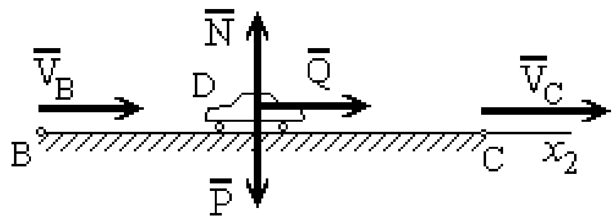


Рисунок 3

3. Запишем основное уравнение динамики

$$m\vec{a}_2 = \vec{P} + \vec{N} + \vec{Q}. \qquad (1)$$

4. Выберем оси координат, направляя ось x_2 в сторону движения. Начало координат поместим в точку B, откуда начинается движение на этом участке.

5. Спроектируем векторное равенство (1) на выбранные оси координат

$$ma_{2x_2} = Q. \qquad (2)$$

6. Преобразуем выражение (2).

С учетом того, что $a_{2x_2} = \ddot{x}_2$, поделив уравнение (2) на m, получим

$$\ddot{x}_2 = Q/m. \qquad (3)$$

7. Проинтегрируем уравнение (3).

Первоначально представим вторую производную $\ddot{x}_2$ в виде $\ddot{x}_2 = \dfrac{d\dot{x}_2}{dt}$. Тогда вместо уравнения (4) получим

$$\frac{d\dot{x}_2}{dt} = Q/m. \qquad (4)$$

Умножим на dt и проинтегрируем уравнение (4)

$$\int d\dot{x}_2 = \int Q/m\,dt. \qquad (5)$$

8. Вычисляя интегралы в последнем выражении, получим

$$\dot{x}_2 = (Q/m)\cdot t + C_2. \qquad (6)$$

9. Запишем для участка BC начальные условия

$$при \quad t = 0 \qquad x_{20} = 0, \qquad \dot{x}_{20} = V_{\text{В}}.$$

10. Из начальных условий определим постоянную интегрирования C_2.

Подставим в правую часть решения (6) $t = 0$, тогда в левую часть вместо $\dot{x}_2$ необходимо подставить $V_{\text{В}}$. В результате, получим

$$V_{\text{В}} = Q/m \cdot 0 + C_2 \qquad \text{или} \quad C_2 = V_{\text{В}}.$$

С учетом этого закон изменения скорости точки (6) на участке трассы AB будет иметь вид

$$\dot{x}_2 = Q/m \cdot t + V_{\text{В}}. \qquad (7)$$

11. Проинтегрируем уравнение (7) и найдем вторую постоянную интегрирования.

Представим производную по времени в виде $\dot{x}_2 = {dx_2}/{dt}$.

$$dx_2/dt = Q/m \cdot t + V_{\text{B}}. \qquad (8)$$

Умножим обе части уравнения (8) на dt и проинтегрируем

$$\int dx_2 = Q/m \int t \cdot dt + \int V_{\text{B}} \cdot dt + C_3.$$

Вычислив интегралы, получим

$$x_2 = Q \cdot t^2 / (2m) + V_{\text{B}} \cdot t + C_3. \qquad (9)$$

Найдем постоянную интегрирования C_3 с помощью начальных условий, согласно которым при $t = 0$ $x_0 = x_{\text{B}} = 0$. Подставляя это условие в уравнение (9), получим

$$0 = Q \cdot 0^2 / (2m) + V_{\text{B}} \cdot 0 + C_3.$$

Отсюда следует, что $C_3 = 0$.

Общее решение (9) при найденном значении C_3 даст закон движения точки D на участке трассы BC:

$$x_2 = Q \cdot t^2 / (2m) + V_{\text{B}} \cdot t. \qquad (10)$$

12. Определим время движения точки t_2 по участку трассы BC и скорость точки V_{B}.

Запишем конечные условия: при $t = t_2$ $x_2 = x_{2\text{B}} = BC = l$ =50м, $V = V_{\text{B}}$.

Подставляя t_2 и $x_{2\text{B}} = BC = l$ в уравнение движения (10), получим квадратное уравнение для определения t_2

$$Q/(2m) \cdot t_2^2 + V_{\text{B}} \cdot t_2 - l = 0 \qquad \text{или} \qquad t_2^2 + 13{,}1 \cdot t_2 - 25 = 0.$$

Корни этого уравнения: t_{21} = - 14, 8 с., t_{22} = 1, 7 с. Так как время может быть только положительным, окончательно получим t_2 = 1,7 с.

Подставляя t_2 в закон изменения скорости (8), найдем

$$V_{\text{C}} = Q/m \cdot t_2 + V_{\text{B}} = 33{,}0 \text{ м/с}.$$

III. Рассмотрим участок CE.

Используем алгоритм действий, рассмотренный выше.

1. Изобразим точку в произвольном положении (рисунок 4).

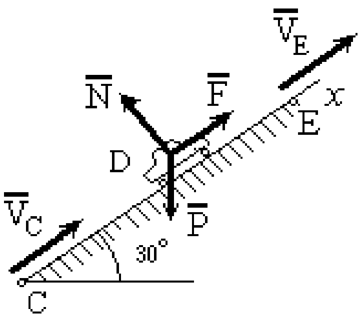


Рисунок 4

2. Приложим к точке все действующие на нее силы.

3. Запишем основное уравнение динамики

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}. \qquad (1)$$

4. Выберем ось координат x, направляя ее в сторону движения. Начало координат поместим в точку C, откуда начинается движение на этом участке.

5. Спроектируем векторное равенство (1) на выбранную ось

$$ma_x = -P \cdot cos(60^0) + F_x, \qquad (2)$$

6. Преобразуем выражения (2) .

С учетом того, что $a_x = \ddot{x}$, $F_x = 1000 \cdot t + 3000 \cdot \sin(\pi t / 8)$, и поделив уравнение (2) на m, получим

$$\ddot{x} = -g/2 + 2 \cdot t + 6 \cdot sin(\pi \cdot t/8). \qquad (3)$$

7. Проинтегрируем уравнение (3).

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -g/2 + 2 \cdot t + 6 \cdot sin(\pi \cdot t/8). \qquad (4)$$

Умножим на dt и проинтегрируем уравнение (4)

$$\int d\dot{x} = -g/2 \cdot \int dt + 2 \cdot \int t \cdot dt + 6 \cdot \int sin(\pi \cdot t/8) \cdot dt. \qquad (5)$$

8. Вычисляя интегралы в последнем выражении, получим

$$\dot{x} = -g/2 \cdot t + t^2 - 48/\pi \cdot cos(\pi \cdot t/8) + C_1. \qquad (6)$$

9. Запишем на участке CE начальные условия:

$$при \quad t = 0 \qquad x_0 = 0, \qquad \dot{x}_0 = V_C.$$

10. Из начальных условий определим постоянную интегрирования C_1.

Подставим в правую часть решения (6) t = 0, тогда в левую часть вместо $\dot{x}$ необходимо подставить V_C. В результате получим

$$V_C = -g/2 \cdot 0 + 0^2 - 48/\pi \cdot cos(\pi \cdot 0/8) + C_1$$

или

$$C_1 = V_C + 48 / \pi = 53{,}89.$$

Тогда закон изменения скорости точки на участке CE будет иметь вид

$$\dot{x} = -g/2 \cdot t + t^2 - 48/\pi \cdot cos(\pi \cdot t/8) + 53{,}89. \qquad (7)$$

При $t = t_3$ = 8/3 с. скорость точки равна V_E. Подставляя эти величины в закон (7), найдем

$$V_E = -g/2 \cdot 8/3 + (8/3)^2 - 48/\pi \cdot cos(\pi/3) + 48{,}3.$$

Откуда получим V_E = 36,65 м/с.

Заменяя в выражении (7) $\dot{x}$ на $\dfrac{dx}{dt}$ и интегрируя, получим

$$x = 48{,}5 \cdot t - 2{,}45 \cdot t^2 + 0{,}33 \cdot t^3 - 38{,}95 \cdot sin(\pi \cdot t/8) + C_2.$$

Из начальных условий найдем, что C_2 = 0.

Тогда уравнение движения точки на участке CE примет вид

$$x = 0{,}33 \cdot t^3 - 2{,}45 \cdot t^2 + 48{,}3 \cdot t - 38{,}95 \cdot sin(\pi \cdot t/8).$$

Ответ: V_E = 36,65 м/с;
$x = 0{,}33 \cdot t^3 - 2{,}45 \cdot t^2 + 48{,}3 \cdot t - 38{,}95 \cdot sin(\pi \cdot t/8)(м)$.

Задача Д2

Прямолинейные колебания точки в относительном движении

Груз *1* массой m укреплен на пружинной подвеске в лифте (рисунки Д2.0 – Д2.9, таблица Д2). Лифт движется вертикально по закону $z = 0{,}5\, a_1 \cdot t^2 + a_2 \cdot \sin(\omega t) + a_3 \cdot \cos(\omega t)$ (ось z направлена по вертикали вверх; z выражено в метрах, t – в секундах).

Найти закон движения груза по отношению к лифту, т.е. $x = f(t)$; начало координат поместить в точке, где находится прикрепленный к грузу конец пружины, когда пружина не деформирована. При этом во избежание ошибок в знаках направить ось x в сторону удлинения пружины, а груз изобразить в положении, при котором $x > 0$, т.е. пружина растянута. При расчетах можно принять g = 10 м/с^2. Массой пружины и соединительной планки *2* пренебречь.

В таблицах обозначено: c_1, c_2, c_3 – коэффициенты жесткости пружин, λ_0 – удлинение пружины с эквивалентной жесткостью в начальный момент времени $t = 0$, V_0 – начальная скорость груза по отношению к лифту (направлена вертикально вверх). Прочерк в столбцах c_1, c_2, c_3 означает, что соответствующая пружина отсутствует и на чертеже изображаться не должна. Если при этом конец одной из оставшихся пружин окажется свободным, его следует прикрепить в соответствующем месте или к грузу к потолку (полу) лифта; то же следует сделать, если свободными окажутся соединенные планкой *2* концы обеих оставшихся пружин.

Таблица Д2. Данные к задачам Д2.

Номер условия	m, кг	c_1, Н/м	c_2, Н/м	c_3, Н/м	a_1, м/с^2	a_2, м	a_3, м	ω, Н·с/м	λ_0, м	V_0, м/с
0	1	300	150	–	0	0,1	0	15	0	0
1	0,8	–	240	120	- 1,5g	0	0,3	12	0,1	0
2	0,5	–	100	150	0	0,8	0	5	0	4
3	1	240	–	160	0	0	0,5	6	0	0
4	0,5	80	120	–	- g	0,2	0	10	0,15	0
5	2	–	400	400	0	0	0,1	16	0	0
6	0,4	60	–	120	g	0	0,1	8	0	2
7	0,5	120	–	180	0	0,1	0	20	0	0
8	0,4	50	200	–	0	0	0,2	20	0,15	0
9	1	200	–	300	1,5g	0,4	0	8	0	3

Рисунки к задачам Д2

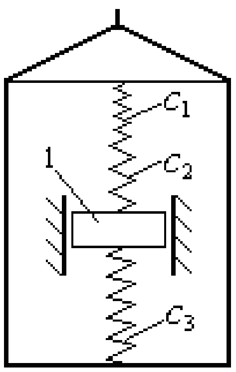


Рисунок Д2.0

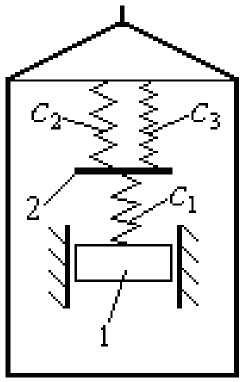


Рисунок Д2.1

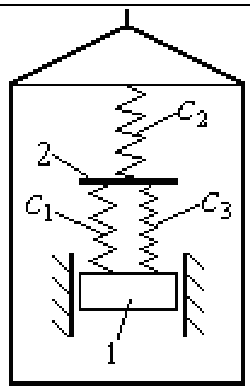


Рисунок Д2.2

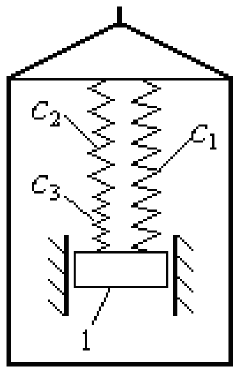


Рисунок Д2.3

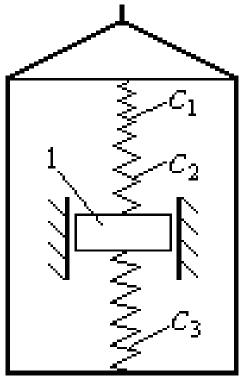


Рисунок Д2.4

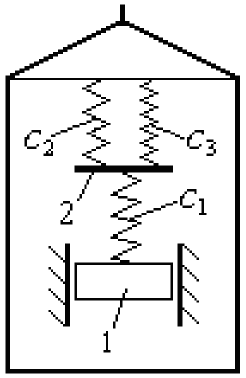


Рисунок Д2.5

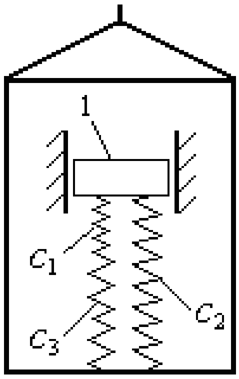


Рисунок Д2.6

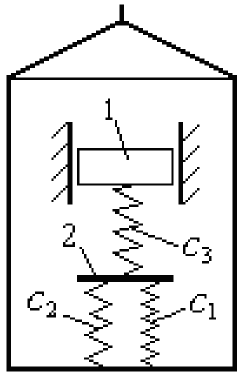


Рисунок Д2.7

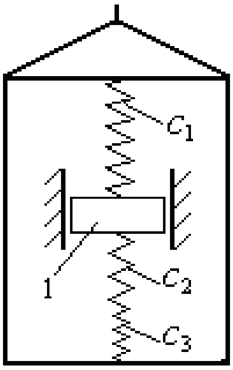


Рисунок Д2.8

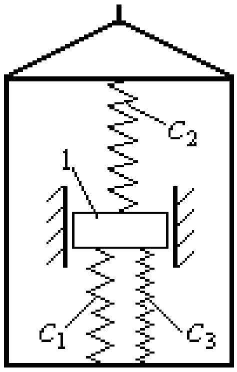


Рисунок Д2.9

Указания к решению Задачи Д2

Задача Д2 охватывает одновременно темы «Относительное движение» и «Колебания материальной точки». Сначала нужно составить дифференциальное уравнения относительного движения (по отношению к лифту) рассмотренного в задаче груза, для чего присоединить к действующим силам переносную силу инерции. При этом заменить подвеску одной пружиной с жесткостью, эквивалентной жесткости подвески. Затем проинтегрировать полученное линейное уравнение дифференциальное уравнение 2 – го порядка, учтя начальные условия.

При решении задачи целесообразно следовать алгоритму, предложенному в примере.

Пример решения задачи Д2

Задача. В приборе для измерения вертикальных колебаний (рисунок 5) груз массой m прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости c. Другой конец пружины прикреплен к корпусу прибора, который движется по закону $z = A\sin(\omega t)$ (неподвижная ось направлена z направлена по вертикали вниз).

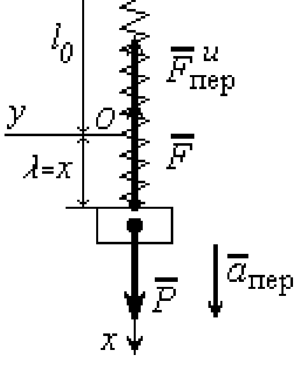


Рисунок 5

Д а н о. m = 0,4 кг, c = 40 Н/м, λ_0 = 0,05м, V_0 = 0,5 м/с, A = 0,03 м, ω = 20 с$^{-1}$.

О п р е д е л и т ь. $x = f(t)$ – закон движения груза по отношению к корпусу прибора.

Решение.

1. Свяжем с корпусом прибора подвижную систему отсчета, начало O которой поместим в конце недеформированной пружины (ее длина обозначена l_0), а ось x направлена в сторону удлинения пружины.

2. Изобразим груз в произвольном положении (между начальным и конечным ее положениями), при котором пружина растянута.

3. Приложим к грузу все действующие на него силы: $\vec{P}$ – сила тяжести, $\vec{F}$ – сила упругости пружины.

4. Для составления уравнения относительного движения груза присоединим к силам на него действующим переносную силу инерции $\vec{F}^{и}_{пер} = -m\vec{a}_{пер}$, кориолисова сила инерции равна нулю, так как переносное движение (движение корпуса прибора) является поступательным.

5. Запишем применительно к данной задаче основное уравнение динамики относительного движения, которое в векторной форме будет иметь вид

$$m\vec{a}_{ОТН} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{F}^{и}_{пер}. \tag{1}$$

6. Спроектируем обе части равенства (1) на ось x

$$m\ddot{x} = P_x + F_x + F^{и}_{перx} \tag{2}$$

Здесь $P_x = P$, $F_x = -c\lambda = -cx$, где $\lambda = x$ – удлинение пружины, $F^{и}_{перx} = -m\ a_{перx}$. Учитывая, что оси x и z направлены одинаково, получим $a_{перx} = a_{перz} = \ddot{z} = -A\ \omega^2 \sin(\omega t)$ и $F^{и}_{перx} = m\ A\ \omega^2 \sin(\omega t)$.

Подставляя все найденные выражения проекций сил в уравнение (2), получим

$$m\ddot{x} = P - cx + m\ A\ \omega^2 \sin(\omega t). \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение (3) может быть записано в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = b_1 + b_2 sin(\omega \cdot t). \tag{4}$$

где обозначено

$$k^2 = c/m = 100\ с^{-2}, \qquad b_1 = g = 10\ м/с^2, \qquad b_2 = A\ \omega^2 = 12\ м/с^2. \tag{5}$$

7. Проинтегрируем уравнение (4).

Общее решение неоднородного уравнения (4) представляется в виде

$$x = x_1 + x_2, \tag{6}$$

где x_1 – общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$, т.е.

$$x_1 = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt), \tag{7}$$

а x_2 – частное решение уравнения (4). С учетом вида вид правой части уравнения (4), найдем x_2 в виде

$$x_2 = B + D \sin(\omega t). \qquad (8)$$

Для определения постоянных B и D находим $\ddot{x}_2 = -D\omega^2 \sin(\omega t)$, подставляем значения $\ddot{x}_2$ и x_2 в уравнение (3) и приравниваем в его обеих частях свободные члены и коэффициенты при $\sin(\omega t)$. В результате, принимая во внимание обозначения (5), получим

$$B = b_1/\, k^2 = 0{,}1 \text{ м}, \qquad D = b_2 /(k^2 - \omega^2) = -\,0{,}04 \text{ м}.$$

Тогда из равенства (6) – (8), учитывая, что $k = 10$ с $^{-1}$, а $\omega = 20$ с$^{-1}$, получим следующее общее решение уравнения (3)

$$x = C_1 \sin(10t) + C_2 \cos(10t) - 0{,}04 \sin(20t) + 0{,}1. \qquad (9)$$

8. Запишем начальные условия

$$\text{при } t = 0 \quad V_x = V_0 = 0{,}5 \text{ м/с}, \quad x_0 = \lambda_0 = 0{,}05 \text{ м}.$$

9. Используя начальные условия, определим постоянную C_1 и C_2, предварительно вычислив производную

$$\dot{x} = 10 \cdot C_1 \cos(10t) - C_2 \cdot \sin(10t) - 0{,}8 \cdot \cos(20t). \qquad (10)$$

Подставив начальные условия в уравнения (9) и (10), найдем из них, что $C_1 = 0{,}13$, $C_2 = -\,0{,}05$. В результате уравнение (9) примет вид

$$x = 0{,}13 \cdot \sin(10t) - 0{,}05 \cdot \cos(10t) - 0{,}04 \cdot \sin(20t) + 0{,}1.$$

Это уравнение и определяет искомый закон относительного движения груза, то есть закон совершаемых им колебаний.

Задача Д3

Применение общих теорем динамики точки для исследования движения материальной точки

Гоночный автомобиль M массой m, имея в точке A начальную скорость V_0 (величина дана на рисунках к вариантам), движется по трассе $АВСДЕ$, которая состоит из участков *1, 2, 3* и моста (рисунки Д3.0 – Д3.9).

На участках трассы *1,2* на автомобиль кроме силы тяжести действует постоянная сила трения $\vec{F}_{тр}$ (в вариантах с рисунками Д3.5, Д3.6 сила трения скольжения действует только на участке трассы *1*). Коэффициент трения скольжения колес автомобиля о дорожное полотно $f = 0{,}1$. На участке *3*, кроме силы тяжести, действует постоянная сила $\vec{Q}$. На мосту на автомобиль действует только сила тяжести.

В точках *В, С, Д* и т.д., соединяющих участки трассы (в том числе участки трассы и мост), автомобиль не изменяет модуля своей скорости. Мост, образует дугу окружности радиуса R = 50 м, опирающуюся на угол 2α.

Считая автомобиль материальной точкой и, зная длину участков *1* и *2* (l_1 и l_2), время T движения автомобиля на участке *3*, найти:

- скорость автомобиля в положении L, которое определяется углом φ;
- силу давления автомобиля на мост в положении L;
- скорость автомобиля в точке E.

Условия к задачам, номер которых выбирается по последней цифре шифра, приведены в таблице Д3.

При вычислениях принять следующие значения функций

Значения функций	Углы ^{0}						
	8	15	30	45	60	75	83
sin	0,1392	0,2588	0,5000	0,7071	0,8660	0,9659	0,9903
cos	0,9903	0,9659	0,8660	0,7071	0,5000	0,2588	0,1392

ТаблицаД3. Условия к задачам Д3

Номер условия	m, т	α^0	β^0	γ^0	φ^0	T, с	Q, Н	V_0, м/с
0	0,5	15	90	75	8,0	5	200	20
1	0,4	30	83	60	15,0	3	200	23
2	0,3	30	75	90	15,0	5	600	21
3	0,4	15	75	83	8,0	6	300	20
4	0,6	15	60	83	8,0	5	400	22
5	0,5	30	75	60	15,0	3	800	20
6	0,3	30	83	90	15,0	5	600	20
7	0,4	15	90	75	8,0	5	400	20
8	0,45	15	75	60	8,0	3	1100	20
9	0,3	30	60	90	15,0	4	300	23

Рисунки к задачам Д3

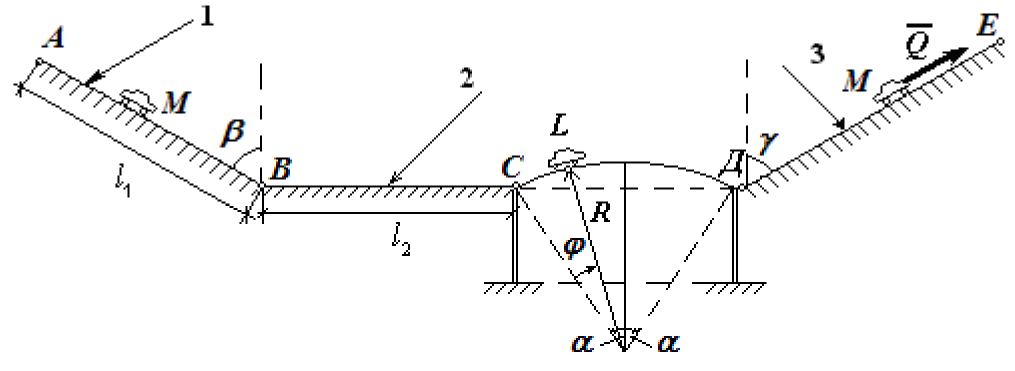


Рисунок Д3.0

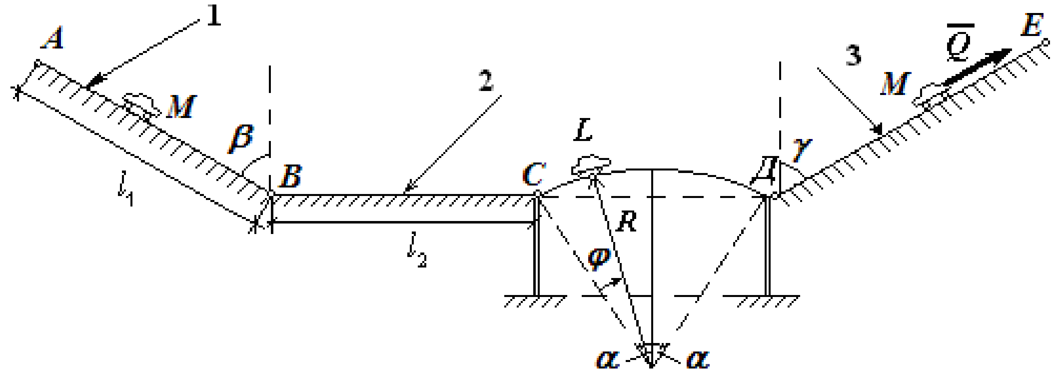


Рисунок Д3.1

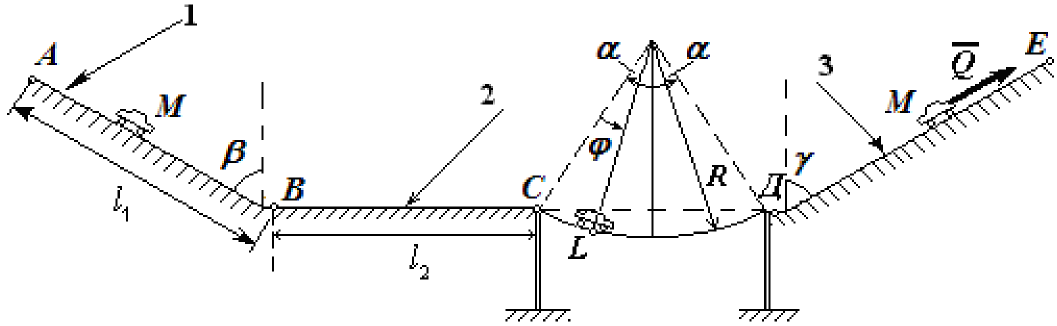


Рисунок Д3.2

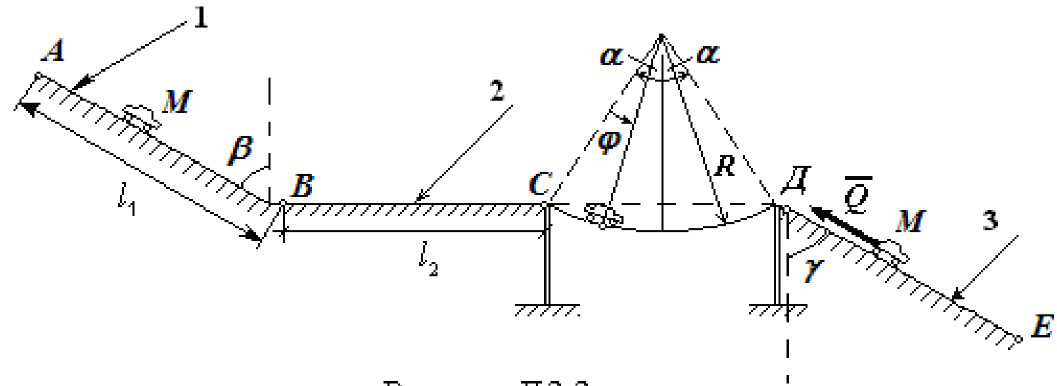


Рисунок Д3.3

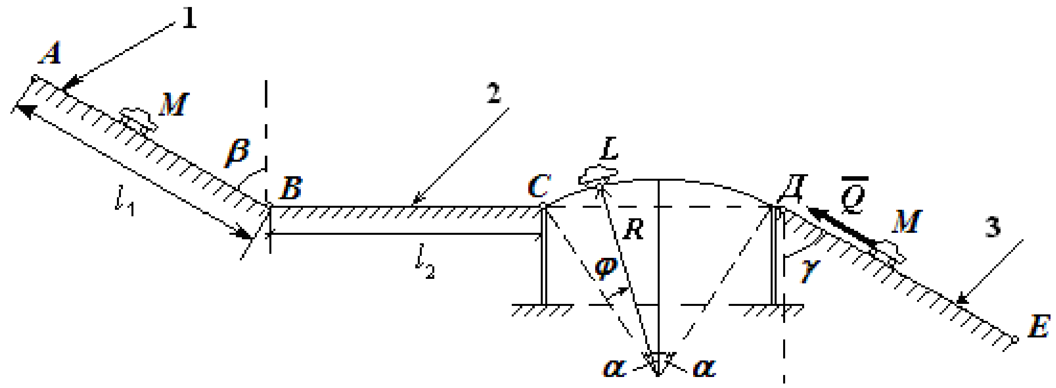


Рисунок Д3.4

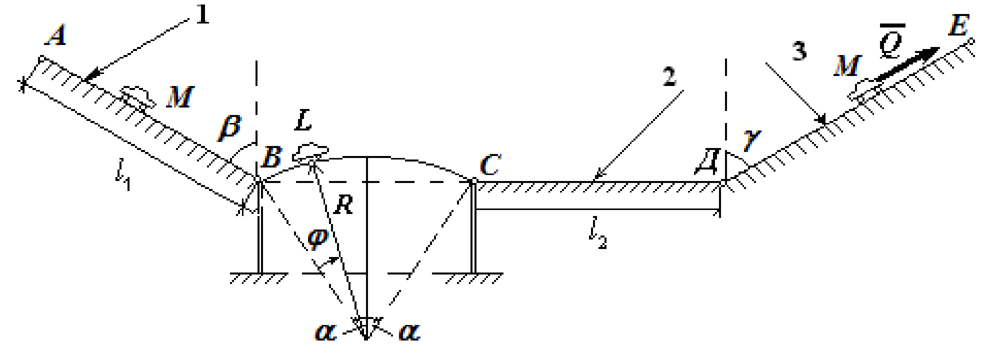


Рисунок Д 3.5

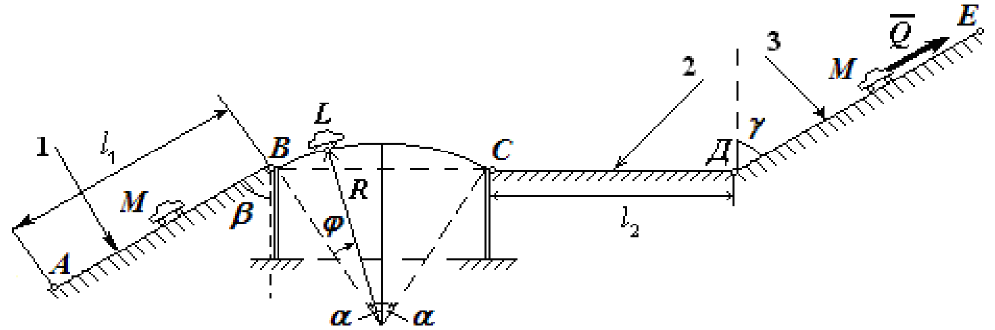


Рисунок Д 3.6

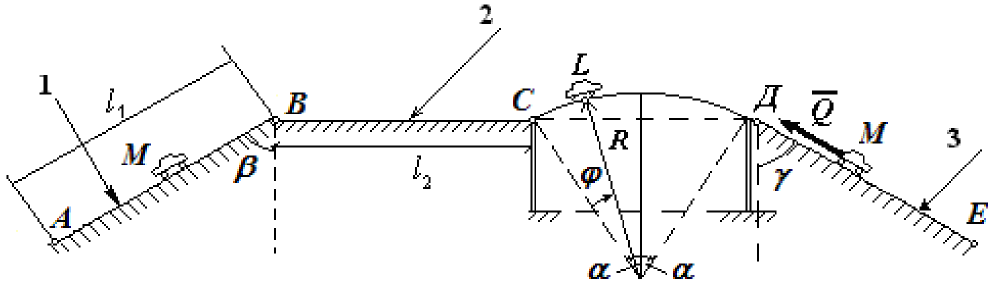


Рисунок Д3.7

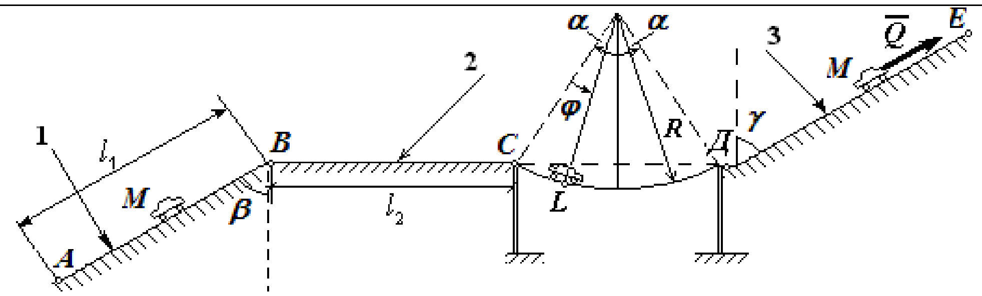


Рисунок Д3.8

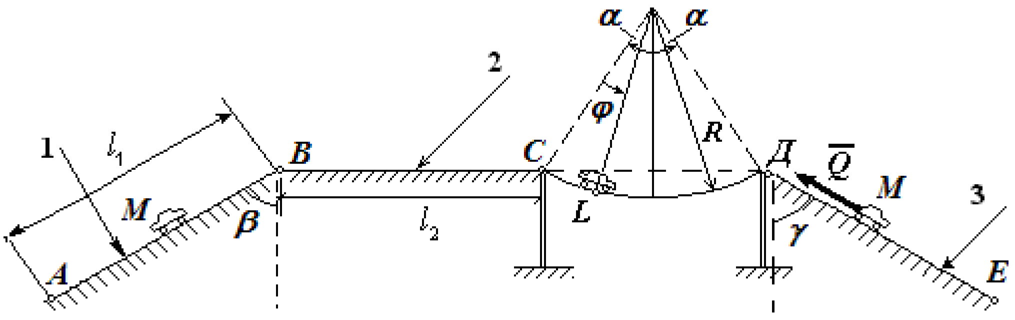


Рисунок Д 3.9

Указания к решению задачи Д3

Задача Д3 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии точки и теоремы об изменении количества движения точки.

Теорему об изменении кинетической энергии точки можно применить сразу на всем перемещении, совершаемом автомобилем от начального положения до положения, в котором надо определить его скорость. Когда скорость автомобиля найдена, для определения силы давления шара на мост нужно изобразить автомобиль в том положении, в котором эту силу требуется определить, и составить уравнение движения в проекции на нормаль к траектории, направленную к центру окружности, т.е. уравнение $mV^2/\rho = \sum F_{kn}$.

При определении скорости автомобиля, когда он находится в точке E (на участке KE) необходимо применить теорему об изменении количества движения точки.

При решении задачи целесообразно следовать алгоритму, предложенному в примере.

Пример решения задачи Д3

Задача. Гоночный автомобиль M массой m = 0,3 т, подъехавший к мосту со скоростью $V_A = V_0$ = 30 м/с, движется далее, не изменяя в точках A, B и C своей скорости, по трассе $ABCKE$ (рисунок 6).

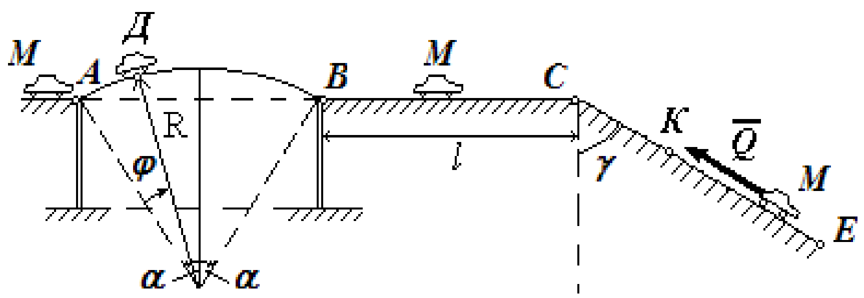


Рисунок 6

На участке BCK трассы автомобиль тормозит, и на него кроме силы тяжести действует сила трения скольжения $\vec{F}_{TP}$ (коэффициент трения колес автомобиля о дорожное полотно f = 0,1). В точке K на автомобиль начинает действовать постоянная сила $\vec{Q}$, модуль которой Q = 2000 н.

Считая автомобиль материальной точкой и зная длины участков трассы $BC = l$ = 20 м и $CK = s$ = 15 м, время T = 5 с движения автомобиля от точки K до точки E, найти:

- скорость автомобиля в положении $Д$, определяемом углом $\varphi = 90^0$;
- силу давления автомобиля на мост в положении $Д$;
- скорости автомобиля, когда он находится в точках K и E.

Мост, образует дугу окружности радиуса R , опирающуюся на угол 2α.
В расчетах принять: R = 100 м, $\alpha = 60^0$, $\gamma = 60^0$.

Решение

I. Найдем скорость автомобиля в положении $Д$ (рисунок 7).

1. Применим теорему об изменении кинетической энергии точки в конечной форме, принимая за начальную точку A, а за конечную – точку $Д$

$$\frac{mV_{Д}^2}{2} - \frac{mV_{A}^2}{2} = \sum A_k$$

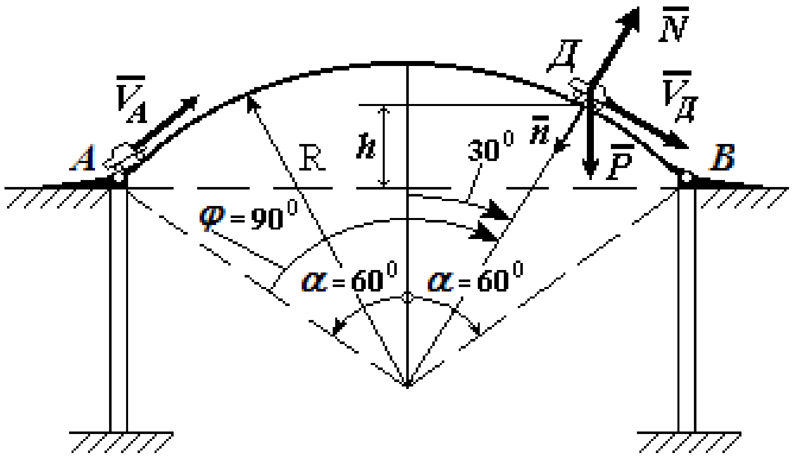


Рисунок 7

или применительно к данной задаче

$$\frac{mV_{Д}^2}{2} - \frac{mV_{A}^2}{2} = A_P + A_N\,, \tag{1}$$

где A_P - работа силы тяжести на перемещении $АД$, A_N – работа нормальной реакции на том же перемещении.

2. Вычислим работы сил.

$$A_P = -m\,g \cdot h = - m\,g \cdot R \cdot(\cos(\varphi - \alpha) - \cos\alpha) = - m\,g \cdot R(\cos 30^0 - \cos 60^0) = =$$

$$- 300 \cdot 9{,}8 \cdot 100 \cdot (0{,}85 - 0{,}5) = -102{,}9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$A_N = 0$, так как реакция $\vec{N}$ перпендикулярна к направлению перемещения.

3. Подставляя значения работ в выражение (1), найдем

$$V_Д = \sqrt{V_A^2 + 2 \cdot A_P / m} = \sqrt{900 - 886} = 3,7 \text{ м/с}.$$

II. Найдем реакцию моста при нахождении автомобиля в точке *Д*.

Основной закон динамики применительно к точке, движущейся по мосту *АД*, имеет вид

$$m\vec{a}_Д = \vec{P} + \vec{N}.$$

Или в проекции на нормаль

$$m a_{Дn} = P \cdot cos30^0 - N.$$

Откуда

$$N = mg \cdot \cos30^0 - m\,V_Д^{\,2} / R = 300\ (\ 9{,}8 \cdot 0{,}85\ \ -14\ /100) =\ 2457\ \text{Н} = 245{,}7\ \text{кГ}.$$

Сила давления автомобиля на мост на основании закона равенства действия и противодействия будет направлена в сторону противоположную реакции $\vec{N}$.

III. Определим скорость автомобиля, когда он находится в точке *К*.

Для нахождения скорости $\vec{V}_K$ необходимо знать скорость автомобиля в положении B.

Для определения скорости $\vec{V}_B$ применим теорему об изменении кинетической энергии точки на участке AB.

По аналогии с формулой (1) имеем

$$\frac{mV_В^2}{2} - \frac{mV_А^2}{2} = A_P + A_N.$$

Но здесь $A_P = 0$, так как величина вертикального смещения автомобиля $h = 0$, также $A_N = 0$. Поэтому $V_B = V_A = 24$ м/с.

Для определения скорости $\vec{V}_K$ применим теорему об изменении кинетической энергии точки на участке BK (рисунок 8).

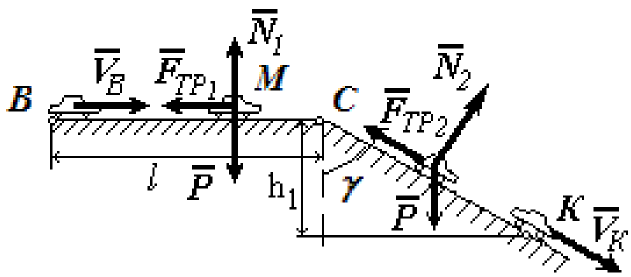


Рисунок 8

Запишем выражение (1) для участка трассы BK

$$\frac{mV_K^2}{2} - \frac{mV_B^2}{2} = A_P + A_{N1} + A_{N1} + A_{TP1} + A_{TP2}. \tag{2}$$

Вычислим работы сил, действующих на автомобиль.

Работа силы тяжести

$$A_P = mg \cdot h_1 = mg \cdot s \cdot \cos\gamma = mg \cdot 15 \cdot 0{,}5 = 7{,}5\, mg.$$

Примечание. На участке BC сила тяжести работу не совершает, так как здесь нет вертикального перемещения автомобиля.

Работа сил нормальных реакций $A_{N1} = A_{N2} = 0$, так как эти реакции перпендикулярны к направлению перемещения.

Работа силы трения

$$A_{TP1} + A_{TP2} = -f \cdot (N_1 + N_2) = -\,f\,m\,g \cdot (1 + \cos 30^0) = -\,0{,}18\, m\,g.$$

Подставляя значения работ в выражение (2) и поделив на m, получим

$$V_K = \sqrt{V_B^2 + g\cdot(7{,}5 - 0{,}18)} = 9{,}3 \text{ м/с}.$$

III. Определим скорость автомобиля, когда он находится в точке E.

На участке KE (рисунок 9) применим теорему об изменении количества движения точки

$$m\vec{V}_E - m\vec{V}_K = \sum \vec{S}_k.$$

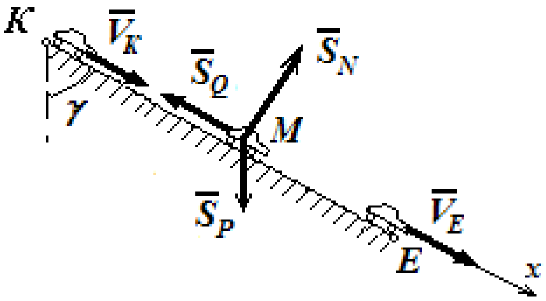


Рисунок 9

Или применительно к данной задаче

$$m\vec{V}_E - m\vec{V}_K = \vec{S}_P + \vec{S}_Q + \vec{S}_N.$$

В проекции на ось x получим

$$mV_{Ex} - m\,V_{Kx} = S_{Px} + S_{Qx} + S_{Nx}. \qquad (3)$$

Учитывая, что векторы импульсов сил направлены также как и векторы сил, вычислим проекции импульсов на ось x,

$$S_{Px} = mg\cos 60^0 \cdot T, \quad S_{Qx} = -\,Q \cdot T, \quad S_{Nx} = 0.$$

Подставляя проекции импульсов в уравнение (3), после преобразований получим

$$V_E = V_K + T\,(g\cos 60^0 - Q/m) = 16{,}4 \text{ м/с}.$$

Ответ: $V_Д = 13{,}8$ м/с; $N_Д = 196{,}8$ кГ; $V_E = 16{,}4$ м/с.

Задача Д4 (Д2)

Применение теоремы об изменении кинетической энергии точки к исследованию движения точки

Тонкий гладкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, изогнут так, что состоит из прямолинейного участка и дуги окружности, радиуса R = 0,5 м (рисунки Д4.0 – Д4.9, таблица Д4). На стержень нанизан шар весом P, прикрепленный к пружине с коэффициентом жесткости $c = k(P/R)$; другой конец пружины закреплен в точке O. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0.

Шар начинает двигаться без начальной скорости из положения B_0, определяемого углом α (при $\alpha = 90^0$ считать шар чуть смещенным от равновесного положения в сторону точки B_1); достигнув точки B_1, указанной на рисунке, шар освобождается от пружины и дальше движется только под действием силы тяжести.

Считая шар материальной точкой, определить какую скорость он будет иметь, придя в точку D, и с какой силой будет давить на стержень в этой точке (силу давления выразить через вес P шара). Положение точки D на дуге определяется углом β. На рисунки 2 и 3 B_1 произвольная точка дуги ED.

Таблица Д4. Условия к задачам Д4.

Номер условия	Для рисунков 0 – 3				Для рисунков 4 – 9			
	l_0	k	α^0	β^0	l_0	k	α^0	β^0
0	0,8R	8	30	45	2,8R	8	45	60
1	0,8R	36	45	60	2,4R	6	90	120
2	0,4R	15	60	90	2,2R	12	60	30
3	0,7R	6	30	120	2,8R	4	90	135
4	0,6R	12	45	90	2,4R	6	60	90
5	0,4R	10	45	135	2,6R	10	45	150
6	0,7R	50	60	30	2,2R	10	90	45
7	0,9R	12	30	150	2,5R	8	60	120
8	0,7R	20	45	60	2,6R	5	90	60
9	0,6R	30	60	120	3,0R	5	45	120

Рисунки к задачам Д4

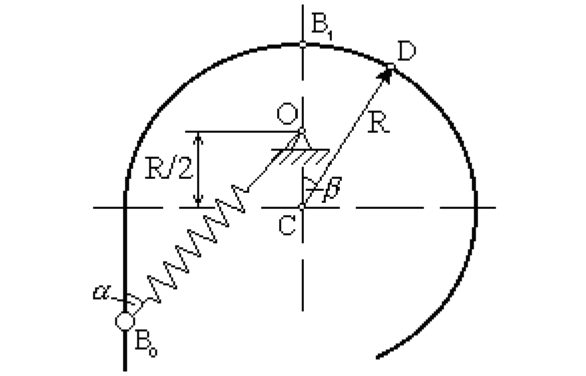


Рисунок Д4.0

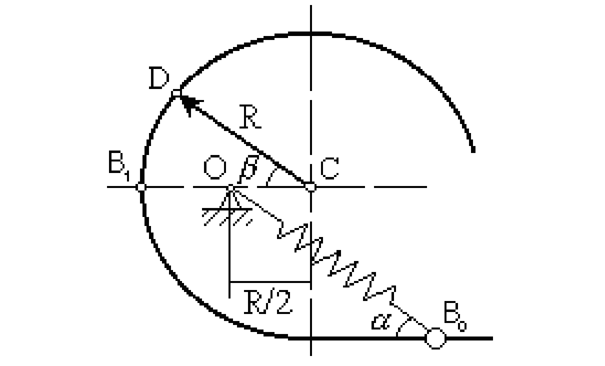


Рисунок Д4.1

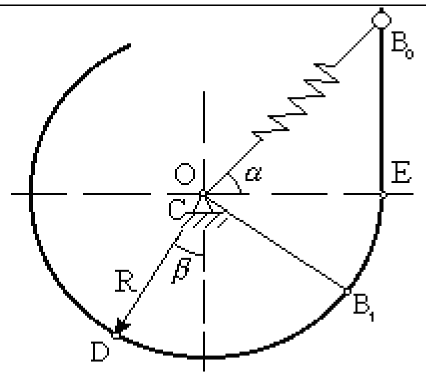


Рисунок Д4.2

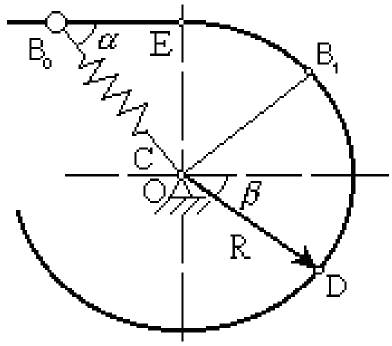


Рисунок Д4.3

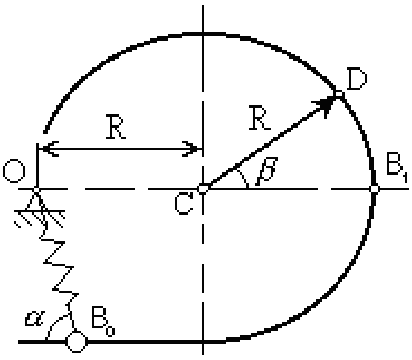


Рисунок Д4.4

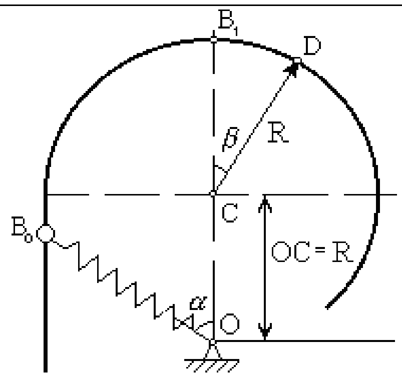


Рисунок Д4.5

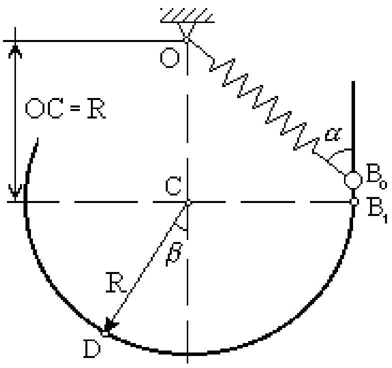


Рисунок Д4.6

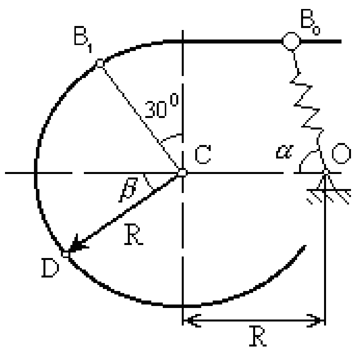


Рисунок Д4.7

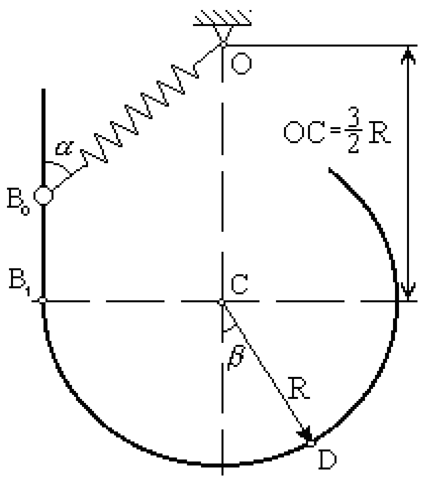


Рисунок Д4.8

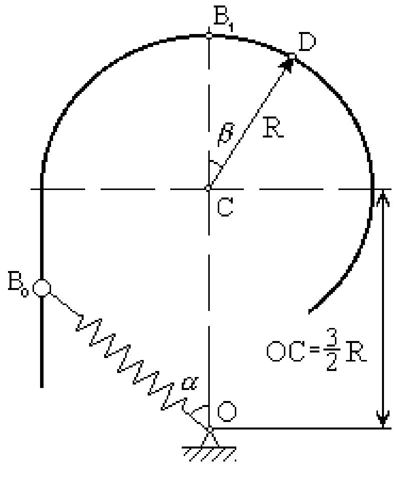


Рисунок Д4.9

Указания к решению задачи Д4

Задача Д4 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии точки. Решая задачу, учесть, что теорему можно применить сразу на всем перемещении, совершаемом точкой от начального положения до положения, в котором надо определить его скорость. Когда скорость шара найдена, для определения силы давления шара на стержень изобразить шар в том положении, в котором эту силу надо определить, и составить уравнение движения в проекции на нормаль к траектории, направленную к центру окружности, т.е. уравнение $mV^2/\rho = \sum F_{kn}$.

При решении задачи целесообразно следовать алгоритму, предложенному в примере.

Пример решения задачи Д4

Задача. Шарик весом P нанизан на расположенный в вертикальной плоскости гладкий стержень, изогнутый так, что часть BD его является дугой окружности радиуса R (рисунок 10). К шару прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c; длина недеформированной пружины l_0. Движение шара начинается из точки B_0, находящейся на высоте H; в точке B шар освобождается от пружины и движется дальше по дуге BD.

Д а н о: P, R = 0,6 м, l_0 = 1,5R, $c = k$ P/R (k = 10), $H = 2R$, V_0 = 0, $\alpha = 60^0$, φ = 60^0, $OC = 0{,}75\,R$.

О п р е д е л и т ь: А) V_1 – скорость шара в точке B_1 (< BCB_1 = φ); В) Q_1 – силу давления шара на стержень в точке B_1.

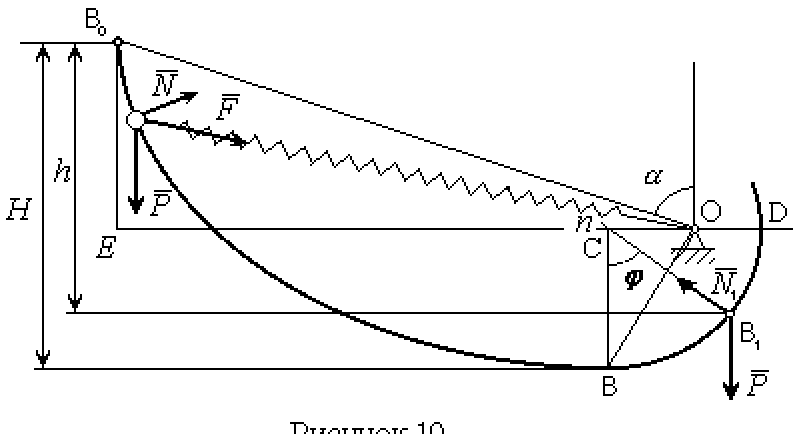


Рисунок 10

Решение.

<u>А) Определим скорость шара V_1</u>

1. Рассмотрим шар в произвольном положении между точкой B_0 и точкой B_1 (рисунок 10).

2. Изобразим все силы, действующие на шар: $\overline{P}$ (сила тяжести), $\overline{N}$ (реакция стержня), $\overline{F}$ (сила упругости пружины B_0B).

3. Применим теорему об изменении кинетической энергии точки на пути B_0B_1

$$mV_1^2/2 - mV_0^2/2 = A(\overline{P}) + A(\overline{F}) + A(\overline{N}). \quad (1)$$

4. Вычислим работы сил, входящих в выражение (1).

$A(\overline{N}) = 0$, так как реакция $\overline{N}$ всегда перпендикулярна к направлению перемещения точки.

Работа силы тяжести $A(\overline{P}) = P \cdot h$, где при $H = 2R$ и $\varphi = 60^0$ будет $h = H - R + R\cos(\varphi) = 1{,}5R$. Следовательно, $A(\overline{P}) = 1{,}5\,PR$.

Работа силы упругости $\overline{F}$ на перемещении B_0B определяется по формуле

$$A(\overline{F}) = c\,(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)\,/\,2 = kP\,(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)\,/\,(2R), \tag{2}$$

где λ_0 и λ_1 – начальное и конечное удлинения пружины.

Начальное удлинение λ_0 определится по формуле $\lambda_0 = OB_0 - l_0$, конечное – по формуле $\lambda_1 = OB - l_0$ ($l_0 = 1{,}5R$).

Из треугольников OEB_0 и OCB найдем

$$OB_0 = B_0E/\cos(\alpha) = (H - R)/\cos(60^0) = 2R, \quad OB = \sqrt{(BC)^2 + (OC)^2} = 1{,}25R.$$

Тогда $\lambda_0 = 0{,}5R$, $\lambda_1 = -0{,}25R$ и равенство (2) примет вид $A(\overline{F}) = 0{,}94\,PR$.

5. Подставляя найденные значения работ в уравнение (1) и учитывая, что $V_0 = 0$, а $m = P/g$, определим из него искомую скорость

$$V_1 = \sqrt{4{,}88gR} = 5{,}36 \text{ м/с}. \tag{3}$$

В) Определим силу давления шара на стержень в точке B_1.

1. Рассмотрим шар в положении B_1, где необходимо определить силу его давления на стержень.

2. Изобразим все силы, действующие на шар в положении B_1: $\overline{P}$ (сила тяжести), $\overline{N}_1$ (реакция стержня).

3. Проведем нормаль B_1n в сторону ее вогнутости.

4. Запишем второй закон Ньютона применительно к данной задаче

$$m\overline{a} = \overline{P} + \overline{N}_1. \tag{4}$$

5. Найдем силу давления Q_1 шара на стержень.

Проектируя обе части уравнения (4) на нормаль B_1n, и учитывая, что $a_n = V^2/\rho$, получим

$$mV_1^2/R = -P\cos(\varphi) + N_1. \tag{5}$$

Но из равенства (3) следует, что $mV_1^2 = 4{,}88\,PR$. Подставляя это значение в уравнение (5), найдем, что $N_1 = 5{,}38\,P$.

Сила давления Q_1 шара на стержень численно равна N_1, но, согласно третьему закону динамики, направлена в противоположную сторону.

О т в е т: $V_1 = 5{,}36$ м/с; $Q_1 = 5{,}38\,P$.

Задача Д5

Применение теоремы об изменении кинетической энергии системы к исследованию движения механической системы

При испытаниях строительных машин иногда применяют устройства, изображенные на рисунках Д5.0 –Д5.9, которые состоят из поступательно движущейся части *1*, передних колес *2* (два штуки, в задачах с рисунками Д5.6 передний каток один) и задних колес *3* (два штуки) радиуса r = 0,5 м каждый, ступенчатого шкива *4* с радиусами ступеней R_4 = 0,8 м и r_4 = 0,3 м и радиусом инерции ρ_4 = 0,5 м и катка (подвижного блока или тела, движущегося поступательно) *5* (рисунках Д5.0 –Д5.9). Тело *5* (если это блок или каток) и колеса *3* считать сплошными однородными цилиндрами, а массу колеса *2* – равномерно распределенной по ободу. Тела системы соединены друг с другом невесомыми тросами, параллельными соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c. Под действием силы $F = f\ (s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя.

Определить среднюю силу натяжения троса между телами *1* и *4*, а также значение величины, указанной в графе «Найти» таблицы 5 в тот момент времени, когда перемещение s станет равным s_1 = 2 м.

Таблица Д5. Условия к задачам Д5.

Номер условия	m_1, т	m_2, т	m_3, т	m_4, т	m_5, т	$F = f(s)$, кН	C, кН/м	Найти
0	6	0,2	0,5	4	0	50 (5+3 s)	200	ω_3
1	8	0	0,6	0	0,6	60 (4+3 s)	180	V_1
2	4	0,3	0,5	3	0	20 (8+9 s)	220	V_{C2}
3	5	0	0,4	5	0	30 (8+6 s)	210	ω_4
4	5	0	0,6	0	0,6	50 (4+3 s)	180	V_1
5	6	0,3	0,4	6	0	60 (4+3 s)	200	V_{C5}^*
6	8	0	0,6	0	0,6	30 (8+5 s)	170	ω_3
7	7	0,1	0,5	6	0	50 (3+5 s)	190	ω_{C2}
8	4	0,3	0,6	5	0	40 (6+5 s)	220	ω_4
9	6	0	0,4	0	0,4	30 (6+7 s)	210	V_{C5}^*

*) В вариантах с рисунками Д5.1, Д5.2, Д5.4, Д5.5 — V_5.

Каток (тело) *5* и колеса *2, 3* катятся (движутся) по плоскостям без скольжения, коэффициент трения качения колес *3* о плоскость f_K = 0,1 м, трение качения колес *2* не учитывать. Силы давления колес *2, 3* на плоскость определяются их силами тяжести и силой тяжести тела *1*, при этом сила давления колес *3* в четыре раза больше силы давления колес *2*.

Все тела должны изображаться и тогда, когда их массы равны нулю.

Рисунки к задаче Д5

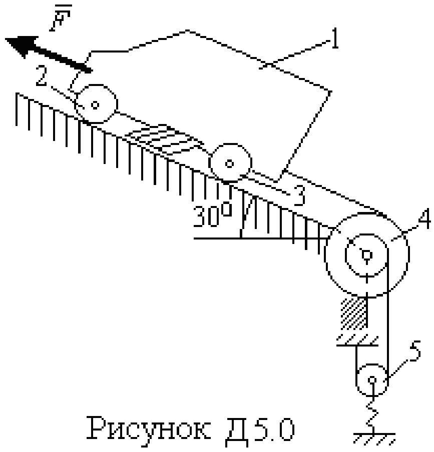


Рисунок Д5.0

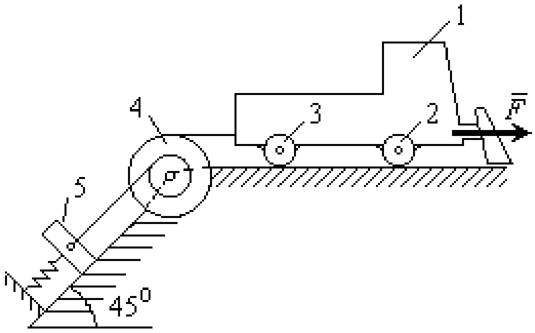


Рисунок Д5.1

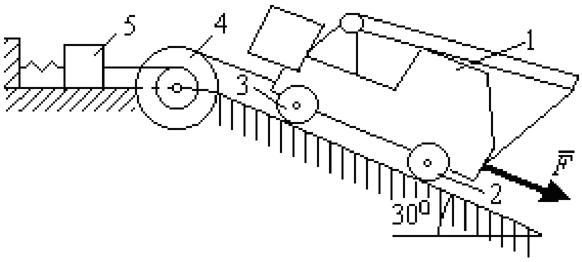


Рисунок Д5.2

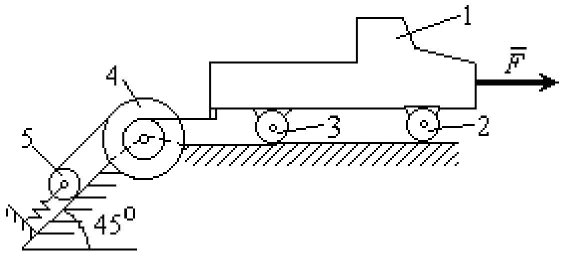


Рисунок Д5.3

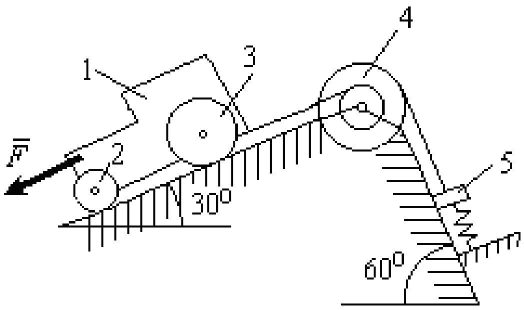


Рисунок Д5.4

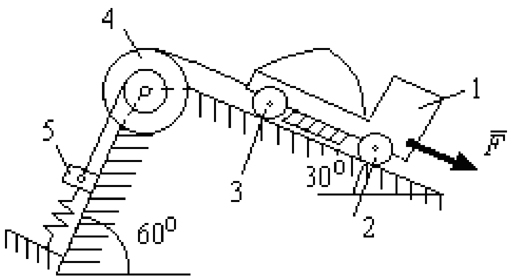


Рисунок Д5.5

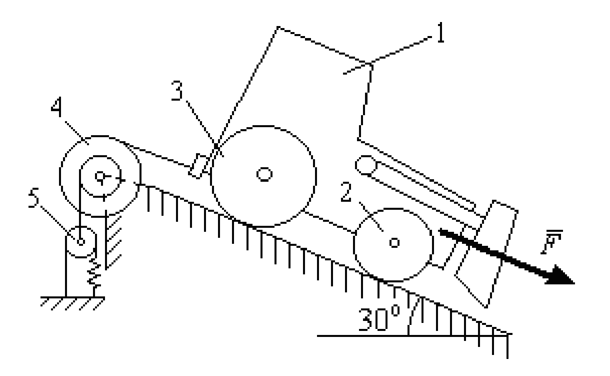


Рисунок Д5.6

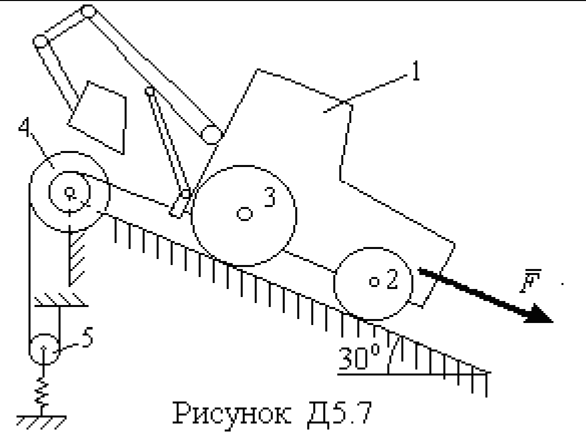


Рисунок Д5.7

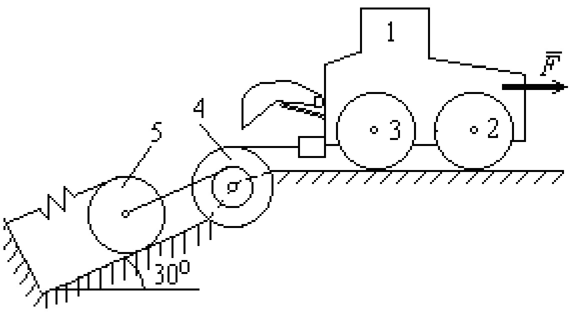


Рисунок Д5.8

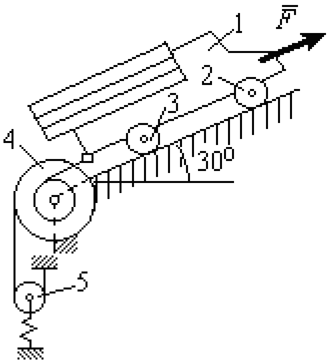


Рисунок Д5.9

Указания к решению задачи Д5

Задача Д5 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия системы T равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении T для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловою скорость и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы сил надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что *зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.*

Пример решения задачи Д5

При испытании дорожного катка применили устройство, изображенное на рисунке 11.

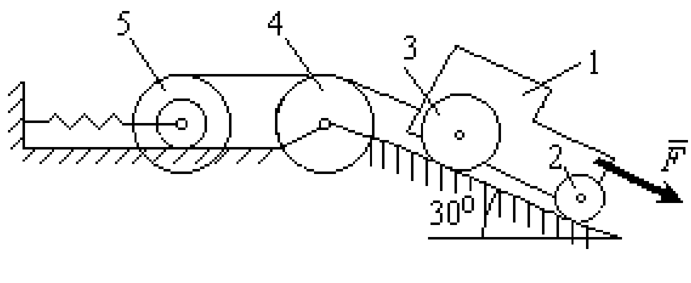


Рисунок 11

Система состоят из поступательно движущейся части 1, переднего катка 2 радиуса r = 0,5м и задних катков 3 (два штуки) радиуса R = 1 м каждый, блока 4, ступенчатого шкива 5 с радиусами ступеней R_5 = 1 м, r_5 = 0,5 м и радиусом инерции ρ_5 = 0,8 м и пружины жесткостью c = 200 кН/м.

Тело 4 и задние катки 3 считать сплошными однородными цилиндрами. Тела системы соединены друг с другом невесомыми тросами, параллельными соответствующим плоскостям.

Под действием силы F = 40 (4+3s) кН, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя.

Ступенчатый шкив и катки $2, 3$ катятся по плоскостям без скольжения, коэффициент трения катков 3 о плоскость f_K = 0,2 м. Силы давления катков $2, 3$ на плоскость определяются их силами тяжести и силой тяжести тела 1, при этом сила давления каждого из катков 3 в четыре раза больше силы давления катка 2.

Определить среднюю силу натяжения троса между телами 1 и 4, а также значение скорости центра тяжести шкива 5 в тот момент времени, когда перемещение s станет равным s_1 = 2 м.

Д а н о: m_1 = 6 т, m_2 = 0, m_3 = 4 т, m_4 = 0, m_5 = 10 т.

Решение.

I. Определим скорость центра тяжести шкива 5.

1. Выберем неизменяемую механическую систему, движение которой будем рассматривать.

Целесообразно выбрать механическую систему, состоящую из весомых тел $1, 3, 5$ и невесомых тел $2, 4$, соединенных нитями.

2. Изобразим действующие на систему внешние силы (рисунок 12): активные $\overline{F}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_5$; реакции связей $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$, $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$, сила упругости пружины $\overline{F}_{уп}$ и момент трения качения $M_к$.

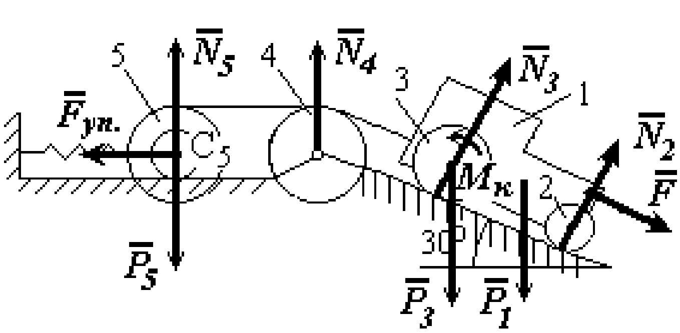


Рисунок 12

3. Для определения V_{C5} воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для неизменяемой системы

$$T - T_0 = \sum A_k^e \tag{1}$$

4. Вычислим кинетическую энергию системы T_0 в начале движения.

Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$.

5. Вычислим кинетическую энергию системы T в конечном положении системы (когда тела 1 – переместилась на расстояние $s = s_1$).

Величина T будет равна сумме кинетических энергий всех весомых тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + 2 \cdot T_3 + T_5\,. \qquad (2)$$

Учитывая, что тело 1 движется поступательно, тела 3, 5 – плоскопараллельно, получим:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^{\,2}; \quad T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_{C3}^{\,2} + \frac{1}{2} I_{C3}\, \omega_3^{\,2}; \quad T_5 = \frac{1}{2} m_5 V_{C5}^{\,2} + \frac{1}{2} I_{C5}\, \omega_5^{\,2}. \qquad (3)$$

6. Выразим все входящие в формулы (3) скорости через искомую скорость V_{C5}.

Предварительно заметим (рисунок 13), что

$$V_{C1} = V_{C3} = V_A = V_B, \qquad (4)$$

где A – любая точка блока обода 4, B – точка схода троса со ступенчатого шкива 5.

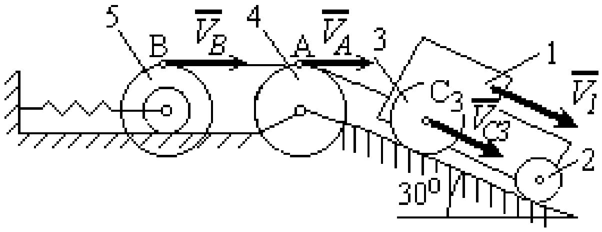


Рисунок 13

Для шкива 5 мгновенный центр скоростей находится в точке P (рисунок 14) и имеет место соотношение

$$\omega_5 = \frac{V_{C5}}{r_5} = \frac{V_B}{R_5 + r_5}\,. \qquad (5)$$

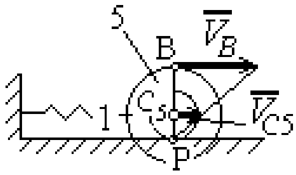


Рисунок 14

Из выражений (4) и (5) находим

$$V_1 = V_{C3} = 3\,V_{C5}; \quad \omega_3 = \frac{3V_{C5}}{R}\,. \qquad (6)$$

7. Вычислим моменты инерции, входящие в выражения (3)

$$I_{C3} = 0{,}5\, m_3\, R^{\,2}; \qquad I_{C5} = m_5\, \rho_5^{\,2}. \tag{7}$$

8. Выразим кинетическую энергию T через искомую величину V_{C3}.

Подставив значения (5) – (7) в равенства (3) и далее в формулу (2), окончательно получим

$$T = \frac{1}{4}\Big(18\, m_1 + 54\, m_3 + 7{,}12\, m_5\Big)\, V_{C5}^{\,2}. \tag{8}$$

9. Найдем сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда тело *1* пройдет путь s_1.

Введя обозначения: s_{C5} – перемещение центра шкива *5*, s_{C3} – перемещение центра катка *3*, φ_3 – угол поворота катка *3*, и учитывая соотношения (5) и (6), найдем

$$s_{C5} = s_1 / 3, \quad \varphi_3 = s_1 / R\,. \tag{9}$$

Тогда работа переменной силы $\vec{F}$ на перемещении s_1 определится в виде

$$A(\overline{F}\,) = \int_0^{s_1} 40(4 + 3s)\,ds = 40\,(4\, s_1 + 3\, s_1^{\,2}/2)\,. \tag{10}$$

Работы сил тяжести $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ на перемещении s_1

$$A(\overline{P}_1) = P_1\, s_1 \sin(30^0); \tag{11}$$

$$A(\overline{P}_3) = P_3\, s_1 \sin(30^0). \tag{12}$$

Работа момента трения качения

$$A(M_К) = -\,M_К\;\varphi_3 = -\,N_3\;f_К\, s_1 / R\,.$$

Найдем N_3 из выражения

$$N_2 + 2\,N_3 = P_1 + 2P_3 \quad \text{или} \quad N_3 / 4 + 2\,N_3 = g\,(m_1 + 2\,m_3).$$

Откуда $N_3 = 4g\,(m_1 + 2\,m_3) / 9$.

Тогда работа момента трения качения определится в виде

$$A(M_К) = -\,4g\,(m_1 + 2\,m_3)\, f_К\, s_1 / (9R)\,. \tag{13}$$

Работа силы упругости пружины

$$A\,(\vec{F}_{уп}) = \frac{c}{2}(\lambda_{нач}^{\,2} - \lambda_{кон}^{\,2}).$$

В начальный момент пружина не деформирована, поэтому ее начальное удлинение $\lambda_{нач} = 0$, а конечное $\lambda_{кон} = s_{C5} = s_1 / 3$. То есть

$$A\,(\vec{F}_{уп}) = -\,\frac{c}{2}\;\lambda_{кон}^{\,2} = -\,\frac{c \cdot s_1^2}{18}\,. \tag{14}$$

Работы остальных сил равны нулю: силы $\vec{N}_2$ $\vec{N}_3$, $\vec{N}_5$ приложены к мгновенным центрам скоростей (неподвижные точки), сила $\vec{N}_4$ приложена к неподвижной точке, а сила $\vec{P}_5$ перпендикулярна к направлению перемещения. С учетом формул (10) – (14) получим

$$\sum A_k^e = 40\,(4\,s_1 + 3\,s_1^2/2) + s_1\,(P_1 + P_3\,)\sin(30^0) -$$

$$-4g\,(m_1 + 2\,m_3)\,f_К\,s_1\,/\,(9R) - \frac{c\cdot s_1^2}{18}. \quad (15)$$

Подставляя выражения (8) и (15) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, приведем к равенству

$$\frac{1}{4}\left(18\,m_1 + 54\,m_3 + 7{,}12\,m_5\right)V_{C5}^2 =$$

$$= s_1\,[40\,(4 + 3\,s_1/2) + g\,(m_1 + m_3\,)/2 - 4g\,(m_1 + 2\,m_3)\,f_К\,/\,(9R) - \frac{c\cdot s_1}{18}\,].$$

Из этого равенства, подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую скорость $V_{C5} = 1{,}74$ м /с и $V_1 = 3V_{C5} = 5{,}23$ м / с.

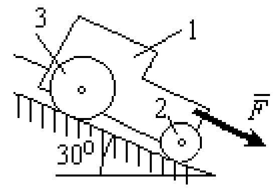


Рисунок 15

II. Определим силу натяжения троса.

1. Выберем неизменяемую механическую систему, движение которой будем рассматривать.

Целесообразно выбрать систему, состоящую из частей дорожного катка: тело *1*, невесомый каток *2* и задние катки *3* (рисунок 15).

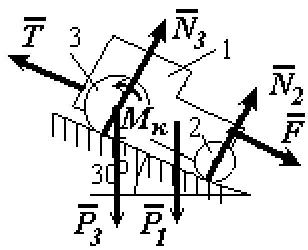


Рисунок 16

2. Изобразим действующие на систему внешние силы (рисунок 16): активные $\overline{F}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$; реакции связей $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$, момент трения качения $M_к$ и сила натяжения троса $\vec{T}$.

3. Для определения $\vec{T}$ воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для неизменяемой системы

$$T - T_0 = \sum A_k^e \quad (1)$$

4. Кинетическую энергию системы $T_0 = 0$.

5. Вычислим кинетическую энергию системы T в конечном положении системы.

Величина T будет равна сумме кинетических энергий всех весомых тел, входящих в систему,

$$T = T_1 + 2T_3. \quad (2)$$

Учитывая, что тело *1* движется поступательно, тела *3* – плоскопараллельно, получим

$$T_1 = \frac{1}{2}\, m_1 V_1^{\,2}; \quad T_3 = \frac{1}{2}\, m_3 V_{C3}^{\,2} + \frac{1}{2} I_{C3}\, \omega_3^{\,2}. \qquad (3)$$

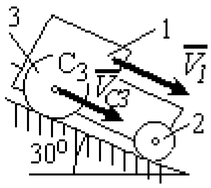


Рисунок 17

6. Выразим все входящие в формулы (3) скорости через искомую скорость V_1 (рисунок 17)

$$V_{C3} = V_1 \quad \text{и} \quad \omega_3 = \frac{V_1}{R}. \qquad (4)$$

7. Вычислим момент инерции, входящие в выражения (3)

$$I_{C3} = 0{,}5\, m_3\, R^{\,2}. \qquad (5)$$

8. Выразим кинетическую энергию T через скорость V_1.

Подставив значения (4) – (5) в равенства (3) и далее в формулу (2), окончательно получим

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 + 3\, m_3\right) V_1^{\,2}. \qquad (6)$$

Введя обозначения s_{C3} – перемещение центра катка *3*, φ_3 – угол поворота катка *3* и учитывая соотношения (5) и (6), найдем

$$s_{C3} = s_1, \ \ \varphi_3 = s_1 / R. \qquad (7)$$

Работа силы $\vec{F}$ на перемещении s_1 определится в виде

$$A(\overline{F}) = \int_0^{s_1} 40(4+3s)\,ds = 40\,(4\, s_1 + 3\, s_1^{\,2}/2). \qquad (8)$$

Работы сил тяжести $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ на перемещении s_1

$$A(\overline{P}_1) = P_1\, s_1 \sin(30^0); \qquad (9)$$

$$A(\overline{P}_3) = P_3\, s_1 \sin(30^0). \qquad (10)$$

Работа момента трения качения

$$A(M_К) = -\,4g\,(m_1 + 2\, m_3)\, f_К\, s_1 / (9R). \qquad (11)$$

Работу $\vec{T}$ найдем, используя теорему о среднем

$$A(\vec{T}) = -\int_0^{s_1} T \cdot ds = -\,T_{cp} \cdot s_1. \qquad (12)$$

Работы остальных сил равны нулю, так как силы $\vec{N}_2$ $\vec{N}_3$ приложены к мгновенным центрам скоростей (неподвижные точки).

С учетом формул (10) – (12) получим

$$\sum A_k^e = 40\,(4\, s_1 + 3\, s_1^{\,2}/2) + s_1(P_1 + P_3)\sin(30^0) -$$

$$-\,4g\,(m_1 + 2\, m_3)\, f_К\, s_1/(9R) - T_{cp} \cdot s_1. \qquad (13)$$

Подставляя выражения (6) и (13) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, приведем к равенству

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + 3\,m_3\right) V_1^{\,2} = s_1\,[40(4+3s_1/2)+g(m_1+m_3)/2 - 4g\,(m_1+2\,m_3)f_{К}/(9R) - T_{cp}].$$

Из этого равенства, подставив в него числовые значения заданных величин, найдем силу натяжения троса T_{cp} = 146,5 кН.

О т в е т: V_{C5} = 1,74 м /с, $V_1 = 3V_{C5}$ = 5,23 м / с, $T_{ср}$ = 146,5 кН.

Задача Д6 (Д3)

Применение теоремы об изменении кинетической энергии системы к исследованию движения механической системы

Механическая система состоит из грузов *1* и *2*, ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней R_3 = 0,3м и r_3 = 0,1м и радиусом инерции ρ_3 = 0,2 м, блока *4* радиуса R_4 = 0,2 м и катка (или подвижного блока) *5* (рисунки Д6.0 –Д6.9, таблица Д6); тело *5* считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока *4* – равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость f = 0,1. Тела системы соединены друг с другом нитями параллельными соответствующим плоскостям. Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкив *3* действует постоянный момент M сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение s станет равным s_1 = 0,2 м. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы Д6. Где обозначено: V_1, V_2, V_{C5} – скорости грузов *1,2* и центра масс тела *5* соответственно, ω_3 и ω_4 – угловые скорости тел *3* и *4*.

Все катки, катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз *2*, если m_2 = 0; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их массы равны нулю.

Таблица Д6. Данные к задачам Д6.

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	M, Н·м	$F = f(s)$, Н	Найти
0	0	6	4	0	5	1,2	80 (4+5 s)	ω_3
1	8	0	0	4	6	0,8	50 (8+3 s)	V_1
2	0	4	6	0	5	1,4	60 (6+5 s)	V_2
3	0	6	0	5	4	1,8	80 (5+6 s)	ω_4
4	5	0	4	0	6	1,2	40 (9+4 s)	V_1
5	0	5	0	6	4	1,6	50 (7+8 s)	V_{C5}
6	8	0	5	0	6	0,8	40 (8+9 s)	ω_3
7	0	4	0	6	5	1,5	60 (8+5 s)	V_2
8	4	0	0	5	6	1,4	50 (9+2 s)	ω_4
9	0	5	6	0	4	1,6	80 (6+7 s)	V_{C5}

Рисунки к Задаче Д6

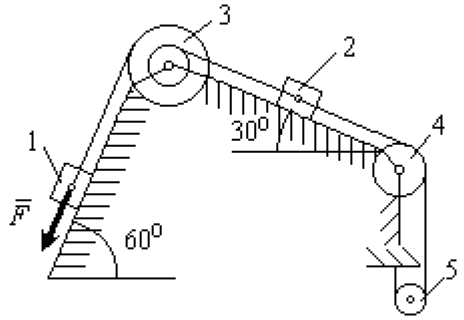


Рисунок Д6.0

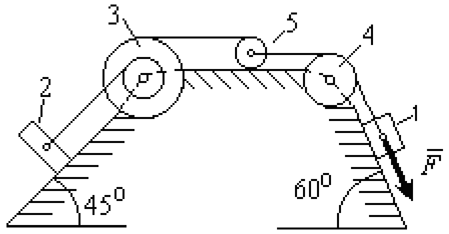


Рисунок Д6.1

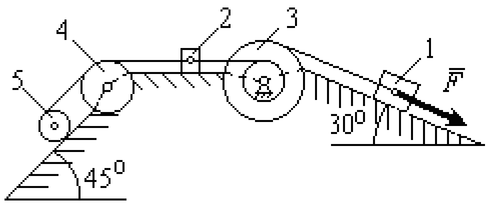


Рисунок Д6.2

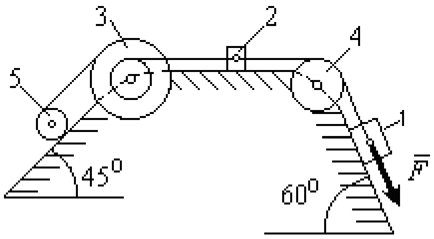


Рисунок Д6.3

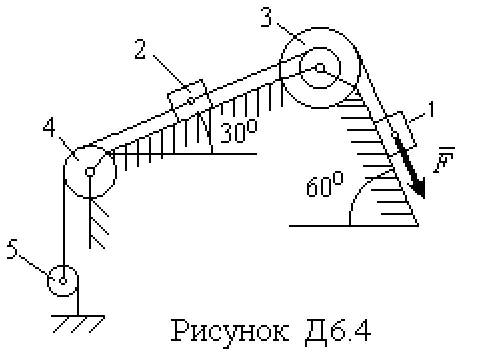


Рисунок Д6.4

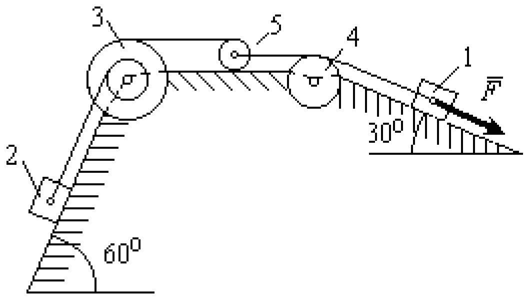


Рисунок Д6.5

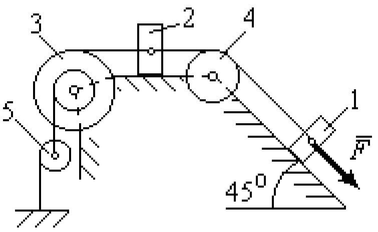


Рисунок Д6.6

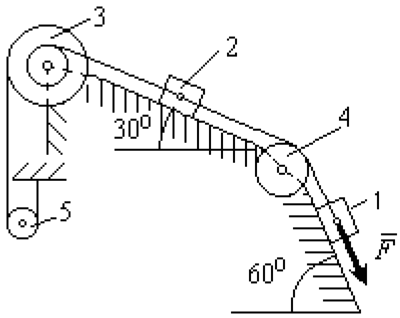


Рисунок Д6.7

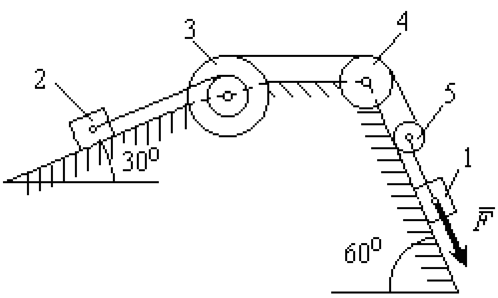


Рисунок Д6.8

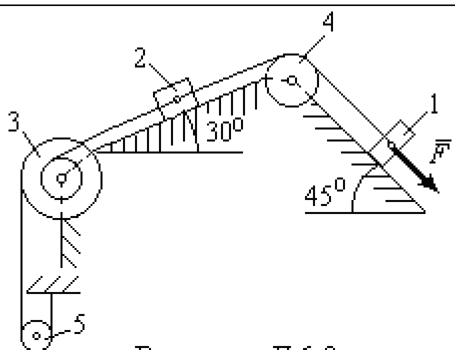


Рисунок Д6.9

Указания к решению задачи Д6

Задача Д6 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия системы T равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении T для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловою скорость и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы сил надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что *зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.*

При решении задачи целесообразно следовать алгоритму, предложенному в примере.

Пример решения задачи Д6

Задача. Механическая система (рисунок 18) состоит из сплошного однородного цилиндрического катка 1, подвижного блока 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3, блока 4 и груза 5 (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив 3. К центру подвижного блока 2 (точке E) присоединена нить, к другому концу которой приложена постоянная сила $\overline{Q}$.

Система приводится в движение из состояния покоя под действием силы $F = f\,(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

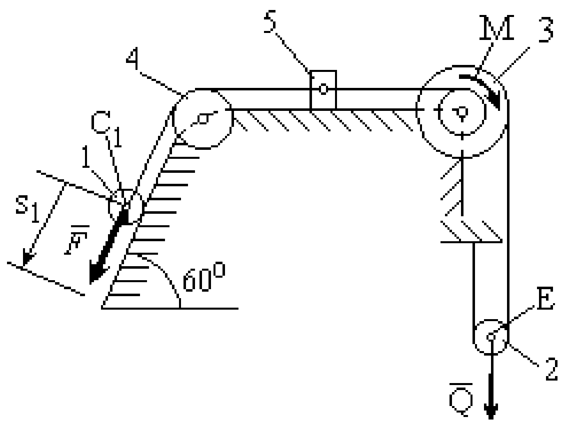


Рисунок 18

Д а н о: m_1 = 8кг, m_2 = 0, m_3 = 4кг, m_4 = 0, m_5 = 10кг, R_3 = 0,3м, r_3 = 0,1 м, ρ_3 = 0,2 м, f = 0,1, M = 0,6 Н · м, F = 20(3+2s) Н, Q = 10 Н, s_1 = 0,2 м.

О п р е д е л и т ь: ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$.

Решение.

1. Выберем неизменяемую механическую систему, движение которой будем рассматривать.

В данном случае целесообразно выбрать неизменяемую механическую систему, состоящую из весомых тел *1, 3, 5* и невесомых тел *2, 4,* соединенных нитями.

2. Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для неизменяемой системы

$$T - T_0 = \sum A_k^e \tag{1}$$

3. Вычислим кинетическую энергию системы T_0 в начале движения.

Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$.

4. Вычислим кинетическую энергию системы T в конечном положении системы (когда центр тела *1* – точка C_1 переместилась на расстояние $s = s_1$).

Величина T будет равна сумме кинетических энергий всех весомых тел, входящих в систему

$$T = T_1 + T_3 + T_5 . \tag{2}$$

Учитывая, что тело *1* совершает плоскопараллельно движение, тело *5* движется поступательно, а тело *3* вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{1}{2}\, m_1 V_{C1}^{\,2} + \frac{1}{2} I_{C1}\, \omega_1^{\,2}; \quad T_3 = \frac{1}{2} I_3\, \omega_3^{\,2}; \quad T_5 = \frac{1}{2}\, m_5 V_5^{\,2}. \tag{3}$$

5. Выразим все входящие в формулы (3) скорости через искомую ω_3.

Предварительно заметим , что $V_{C1} = V_5 = V_A$ (рисунок 19), где A – любая точка обода радиуса r_3 шкива *3* и что точка K – мгновенный центр скоростей катка *1*, радиус которого обозначим r_1. Тогда

$$V_{C1} = V_5 = \omega_3\, r_3; \quad \omega_1 = \frac{V_{C1}}{K_1 C_1} = \frac{V_{C1}}{r_1} = \omega_3\, \frac{r_3}{r_1} . \tag{4}$$

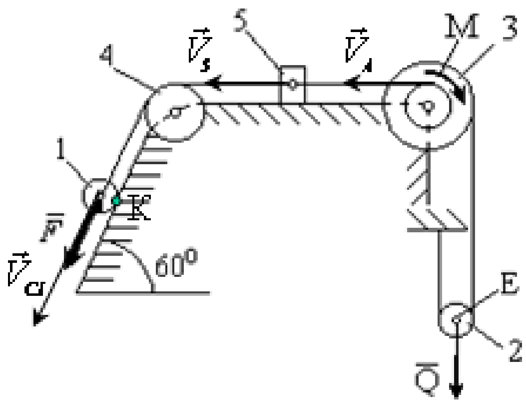


Рисунок 19

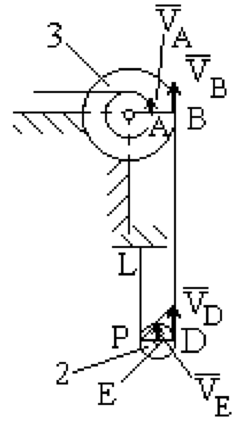


Рисунок 20

Дополнительно найдем скорость центра блока *2* (рисунок 20). Так как $V_D = V_B = \omega_3 \cdot R_3$, а точка P мгновенный центр скоростей для блока *2* (он как бы «катится» по неподвижному участку нити PL), то

$$V_E = 0{,}5\, V_D = 0{,}5\, \omega_3\, R_3\,. \qquad (5)$$

6. Вычислим моменты инерции, входящие в выражения (3)

$$I_{C3} = 0{,}5\, m_3\, R^{\,2}; \qquad I_{C5} = m_5\, \rho_5^{\,2}. \qquad (6)$$

7. Выразим кинетическую энергию T через искомую величину ω_3.

Подставив все величины (4), (5) и (6) в равенства (3) и далее в формулу (2), окончательно получим

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1\, r_3^{\,2} + \frac{1}{2}\, m_3\, \rho_3^{\,2} + \frac{1}{2}\, m_5\, r_3^{\,2}\right) \omega_3^{\,2}. \qquad (7)$$

8. Изобразим действующие на систему внешние силы (рисунок 21): активные $\overline{F}$, $\overline{Q}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_5$, реакции $\overline{N}_1$, $\overline{N}_3$, $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$, натяжение нити $\overline{S}_2$, силы трения $\overline{F}_1^{\,\text{ТР}}$, $\overline{F}_5^{\,\text{ТР}}$, и момент M.

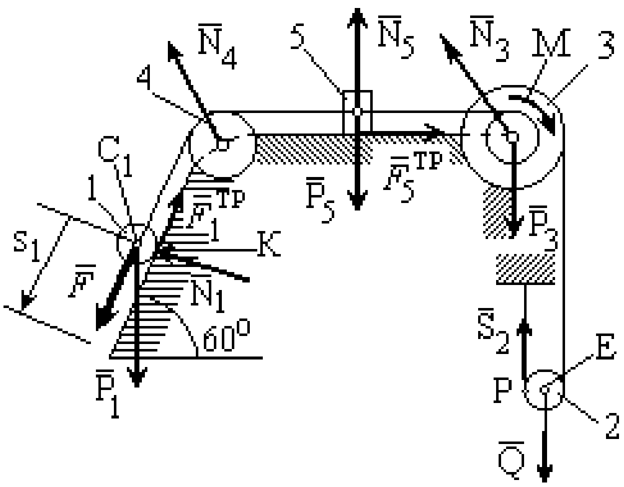


Рисунок 21

9. Найдем сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка C_1 пройдет путь s_1.

Введя обозначения: s_5 – перемещение груза *5* ($s_5 = s_1$), φ_3 – угол поворота шкива *3*, получим:

работа переменной силы $\vec{F}$ на перемещении s_1 определится в виде

$$A(\overline{F}\,) = \int_0^{s_1} 20(3 + 2s)ds = 20\,(3\, s_1 + s_1^{\,2});$$

работы сил тяжести $A(\overline{P}_1) = P_1\, s_1 \sin{(60^0)}$;

работа силы трения скольжения $A(\overline{F}_5^{\text{ТР}}) = -F_5^{\text{ТР}}\, s_5 = -f\,P_5\, s_1$;

работа момента трения качения $A\,(M) = -M\,\varphi_3$;

работа постоянной силы $A(\overline{Q}) = -Q\, s_{\text{E}}$.

Работы остальных сил равны нулю, так как точки K_1 и K_2, где приложены силы $\overline{N}_1$, $\overline{F}_1^{\text{ТР}}$ и $\overline{S}_2$ – мгновенные центры скоростей (неподвижные точки); точки, где приложены силы $\overline{P}_3$, $\overline{N}_3$ и $\overline{N}_4$ – неподвижны; а реакция $\overline{N}_5$ перпендикулярна перемещению груза.

Величины s_{E} и φ_3, входящие в выражения работ, необходимо выразить через заданное перемещение s_1.

Учтем, что **зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями** (в этом можно убедиться, интегрируя неизменные зависимости между соответствующими скоростями).

Тогда, поскольку $\omega_3 = V_{\text{A}}/r_3 = V_{\text{C1}}/r_3$ ($V_{\text{A}} = V_{\text{C1}}$), то и $\varphi_3 = s_1/r_3$.

Из формулы (6) $V_{\text{E}} = 0{,}5V_{\text{D}} = 0{,}5\ \omega_3\ R_3$. Тогда, руководствуясь тем же правилом, найдем $s_{\text{E}} = 0{,}5\ \varphi_3\ R_3 = 0{,}5\ s_1 R_3/r_3$.

При найденных значениях s_{E} и φ_3 для суммы всех вычисленных работ получим

$$\sum A_k^e = 20\,(3\,s_1 + s_1^2) + P_1\, s_1 \sin(60^0) - f\,P_5\, s_1 - M\, s_1/r_3 - 0{,}5\ Q\, s_1 R_3/r_3. \quad (8)$$

Подставляя выражения (7) и (8) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, приведем к равенству

$$\left(\frac{3}{4} m_1\, r_3^2 + \frac{1}{2}\, m_3\, \rho_3^2 + \frac{1}{2}\, m_5\, r_3^2\right) \omega_3^2 =$$

$$= 20\,(3\,s_1 + s_1^2) + P_1\, s_1 \sin(60^0) - f\,P_5\, s_1 - M\, s_1/r_3 - 0{,}5\ Q\, s_1 R_3/r_3. \quad (9)$$

Из этого равенства, подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость ω_3.

О т в е т: $\omega_3 = 8{,}46\ \text{с}^{-1}$.

<u>Задача Д7 (Д4)</u>

Применение общих теорем динамики механической системы к исследованию ее движения

Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты *1* массой $m_1 = 18$ кг, движущейся вдоль горизонтальных направляющих, и груза D массой $m_2 = 6$ кг (рисунки Д7.0 – Д7.9). В момент времени $t_0 = 0$, когда скорость плиты $u_0 = 2$ м/с, груз под действием внутренних сил начинает двигаться по желобу плиты.

При движении груза расстояние $s = AD$ изменяется по закону $s = f(t)$. В таблице Д7 эти зависимости даны отдельно для рисунков 0 и 1, для рисунков 2 и 3, и т.д., где s выражено в метрах, t – в секундах.

Считая груз материальной точкой и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить величину, указанную в столбце «Найти», где обозначено: x_1– перемещение плиты за время от t_0 до t_1 с; u_1, a_1, N_1 – значения в момент времени $t_1 = 1$ с скорости плиты, ускорения плиты и полной нормальной реакции направляющих соответственно.

Таблица Д7. Данные к задачам Д7.

Номер условия	$s = f(t)$					Найти
	Рисунки 0,1	Рисунки 2,3	Рисунки 4,5	Рисунки 6,7	Рисунки 8,9	
0	$0{,}4(2t^2–1)$	$0{,}3\cos(\pi t/3)$	$0{,}7\sin(\pi t/6)$	$0{,}2\cos(\pi t/4)$	$0{,}3(4t^2–5)$	x_1
1	$0{,}8\cos(\pi t/6)$	$0{,}2(1–3t^2)$	$0{,}5\cos(\pi t/4)$	$0{,}4\sin(\pi t/3)$	$1{,}4\cos(\pi t/4)$	u_1
2	$0{,}2\cos(\pi t/3)$	$0{,}3\sin(\pi t/6)$	$0{,}1(4–3t^2)$	$1{,}2\sin(\pi t/6)$	$0{,}4\sin(\pi t/3)$	a_1
3	$0{,}5(2–3t^2)$	$0{,}7\cos(\pi t/4)$	$0{,}5\cos(\pi t/3)$	$0{,}3(2t^2+1)$	$0{,}7(3t^2–1)$	x_1
4	$0{,}8\sin(\pi t/4)$	$0{,}3(6t^2–5)$	$0{,}4\sin(\pi t/6)$	$0{,}3\cos(\pi t/3)$	$1{,}2\sin(\pi t/6)$	N_1
5	$0{,}2\cos(\pi t/3)$	$0{,}5\sin(\pi t/3)$	$0{,}3(7t^2–5)$	$0{,}8\cos(\pi t/4)$	$0{,}7\cos(\pi t/3)$	u_1
6	$0{,}3(4–7t^2)$	$0{,}4\sin(\pi t/6)$	$0{,}1\cos(\pi t/4)$	$0{,}4(5–3t^2)$	$0{,}2(3+t^2)$	x_1
7	$0{,}4\sin(\pi t/4)$	$0{,}6(1–2t^2)$	$1{,}1\sin(\pi t/6)$	$1{,}3\cos(\pi t/3)$	$0{,}9\sin(\pi t/6)$	a_1
8	$1{,}2\sin(\pi t/6)$	$0{,}9\cos(\pi t/3)$	$0{,}2(1+2t^2)$	$0{,}6\sin(\pi t/6)$	$0{,}2\cos(\pi t/4)$	N_1
9	$1{,}4\cos(\pi t/3)$	$1{,}1\sin(\pi t/3)$	$0{,}3\cos(\pi t/6)$	$0{,}5(4–3t^2)$	$0{,}4(2–3t^2)$	u_1

Рисунки к задачам Д7

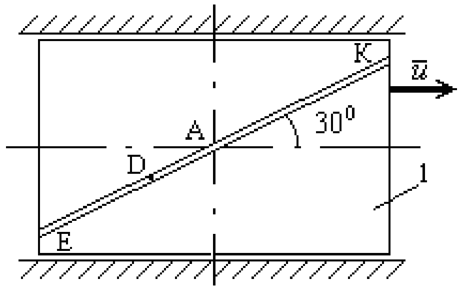


Рисунок Д7.0

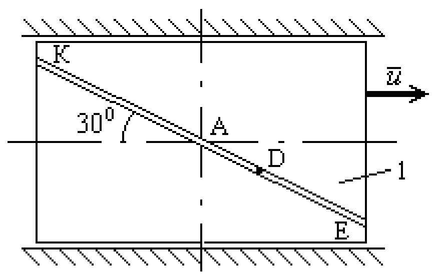


Рисунок Д7.1

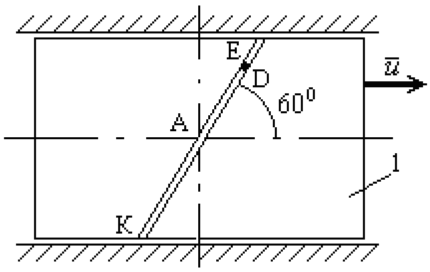


Рисунок Д7.2

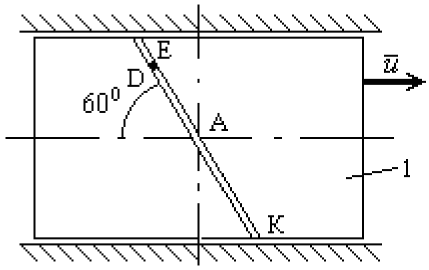


Рисунок Д7.3

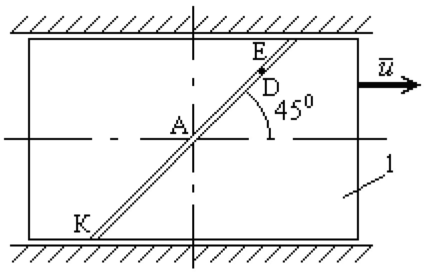


Рисунок Д7.4

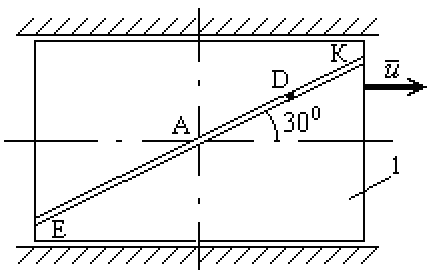


Рисунок Д7.5

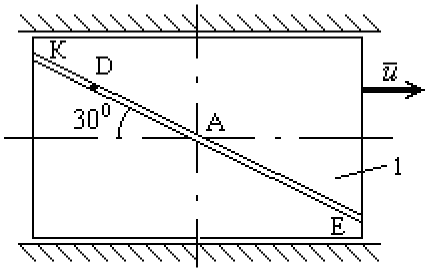


Рисунок Д7.6

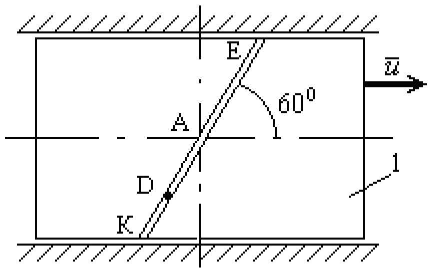


Рисунок Д7.7

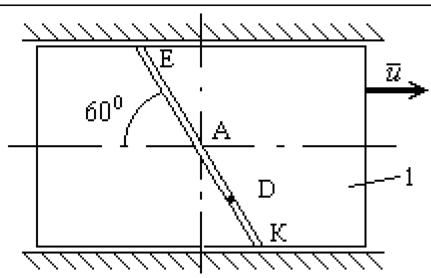


Рисунок Д7.8

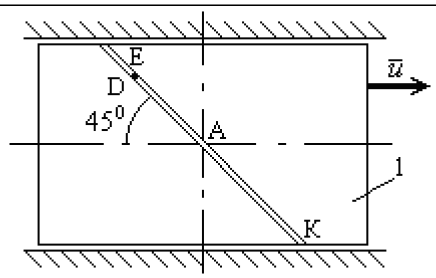


Рисунок Д7.9

Указания к решению задачи Д7

Задача Д7 – на применение теоремы о движении центра масс системы и теоремы об изменении количества движения системы. Первой теоремой удобнее пользоваться, когда надо найти перемещение (или закон движения) одного из тел системы, движущегося поступательно, а второй – когда надо найти скорость такого тела. При определении ускорения тела или реакции связи тоже удобнее воспользоваться первой теоремой.

При решении задачи следовать алгоритму, предложенному в примере.

Пример решения задачи Д7

Задача. Через центр тяжести A тележки массой m_1, движущейся по гладкой горизонтальной плоскости, прорезан наклоненный под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту желоб, в который помещен груз D массой m_2 (рисунок 22). В момент времени $t_0 = 0$, когда скорость тележки равна u_0, груз начинает движение по желобу по закону $AD = s = f(t)$. Считать груз материальной точкой и пренебречь всеми сопротивлениями.

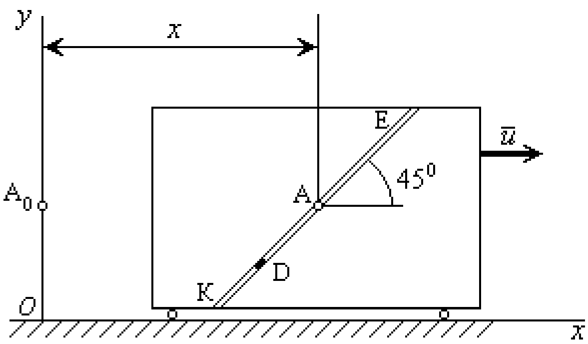


Рисунок 22

Д а н о: m_1 = 24 кг, m_2 = 12 кг, u_0 = 0,5 м/с, $s = 0{,}5 \cos(\pi t/6)$ (s – в метрах, t – в секундах).

О п р е д е л и т ь в момент времени t_1 = 1 с:

а) перемещение x_1 тележки (перемещение за время от $t_0 = 0$ до t_1 = 1 с);

б) ускорение a_1 тележки;

в) скорость u_1 тележки;

г) полную нормальную реакцию N_1 плоскости.

Решение.

1. Выберем механическую систему, движение которой будем рассматривать.

Целесообразно рассматривать систему, состоящую из тележки и груза.

2. Изобразим действующие на систему внешние силы (рисунок 23): силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и реакции плоскости $\overline{N}'$, $\overline{N}''$.

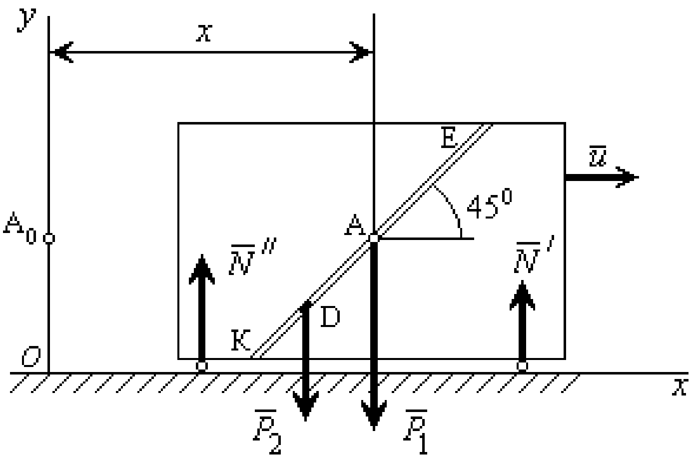


Рисунок 23

3. Выберем координатные оси Oxy так, чтобы ось y проходила через точку A_0, где находится центр масс тележки в момент времени $t_0 = 0$.

а) Определение перемещения x_1. Для определения x_1 воспользуемся теоремой о движении центра масс системы. Составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось x. Получим

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e \quad \text{или} \quad M\ddot{x}_C = 0, \tag{1}$$

так как $\sum F_{kx}^e = 0$, т. к. действующие на систему внешние силы вертикальны.

Определим значение $M \cdot x_C$. Из рисунка 23 видно, что в произвольный момент времени абсциссы x_A – центра масс тележки и x_D – груза равны соответственно

$$x_A = x,\ x_D = x - AD \cdot \cos(45^0) = x - s \cdot \cos(45^0).$$

Так как по формуле, определяющей координату x_C центра масс системы,

$$M \cdot x_C = m_1 x_A + m_2 x_D,$$

то

$$M \cdot x_C = m_1 x + m_2 x - 0{,}5\, m_2 \cos(\pi t / 6) \cos(45^0). \qquad (2)$$

Проинтегрировав уравнение (1), найдем, что

$$M\dot{x}_C = C_1; \qquad M x_C = C_1 t + C_2, \qquad (3)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Подставив во второе из уравнений (3) значение $M \cdot x_C$ из равенства (2), предварительно упростив его, получим

$$(m_1 + m_2)\, x - 0{,}35\, m_2 \cos(\pi t / 6) = C_1 t + C_2. \qquad (4)$$

Для определения C_1 и C_2 необходимо еще одно уравнение, которое получим, продифференцировав обе части равенства (4) по времени,

$$(m_1 + m_2)\, \dot{x} + 0{,}35\, \pi / 6\, m_2 \sin(\pi t / 6) = C_1, \qquad (5)$$

где $\dot{x} = u$ – скорость тележки.

По начальным условиям: при $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = u_0$. Подставляя эти величины в равенства (4) и (5), найдем, что

$$C_1 = (m_1 + m_2)\, u_0, \qquad C_2 = -0{,}35\, m_2.$$

При этих значениях C_1 и C_2 уравнение (4) примет вид

$$(m_1 + m_2)\, x - 0{,}35\, m_2 \cos(\pi t / 6) = (m_1 + m_2)\, u_0 t - 0{,}35\, m_2.$$

Отсюда получим зависимость от времени координаты x

$$x = u_0 t + \frac{0{,}35 m_2}{(m_1 + m_2)} [\cos(\pi t / 6) - 1]. \qquad (6)$$

Полагая здесь $t = 1$ с, найдем искомое перемещение x_1.

О т в е т: $x_1 = 0{,}48$ м.

б) Определение ускорения a_1.

Проделав те же рассуждения и выкладки, что и в предыдущем примере, получим уравнение (1) и формулу (2). Для определения a_1 продифференцируем дважды по времени обе части равенства (2).

Получим

$$M\dot{x}_C = (m_1 + m_2)\, \dot{x} + 0{,}35\, \pi / 6\, m_2 \sin(\pi t / 6);$$

$$M\ddot{x}_C = (m_1 + m_2)\, \ddot{x} + 0{,}35\, (\pi / 6)^2\, m_2 \cos(\pi t / 6),$$

где $\ddot{x} = a$ – ускорение тележки. Но согласно уравнению (1) $M\ddot{x}_C = 0$; в результате находим следующую зависимость a от времени

$$a = -0{,}03 \cos(\pi t / 6).$$

Полагая здесь t = 1 с, определим искомое ускорение a_1.

О т в е т: $a_1 = -0{,}026$ м/с^2. Знак минус указывает, что ускорение тележки направлено влево.

в) Определение скорости u_1.

Чтобы определить u_1, воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы $\overline{Q}$ в проекции на ось x. Так как все действующие на систему внешние силы вертикальны (рисунок 24), то $\sum F_{kx}^e = 0$, и теорема дает

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e = 0, \text{ откуда } Q_x = C_1. \qquad (1)$$

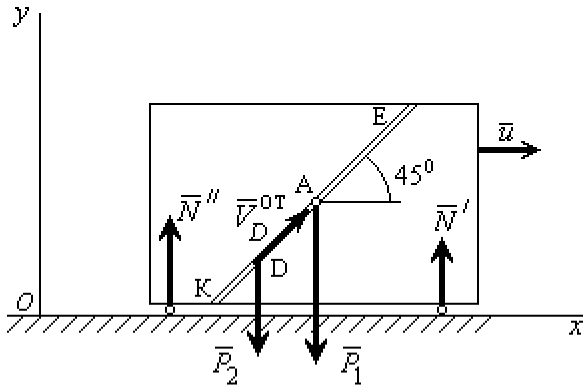


Рисунок 24

Для рассматриваемой механической системы

$$\overline{Q} = \overline{Q}^{\,\text{Т}} + \overline{Q}^{\,\text{D}},$$

где $\overline{Q}^{\,\text{Т}} = m_1 \overline{u}$ и $\overline{Q}^{\,\text{D}} = m_2 \overline{V}_{\text{D}}$ – количества движения тележки и груза D соответственно ($\overline{u}$ – скорость тележки, $\overline{V}_{\text{D}}$ – скорость груза по отношению к осям Oxy). Тогда из равенства (1) следует

$$Q^{\text{Т}}_{\text{x}} + Q^{D}_{\text{x}} = C_1 \text{ или } m_1 u_{\text{x}} + m_2 V_{Dx} = C_1. \qquad (2)$$

Для определения V_{Dx} рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по отношению к тележке относительным (это движение, совершаемое при движении груза по желобу KE), а движение самой тележки – переносным. Тогда

$$\overline{V}_{\text{D}} = \overline{V}^{\,\text{пер}}_{\text{D}} + \overline{V}^{\,\text{от}}_{\text{D}} \quad \text{и} \quad V_{\text{Dx}} = V^{\text{пер}}_{\text{Dx}} + V^{\text{от}}_{\text{Dx}}. \qquad (3)$$

Но $\overline{V}^{\,\text{пер}}_{\text{D}} = \overline{u}$ и, следовательно, $V^{\text{пер}}_{\text{Dx}} = u_{\text{x}}$. Вектор $\overline{V}^{\,\text{от}}_{\text{D}}$ направлен вдоль желоба и численно равен

$$V^{OT}_{D} = \dot{s} = -(0{,}5\,\pi / 6)\sin(\pi t / 6) = 0{,}26 \sin(\pi t / 6).$$

Изобразив этот вектор на рисунок 24 с учетом знака, найдем, что

$$V^{\text{от}}_{\text{Dx}} = 0{,}26 \sin(\pi t / 6) \cos(45^0) = 0{,}18 \sin(\pi t / 6).$$

Окончательно из равенства (3) получим

$$V_{Dx} = u_x + 0{,}18\sin(\pi t/6). \qquad (4)$$

При найденном значении V_{Dx} равенство (2), если учесть, что $u_x = u$, примет вид

$$m_1 u + m_2 u + 0{,}18\sin(\pi t/6) = C_1. \qquad (5)$$

Постоянную интегрирования C_1 определим по начальным условиям: при $t = 0$ $u = u_0$. Подставка этих величин в уравнение (5) дает $C_1 = (m_1 + m_2)\, u_0$, тогда из (5) получим

$$(m_1 + m_2)\, u + 0{,}18\sin(\pi t/6) = (m_1 + m_2)\, u_0\,.$$

Отсюда находим следующую зависимость скорости u тележки от времени

$$u = u_0 - \frac{0{,}18}{(m_1 + m_2)}\sin(\pi t/6). \qquad (6)$$

Положив в уравнении (6) $t = 1$ с, определим искомую скорость u_1.

О т в е т: $u_1 = 0{,}494$ м/с.

г) Определение реакции N_1.

Для определения реакции N_1 воспользуемся теоремой о движении центра масс системы. Составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось y (см. рисунок 23)

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e \quad \text{или} \quad M\ddot{y}_C = N^{/} + N^{//} - P_1 - P_2\,. \qquad (1)$$

Отсюда, полагая $N^{/} + N^{//} = N$, получим

$$N = M\ddot{y}_C + P_1 + P_2\,. \qquad (2)$$

Из формулы, определяющей ординату y_C центра масс системы**,** найдем

$$M\, y_C = m_1 y_A + m_2\, y_D,$$

где y_A и y_D – соответственно ординаты центра тяжести A тележки и груза D .

В нашем случае

$$y_A = OA_O = \text{const}, \qquad y_D = OA_O - s\cos(45^0).$$

Тогда

$$My_C = (m_1 + m_2)\, OA_O - 0{,}5m_2\cos(\pi t/6)\cdot\cos(45^0) =$$

$$= (m_1 + m_2)\, OA_O - 0{,}35\, m_2\cos(\pi t/6).$$

Продифференцировав обе части этого равенства два раза по времени, получим

$$M\dot{y}_C = 0{,}35\,\pi/6\,\sin(\pi t/6) = 0{,}18\, m_2\sin(\pi t/6);$$

$$M\ddot{y}_C = (0{,}18\ m_2\,\pi/6)\cos(\pi t/6) = 0{,}094\, m_2\cos(\pi t/6).$$

Подставляя найденное выражение $M\ddot{y}_C$ в уравнение (2), получим зависимость $N(t)$

$$N = 0{,}094\, m_2 \cos(\pi t / 6) + P_1 + P_2 = 0{,}094\, m_2 \cos(\pi t / 6) + g(m_1 + m_2).$$

Полагая здесь $t = 1$ с, найдем искомую реакцию N_1.

О т в е т: $N_1 = 384{,}1$ Н.

Задача Д8

Применение теоремы об изменении кинетического момента к определению угловой скорости тела

Однородная горизонтальная платформа (круглая радиуса R или прямоугольная со сторонами R и $2R$, где $R = 1{,}2$ м) массой $m_1 = 24$ кг вращается с угловой скоростью $\omega_0 = 10$ с $^{-1}$ вокруг вертикальной оси z, отстоящей от центра масс C платформы на расстояние $OC = b$ (рисунки Д8.0 – Д8.9, таблица Д8); размеры для всех прямоугольных платформ показаны на рисунке Д8.0а (вид сверху).

В момент времени $t_0 = 0$ по желобу платформы начинает двигаться (под действием внутренних сил) груз D массой $m_2 = 8$ кг по закону $s = AD = s(t)$, где s выражено в метрах, t – в секундах. Одновременно на платформы начинает действовать пара сил с моментом M (задан в ньютонометрах; при $M < 0$ его направление противоположно показанному на рисунках).

О п р е д е л и т ь, пренебрегая массой вала:

1. Зависимость $\omega = f(t)$, то есть угловую скорость платформы, как функцию времени.

2. Угловую скорость платформы ω_1 при $t = t_1 = 1$ с в случае, когда в течение промежутка времени от 0 до t_1 вращающий момент $M = 0$.

Примечание. На всех рисунках груз D показан в положении $s > 0$ (когда $s < 0$, груз находится по другую сторону от точки A). Изображая чертеж решаемой задачи провести ось z на расстоянии $OC = b$ от центра C.

Таблица Д8. Данные к задачам Д8.

Номер условия	b	$s = s(t)$	M
0	R	$-0{,}4\,t^2$	6
1	$R/2$	$0{,}6\,t^2$	$4\,t$
2	R	$-0{,}8\,t^2$	-6
3	$R/2$	$10\,t$	$-8\,t$
4	R	$0{,}4\,t^3$	10
5	$R/2$	$-0{,}5\,t$	$-9\,t^2$
6	R	$-0{,}6\,t$	8
7	$R/2$	$0{,}8\,t$	$6\,t^2$
8	R	$0{,}4\,t^3$	$-10\,t$
9	$R/2$	$0{,}5\,t^2$	$12\,t^2$

Рисунки к задачам Д8

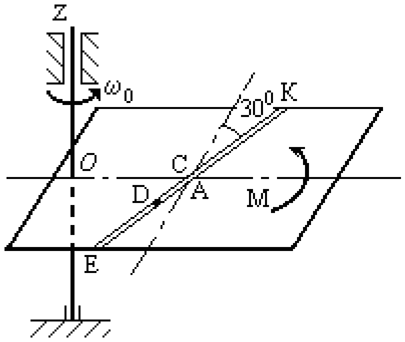


Рисунок. Д8.0

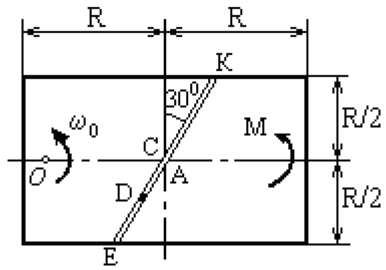


Рисунок Д8.0а

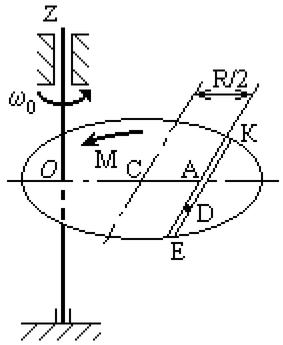


Рисунок. Д8.1

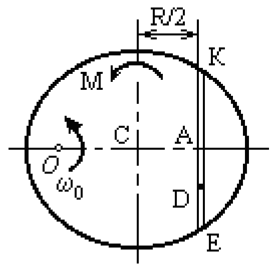


Рисунок Д8.1а

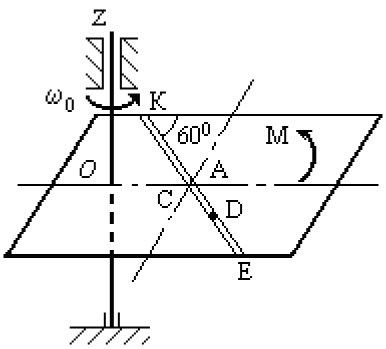


Рисунок. Д8.2

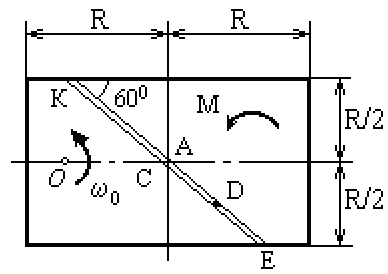


Рисунок Д8.2а

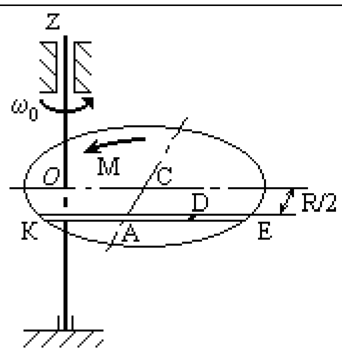


Рисунок. Д8.3

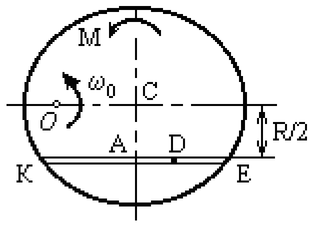


Рисунок Д8.3а

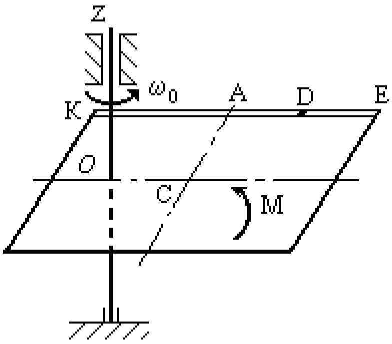


Рисунок. Д8.4

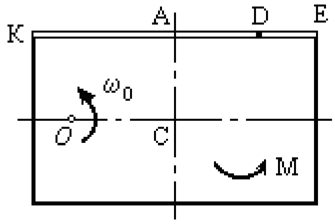


Рисунок Д8.4а

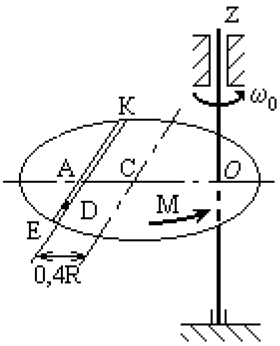


Рисунок. Д8.5

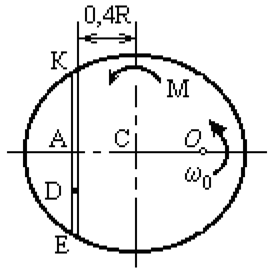


Рисунок Д8.5а

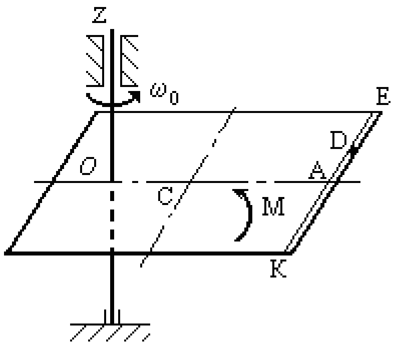


Рисунок. Д8.6

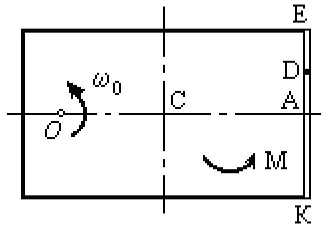


Рисунок Д8.6а

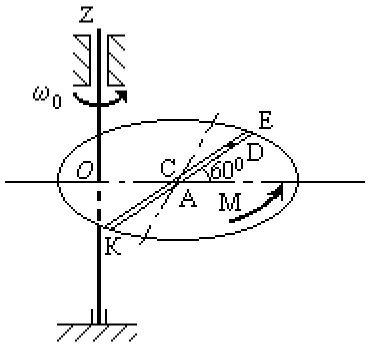


Рисунок. Д8.7

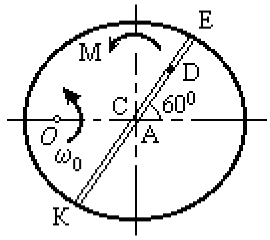


Рисунок Д8.7а

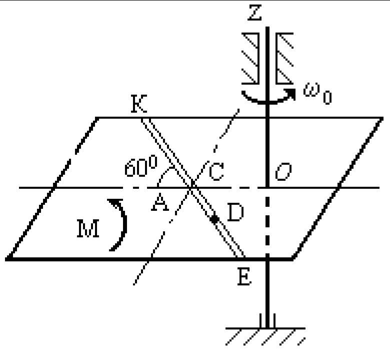


Рисунок. Д8.8

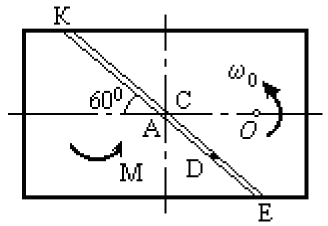


Рисунок Д8.8a

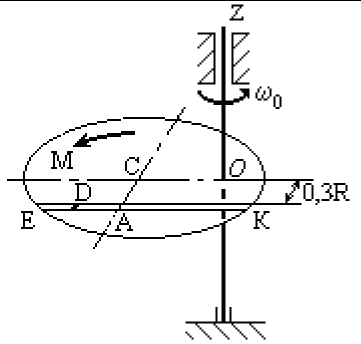


Рисунок. Д8.9

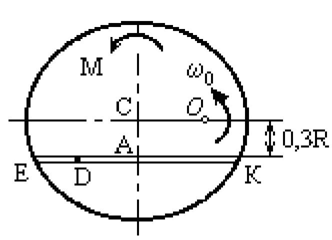


Рисунок Д8.9a

Указания к решению задачи Д8

Задача Д8 – на применение теоремы об изменении кинетического момента относительно оси. При применении теоремы к системе, состоящей из платформы и груза, кинетический момент системы K_Z относительно оси z определяется как сумма моментов платформы и груза. При этом следует учесть, что абсолютная скорость $\vec{V}$ груза складывается геометрически из относительной скорости $\vec{V}_{ОТ}$ и переносной $\vec{V}_{ПЕР}$ скоростей, т. е.

$$\vec{V} = \vec{V}_{ОТ} + \vec{V}_{ПЕР}.$$

Поэтому и количество движения этого груза

$$m\vec{V} = m\vec{V}_{ОТ} + m\vec{V}_{ПЕР}.$$

Тогда можно воспользоваться теоремой Вариньона (статика), согласно которой

$$m_Z\left(m\vec{V}\right) = m_Z\left(m\vec{V}_{ОТ}\right) + m_Z\left(m\vec{V}_{ПЕР}\right).$$

Эти моменты вычисляются так же, как моменты сил.

В случае, когда $M = 0$ и надо определить ω_1, воспользоваться закономсохранения кинетического момента системы (показав, что он имеет место).

Осевой момент инерции прямоугольной пластины с массой m и сторонами a_1 и a_2 относительно оси Cz, перпендикулярной пластине и проходящей через ее центр масс C, равен $I_{Cz} = m\,(a_1^2 + a_2^2)/12$.

При решении задачи полезно воспользоваться вспомогательными чертежами вида на платформу сверху (с конца оси z). Соответствующие рисунки отмечены буквой a (например, рисунок Д8.2а).

При решении задачи целесообразно следовать алгоритму, предложенному в примере.

Пример решения задачи Д8

Задача. Однородная горизонтальная платформа (прямоугольная со сторонами l и $2l$), имеющая массу m_1, жестко скреплена с вертикальным валом и вращается вместе с ним вокруг оси z с угловой скоростью ω_0 (рисунки 25 - 25а).

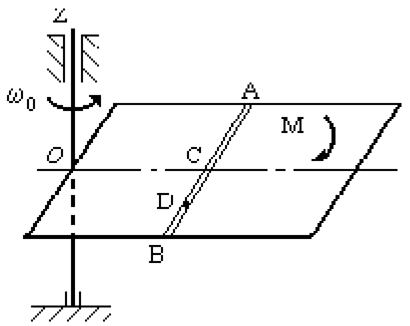


Рисунок 25

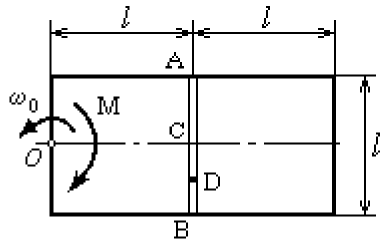


Рисунок 25а

В момент времени $t_0 = 0$ на вал начинает действовать вращающий моментом M, направленный противоположно ω_0; одновременно груз D массой m_2, находящийся в желобе AB в точке C, начинает двигаться по желобу (под действием внутренних сил) по закону $s = CD = s\,(t)$.

Д а н о. $m_1 = 16$ кг, $m_2 = 10$ кг, $l = 0{,}5$ м, $\omega_0 = 2$ с $^{-1}$, $s = 0{,}4\,t^2$ (s –в метрах, t – в секундах), $M = k \quad t$, где $k = 6$ Н м/с.

О п р е д е л и т ь, пренебрегая массой вала:

1. Зависимость $\omega = f\,(t)$, то есть угловую скорость платформы, как функцию времени.

2. Угловую скорость платформы ω_1 при $t = t_1 = 1$ с в случае, когда в течение промежутка времени от 0 до t_1 вращающий момент не действует, то есть $M = 0$.

Решение.

I. Определим зависимость $\omega = f\,(t)$, то есть угловую скорость платформы, как функцию времени.

1. Выберем механическую систему, движение которой будем рассматривать.

Рассмотрим систему, состоящую из платформы и груза D.

2. Выберем ось, вокруг которой вращается система.

Осью вращения системы является ось z, направленная вверх.

3. Изобразим действующие на систему внешние силы (рисунок 26): силы тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2$, реакции $\vec{R}_E$, $\vec{R}_H$ и вращающий момент M.

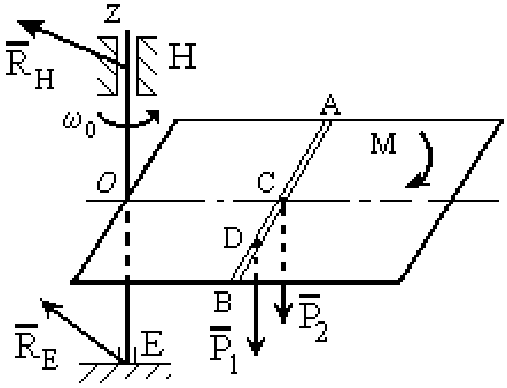


Рисунок 26

4. Применим теорему об изменении кинетического момента относительно оси z

$$\frac{dK_Z}{dt} = \sum M_Z(\vec{F}_k^e). \tag{1}$$

5. Определим моменты внешних сил, действующих на систему

$$\sum M_Z(\vec{F}_k^e) = M_Z(\vec{P}_1) + M_Z(\vec{P}_2) + M_Z(\vec{R}_E) + M_Z(\vec{R}_H) + M.$$

Так как силы $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ параллельны оси z, их моменты $M_Z(\vec{P}_1) = M_Z(\vec{P}_2) = 0$. Силы $\vec{R}_E$, $\vec{R}_H$ пересекают ось z, поэтому их моменты относительно оси также равны нулю, то есть $M_Z(\vec{R}_E) = M_Z(\vec{R}_H) = 0$. С учетом того, что ось z направлена вверх, вращающий момент M будет отрицательным, т. е. $M = - k \quad t$. Тогда $\sum M_Z(\vec{F}_k^e) = -k \cdot t$ и вместо уравнения (1) получим

$$\frac{dK_Z}{dt} = -k \cdot t. \tag{2}$$

6. Проинтегрируем дифференциальное уравнение (2).
Умножая уравнение (2) на dt и интегрируя, получим

$$K_Z = - k\, t^2/2 + C_1. \tag{3}$$

7. Вычислим кинетический момент системы K_Z.
Для рассматриваемой механической системы

$$K_Z = K_Z^{ПЛ} + K_Z^D, \tag{4}$$

где $K_Z^{ПЛ}$ и K_Z^D – кинетические моменты платформы и груза D соответственно.

7.1. Вычислим кинетический момент платформы $K_Z^{ПЛ}$.

Так как платформа совершает вращательное движение вокруг оси z, то $K_Z^{ПЛ} = I_Z \cdot \omega$. Значение осевого момента инерции найдем по теореме Гюйгенса

$$I_Z = I_{ZC'} + m_1 \cdot (OC)^2 = I_{ZC'} + m_1 \cdot l^2 ,$$

где $I_{ZC'}$ – момент инерции относительно оси z', параллельной оси z и проходящей через центр C платформы.

Известно, что

$$I_{ZC'} = m_1[(2l)^2 + l^2] / 12 = 5\, m_1 l^2 / 12.$$

Тогда

$$I_Z = 5\, m_1 l^2 / 12 + m_1 l^2 = 17\, m_1 l^2 / 12.$$

Следовательно,

$$K_Z^{ПЛ} = (17\, m_1 l^{\,2} / 12) \cdot \omega. \tag{5}$$

7.2. Вычислим момент количества движения груза K_Z^D.

Для определения K_Z^D рассмотрим движение груза D как сложное (рисунок 27), считая его движение по платформе относительным, а вращение самой платформы вокруг оси z переносным движением.

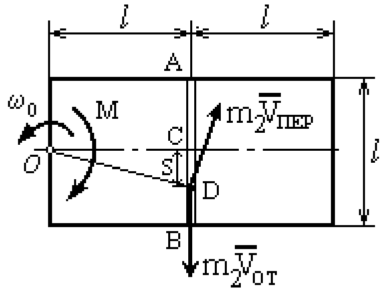


Рисунок 27

Тогда абсолютная скорость груза $\vec{V} = \vec{V}_{ОТ} + \vec{V}_{ПЕР}$. Так как груз D движется по закону $s = CD = 0,4\, t^2$, то $V_{ОТ} = \dot{s} = 0,8t$. Далее изображаем на рисунке вектор относительного количества движения $m_2\vec{V}_{ОТ}$ с учетом знака $\dot{s}$ (направления векторов $m_2\vec{V}_{ОТ}$ и $\vec{V}_{ОТ}$ совпадают). (При $\dot{s} < 0$ направление $m_2\vec{V}_{ОТ}$ было бы противоположным). Затем, учитывая направление ω, изображаем вектор переносного количества движения $m_2\vec{V}_{ПЕР}$ ($\vec{V}_{ПЕР} \perp OD$, а вектор $m_2\vec{V}_{ПЕР}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{V}_{ПЕР}$); численно $V_{ПЕР} = \omega \cdot OD$.

Тогда, по теореме Вариньона,

$$K_Z^D = m_Z\big(m_2\vec{V}\big) = m_Z\big(m_2\vec{V}_{ОТН}\big) + m_Z\big(m_2\vec{V}_{ПЕР}\big) = -m_2 V_{ОТН} \cdot OC + m_2 V_{ПЕР} \cdot OD =$$
$$= -\, m_2 \cdot 0,8\, t\, l + m_2 \cdot \omega\, (OD)^2. \tag{6}$$

7.3. Определим кинетический момент всей механической системы.

На рисунке 27 видно, что $(OD)^2 = l^2 + s^2 = l^2 + 0{,}16\,t^4$. Подставляя эту величину в равенство (6), а затем K_Z^D и $K_Z^{ПЛ}$ из (6) и (5) в равенство (4), получим с учетом данных задачи

$$K_Z = \frac{17}{12}\,m_1 l^2\omega + m_2\cdot\omega(l^2 + 0{,}16t^4) - m_2\cdot 0{,}8\,tl = (8{,}17 + 1{,}6\,t^4)\omega - 4t. \quad (7)$$

8. Преобразуем общее решение дифференциального уравнения движения системы.

С учетом выражения (7) решение (3), где $k = 6$, примет вид

$$(8{,}17 + 1{,}6\,t^4)\,\omega - 4\,t = -\,k\,t^2/2 + C_1. \quad (8)$$

9. Определим постоянную интегрирования C_1.

Постоянную интегрирования определяем по начальным условиям: при $t = 0$, $\omega = \omega_0$. Подставляя начальные условия в решение (8), получим

$$(8{,}17 + 1{,}6\cdot 0^4)\,\omega_0 - 4\cdot 0 = -\,k\cdot 0^2/2 + C_1.$$

Откуда находим

$$C_1 = 8{,}17\,\omega_0 = 16{,}34.$$

10. Определяем искомое выражение для ω.

При найденном значении C_1 из решения (8) определяем искомую зависимость ω от t.

О т в е т: $\omega = (64{,}34 + 4t - 3t^2) / (8{,}17 + 1{,}6\,t^4)$, где t – в секундах, ω – в с$^{-1}$.

II. Определим угловую скорость платформы ω_1.

Для определения ω_1 применим теорему об изменении кинетического момента относительно оси z (выражение (1)).

$$\frac{dK_Z}{dt} = \sum M_Z(\vec{F}_k^e). \quad (9)$$

Из рассуждений, приведенных в п. 5, и с учетом того, что $M = 0$, получим

$$\sum M_Z(\vec{F}_k^e) = M_Z(\vec{P}_1) + M_Z(\vec{P}_2) + M_Z(\vec{R}_E) + M_Z(\vec{R}_H) + M = 0.$$

Тогда из теоремы (9) следует, что имеет место <u>закон сохранения кинетического момента системы</u> относительно оси z

$$K_Z = \text{const} \qquad \text{или} \qquad K_{Z1} = K_{Z0}, \quad (10)$$

где K_{Z1} – кинетический момент системы при $t = t_1$, а K_{Z0} – кинетический момент системы при $t_0 = 0$.

Равенство (10) с учетом выражения для кинетического момента (7), запишем в виде

$$(8{,}17 + 1{,}6\,t_1^{\,4})\,\omega_1 - 4\,t_1 = (8{,}17 + 1{,}6\cdot 0^4)\,\omega_0 - 4\cdot 0.$$

Откуда

$$\omega_1 = (8{,}17 \cdot 2 + 4)/(8{,}17 + 1{,}6 \cdot 1^{4}) = 2{,}08\ \text{с}^{-1}.$$

О т в е т: 2,08 с $^{-1}$.

Задача Д9

Применение дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения твердого тела

Определить значение постоянной силы $\vec{F}$ под действием которой без скольжения колесо массой m носит граничный характер, то есть сцепление колеса с основанием находится на грани срыва (рисунки Д9.0 – Д9.9, таблица Д9).

Найти также для этого случая уравнение движения центра масс колеса C, если в начальный момент времени его координаты $x_{C0} = 0$ и скорость $V_{C0} = 0$.

В задании принять следующие обозначения: i_C – радиус инерции колеса относительно центральной оси, проходящей через точку C, перпендикулярно ее плоскости; R и r - радиусы большой и малой окружности; $f_{сц}$ – коэффициент сцепления (коэффициент трения покоя); δ - коэффициент трения качения.

При вычислениях принять следующие значения функций:

Значения функций	Углы ^{0}						
	8	15	30	45	60	75	82
sin	0,1392	0,2588	0,5000	0,7071	0,8660	0,9659	0,9903
cos	0,9903	0,9659	0,8660	0,7071	0,5000	0,2588	0,1392

Таблица Д9. Данные к задачам Д9.

Номер условия	m, кг	i_C, см	R, см	r, см	α, град	β, град	$f_{сц}$	δ, см
0	300	50	80	40	8	0	0,35	0,1
1	200	40	60	30	15	15	0,20	0,8
2	180	30	60	20	0	8	0,10	0,2
3	220	40	60	15	30	8	0,20	0,3
4	240	45	60	25	15	30	0,10	1,0
5	200	40	70	25	0	15	0,20	0,8
6	150	40	50	15	30	15	0,25	0,5
7	250	30	50	35	15	8	0,5	0,3
8	260	20	50	30	0	15	0,15	0,7
9	120	50	70	30	8	0	0,30	0,6

Рисунки к задачам Д9

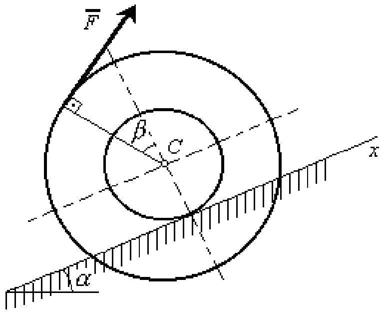


Рисунок Д 9.0

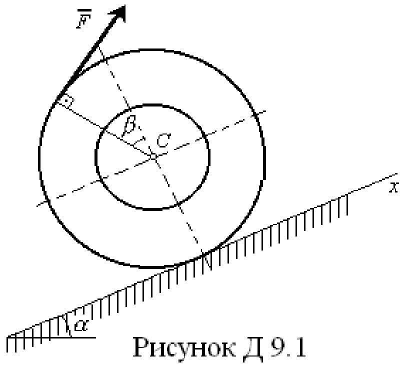


Рисунок Д 9.1

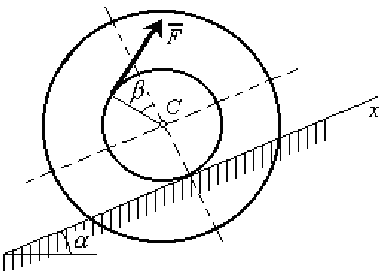


Рисунок Д 9.2

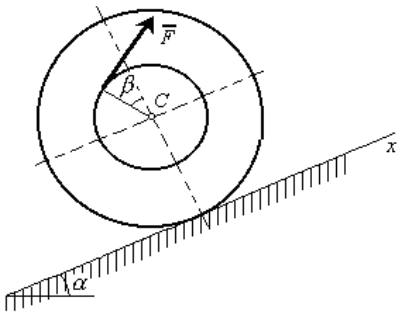


Рисунок Д 9.3

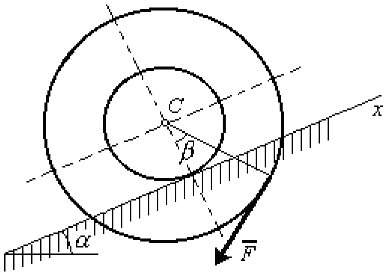


Рисунок Д 9.4

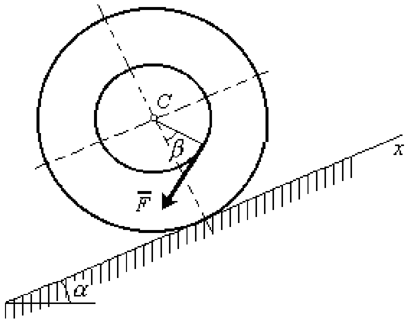


Рисунок Д 9.5

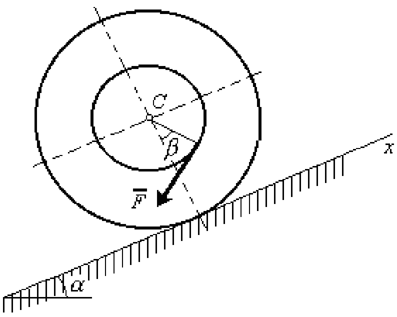


Рисунок Д 9.6

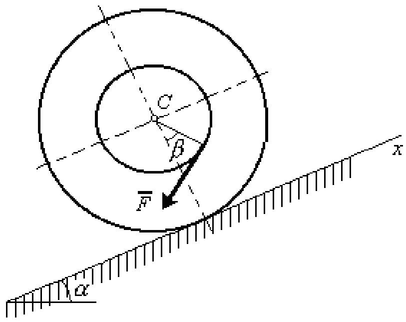


Рисунок Д 9.7

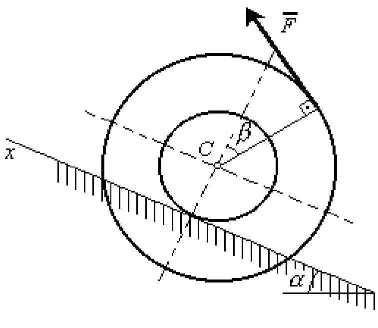


Рисунок Д 9.8

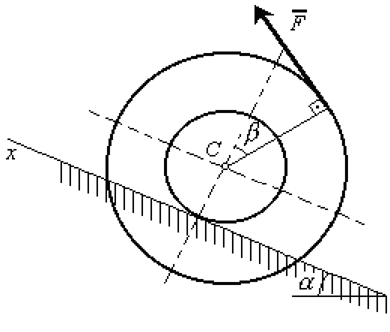


Рисунок Д 9.9

Указания к решению задачи Д9

Задача Д9 – на применение дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения твердого тела. При составлении уравнений следует во избежание ошибок в знаках направлять ось x в ту сторону, куда предполагается направленным движение центра масс барабана. Если фактическое направление движения центра C другое, то в ответе получается $a_C < 0$, то найденная величина $|\ a_C\ |$ будет верной. Силу трения, когда не куда она направлена, можно направить в любую сторону.

При решении необходимо следовать алгоритму, предложенному в примере.

Пример решения задачи Д9

Задача. На ведомое колесо автомобиля со стороны его ведущих частей (колес) действуют силы, равнодействующая которых равна силе $\vec{F}$ (рисунок 28).

Определить значение постоянной силы $\vec{F}$ под действием которой без скольжения колесо массой m носит граничный характер, то есть сцепление колеса с основанием находится на грани срыва.

Найти также для этого случая уравнение движения центра масс колеса C, если в начальный момент времени его координаты $x_{C0} = 0$ и скорость $V_{C0} = 0$.

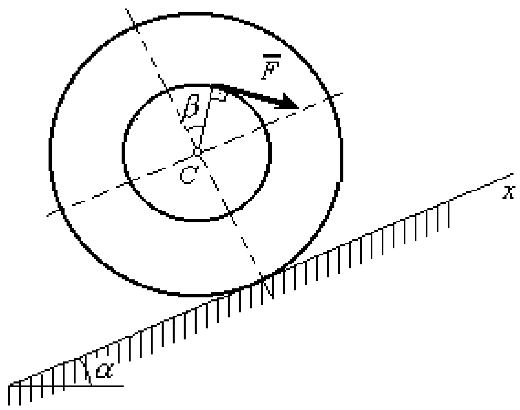


Рисунок 28

Д а н о: m = 200 кг, R = 60 см, r = 10 см, i_C = 50 см, $\alpha = 15^0$, $\beta = 30^0$, $f_{сц}$ = 0,10, δ = 0,8 см.

Решение.

1. Изобразим силы, действующие на колесо.

Действуют нагрузки: сила тяжести колеса $\vec{G}$, нормальная реакция $\vec{N}$, сила $\vec{P}$ и сила сцепления $\vec{F}_{СЦ}$ (рисунок 29); пара сил с моментом равным моменту трения качения $M_к$.

Силу $\vec{F}_{СЦ}$ направим условно в сторону положительного направления оси x.

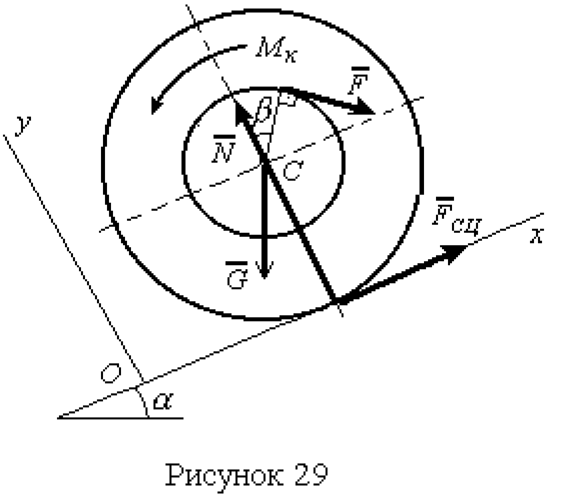


Рисунок 29

2. Установим дифференциальные уравнения движения колеса.

Дифференциальные уравнения плоского движения колеса

$$m\ddot{x}_C = \sum X_i^E, \qquad m\ddot{y}_C = \sum Y_i^E, \qquad J_C\ddot{\varphi} = \sum M_{C\,i}^E,$$

или в данном случае

$$m\ddot{x}_C = F\cos\beta - G\sin\alpha + F_{СЦ}; \tag{1}$$

$$m\ddot{y}_C = N - F\sin\beta - G\cos\alpha; \tag{2}$$

$$J_C\ddot{\varphi} = F \cdot r - F_{СЦ} \cdot R - M_K. \tag{3}$$

Положительным направлением отсчета угла поворота колеса принято направление по часовой стрелке, что соответствует движению центра колеса в положительном направлении оси x.

В соответствии с этим направление по часовой стрелке принято положительным и при определении знаков моментов внешних сил в уравнении (3).

3. Установим уравнения связей.

К дифференциальным уравнениям (1) – (3) добавим уравнения связей

$$y_C = R = \text{const}; \tag{4}$$

$$\omega = \dot{\varphi} = V_C / R = \dot{x}_C / R. \tag{5}$$

Последнее уравнение, связывающее угловую скорость колеса ω со скоростью центра V_C , выражает условие качения колеса без скольжения.

Из (4) следует

$$\ddot{y}_C = 0. \tag{6}$$

Дифференцируя (5) по времени, получим

$$\ddot{\varphi} = \ddot{x}_C / R. \tag{7}$$

4. Определим зависимость $F_{СЦ}$ от F.

Подставляя (6) и (7) в (2) и (3) и учитывая что,

$$G = mg,\ I_C = m\, i_C^2,\ M_к = \delta N,$$

получим

$$N = F\sin\beta + mg\cos\alpha; \tag{2′}$$

$$m i_C^2 \ddot{x}_C / R = F \cdot r - F_{СЦ} \cdot R - \delta(F\sin\beta + mg\cos\alpha). \tag{3′}$$

Исключая $\ddot{x}_C$ из уравнений (1) и (3′), находим

$$F_{СЦ} = [F \cdot (Rr - \delta R \sin\beta - i_C^2 \cos\beta) + mg \cdot (i_C^2 \sin\alpha - \delta R \cos\alpha)] /(R^2 + i_C^2),$$

или с учетом исходных данных

$$F_{СЦ} = -\,0{,}238\, F + 192{,}0. \tag{8}$$

5. Изобразим график зависимости $F_{СЦ}$ от F.

График зависимости (8) показан на рисунке 30. График пересекает ось F в точке F_0 = 807 Н.

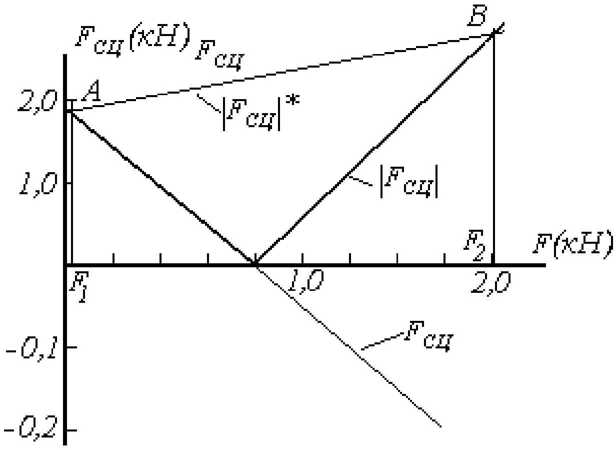


Рисунок 30

При $0 \leq F < F_0$ $F_{СЦ} > 0$ – сила сцепления направлена, как показано на рисунке 29, в положительном направлении оси x.

При $F > F_0$ $F_{СЦ} < 0$ – сила сцепления направлена в противоположную сторону.

6. Установим пределы значений F, при которых происходит качение без скольжения.

Модуль силы сцепления, обеспечивающей качение колеса без скольжения, подчинен следующему ограничению

$$| F_{СЦ} | \leq N \cdot f_{сц}$$

(имеется в виду, что всегда $N > 0$).

Предельное значение модуля силы сцепления согласно (2′)

$$| F_{СЦ} |^* = N \cdot f_{сц} = (F\sin\beta + mg\cos\alpha) \cdot f_{сц},$$

или с учетом данных

$$| F_{СЦ} |^* = 0{,}05\, F + 190. \tag{9}$$

На рисунке 30 показан график зависимости $| F_{СЦ} |$ от F, представляющий собой ломаную линию. Там же приведена прямая (9). Она пересекает график $| F_{СЦ} |$ в точках A и B с абсциссами F_1 и F_2. Область значений силы F, при которых колесо катится без скольжения ($| F_{СЦ} | \leq N \cdot f_{сц}$),

$$F_1 \leq F \leq F_2.$$

Граничное значение силы F находим, пользуясь (8) и (9), из условий

$$F_{СЦ} = | F_{СЦ} |^* \quad \text{и} \quad F_{СЦ} = | F_{СЦ} |^*.$$

В результате вычислений получим F_1 = 6,9 Н, F_2 = 2031 Н.

7. Найдем уравнение движения центра масс колеса.

Дифференциальное уравнение движения центра колеса после исключения $F_{СЦ}$ из (1) и (3′) и с учетом примет вид

$$\ddot{x}_C = 0{,}00314F - 1{,}591. \quad (10)$$

График зависимости (10) показан на рисунке 31. Ускорение центра колеса $\ddot{x}_C = 0$ при F = 507 Н.

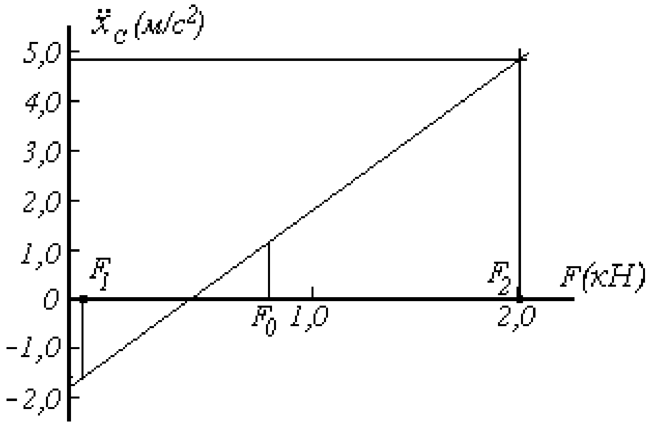


Рисунок 31

При $F = F_1$ имеем $\ddot{x}_C = -1{,}57$ м/с^2.

Дважды интегрируя это дифференциальное уравнение и имея в виду нулевые начальные условия, найдем

$$x_C = -0{,}785\ t^2;$$

колесо катится вниз по наклонной плоскости.

При $F = F_2$ $\ddot{x}_C = 4{,}77$ м/с^2, $x_C = 2{,}385\ t^2$.

Таким образом, при значении силы F, когда движение колеса происходит без скольжения массой и носит граничный характер, то есть сцепление колеса с основанием находится на грани срыва, оно катится в сторону положительного направления оси x вверх по наклонной плоскости.

Задача Д10

Приложение теоремы об изменении количества движения механической системы к движению жидкости

Струя воды протекает по изогнутой в виде части окружности трубе (рисунках Д10.0 – Д10.9, таблица Д10) со скоростью $V_1 = V_2 = V$. Дуга окружности опирается на угол, который определяется с помощью углов α и β (таблица 10). Ось трубы расположена в горизонтальной плоскости. Сечение трубы – круг, диаметр которого равен d.

Определить проекции главного вектора сил добавочных динамических давлений на стенки трубы.

Таблица Д10. Условия к задачам Д10.

Номер условия	V *м/с*	α^0	β^0	d, см
0	8	0	15	10
1	16	30	90	15
2	15	60	0	18
3	10	0	30	16
4	12	45	30	12
5	10	60	45	15
6	15	0	45	10
7	12	30	60	20
8	8	45	60	14
9	14	45	60	16

Рисунки к задачам Д10

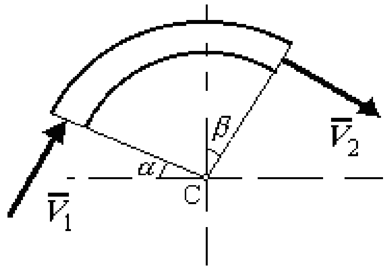


Рисунок Д 10.0

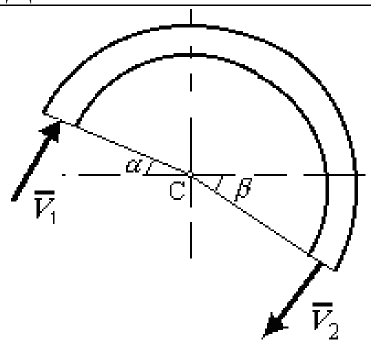


Рисунок Д 10.1

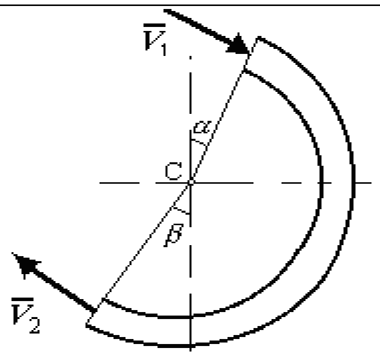


Рисунок Д 10. 2

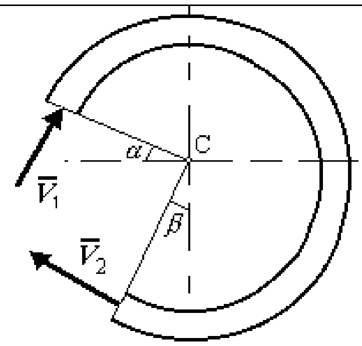


Рисунок Д 10. 3

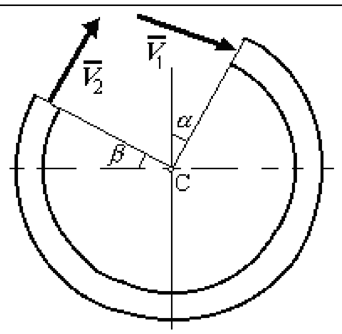


Рисунок Д 10. 4

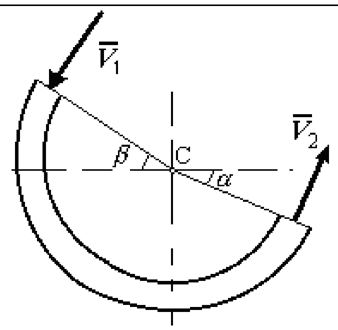


Рисунок Д 10. 5

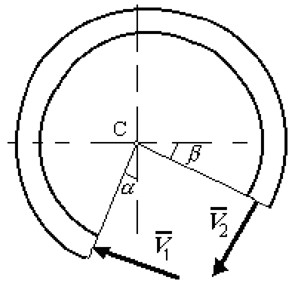


Рисунок Д 10.6

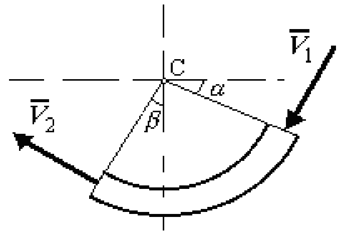


Рисунок Д 10.7

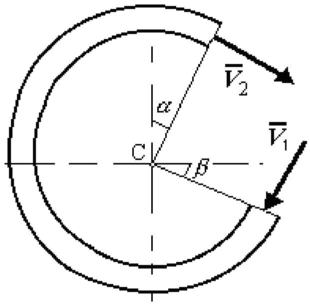


Рисунок Д 10.8

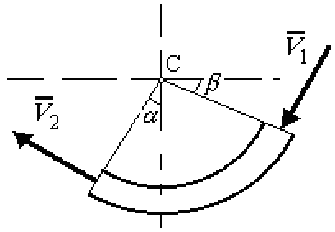


Рисунок Д 10.9

Указания к решению задачи Д10

Задача Д10 – на применение к изучению движения жидкости теоремы об изменении количества движения механической системы. Для определения проекции главного вектора сил добавочных динамических давлений на стенки трубы при установившемся в ней течении жидкости применяется теорема Эйлера. При этом действующие на жидкость внешние силы разделяют на массовые (объемные) силы и поверхностные силы. Теорема Эйлера применяется в проекциях на оси координат.

При решении задачи целесообразно следовать алгоритму, предложенному в примере.

Пример решения задачи Д10

Задача. Струя воды протекает по изогнутому в виде части окружности колену трубы (рисунок 32) со скоростью $V_1 = V_2 = V = 10$ м/с. Дуга окружности опирается на угол $\alpha + \beta$ = = $45^0 + 30^0 = 75^0$. Ось трубы расположена в горизонтальной плоскости. Сечение трубы – круг, диаметр которого d = 10 см.

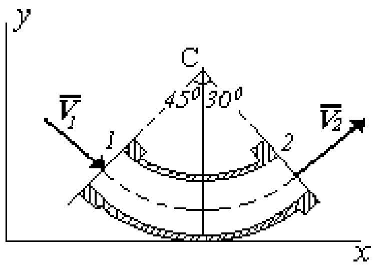


Рисунок 32

Определить проекции главного вектора сил добавочных динамических давлений на стенки трубы (R_x, R_y).

Решение.

1. Изобразим на рисунке объемные и поверхностные силы (рисунок 33).

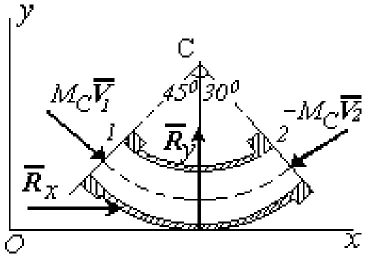


Рисунок 33

Объемной является сила тяжести воды, которая направлена перпендикулярно плоскости Оxy, поэтому на эту плоскость проектируется в ноль и на рисунке не изображена. Поверхностными силами являются реакции стенок трубы на частицы воды, равнодействующую которых представим в виде двух составляющих $\vec{R}_x$ и $\vec{R}_y$.

2. Изобразим на рисунке векторы секундных количеств движения воды $M_C\vec{V}_1$ и $-M_C\vec{V}_2$, протекающие через два сечения *1* и *2*, ограничивающие рассматриваемый объем воды; при этом секундные количества движения необходимо направить внутрь этого объема. Здесь M_C – секундная масса воды, то есть масса воды, протекающей в единицу времени через любое сечение трубы. При заданных условиях она постоянна $M_C = \rho_1 V_1 \sigma_1 = \rho_2 V_2 \sigma_2$, где σ_1 и σ_2 – площади плоских поперечных сечений *1* и *2*; ρ_1 и ρ_2 – плотность воды в сечениях *1* и *2*; V_1 и V_2 – скорости воды в сечениях *1* и *2*.

3. Выберем систему координат.

4. Запишем теорему Эйлера в проекциях на оси декартовых координат

$$R_x + M_C V_{1x} - M_C V_{2x} = 0,$$

$$R_y + M_C V_{1y} - M_C V_{2y} = 0,$$

где $M_C = \rho_1 V_1 \sigma_1 = \rho_2 V_2 \sigma_2$.

5. Определим искомые R_x и R_y.

Из последних уравнений

$$R_x = M_C (V \cos 45^0 - V \cos 60^0) = 0{,}21\, M_C V,$$

$$R_y = M_C (-V \cos 45^0 + V \sin 60^0) = -\,0{,}16\, M_C V.$$

Так как $M_C = \gamma V \sigma / g$, где $\gamma = 1$ *кГ/дм*^{3} – удельный вес воды, $V = 100$ *дм/с*, $\sigma = \pi d^2/4 = 0{,}79$ *дм*^{2}, $g = 98{,}1$ *дм/сек*^{2}, то

$$R_x = 0{,}21\, M_C \cdot 10 = 21 \cdot 0{,}89 = 18{,}7 \text{ кГ}$$

$$R_y = 0{,}16\, M_C V = 6 \cdot 0{,}89 = 5{,}3 \text{ кГ}.$$

О т в е т: $R_x = 18{,}7$ *кГ*; $R_y = 5{,}3$ *кГ*.

<u>Задача Д11</u>

Применение к изучению движения системы принципа Даламбера

Вертикальный вал *АК* (рисунки Д11.0 – Д11.9), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ с$^{-1}$, закреплен подпятником в точке *А* и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в таблице Д11 в столбце 2 ($AB = BД = ДЕ = ЕК = b$). К валу прикреплен жесткоуневесомый стержень *1* длиной $l_1 = 0{,}4$ м с точечной массой $m_1 = 2$ кг на конце и однородный стержень *2*, длиной $l_2 = 0{,}6$ м, имеющий массу $m_2 = 4$ кг; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней у валу указаны в таблице в столбцах 3 и 4, а углы α и β - в столбцах 5 и 6.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При окончательных расчетах принять b = 0,4 м.

Таблица Д11. Данные к задачам Д11.

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление		α, град	φ, град	Номер условия	Подшипник в точке	Крепление		α, град	φ, град
		стержня 1 в точке	стержня 2 в точке					стержня 1 в точке	стержня 2 в точке		
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	*B*	*D*	*K*	30	45	5	*D*	*K*	*B*	30	45
1	*D*	*B*	*E*	45	60	6	*E*	*B*	*K*	45	30
2	*E*	*D*	*B*	60	75	7	*K*	*E*	*B*	60	75
3	*K*	*D*	*E*	75	30	8	*D*	*E*	*K*	75	60
4	*B*	*E*	*D*	90	60	9	*E*	*K*	*D*	90	45

Указания к решению задачи Д11

Задача Д11 – на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня) имеют равнодействующую $\overline{R}^{\text{И}}$, то численно $R^{\text{И}} = ma_{\text{C}}$, где a_{C} – ускорение центра масс C тела, но линия действия силы $\overline{R}^{\text{И}}$ в общем случае не проходит через точку C (см. пример Д11). Шарик 3 считать материальной точкой, сила инерции которой численно определяется по формуле $F^{\text{И}} = m\,a_{3}$.

При решении задачи целесообразно следовать алгоритму, предложенному в примере.

Рисунки к задачам Д11

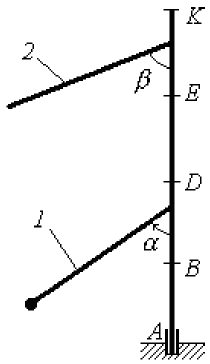


Рисунок Д 11.0

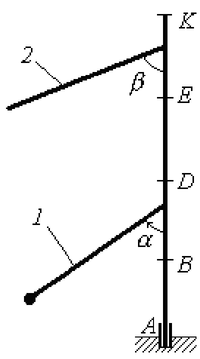


Рисунок Д 11.1

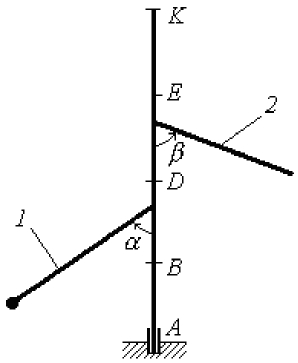


Рисунок Д 11.2

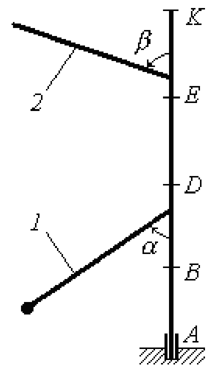


Рисунок Д 11.3

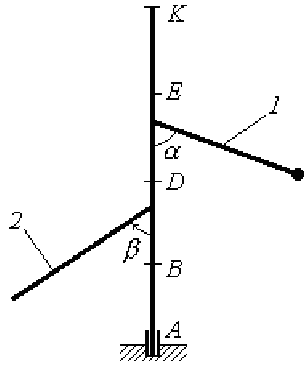


Рисунок Д 11.4

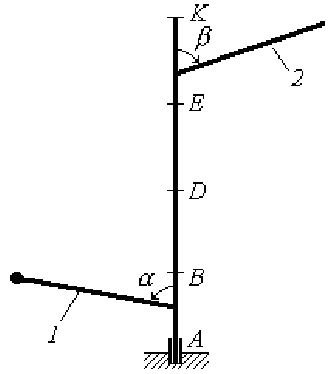


Рисунок Д 11.5

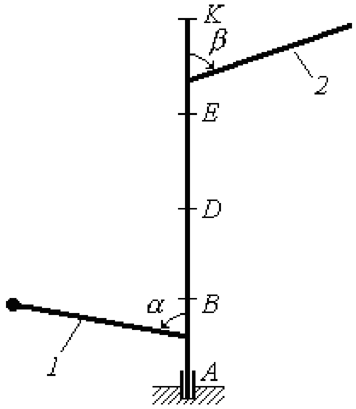


Рисунок Д 11.6

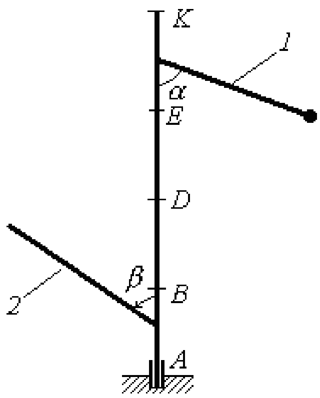


Рисунок Д 11.7

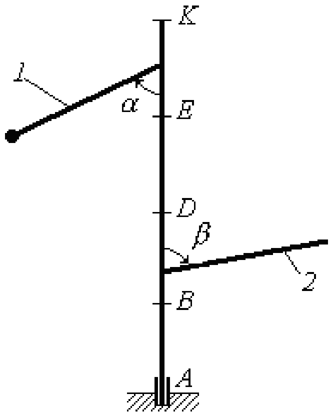


Рисунок Д 11.8

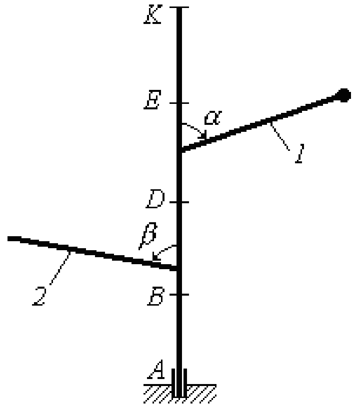


Рисунок Д 11.9

Пример решения задачи Д11

Задача. С невесомым валом AB, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω, жестко скреплен стержень OD длиной l и массой m_1 имеющий на конце груз массой m_2 (рисунок 34) .

Д а н о: b_1 = 0,6 м, b_1 = 0,2 м, $\alpha = 30^0$, l = 0,5 м, m_1 = 3 кг, m_2 = 2 кг, ω = 6 с$^{-1}$.

О п р е д е л и т ь: реакции подпятника A и подшипника B.

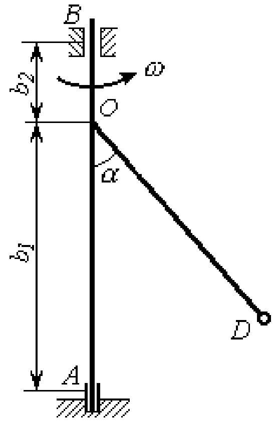


Рисунок 34

Решение.

1. Для определения реакций подпятника A и подшипника B выберем механическую систему, движение которой будем рассматривать.

Выберем систему, состоящую из вала AB, стержня OD и груза.

2. Изобразим действующие на систему внешние силы (рисунок 35): силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, , составляющие $\overline{X}_{\mathrm{A}}$, $\overline{Y}_{\mathrm{A}}$ реакции подпятника и реакцию шарнира $\overline{X}_{\mathrm{B}}$ подшипника.

3. Вычислим силы инерции.

Два тела системы обладают массой стержня OD и груза.

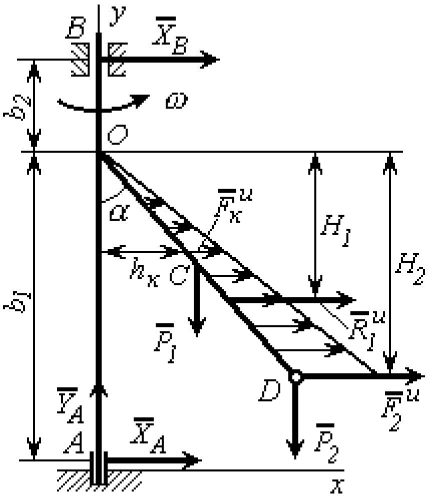


Рисунок 35

3.1. Вычислим силы инерции стержня OD.

Так как вал вращается равномерно (ω = const), то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\vec{a}_{nk}$, направленные к оси вращения и численно равные $a_{nk} = \omega^2 \cdot h_k$, где h_k – расстояние элемента от оси. Тогда силы инерции $\vec{F}_k^{и}$, будут направлены от оси вращения и численно $F_k^{и} = \Delta m a_{nk} = \Delta m\omega^2 h_k$, где Δm – масса элемента. Поскольку все $\vec{F}_k^{и}$ пропорциональны h_k, то эпюра этих параллельных сил образует треугольник и их можно заменить равнодействующей $\vec{R}_1^{и}$, линия действия которой проходит через центр тяжести этого треугольника, то есть на расстоянии H_1 от вершины O, где $H_1 = 2\, H_2/3$ ($H_2 = l\cos\alpha$).

Равнодействующая любой системы параллельных сил равна главному вектору, а численно главный вектору сил инерции стержня $R^{и}{}_1 = m_1\, a_{\mathrm{C}}$, где a_{C} – ускорение центра масс стержня; при этом, как и для любого элемента $a_{\mathrm{C}} = a_{\mathrm{Cn}} = \omega^2 h_C = \omega^2\, OC \sin\alpha$ ($OC = l\,/2$).

В результате получим

$$R^{\text{и}}{}_1 = m_1\, \omega^2\, l \sin\alpha\;\; / \, 2 = 13{,}5 \text{ Н}.$$

3.2. Вычислим силы инерции груза.

Для силы инерции груза $\vec{F}_2^{и}$ аналогично найдем, что она тоже направлена от оси вращения, а численно

$$F^{\text{и}}{}_2 = m_2\, \omega^2\, l \sin\alpha \; = 18 \text{ Н}.$$

4. Применим принцип Даламбера для механической системы.

Согласно принципу, приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия, получим

$$\begin{aligned}
&\sum F_{kx} = 0; && X_A + X_B + R^{и}_1 + F^{и}_2 = 0;\\
&\sum F_{ky} = 0; && Y_A - P_1 - P_2 = 0;\\
&\sum m_D(\overline{F}_k) = 0; && X_A(b_1 + b_2) - P_1 (l/2)\sin\alpha - P_2 \sin\alpha + \\
& && + R^{и}_1 (H_1 + b_2) + F^{и}_3 (H_2 + b_2) = 0
\end{aligned} \qquad (5)$$

Подставив сюда числовые значения всех заданных и вычисленных величин, и решив эту систему уравнений, найдем искомые реакции.

О т в е т: X_A = - 11,8 Н, Y_A = 49,1 Н, X_B = - 19,7 Н.

Знаки указывают, что силы $\overline{X}_A$ и $\overline{X}_B$ направлены противоположно показанным на рисунок 35.

Задача Д12

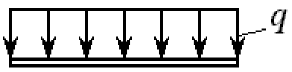
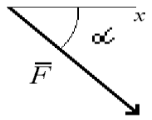
Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции

Балка AB, состоящая из двух частей AC и CB, соединенных между собой в точке C цилиндрическим шарниром находится под действием приложенных сил и связей в равновесии (рисунки Д12.0 – Д12.9, таблица Д12). Размеры указаны на рисунках, где a = 2 м.

На балку действуют: равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 2 кН/м (участок распределения нагрузки указан в столбце 2 таблицы Д12); сосредоточенная наклонная сила F = 6 кН (точка приложения и угол наклона - в столбцах 3,4 таблицы Д12); пара сил с моментом M = 8 кНм (участок приложения и знак момента – в столбцах 5,6 таблицы Д12).

Определить следующие реакции внешних связей, наложенных на составную балку AB: в вариантах с рисунками Д12.0 – Д12.4 реакцию невесомого стержня и вертикальную реакцию неподвижного цилиндрического шарнира; в вариантах с рисунками Д12.5 – Д12.7 реакцию невесомого стержня и вертикальную реакцию в жесткой заделке; в вариантах с рисунками Д12.8 и Д12.9 реакцию шарнирно подвижной опоры и реактивный момент в жесткой заделке.

Таблица Д12. Данные к задачам Д12.

Номер условия	Равномерно распределенная нагрузка  на участке	Сосредоточенная сила 		Угол β, град	Момент M	
		Точка приложения	Угол α, град		Участок приложения	Знак момента
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	*DE*	*К*	60	60	*CB*	–
1	*EC*	*К*	120	30	*CB*	–
2	*CK*	*E*	120	30	*CB*	+
3	*KB*	*E*	150	60	*AC*	+
4	*KB*	*K*	30	30	*AC*	–
5	*AD*	*K*	120	45	*AC*	+
6	*EC*	*К*	60	60	*CB*	+
7	*CK*	*E*	60	45	*AC*	+
8	*АД*	*E*	150	60	*CB*	–
9	*DE*	*К*	135	45	*AC*	+

Рисунки к задачам Д12

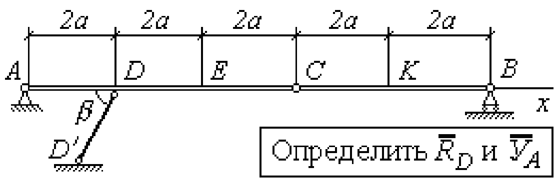


Рисунок Д 12.0

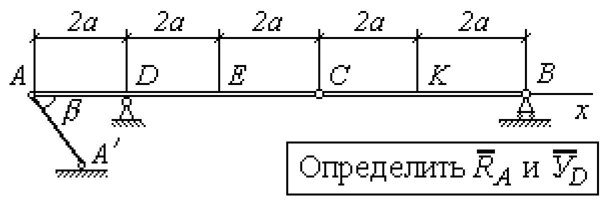


Рисунок Д 12.1

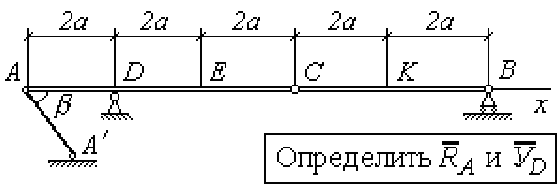


Рисунок Д 12.2

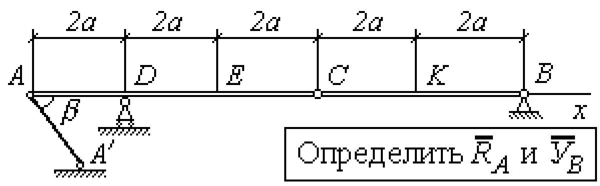


Рисунок Д 12.3

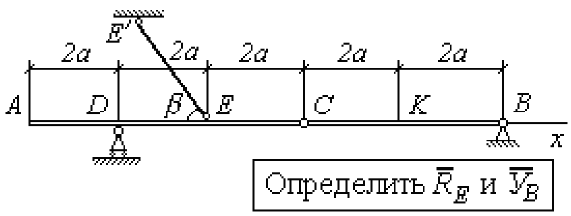


Рисунок Д 12.4

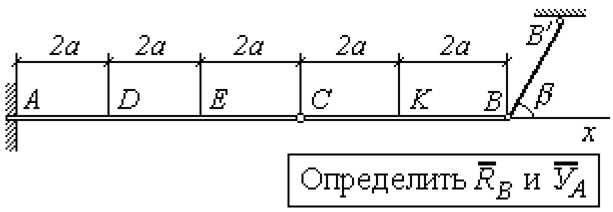


Рисунок Д 12.5

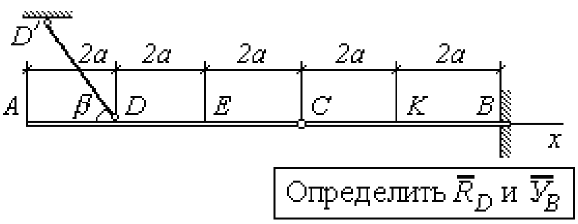


Рисунок Д 12.6

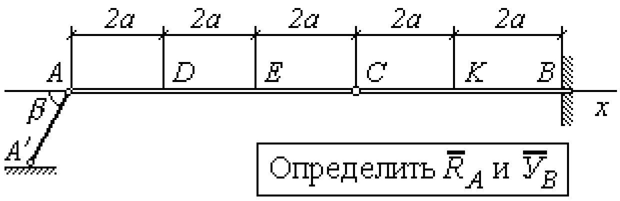


Рисунок Д 12.7

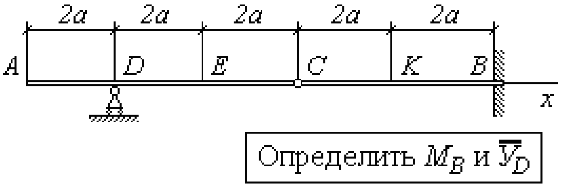


Рисунок Д 12.8

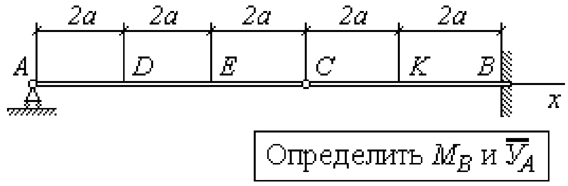
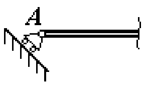
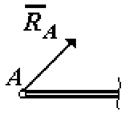
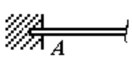
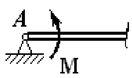
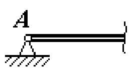
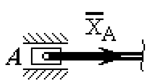
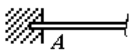
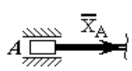
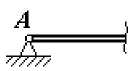
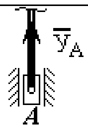
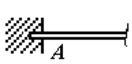
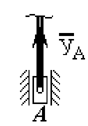
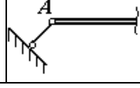
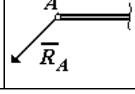


Рисунок Д 12.9

Указания к решению задачи Д12

Задача Д12 – на определение реакций опор с помощью принципа возможных перемещений. Для того, чтобы балка стала механизмом с одной степенью свободы, необходимо заменить внешние связи ее реакциями. Однако замена должна осуществляться таким образом, чтобы присутствовала только одна реакция связи. Например, шарнирно подвижную опору необходимо заменить одной реакцией. Но шарнирно неподвижную опору следует поменять на шарнирно подвижную опору и одну реакцию и т.д. Возможные варианты замен представлены в таблице 1.

Таблица 1. Виды замен связей их реакциями.

Цель замены	Вид связи		Цель замены	Вид связи	
	до замены	после замены		до замены	после замены
1. Определение реакции шарнирно подвижной опоры			4. Определение реактивного момента в жесткой заделки		
2. Определение горизонтальной реакции неподвижного шарнира			5. Определение горизонтальной реакции в жесткой заделки		
3. Определение вертикальной реакции неподвижного шарнира			6. Определение вертикальной реакции в жесткой заделки		
			7. Определение реакции невесомого стержня		

Далее, для определения соответствующей реакции, необходимо сообщить полученному механизму возможное перемещение (начинать целесообразно с той части балки, на которую наложено большее число связей или более жесткие связи); вычислить сумму элементарных работ всех действующих активных сил и пар (включая соответствующую реакцию или реактивный момент) на этом перемещении (возможную работу) и прировнять ее к нулю, то есть $\sum \delta A_k = 0$. Все вошедшие в составленное уравнение возможные перемещения следует выразить через какое-нибудь одно.

Пример решения задачи Д12

Задача.

На составную балку AB (рисунок 36) действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 2кН/м, наклонная сила F = 4 кН и пара сил с моментом M =5 кНм. На балку наложены связи: в точке B – жесткая заделка, в точке E – невесомый стержень EE'. Угол $\beta = 60^0$, a = 2 м.

Определить: R_E, X_B, Y_B, M_B.

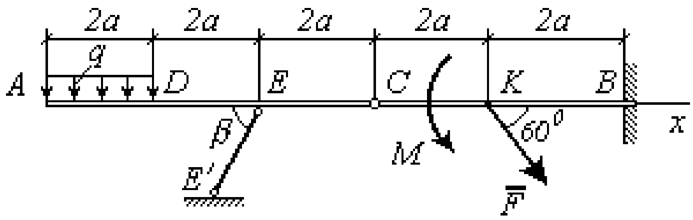


Рисунок 36

Решение

I. Определим реакцию невесомого стержня EE'.

1. Заменим невесомый стержень EE' его реакцией $\vec{R}_E$ (рисунок 39, случай 7 из таблицы 1 Указаний к Задаче Д12).

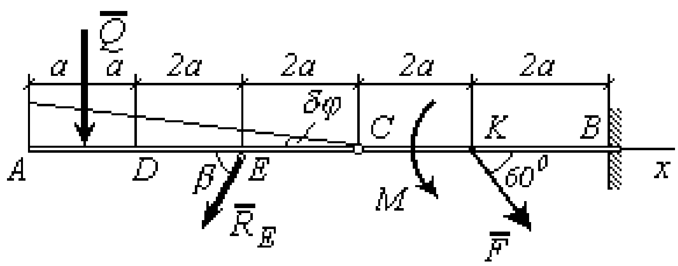


Рисунок 37

2. Сообщим балке AB возможное перемещение. Правая часть балки не может перемещаться, так как в точке B жесткая заделка. То есть не может перемещаться точка C. Мысленно повернем часть балки AC вокруг неподвижной точки C по ходу часовой стрелки на угол $\delta\varphi$.

3. Составим сумму возможных работ всех сил и пар сил, действующих на балку, и приравняем ее к нулю исходя из принципа возможных перемещений.

Для этого воспользуемся формулой вычисления элементарной работы силы, приложенной к вращающемуся телу

$$\delta A_{\text{вр}} = M_z(\overline{F})\,\delta\varphi,$$

где z – ось вращения, $\delta\varphi$ – элементарный угол поворота вокруг этой оси, $M_z(\overline{F})$ – момент силы относительно оси вращения.

Тогда уравнение возможных работ запишется в виде

$$\Sigma\delta A_k = R_E \cdot \cos 30^0 \cdot 2\,a \cdot \delta\varphi - Q \cdot 5\,a \cdot \delta\varphi = 0, \qquad (1)$$

где δA_k – элементарные работы действующих сил на возможном угловом перемещении $\delta\varphi$, а $Q = q \cdot 2a = 8$ кН. Элементарные работы момента M и силы $\vec{F}$ будут равны нулю, так как эти нагрузки приложены к неподвижной части балки BC.

Поделив уравнение (1) на $\delta\varphi \neq 0$ и на a, получим

$$R_E \cos 30^0 \cdot 2 - Q \cdot 5 = 0. \qquad (2)$$

Из выражения (2) находим $R_E = Q \cdot 5 / \sqrt{3} = 23{,}1$ (кН).

II. Определим реактивный момент M_B в жесткой заделке B.

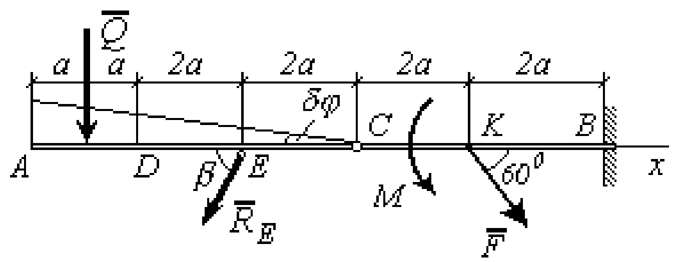


Рисунок 38

1. Заменим жесткую заделку неподвижным шарниром и неизвестным реактивным моментом M_B (рисунок 38, случай 4 из таблицы 1 Указаний к Задаче Д12).

2. Сообщим балке возможное перемещение.

Неподвижная шарнирная опора, наложенная на часть балки CB в точке B, допускает только поворот вокруг точки B, поэтому мысленно повернем CB вокруг точки B на бесконечно малое возможное угловое перемещение $\delta\varphi_1$. Другая часть балки AC может совершать плоскопараллельное движение. Построим для CA мгновенный центр скоростей. Восстанавливая перпендикуляры к возможным перемещениям точек C и E (они направлены так же как и соответствующие скорости точек), видим, что мгновенный центр скоростей части балки CA находится в точке E. Следовательно, при повороте BC вокруг точки B, часть балки CA повернется вокруг точке E на угол $\delta\varphi_2$.

3. Составим уравнение возможных работ.

Для этого вновь воспользуемся формулой вычисления элементарной работы силы, приложенной к вращающемуся телу

$$\delta A_{\text{вр}} = M_z(\overline{F})\cdot \delta\varphi,$$

где

z – ось вращения,

$\delta\varphi$ – элементарный угол поворота вокруг этой оси,

$M_z(\overline{F})$ – момент силы относительно оси вращения.

Тогда уравнение возможных работ запишется в виде

$$\Sigma\delta A_k = -M\,\delta\varphi_1 - M_B\,\delta\varphi_1 - F\cos(30^0)\,2a\cdot\delta\varphi_1 + Q\cdot 3a\cdot\delta\varphi_2 = 0. \qquad (3)$$

4. Установим связь между возможными перемещениями $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$.

Принимая в силу малости возможных перемещений δs_c за дугу окружности, которая с одной стороны опирается на угол $\delta\varphi_1$, а с другой – на угол $\delta\varphi_2$, на основании известной из геометрии формулы, получим

$$\delta s_c = 4a\cdot\delta\varphi_1 \quad \text{и} \quad \delta s_c = 2a\cdot\delta\varphi_2.$$

Откуда $4a\cdot\delta\varphi_1 = 2a\cdot\delta\varphi_2$ или $\delta\varphi_2 = 2\cdot\delta\varphi_1$.

Примечание. Связь между угловыми перемещениями можно получить, используя соотношения из кинематики: $V_C = \omega_1\cdot 2a = \omega_2\cdot 4a$. Заменяя здесь угловые скорости выражениями $\omega_1 = d\varphi_1/dt$, $\omega_2 = d\varphi_2/dt$, получим $d\varphi_2 = 2\cdot d\varphi_1$. Или для возможных перемещений $\delta\varphi_2 = 2\cdot\delta\varphi_1$.

5. Определим искомую реакцию.

Заменяя в выражении (3) $\delta\varphi_2$ на $\delta\varphi_1$ и поделив это уравнение на $\delta\varphi_1 \neq 0$, получим

$$-M - M_B - F\cos(30^0)\,2a + Q\cdot 6a = 0.$$

Откуда найдем

$$M_B = Q\cdot 6a - M - F\cos(30^0)\,2a = 77{,}2\ \text{кН}.$$

III. Определим горизонтальную реакцию X_B в заделке B.

1. Заменим жесткую заделку B горизонтальной скользящей заделкой и горизонтальной реакцией $\vec{X}_B$ (рисунок 39, случай 5 из таблицы 1 Указаний к Задаче Д12).

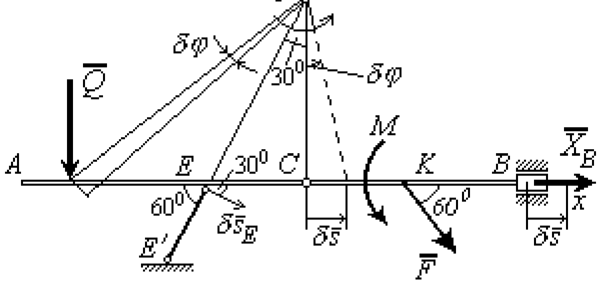


Рисунок 39

2. Сообщим системе возможное перемещение.

Скользящая заделка допускает только горизонтальное перемещение. Поэтому мысленно переместим часть балки CB поступательно вправо (можно переместить и влево) на величину $\delta s_C = \delta s_B = \delta s$. Тогда часть балки AC будет совершать плоско параллельное движение. То есть в данный момент времени будет происходить мгновенный поворот вокруг мгновенного центра скоростей P на угол $\delta\varphi$.

3. Составим уравнение возможных работ.

$$\Sigma\delta A_k = X_B \cdot \delta s + F\cos(60^0)\cdot \delta s + Q \cdot 5a\cdot \delta\varphi = 0. \qquad (4)$$

4. Установим связь между возможными перемещениями $\delta\varphi$ и δs.

По аналогии с процедурой из пункта III найдем

$$\delta s = CP\cdot \delta\varphi = EC \cdot \mathrm{ctg}30^0\cdot \delta\varphi.$$

Откуда

$$\delta\varphi = \delta s\cdot \mathrm{tg}30^0/2a = \sqrt{3}/4\cdot \delta s = 0{,}43\,\delta s.$$

5. Определим искомую реакцию.

Заменяя в выражении (4) $\delta\varphi$ на δs и поделив это уравнение на $\delta s \neq 0$, получим

$$\Sigma\delta A_k = X_B + F\cos(60^0) + Q \cdot 5a \cdot 0{,}43 = 0. \qquad (4)$$

Примечание. Работа момента M при поступательном движении равна 0, так как у части балки BC угловое перемещение равно нулю.

Откуда

$$X_B = -F/2 - Q \cdot 4{,}3 = -37{,}4 \text{ кН}.$$

Знак «–» указывает на то, что реакция X_B направлена в сторону, противоположную изображенной на рисунке 39.

IV. Определим вертикальную реакцию Y_B в заделке B.

1. Заменим жесткую заделку B вертикальной скользящей заделкой и вертикальной реакцией $\vec{Y}_B$ (рисунок 40, случай 6 из таблицы 1 Указаний к Задаче Д12).

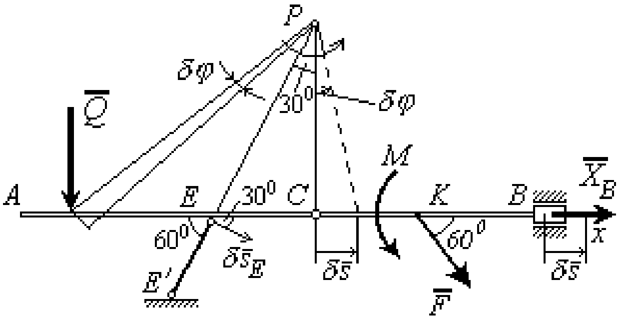


Рисунок 40

2. Сообщим системе возможное перемещение.

Скользящая заделка допускает только вертикальное поступательное перемещение. Поэтому мысленно переместим часть балки CB поступательно вверх (можно переместить и вниз) на величину $\delta s_{\mathrm{C}} = \delta s_{\mathrm{B}} = \delta s$. Тогда часть балки AC будет совершать плоско параллельное движение. То есть в данный момент времени будет происходить мгновенный поворот вокруг мгновенного центра скоростей P (в данном случае м.ц.с. совпадает с точкой E) на угол $\delta\varphi$.

3. Составим уравнение возможных работ

$$\Sigma\delta A_{\mathrm{k}} = У_{\mathrm{B}} \cdot \delta s - F\cos(30^0)\cdot \delta s + Q \cdot 3a \cdot \delta\varphi = 0. \tag{5}$$

4. Установим связь между возможными перемещениями $\delta\varphi$ и δs.

По аналогии с процедурой из пункта III найдем $\delta s = 2a \cdot \delta\varphi$. Откуда

$$\delta\varphi = \delta s\,/\,(2a).$$

5. Определим искомую реакцию.

Заменяя в выражении (4) $\delta\varphi$ на δs и поделив это уравнение на $\delta s \neq 0$, получим

$$\Sigma\delta A_{\mathrm{k}} = У_{\mathrm{B}} - F\cos(30^0) + Q \cdot 3a\,/\,(2a) = 0.$$

Откуда

$$У_{\mathrm{B}} = F\sqrt{3}/2 - Q \cdot 1{,}5 = -6{,}8 \text{ кН}.$$

Знак « – » указывает на то, что реакция $У_{\mathrm{B}}$ направлена в сторону, противоположную изображенной на рисунке 40.

Задача Д13 (Д7)

Определение условий равновесия механической системы с помощью принципа возможных перемещений

Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится под действием приложенных сил в равновесии; положение равновесия определятся углами α, β, γ (рисунки Д13.0 –Д13.9, таблица Д13). Длины стержней механизма (кривошипов) равны $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 0{,}6$ м (в механизмах на рисунках Д13.5 –Д13.9), размер l_3 произвольный. На механизмы, изображенные на рисунках Д13.0 –Д13.4, на ползун B действует сила Q, а на кривошип OA – пара сил с моментом M. На механизмы, изображенные на рисунках Д13.5 – Д13.9, на кривошипы O_1A и O_2B – соответственно пары сил с моментами M_1 и M_2.

Определить, чему равна величина, указанная в графе 7 таблицы Д13 (для рисунков Д13.0 –Д13.4) или величина, указанная в графе 10 таблицы Д13 (для рисунков Д13.5 –Д13.9), где Q выражено в Н, а M, M_1 и M_2 – в Нм.

Построение чертежа начинать со стержня (кривошипа), положение которого определяется углом α.

Таблица Д13. Данные к задачам Д13.

Номер условия	Углы, град			Для рисунков 0 – 4			Для рисунков 5 – 9		
				Дано		Найти	Дано		Найти
	α	β	γ	M	Q		M_1	M_2	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	90	120	90	100	–	Q	120	–	M_2
1	45	90	30	120	–	Q	140	–	M_2
2	30	135	120	–	360	M	–	420	M_1
3	0	45	90	160	–	Q	180	–	M_2
4	60	120	45	–	320	M	–	380	M_1
5	0	135	60	–	300	M	–	360	M_1
6	0	135	90	220	–	Q	240	–	M_2
7	90	90	135	–	260	M	–	320	M_1
8	60	45	90	–	240	M	–	300	M_1
9	120	30	45	280	–	Q	300	–	M_2

Рисунки к задачам Д13

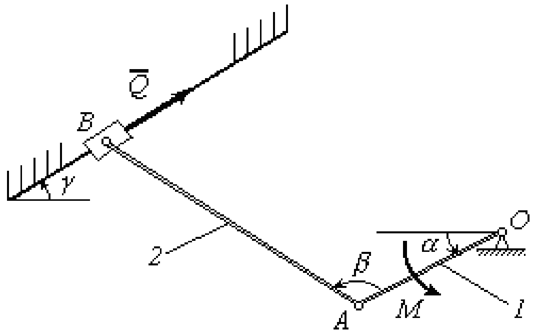


Рисунок Д 13.0

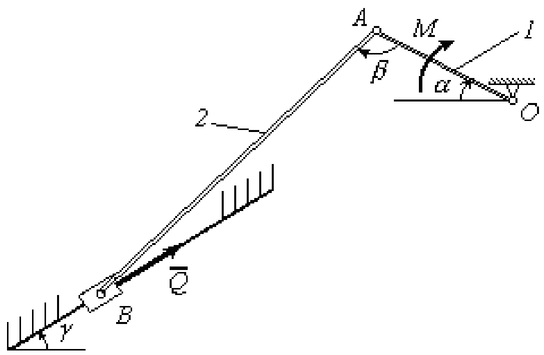


Рисунок Д 13.1

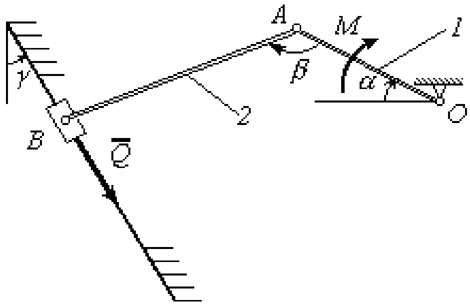


Рисунок Д 13.2

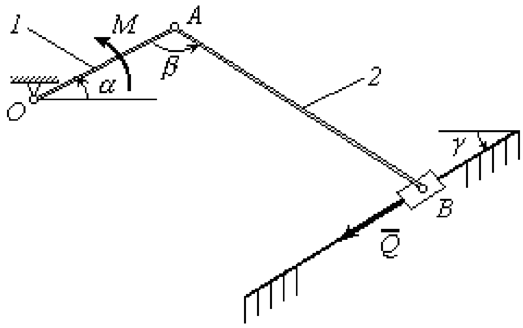


Рисунок Д 13.3

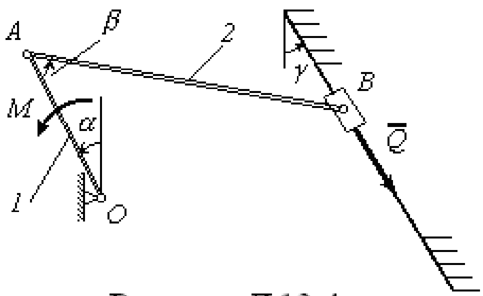


Рисунок Д 13.4

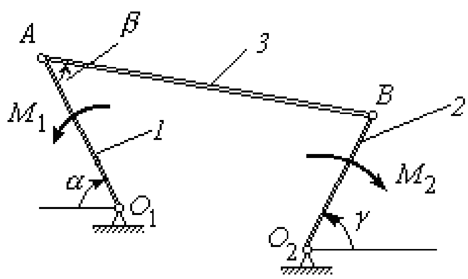
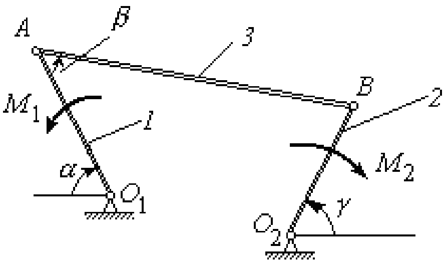
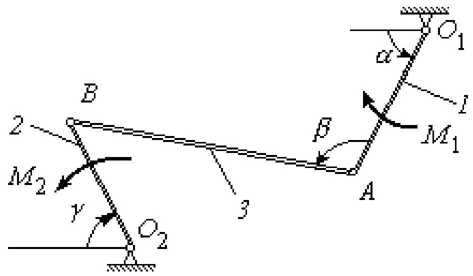
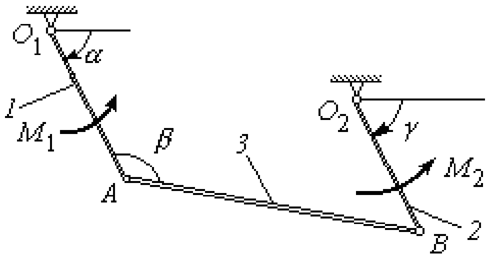
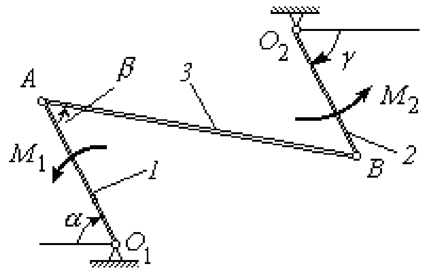


Рисунок Д 13.5

 Рисунок Д 13.6	 Рисунок Д 13.7
 Рисунок Д 13.8	 Рисунок Д 13.9

Указания к решению задачи Д13

Задача Д13 – на определение условий равновесия механической системы с помощью принципа возможных перемещений. Механизм в рассматриваемой задаче имеет одну степень свободы, то есть одно независимое возможное перемещение. Для решения задачи нужно сообщить механизму возможное перемещение, вычислить сумму элементарных работ всех действующих активных сил и пар на этом перемещении (возможную работу) и приравнять их к нулю. Все вошедшие в составленное уравнение возможные перемещения следует выразить через какое-нибудь одно.

Пример решения задачи Д13

Задача. Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится под действием приложенных силы Q и двух пар сил с моментами M_1 и M_2 в равновесии; положение равновесия определятся углами α, β, γ и φ (рисунок 41). Длины стержней механизма (кривошипов) равны l_1 = 0,4м, l_2 =0,6 м, размер l_3 произвольный. Точка B находится на середине стержня 3.

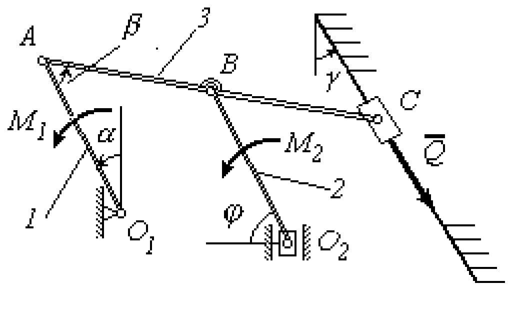


Рисунок 41

Д а н о: M_1 = 180 Нм, Q = 340 Н, $\alpha = 0^0$, $\beta = 120^0$, $\gamma = 0^0$, $\varphi = 30^0$.

О п р е д е л и т ь: M_2.

Решение:

1. Изобразим механизм в положении, определяемом заданными углами α, β, γ и φ (рисунок 42).

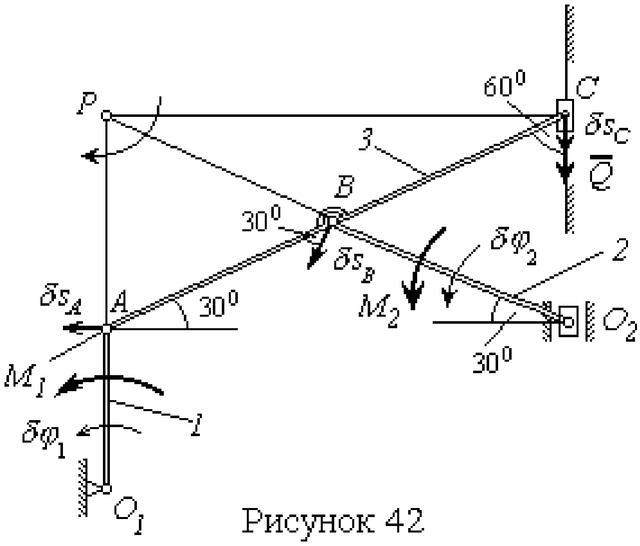


Рисунок 42

2. Приложим к механизму активные силы: заданную силу Q и пары сил с моментами M_1 и M_2.

3. Сообщим механизму возможное перемещение.

Кривошип O_1A может совершать вращательное движение вокруг оси O_1, поэтому мысленно повернем его вокруг этой оси на возможное угловое перемещение $\delta\varphi_1$. Тогда звено AC совершит плоскопараллельное движение, то есть поворот вокруг мгновенного центра скоростей – точки P. При этом точка B получит линейное возможное перемещение δs_B, которое будет направлено перпендикулярно прямой PB в сторону поворота звена AC вокруг мгновенного центра скоростей. Возможное перемещение точки C - δs_C будет направлено вниз по той же причине.

Звено (кривошип) O_2B может только вращаться вокруг оси O_2, поэтому получит возможное угловое перемещение $\delta\varphi_2$ (направление перемещения определяется направлением перемещения δs_B).

4. Составим сумму возможных работ силы Q и пар сил, действующих на механизм, и приравняем ее к нулю, исходя из принципа возможных перемещений

$$\Sigma\delta A_k = M_1\,\delta\varphi_1 + M_2\,\delta\varphi_2 + Q\,\delta s_C = 0, \tag{1}$$

где δA_k – элементарные работы активных сил на соответствующих возможных перемещениях.

При составлении уравнения (1), для вычисления работы моментов M_1 и M_2, воспользуемся формулой вычисления элементарной работы силы, приложенной к вращающемуся телу

$$\delta A_{\text{вр}} = M_z(\overline{F})\,\delta\varphi,$$

где

z – ось вращения,

$\delta\varphi$ – элементарный угол поворота вокруг этой оси,

$M_z(\overline{F})$ – момент силы относительно оси вращения.

5. Выразим все возможные перемещения, входящие в уравнение (1) через одно перемещение.

Механизм, изображенный на рисунке 44, имеет одну степень свободы, следовательно, из возможных перемещений, входящих в уравнение (1), только одно является независимым, то есть $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, δs_A, δs_B, δs_C можно выразить через одно перемещение, например, через $\delta\varphi_1$.

Для этого на основании известной из геометрии формулы запишем

$$\delta s_A = l_1\delta\varphi_1. \qquad (2)$$

По теореме о равенстве проекций скоростей двух точек плоской фигуры найдем возможное перемещение точки B – δs_B (зависимость между возможными перемещениями здесь такая же, как между соответствующими скоростями механизма).

Исходя из теоремы, приравнивая проекции перемещений δs_A и δs_B на прямую AB, получим

$$\delta s_A \cos(30^0) = \delta s_B \cos(30^0) \quad \text{или} \quad \delta s_A = \delta s_B. \qquad (3)$$

По аналогии с выражением (2) возможное перемещение δs_B можно представить в виде

$$\delta s_B = l_2\delta\varphi_2. \qquad (4)$$

Тогда из формулы (4) с учетом выражений (2) и (3) получим

$$l_1\delta\varphi_1 = l_2\delta\varphi_2 \quad \text{или} \quad \delta\varphi_2 = l_1\delta\varphi_1/\,l_2. \qquad (5)$$

Найдем зависимость между δs_A и δs_C, используя теорему о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры,

$$\delta s_A \cos(30^0) = \delta s_C \cos(60^0) \quad \text{или} \quad \delta s_C = \delta s_A \cos(30^0)/\cos(60^0). \qquad (6)$$

Выражение (6) с учетом формулы (2) примет вид

$$\delta s_C = l_1\delta\varphi_1 \cos(30^0)/\cos(60^0). \qquad (7)$$

Подставляя в уравнение возможных работ (1) выражения (5) и (7), получим

$$M_1\,\delta\varphi_1 + M_2\,l_1\delta\varphi_1/\,l_2 + Q\,l_1\delta\varphi_1 \cos(30^0)/\cos(60^0) = 0. \qquad (8)$$

Поделив уравнение (8) на $\delta\varphi_1 \neq 0$, найдем

$$M_1 + M_2\,l_1/\,l_2 + Q\,l_1 \cos(30^0)/\cos(60^0) = 0,$$

откуда

$$M_2 = -\,(M_1 + Q\,l_1 \cos(30^0)/\cos(60^0))\,l_2/\,l_1 = -\,358{,}3 \text{ (Н м)}.$$

Знак минус указывает на то, что момент M_2 направлен по часовой стрелке.

О т в е т: $M_2 = -\,358{,}3$ Н м.

Задача Д14 (Д8)

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы

Для заданной механической системы определить ускорения грузов *1, 4* и натяжения в ветвях нитей, к которым прикреплены грузы (рисунки Д14.0 – Д14.9, таблица Д14). Массами нитей пренебречь. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Система движется из состояния покоя. В вариантах с рисунками Д14.0 – Д14.4 коэффициент трения скольжения f тела *4* о поверхность, в вариантах с рисунками Д14.5 – Д14.9 – тела *2* или *3* о выступ рычага.

Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Грузы, веса которых равны нулю, на чертеже всегда изображать как части системы.

Таблица Д14. Данные к задачам Д14

Номер условия	G_1	G_2	G_3	G_4	α, град	β, град	R/r	i_{3x}	f
0	G	0	$3G$	G	15	30	2	$r\sqrt{2}$	0,1
1	G	$2G$	$3G$	G	30	15	3	$1{,}2\,r$	0,15
2	G	G	$2G$	G	45	30	1,5	$r\sqrt{2}$	0,2
3	$2G$	$2G$	$3G$	$2G$	15	45	2	$2\,r$	0,1
4	G	0	$3G$	$2G$	45	15	3	$r\sqrt{2}$	0,2
5	$2G$	$2G$	$3G$	G	90	60	2	$2\,r$	0,25
6	G	0	G	G	15	60	1,5	$2\,r$	0,15
7	$1{,}5G$	G	$3G$	$0{,}4G$	90	30	3	$r\sqrt{2}$	0,2
8	$3G$	0	$4G$	$0{,}5G$	45	60	1,5	$2\,r$	0,25
9	$2G$	0	$4G$	$0{,}8G$	90	15	3	$1{,}2\,r$	0,2

Рисунки к задачам Д14

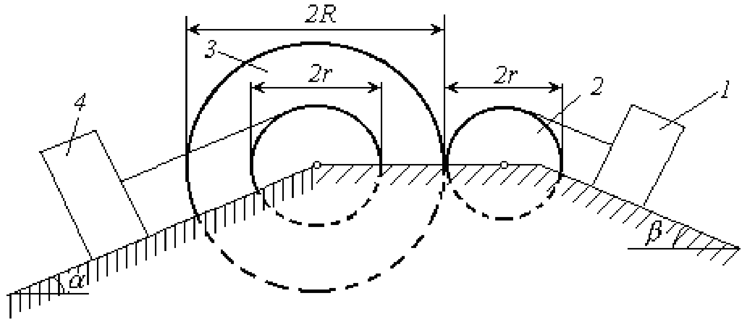


Рисунок Д14.0

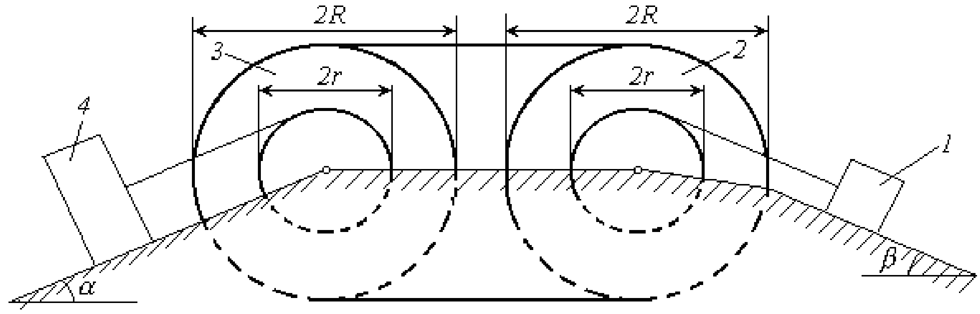


Рисунок Д14.1

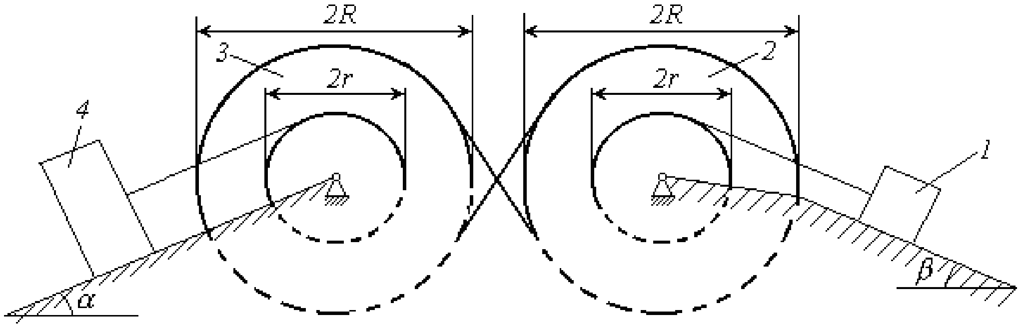


Рисунок Д14.2

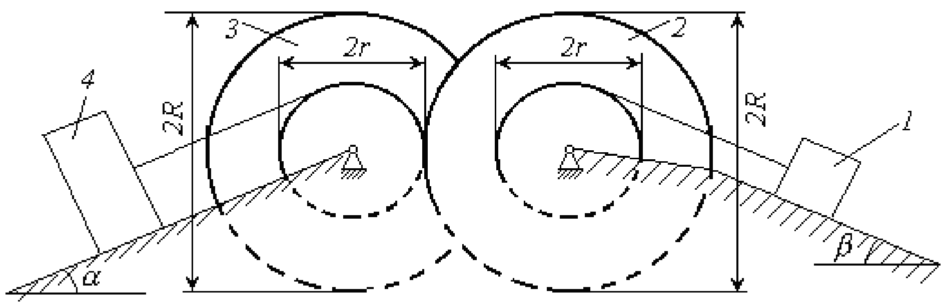


Рисунок Д14.3

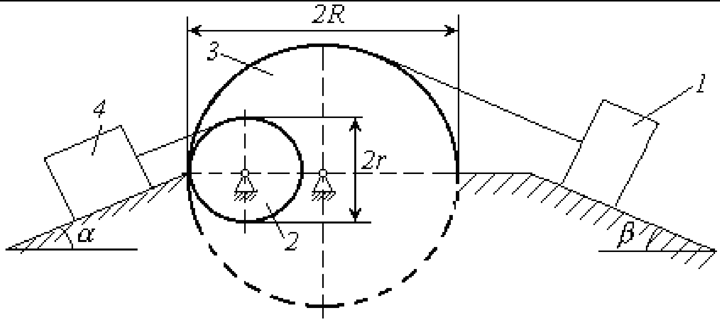


Рисунок Д14.4

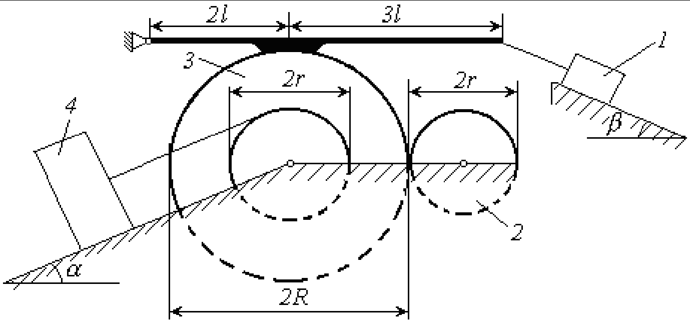


Рисунок Д14.5

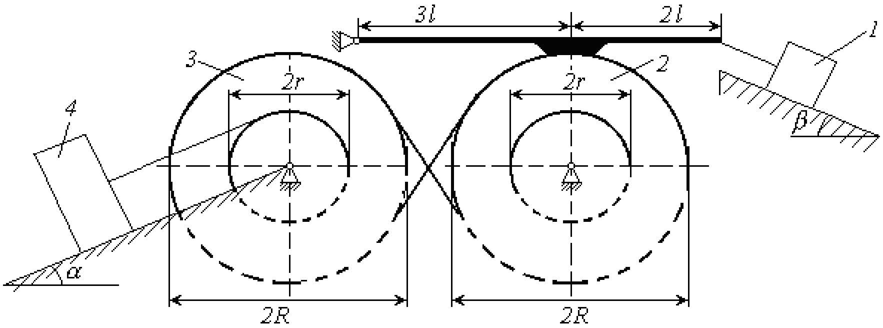


Рисунок Д14.6

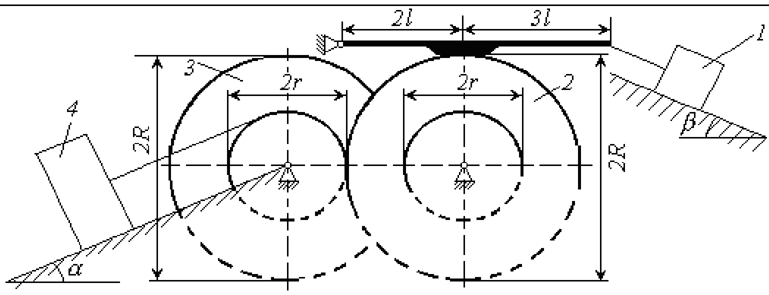


Рисунок Д14.7

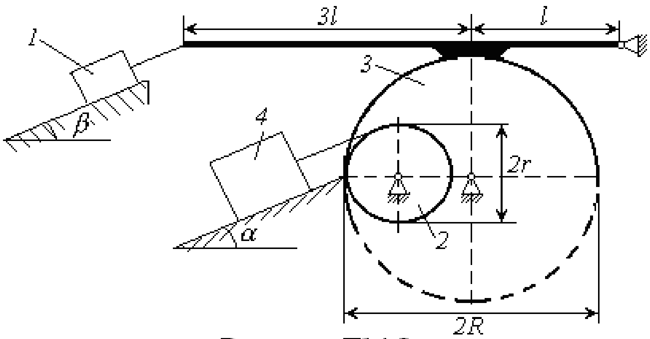


Рисунок Д14.8

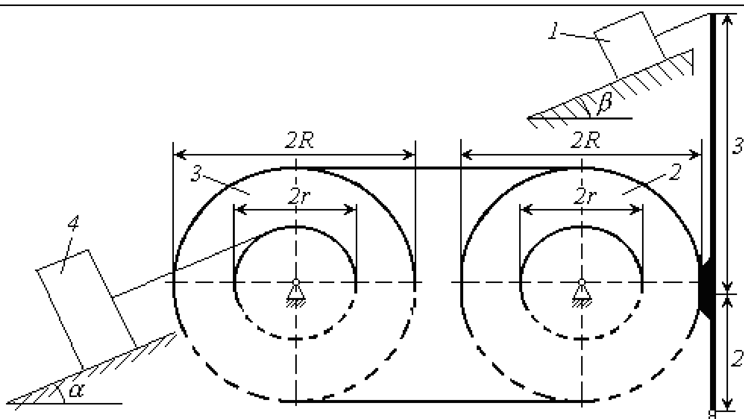


Рисунок Д14.9

Указания к решению задачи Д14

Задача Д14 – на применение к изучению движения системы общего уравнения динамики (принципа Даламбера – Лагранжа). Ход решения задачи такой же, как в задачах Д12 – Д13, только предварительно надо присоединить к действующим на систему силам соответствующие силы инерции. Учесть при этом, что для однородного тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии (шкива), система сил инерции приводится к паре с моментом $M^{и} = I_z\,\varepsilon$, где I_z – момент инерции относительно оси вращения, ε – угловое ускорение тела; направление $M^{и}$ противоположно направлению ε.

При решении задачи целесообразно следовать алгоритму, предложенному в примере.

Пример решения задачи Д14

Задача. Механическая система (рисунок 43) состоит из обмотанных нитями ступенчатых шкивов *1* и *2* (радиусы ступеней R и r, радиуса инерции шкива *3* относительно оси вращения ρ_3), а также из грузов *4* и *5*, прикрепленных к этим нитям.

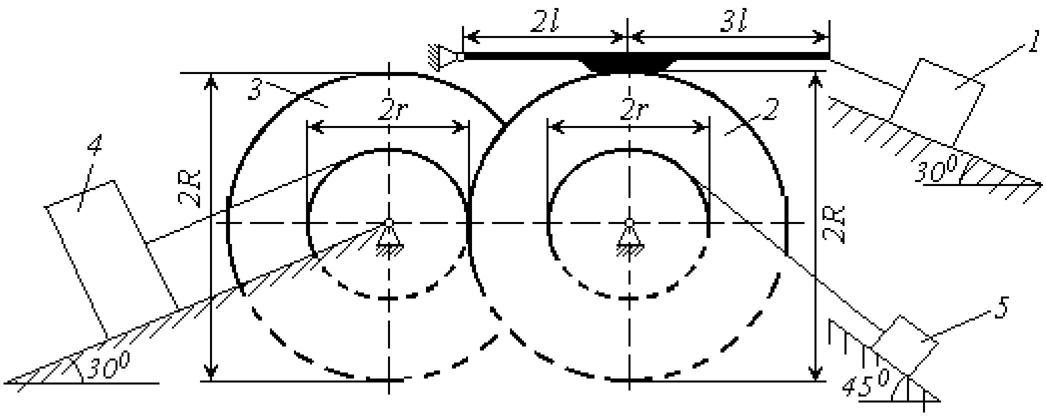


Рисунок 43

Груз *5* движется по шероховатой наклонной плоскости (коэффициент трения скольжения f). Движение шкива *3* тормозится рычагом, который нагружен грузом *1*, перемещающимся по гладкой наклонной плоскости. Коэффициент трения скольжения выступа рычага о шкив 1 – f.

Д а н о: $G_1 = G$, $G_2 = 3G$, $G_3 = 4G$, $G_4 = 2G$, $G_5 = G$, $R = 0{,}2$ м, $r = 0{,}15$ м, $\rho_3 = 0{,}2$ м, $f = 0{,}1$.

О п р е д е л и т ь: ускорение грузов *4* и *5*, а также силы натяжения нитей, к которым прикреплены грузы *1* и *5*.

Решение.

I. Определим ускорения грузов *4* и *5*.

1. Выберем механическую систему, движение которой будем рассматривать.

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел *2*, *3*, *4*, *5* соединенных нитями. Система имеет одну степень свободы.

2. Для определения ускорения a_4 применим общее уравнение динамики.

$$\Sigma\delta A_k^{\text{а}} + \Sigma\delta A_k^{\text{и}} = 0, \qquad (1)$$

где $\Sigma\delta A_k^{\text{а}}$ – сумма элементарных работ активных сил; $\Sigma\delta A_k^{\text{и}}$ – сумма элементарных работ сил инерции.

3. Изображаем на чертеже (рисунок 44) активные силы: силы тяжести - $\vec{G}_2, \vec{G}_3, \vec{G}_4, \vec{G}_5$; силы трения $\vec{F}_{TP}^{2}$, $\vec{F}_{TP}^{5}$ (будем относить силы трения к активным силам). Направление сил трения установим, исходя из предположения, что тело *4* опускается вниз по наклонной плоскости.

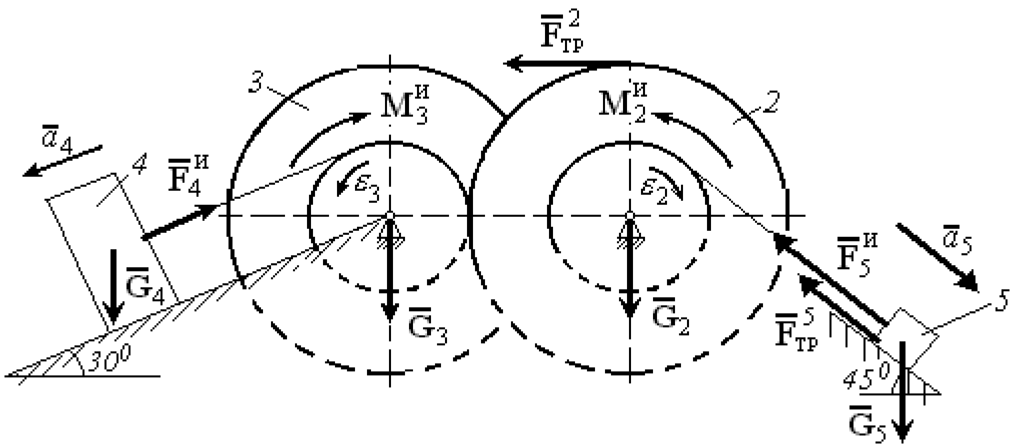


Рисунок 44

4. Определим силы трения.

4.1. Модуль силы трения (рисунок 45)

$$F_{\text{ТР}}^{5} = f \cdot N_5 = f \cdot G_5 \cos 45^0 = f \cdot G \cos 45^0$$

(Модуль реакции N_5 (рисунок 45) найден из условия равновесия сил, приложенных к телу *5* в направлении оси *y*: $\sum F_{ky} = 0$).

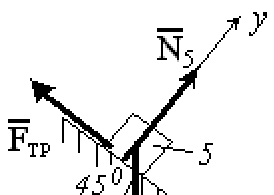


Рисунок 45

4.2. Модуль силы трения $F_{\text{ТР}}^{2} = f N_2 = 5f\, G/8$.

Модуль реакции N_2 (рисунок 46) найден из одного из условий равновесия сил, приложенных к рычагу

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = N_2 \cdot 2\,l - 5l \cdot T_1^{\prime} \cos 60^0 = 0,$$

где $T_1^{\prime} = T_1 = G \cos 60^0 = G/2$.

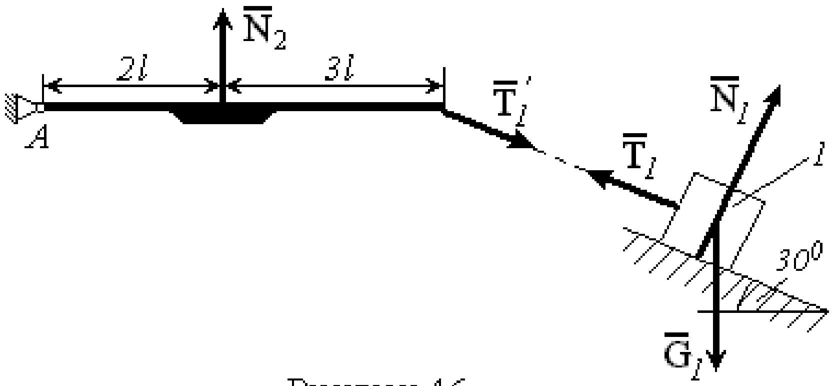


Рисунок 46

5. Приложим к выбранной механической системе силы инерции.

Задавшись направлением $\vec{a}_4$ (считая его совпадающим с выбранным направлением перемещения груза *4*) изображаем силы инерции (рисунок 47) $\vec{F}_4^{\,И}$, $\vec{F}_5^{\,И}$ и пары сил инерции с моментом $M^И{}_2$, $M^И{}_3$ величины которых равны

$$F^И{}_4 = \frac{G_4}{g} a_4 = \frac{2G}{g} a_4; \qquad F^И{}_5 = \frac{G_5}{g} a_5 = \frac{G}{g} a_5; \tag{2}$$

$$M^И{}_2 = I_{Z2} \cdot \varepsilon_2; \qquad M^И{}_3 = I_{Z3} \cdot \varepsilon_3.$$

6. Сообщим системе возможное перемещение.

Связи, наложенные на груз *4*, допускают его возможное перемещение вверх или вниз по наклонной плоскости (рисунок 47). Можно выбрать любое из этих возможных перемещений. Для определенности примем возможным перемещением груза *4* δs_4 направленным вниз по наклонной плоскости. Тогда шкив *3* повернется на угол $\delta\varphi_3$, шкив *2* – на угол $\delta\varphi_2$, а груз *5* – опустится вниз по наклонной плоскости на величину δs_5.

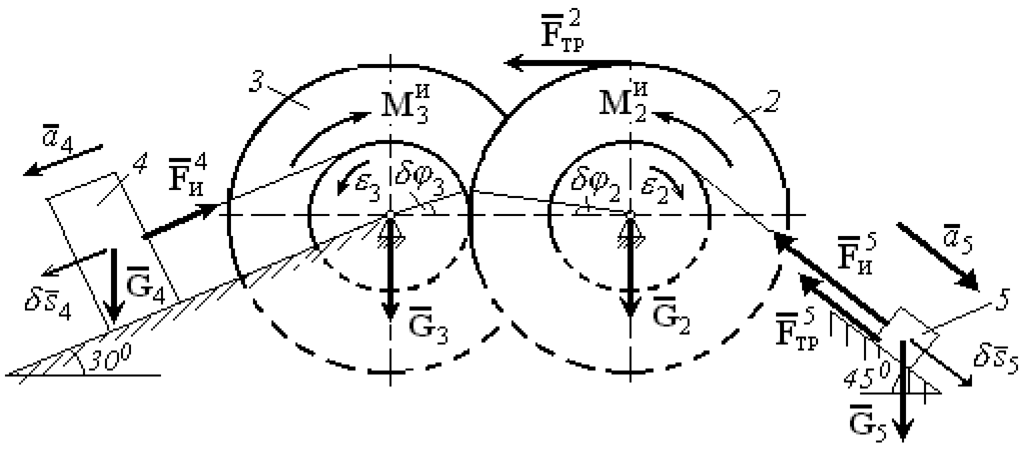


Рисунок 47

7. Составим уравнение возможных работ (1)

$$(G_4 \sin 30^0 - F^{И}{}_4)\,\delta s_4 - M^{И}{}_3\,\delta\varphi_3 - (M^{И}{}_2 + F^{2}{}_{ТР}\cdot R)\,\delta\varphi_2 +$$
$$+ (G_5 \cos 45^0 - F^{И}{}_5 - F^{5}{}_{ТР})\,\delta s_5 = 0. \qquad (3)$$

8. Выразим все перемещения, входящие в уравнение (3) через δs_4, а ускорения – через искомое a_4.

За основу примем зависимости между скоростями соответствующими точек и тел системы (рисунок 48), полученные из кинематики

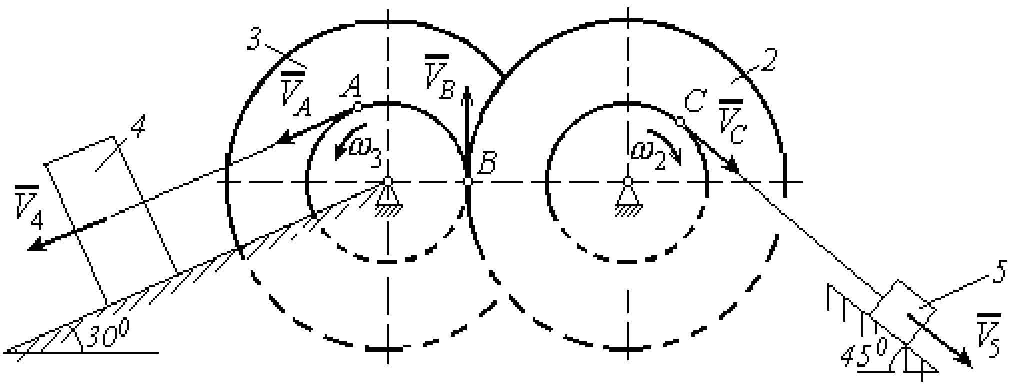


Рисунок 48

$$V_4 = V_A = V_B;\ \omega_3 = V_4/r;\ \ \omega_4 = V_4/R;\ \ V_C = \omega_4\, r = V_4\, r/R;\ V_5 = V_C = V_4\, r/R. \ (4)$$

Дифференцируя эти соотношения по времени, найдем

$$a_4 = a_{\tau A} = a_{\tau B};\ \ \varepsilon_3 = a_4/r;\ \varepsilon_2 = a_4/R;\ a_{\tau C} = \varepsilon_2\, r = a_4\, r/R;\ \ a_5 = a_{\tau C} = a_4\, r/R. \ (5)$$

Заменяя в соотношениях (4) скорости выражениями

$$V = ds/dt,\ \ \omega = d\varphi/dt,$$

и умножая их на dt с последующей заменой действительных элементарных перемещений на возможные (d на δ), получим

$$\delta\varphi_3 = \delta s_4/r; \qquad \delta\varphi_2 = \delta s_4/R; \qquad \delta s_5 = \delta s_4\, r/R. \qquad (6)$$

9. Вычислим осевые моменты инерции, ходящие в выражения (2)

$$I_{Z2} = m_2 \cdot R^2{}_2/2 = 3G \cdot R^2/(2g); \qquad I_{Z3} = m_3 \cdot \rho_3{}^2 = 4G \cdot \rho_3{}^2/g. \qquad (7)$$

10. Преобразуем выражение возможных работ (3)

10.1. Вычислим с помощью соотношений (5) и (7) модули главных векторов и главных моментов сил инерций, приложенных к системе, и определяемых соотношениями (2). После этого подставим их в уравнение (3).

10.2. Заменим, используя выражения (6), в уравнении (3) возможные перемещения $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_3$, δs_5 на перемещение δs_4.

11. Определим ускорение a_4.

После выполнения преобразований, указанных в п.7, и деления на $\delta s_4 \neq 0$ и $G \neq 0$ уравнение (3) примет вид:

$$a_4\,(2 + 4\,\rho_3^{\,2}/\,r^2 + 1{,}5 + r^2/\,R^2)\;/g = 1 + \sqrt{2}\;r\,/(2R) - f\,(5/8 + \sqrt{2}\;r\,/(2R)).$$

Откуда, подставляя данные задачи, найдем

$$a_4 = 1{,}76 \text{ м/с}^2.$$

12. Определим ускорение a_5.

Из последнего соотношения (5) получим

$$a_5 = a_4 \cdot r\,/R = 1{,}76 \cdot 0{,}75 = 1{,}32 \text{ м/с}^2.$$

II. Определим силу натяжения нити T_4, к которой прикреплен груз *1*.

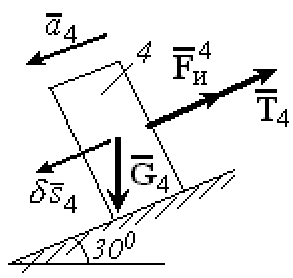


Рисунок 49

1. Выберем механическую систему, движение которой будем рассматривать.

Рассмотрим движение системы, состоящей из тела *4* (рисунок 49). Система имеет одну степень свободы.

2. Для определения силы натяжения нити T_4 применим общее уравнение динамики

$$\Sigma\delta A_k^{\,а} + \Sigma\delta A_k^{\,и} = 0. \tag{8}$$

3. Изображаем на чертеже (рисунок 49) активные силы: силу тяжести - $\vec{G}_4$; силу натяжения нити - $\vec{T}_4$ (будем относить эту силу к активным силам).

4. Приложим к выбранной механической системе силы инерции.

Задавшись направлением $\vec{a}_4$ (считая его совпадающим с выбранным направлением груза *4*) изображаем (рисунок 49) силу инерции груза $\vec{F}_4^{\,И}$, величина которой равна

$$F^{\,И}{}_4 = \frac{G_4}{g}\,a_4 = \frac{2G}{g}\,a_4. \tag{9}$$

5. Сообщим системе возможное перемещение.

Связи, наложенные на груз *4*, допускают его возможное перемещение вверх или вниз по наклонной плоскости (рисунок 49). Можно выбрать любое из этих возможных перемещений. Для определенности примем возможное перемещение груза *4* (δs_4) направленным вниз по наклонной плоскости.

6. Составим уравнение возможных работ (8)

$$(G_4 \sin 30^0 - F^{\,И}{}_4 - T_4\,) \cdot \delta s_4 = 0. \tag{10}$$

7. Определим силу натяжения нити T_4.

Поделив уравнение (10) на $\delta s_4 \neq 0$, получим

$$G_4 \sin 30^0 - F^{И}{}_4 - T_4 = 0.$$

Откуда

$$T_4 = 2G \cdot \sin 30^0 - 2G \cdot a_4/g = 2G \cdot (0{,}5 - 1{,}76/9{,}81) = 0{,}64\ G.$$

III. Определим силу натяжения нити T_5, к которой прикреплен груз 5.

Выполним последовательность действий, рассмотренную в пункте **II**.

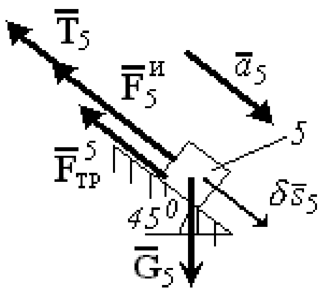


Рисунок 50

1. Рассмотрим движение системы, состоящей из тела 4 (рисунок 50).

2. Изображаем активные силы: силу тяжести $\vec{G}_5$; силу натяжения нити $\vec{T}_4$ и силу трения $\vec{F}_{ТР}^5$ (будем относить эти силу к активным силам).

3. Изобразим силу инерции груза $\vec{F}_4^{И}$, величина которой равна

$$F^{И}{}_5 = \frac{G_4}{g} a_5 = \frac{G}{g} a_5. \tag{11}$$

4. Сообщим системе возможное перемещение δs_5 и составим уравнение возможных работ (8)

$$(G_5 \sin 45^0 - F^{И}{}_5 - T_5 - F_{ТР}{}^5) \cdot \delta s_5 = 0.$$

Откуда

$$T_5 = G \cdot \sin 45^0 - G \cdot a_5/g - f\, G \cos 45^0 = G\,(\sin 45^0 - a_5/g - f \cos 45^0) = 0{,}49\ G.$$

О т в е т: $a_4 = 1{,}76$ м/с^2, $a_5 = 1{,}32$ м/с^2, $T_4 = 0{,}64\ G$, $T_5 = 0{,}49\ G$.

Задача Д15

Применение уравнений Лагранжа II рода к исследованию механической системы с одной степенью свободы

Механическая система состоит из ступенчатого шкива 3 и однородного блока 4, обмотанных нитями, грузов 1, 2, 5, прикрепленных к этим нитям (рисунки Д15.0 – Д15.9, таблица Д15). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и постоянной силы $\vec{F}$, приложенной к грузу 1. Радиусы ступеней шкива 3 равны R_3 = 0,25 м, r_3 = 0,1 м. Радиус инерции шкива ρ_3 = 0,2 м. Блок 4 сплошной однородный цилиндр.

Составить для данной системы уравнение Лагранжа и определить из него величину, указанную в таблице в столбце «Найти», где обозначено: ε_3, ε_4 – угловые ускорения шкива 3 и блока 4, a_1, a_2, a_5 – ускорения грузов 1, 2, 5. Веса P_1, …, P_5 шкивов и грузов, а также величина силы F заданы в таблице. Трением пренебречь.

Таблица Д15. Данные к задачам Д15

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	F	Найти
0	$10P$	0	$2P$	$3P$	$4P$	$9P$	ε_3
1	0	$4P$	$3P$	P	$2P$	$12P$	a_1
2	$2P$	0	$4P$	$2P$	P	$6P$	a_2
3	$2P$	$2P$	P	$3P$	0	$18P$	a_5
4	$3P$	0	$2P$	$5P$	$4P$	$12P$	ε_4
5	0	P	$3P$	$4P$	$2P$	$9P$	a_1
6	$4P$	0	$2P$	$2P$	$3P$	$18P$	a_2
7	$10P$	$2P$	P	$4P$	0	$6P$	ε_3
8	0	$4P$	P	$3P$	$3P$	$9P$	a_5
9	$3P$	$3P$	$4P$	$2P$	0	$12P$	ε_4

Рисунки к задачам Д15

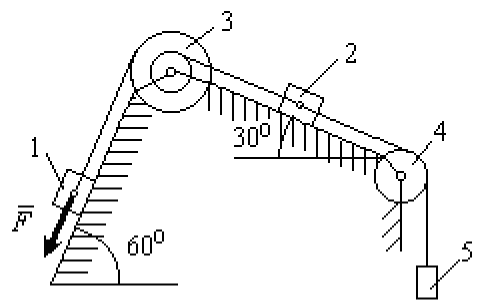


Рисунок Д15.0

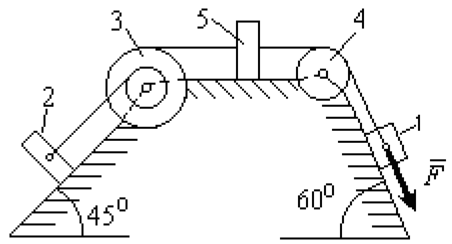


Рисунок Д15.1

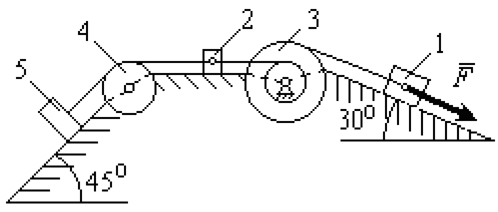


Рисунок Д15.2

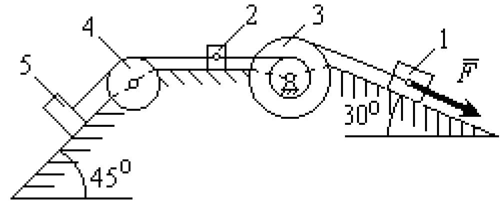


Рисунок Д15.3

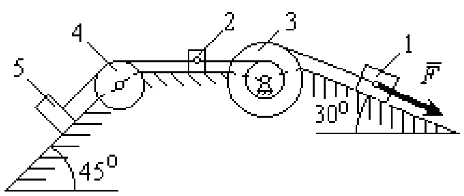


Рисунок Д15.4

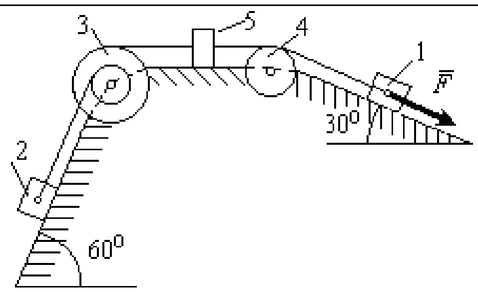


Рисунок Д15.5

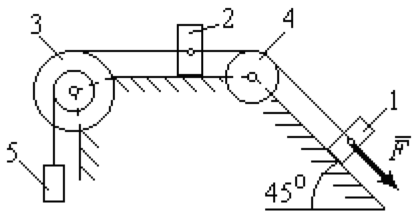


Рисунок Д15.6

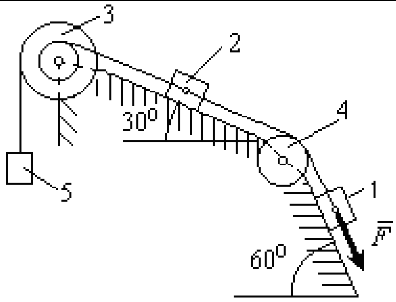


Рисунок Д15.7

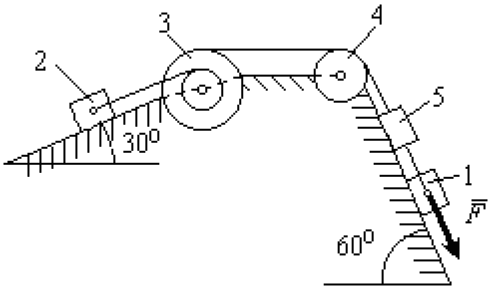


Рисунок Д15.8

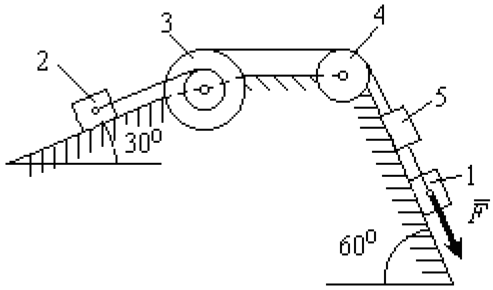


Рисунок Д15.9

Указания к решению задачи Д15

Задача Д15 – на применение к изучению движения системы уравнений Лагранжа II рода. В задаче система имеет одну степень свободы, следовательно, ее положение определяется одной обобщенной координатой и для нее должно быть составлено одно уравнение.

За обобщенную координату q принять: в задачах, где требуется определить a_1, a_2, a_5 – перемещение x соответствующего груза; в задачах, где требуется определить ε_3 или ε_4, – угол поворота φ соответствующего шкива или блока.

Для составления уравнений вычислить сначала кинетическую энергию T системы и выразить все вошедшие в T скорости через обобщенную скорость, то есть через $\dot{x}$, если обобщенная координата x, или через $\dot{\varphi}$, если обобщенная координата φ. Затем вычислить обобщенную силу Q. Для этого сообщить системе возможное перемещение, при котором выбранная координата, то есть x (или φ), получает положительное приращение δx (или $\delta\varphi$), и вычислить сумму элементарных работ всех сил на этом перемещении; в полученном равенстве надо все другие элементарные перемещения выразить через δx (или $\delta\varphi$, если обобщенная координата φ) и вынести δx (или $\delta\varphi$) за скобки. Коэффициент при δx (или $\delta\varphi$) и будет обобщенной силой.

При решении задачи целесообразно следовать алгоритму, предложенному в примере.

Пример решения задачи Д15

Задача. Механическая система состоит из ступенчатого шкива 3 и однородного блока 4, обмотанных невесомыми нитями, грузов 1, 2, 5, прикрепленных к этим нитям (рисунок 51). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и постоянной силы $\vec{F}$, приложенной к грузу 1.

Трением пренебречь.

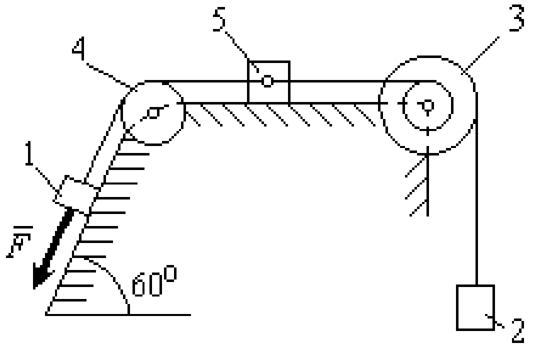


Рисунок 51

Д а н о: $F = 15P$, $R_3 = 0{,}5$ м, $r_3 = 0{,}1$ м, $\rho_3 = 0{,}25$ м, $P_1 = 0$, $P_2 = 2P$, $P_3 = 4P$, $P_4 = P$, $P_5 = 1{,}5P$. Блок 4 сплошной однородный цилиндр.

О п р е д е л и т ь угловое ускорение шкива 3 ε_3.

Решение.

При решении задачи целесообразно придерживаться следующей последовательности действий:

1. Выберем механическую систему, движение которой будем рассматривать.

Целесообразно выбрать систему, состоящую из ступенчатого шкива 3 и однородного блока 4, обмотанных невесомыми нитями, грузов 1, 2, 5, прикрепленных к этим нитям.

2. Выберем обобщенную координату q.

Система имеет одну степень свободы, поэтому движение системы определяется одной обобщенной координатой. В качестве обобщенной координаты выберем угол поворота φ_3 шкива 3 ($q = \varphi_3$), полагая, что шкив вращается против хода часовой стрелки, и отсчитывая φ_3 в сторону вращения (рисунок 52).

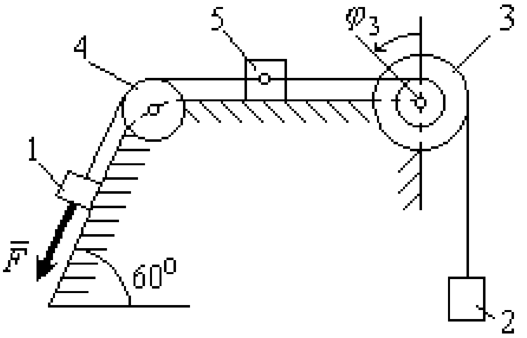


Рисунок 52

3. Составим уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = Q. \qquad (1)$$

4. Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме энергий всех тел

$$T = T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \qquad (2)$$

(Кинетическая энергия груза *1* равна нулю $T_1 = 0$, так как по условиям задачи вес тела $P_1 = 0$).

4.1. Определим кинетические энергии тел, входящих в систему.

Так как грузы *2* и *5* движутся поступательно, а шкив *3* и блок *4* вращаются вокруг неподвижной оси, то

$$T_2 = \frac{P_2}{2g} V_2^2, \quad T_5 = \frac{P_5}{2g} V_5^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} I_3\, \omega_3^2, \quad T_4 = \frac{1}{2} I_4\, \omega_4^2, \qquad (3)$$

где I_3, I_4 – осевые моменты инерции, поскольку шкив *3* имеет радиус инерции ρ_3, а блок *4* – сплошной (его радиус обозначим r)

$$I_3 = \frac{P_3}{g} \rho_3^2, \qquad I_4 = \frac{P_4}{2g} r^2. \qquad (4)$$

4.2. Выразим все скорости, входящие в выражения T_2, T_3, T_4, T_5, через обобщенную скорость $\dot{\varphi}_3$.

$$V_1 = V_5 = \omega_3 r_3 = \dot{\varphi}_3 r_3, \ \omega_4 = V_5 / r = \dot{\varphi}_3 r_3 / r, \ V_2 = \omega_3 R_3 = \dot{\varphi}_3 R_3. \qquad (5)$$

4.3. Определим кинетическую энергию системы T через обобщенную скорость $\dot{\varphi}_3$.

Подставляя значения величин (4) и (5) в равенства (3), а затем значения T_2, T_3, T_4, T_5 в равенство (2) найдем, что

$$T = \frac{1}{2g}\left(P_2 R_3^2 + P_5 r_3^2 + P_3 \rho_3^2 + 0{,}5\, P_4 r_3^2\right) \dot{\varphi}_3^2 = \frac{0{,}905P}{2g} \dot{\varphi}_3^2. \qquad (6)$$

5. Вычислим производные, входящие в уравнение (1).

Дифференцируя выражение (6), найдем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = \frac{0{,}905P}{g} \dot{\varphi}_3, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}\right) = \frac{0{,}905P}{g} \ddot{\varphi}_3. \qquad (7)$$

6. Найдем обобщенную силу Q.

Применим следующий алгоритм вычисления обобщенной силы.

6.1. Изобразим силы, совершающие при движении системы работу, то есть силы $\vec{F}$ и $\vec{P}_2$ (рисунок 53).

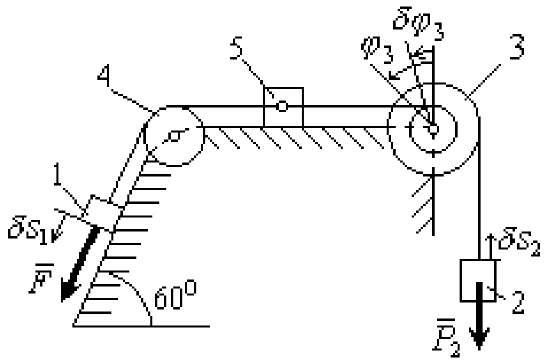


Рисунок 53

6.2. Сообщим системе возможное перемещение, при котором обобщенная координата φ_3 получает положительное приращение $\delta\varphi_3$ (рисунок 53), и покажем перемещения каждого из тел: для груза *1* это будет δs_1, для груза *2* – перемещение δs_2 (возможные перемещения других тел в данном примере можно не показывать, так как нет сил, совершающих работу на этих перемещениях).

6.3. Вычислим сумму элементарных работ сил на данных перемещениях

$$\delta A = F\ \delta s_1 - P_2 \delta s_2. \qquad (8)$$

6.4. Выразим все входящие в выражение (8) перемещения через $\delta\varphi_3$.

Учтем, что зависимости между элементарными перемещениями здесь аналогичны зависимостям (5) между соответствующими скоростями, получим

$$\delta s_1 = \delta\varphi_3\, r_3, \qquad \delta s_2 = \delta\varphi_3\ R_3. \qquad (9)$$

6.5. Получим выражение обобщенной силы.

Подставляя соотношения (9) в (8) и вынося $\delta\varphi_3$ за скобки, найдем, что

$$\delta A = (F\, r_3 - P_2\, R_3)\ \delta\varphi_3\,. \qquad (10)$$

Коэффициент при $\delta\varphi_3$ в полученном выражении и будет обобщенной силой Q. Следовательно,

$$Q = (F\, r_3 - P_2\, R_3) \quad \text{или} \quad Q = 0{,}5\, P. \qquad (11)$$

7. Найдем искомое ускорение $\varepsilon_3 = \ddot{\varphi}_3$.

Подставляя найденные величины (7) и (11) в уравнение (1), получим

$$\frac{0{,}905P}{g}\ddot{\varphi}_3 = 0{,}5\, P.$$

Откуда находим искомое ускорение $\varepsilon_3 = \ddot{\varphi}_3$.

О т в е т: $\varepsilon_3 = 0{,}55\, g$.

Примечание. Если в ответе получается $\varepsilon < 0$ (или $a < 0$), то это означает, что система движется не в ту сторону, куда было предположено.

VII. Список использованных источников

1. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике /под ред. А. А. Яблонского. М. 2001г. и предыдущие издания (содержит примеры решения задач).
2. Теоретическая механика. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных и др. спец. /Котова Л.И., Надеева Р.И., Тарг С.М. и др; Под ред. С.М. Тарга. – 4-е изд. - М.: Высш. школа, 1989. – 111 с.: ил.
3. Теоретическая механика. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников. /Котова Л.И., Надеева Р.И., Тарг С.М., Цывильский В.Л., Шмарова И.М. Под ред. С.М. Тарга. – 3-е изд. - М.: Высш. школа, 1982. – 111 с.
4. Теоретическая механика. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников энергетических, горных, металлургических, электроприборостроения и автоматизации, технологических специальностей, а также геологических, электротехнических, электронной техники и автоматики, химико-технологических и инженерно-экономических специальностей вузов/Под ред. С.М. Тарга. – 4-е изд. - М.: Высш. шк., 1988. – 64 с.: ил.
5. Яблонский А.А., В.М. Никифорова. Курс теоретической механики. Учеб. пособие для вузов: 13-е изд., исправ. - М.: Интеграл-Пресс, 2006. - 603с.
6. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики: Учеб.пособие для студ-ов вузов по техн.спец.: В 2-х т./Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. СПб.: Лань. -5-е изд., испр. -1998. -729 с.
7. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: Учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по техн.спец. / И.В. Мещерский; Под ред. В.А. Пальмова, Д.Д. Меркина. -45-е изд., стер. - СПб. и др.: Лань, 2006. - 447 с.
8. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов / С.М.Тарг. -15-е изд., стер. - М.: Высш.шк., 2005.- 415 с.
9. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для студ.втузов / [А.А. Яблонский, С. С.Норейко,С.А.Вольфсон и др.]; Под общ. ред. А. А. Яблонского. - 11-е изд., стер. - М.: Интеграл- Пресс, 2004. - 382 с.
10. Бать М.И и др. Теоретическая механика в примерах и задачах. Учеб. пособ. для вузов. В 2-х т. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон.-9-е изд., перераб. - М.: Наука,1990. - 670 с.