ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6
Исследование временных характеристик линейных непрерывных систем автоматического управления

1. Цель работы. Изучить способы построения временных характеристик типовых звеньев линейных систем управления в пакете MathCAD.

2. Краткие теоретические сведения

Временные характеристики, которые описываются переходной и весовой функциями, характеризуют динамический режим работы элемента (звена) объекта или системы управления.

Динамическим называется режим работы элемента системы, при котором входная и выходная величины его изменяются во времени.

Так как динамический режим возникает в результате перехода элемента от одного установившегося состояния к другому, то его часто называют переходным режимом, а процесс перехода от одного установившегося состояния к другому - переходным процессом.

Зависимость выходной величины элемента от изменяющейся во времени входной величины называют его динамической характеристикой.

Частным случаем динамических характеристик являются так называемые временные характеристики - зависимости выходной величины элемента системы автоматики от времени, если входная величина изменяется по некоторому типовому (стандартному) закону, например, импульсом или линейно и т.п.

2.1. Переходная характеристика

Из временных характеристик наиболее часто в ТАУ используется переходная характеристика объекта, которая определяет реакцию объекта на действие простейшего стандартного сигнала – так называемый «единичный скачок» («единичный ступенчатый сигнал»), то есть мгновенное изменение входного сигнала с 0 до 1 в момент $t = 0$. Математически этот сигнал определяется выражением

$$1(t) = \begin{cases} 0, & при \;\; t < 0; \\ 1, & при \;\; t \geq 0. \end{cases}$$

Графически такая функция времени показана ниже.

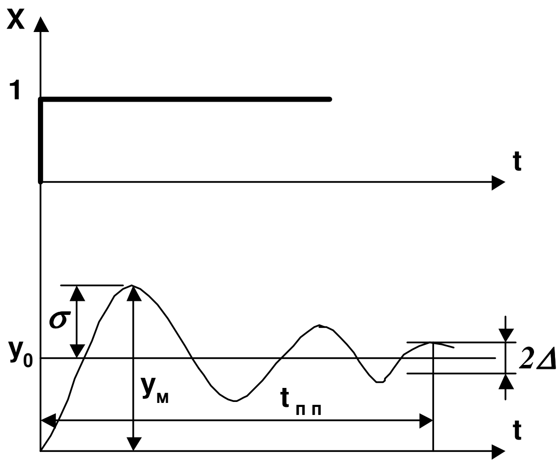
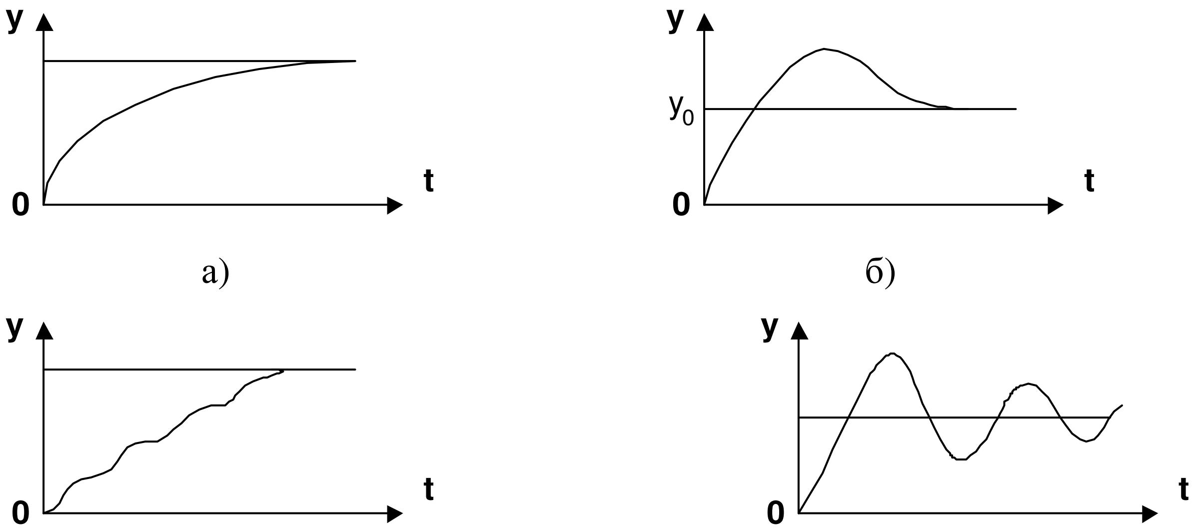


Рис. 1. Переходная функция системы

Соответственно, реакция объекта на единичный скачок называется переходной функцией и обозначается $h(t)$. При этом предполагается, что объект в начальный момент находится в состоянии покоя, то есть, имеет *нулевые начальные условия*. Это значит, что все его переменные состояния равны нулю и внутренняя энергия также нулевая.

Если начальные условия ненулевые, то для построения сигнала выхода при любом входе нужно использовать дифференциальные уравнения объекта или его модель в пространстве состояний. Это значит, что переходная характеристика дает меньше информации, чем исходные дифференциальные уравнения объекта.

По характеру зависимости переходные характеристики делятся на монотонные, апериодические и колебательные. Переходные характеристики считаются апериодическими, если они имеют не более одного экстремума.



а) б)

в)

Рис. 2. Виды переходных функций системы: а) – монотонная, б) – апериодическая, в) – колебательная

В противном случае (более одного максимума) переходную характеристику относят к колебательной.

С использованием переходной функции вводятся так называемые **первичные показатели качества систем** управления.

1. *Время переходного процесса*

Время, в течение которого выходная величина после начала изменения входной достигает нового установившегося значения, называют временем переходного процесса. Однако теоретически это время стремиться к бесконечности. Поэтому за время переходного процесса принимают время $t_{пп}$ после начала изменения входной величины, за которое выходная величина достигает нового установившегося значения с заданной степенью точности **Δ**. Степень точности задается заранее и обычно не превышает 3-5% от нового установившегося значения – см. рис. 1.

2. *Статическая ошибка*

Статическая ошибка представляет собой разность между значением выходной величины y_i в момент времени $t_i \geq t_{пп}$ (после окончания переходного процесса) и её новым установившемся значением $y_0 = y_{зад}$, т.е

$$\Delta = y(t_i) - y_0, \quad t_i \geq t_{nn}.$$

Очевидно, что статическая ошибка является некоторой константой, которая характеризует точность работы САУ.

3. Динамическая ошибка, перерегулирование

Динамическая ошибка - это разность между действительным значением выходной величины y_i в данный момент времени t_i и её новым установившемся значением y_0, т.е

$$\Delta y_i = y_i - y_0.$$

Очевидно, что динамическая ошибка представляет собой функцию времени.

Максимальную положительную относительную ошибку за время переходного процесса называют *перерегулированием* σ*:*

$$\sigma = \frac{y_м - y_0}{y_0} \cdot 100\%,$$

здесь (см. рис. 1) $y_м$ - максимальное значение, y_0 - новое установившееся значение выходной величины.

4. Колебательность.

Колебательность μ - количество полных колебаний за время переходного процесса. Колебательность может характеризоваться частотой или периодом колебаний выходной величины.

В соответствии с определением переходная функция *h(t)* находится решением дифференциального уравнения системы управления при нулевых начальных условиях и входном сигнале *x(t)=1(t).*

Например, на рис. 3. показано определение в пакете MathCAD переходной функции апериодического звена с передаточной функцией $W(p) = K/(Tp+1)$ как решение соответствующего дифференциального уравнения.

Сначала решение определяется аналитически с использованием преобразования Лапласа по формуле

$$h(t) = L^{-1}\left[W(p)\frac{1}{p}\right]. \tag{1}$$

Отметим, что здесь выражение $1/p$ описывает изображение Лапласа единичной ступенчатой функции $L[1(t)] = 1/p$. Подробное описание применения компьютерной математики MathCAD в области изображения Лапласа смотри в лабораторной работе №3.

Далее приводится нахождение переходной функции непосредственно численным решением дифференциального уравнения.

Определение переходной функции моделированием

Given

$x(0) = 0$

$x := \mathrm{Odesolve}(t, 10, 1000)$

$$T \cdot \left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + x(t) = K \cdot \Phi(t)$$

2.2. Весовая (импульсная) функция

Переходя к рассмотрению другой не менее распространенной временной характеристикой системы управления – весовой (импульсной) функции, предварительно отметим, что с использованием ранее рассмотренной переходной функции *h(t)* решение линейного дифференциального уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами a_i , b_i

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + ... + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + ... + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t). \qquad (2)$$

и с начальными условиями $y(0), \quad y^{(1)}(0), \quad ..., \quad y^{(n-1)}(0)$ записывается так

$$y(t) = y_{ОБ}(t) + y_Ч(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t} + \int_0^t h(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau, \qquad (3)$$

где $y_{ОБ}(t)$, $y_Ч(t)$ - общая (свободная) и частная (вынужденная) составляющие решения, C_i – так называемые постоянные интегрирования, выражаемые через начальные условия, p_i – корни характеристического уравнения, составленного для диффуравнения (1).

Формула (3) выводится с использованием принципа суперпозиции, в соответствии с которым выходной сигнал линейной системы можно получить наложением друг на друга реакций системы на отдельные ступенчатые воздействия $1(t_i) \cdot \dot{x}(t_i)\Delta t, \quad \Delta t = t_i - t_{i-1} = const$, аппроксимирующие входной сигнал.

Выражение (3) определяет связь между производной входного сигнала $\dot{x}(t)$ и выходной переменной *y(t)* системы. Так в практике управления входные сигналы систем могут быть и недифференцируемыми функциями, то в ТАУ решение уравнения (2), как правило, представляют в форме

$$y(t) = y_{ОБ}(t) + y_Ч(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t} + \int_0^t w(t-\tau)x(\tau)d\tau, \qquad (4)$$

где

$$w(t) = dh(t)/dt \qquad (5)$$

– весовая (импульсная) функция звена (системы), а интеграл в выражении (4) называется интегралом свертки (в теоретической электротехнике – интегралом Дюамеля).

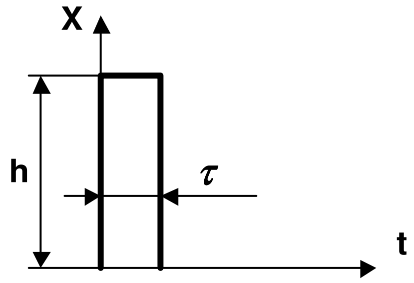
Уравнение (4) определяет связь между уже входной *x(t)* и выходной *y(t)* функциями системы и позволяет решить **основную задачу анализа САУ** – рассчитать переходной процесс системы при действии конкретного входного сигнала.

Так как переходная функция *h(t)* является реакцией объекта (1) на единичную ступенчатую функцию *1(t),* то из уравнений (3) и (4) следует, что функция $w(t)$ в свою очередь представляет реакцию объекта на сигнал, который формально является производной ступенчатой функции

$$\delta(t) = d1(t)/dt \qquad (5)$$

(производные в формулах (3) и (4) меняются местами). Данный сигнал в ТАУ называется *единичным идеальным импульсом* $\delta(t)$ или функцией Дирака.

Из выражения (5) вытекает, что функцию Дирака технически точно нельзя реализовать (значение производной стремится к бесконечно большой величине). Поэтому для приближенного получения импульсной характеристики используют импульсы прямоугольной формы



Такой импульс аналитически описывается так

$$X(t)=\begin{cases}0, & 0>t>\tau,\\ h, & 0\le t\le\tau,\end{cases}$$

при этом «площадь» сигнала

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)dt = h\tau ,$$

где h - высота или амплитуда импульса, τ - продолжительность импульса.

Произведение $h\tau$ часто называют величиной импульса. Если величина импульса равна единице, то импульс называют единичным. Если $\tau\to 0$, то импульс называет идеальным.

Таким образом, единичный идеальный импульс аналитически можно описать выражением

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & при\ \ t\ne 0,\\ \infty, & при\ \ t=0,\end{cases} \tag{6}$$

при этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1. \tag{7}$$

Соответственно единичный идеальный импульс $\delta(t)$ имеет следующие свойства.

1. Фильтрующее (детекторное) свойство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0). \tag{8}$$

2. Преобразование Лапласа с учетом (8) принимает значение

$$L\left[\delta(t)\right]=\int_{0}^{+\infty}\delta(t)e^{-pt}dt = e^{-0} = 1. \tag{9}$$

С использованием свойства (9) и понятия передаточной функции находим

$$W(s)=\frac{L[y(t)]}{L[u(t)]}=\frac{L[w(t)]}{L[\delta(t)]}=\frac{L[w(t)]}{1}.$$

Отсюда следует важный факт: передаточная функция равна изображению Лапласа от весовой функции

$$W(s)=L[w(t)], \tag{10}$$

и ли

$$w(t)=L^{-1}[W(s)].$$

Соотношения (10) широко используются в ТАУ и, в частности, в данной лабораторной работе – см. рис. 4.

3. Задания и порядок проведения исследований

Задание. Используя (модифицируя) программный модуль лабораторной работы в MathCAD (см. рис. 4) для заданного объекта, передаточная функция и параметры которого определяются согласно таблице 1 в зависимости от номера варианта, рассчитать временные характеристики следующих элементов:

1. апериодического звена;
2. звена второго порядка с интегратором;
3. звена второго порядка с двумя апериодическими звеньями;
4. колебательного звена.

Порядок исследований и представления результатов

0. Создать текстовый блок, содержащий название работы, ФИО студента, номер варианта, отформатировать текст в соответствии с образцом, приведенном на рис. 3.

Лабораторная работа № 6.
Исследование временных характеристик линейных непрерывных систем автоматического управления

Выпонил:	студент гр. 111111 Иванов И.И.
Вариант:	N
Дата:	01.03.2016 г.

Рис. 3. Образец форматирования текста

1. Определение характеристик апериодического звена

1.1. Используя (модифицируя) программу Mathcad, определить передаточную функцию звена и задать значения ее параметров согласно таблице 1 в зависимости от номера варианта:

$$W(s)=\frac{k}{T_{01}s+1}, \quad k= \quad , \quad T= \quad .$$

1.2. Используя средства среды Mathcad по реализации обратного преобразования Лапласа, определите переходную и весовую функции звена.

1.3. Постройте графики этих функций.

1.4. Численное определение переходной характеристики звена

1.4.1. С помощью блока Given задайте дифференциальное уравнение, соответствующее передаточной функции, с нулевыми начальными значениями и входной функцией Ф(t) – единичной ступенчатой функцией.

1.4.2. Решите это дифференциальное уравнение с использованием оператора Odesolve(t, a, b) и постройте график решения.

1.5. Численное определение весовой характеристики звена

1.5.1. С помощью блока Given задайте дифференциальное уравнение, соответствующее передаточной функции, с нулевыми начальными значениями и входной функцией Impuls1(t, ti) – импульс единичной величины с длительностью ti (эта функция отсутствует в Mathcad и определяется самостоятельно через Ф(t)).

1.5.2. Решите это дифференциальное уравнение с использованием оператора Odesolve(t, a, b) и постройте графики решения для трех значений ti, последовательно уменьшающихся в два раза.

2. Определение характеристик звена второго порядка с интегратором

Пункты 1.1 – 1.5 повторите для звена с передаточной функцией $W(s)=\dfrac{k}{s(T_{01}s+1)}$ с параметрами, указанными в таблице 1 в соответствии с номером варианта.

3. Определение характеристик звена второго порядка с двумя апериодическими звеньями

Пункты 1.1 – 1.5 повторите для звена с передаточной функцией $W(s)=\dfrac{k}{(T_{01}s+1)(T_{02}s+1)}$ с параметрами, указанными в таблице 1.

4. Определение характеристик колебательного звена второго порядка

Пункты 1.1 – 1.5 повторите для звена с передаточной функцией

$W(s)=\dfrac{k}{T^2s+2\xi Ts+1}$ с параметрами, указанными в таблице 1. Заметим, что взаимосвязь параметров T,ξ и постоянными времени T_{01},T_{02} таблицы в методических указаниях для проведения численного эксперимента принята согласно формулам: $T=0{,}316\sqrt{T_{01}T_{02}}$; $\xi=0{,}158\sqrt{\dfrac{T_{02}}{T_{01}}}$.

5. Выводы по работе (о соответствии результатов п.1.2 и п.1.4, п.1.5)

Ниже приводится пример программного модуля выполнения работы.

1. Описание звена $\quad T := 1 \quad K := 2$

$$W(p) := \frac{K}{T\cdot p+1} \qquad W1(p) := \frac{1}{(p+1)^2} \qquad W2(p) := \frac{1}{p^2+1.4142p+1}$$

2. Аналитическое определение переходной и весовой характеристик звена

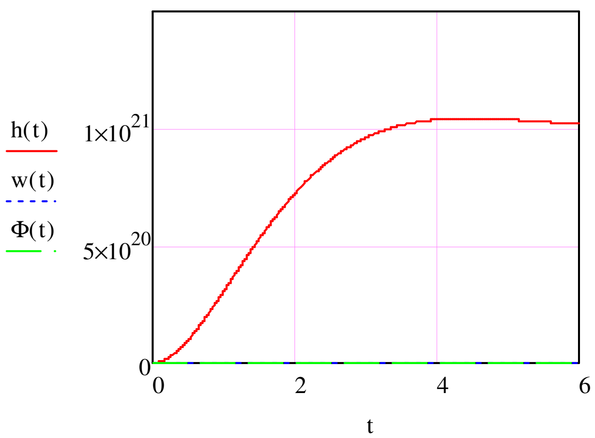
Нахождение переходной функции

$$h(t) := \frac{W2(p)}{p} \Bigg|\begin{matrix}\text{invlaplace}\\ p\end{matrix} \rightarrow 1.0e21+(-5.0e20+4.999904100919663360 8e20i)\cdot e^{(-0.7071+0.70711356230806378163i)\cdot t} - \big[-(-4.999904$$

Нахождение весовой функции

$$w(t) := W(p) \Bigg|\begin{matrix}\text{invlaplace}\\ p\end{matrix} \rightarrow 2\cdot e^{-t}$$

Построение графиков переходной и весовой функций



3. Определение переходной и весовой характеристик звена моделированием

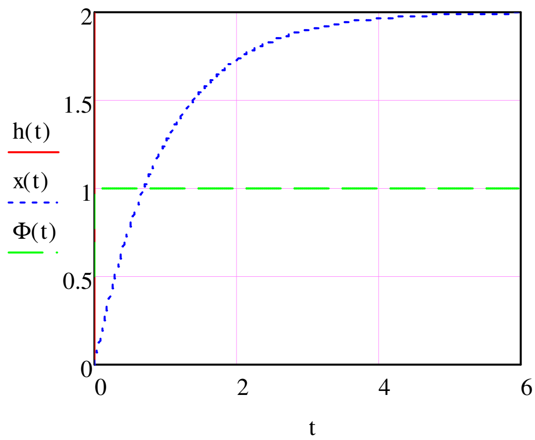
3.1. Определение переходной функции

Given

$$x(0) = 0$$

$$T\cdot\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + x(t) = K\cdot\Phi(t)$$

$$x := \text{Odesolve}(t, 10, 1000)$$



3.2. Нахождение весовой функции

Определение единичного импульса с длитедьностью ti:

$$\text{Impuls1}(t, ti) := \frac{1}{ti}\cdot(\Phi(t) - \Phi(t - ti))$$

Расчет весовой функции

Given

$$x(0) = 0$$

$$T\cdot\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + x(t) = K\cdot\text{Impuls1}(t, 0.25)$$

$$x := \text{Odesolve}(t, 10, 1000)$$

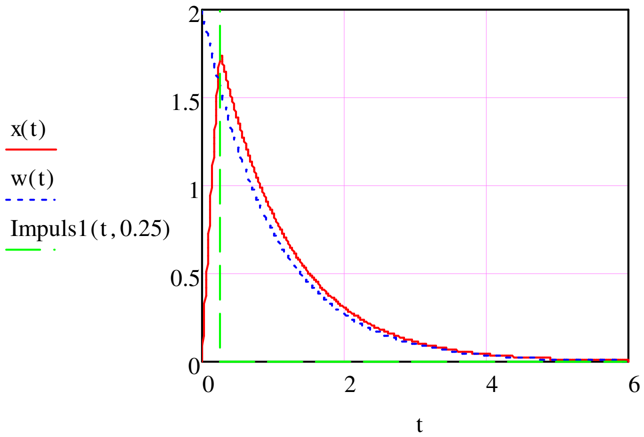


Рис. 4. Определение временных характеристик звеньев в MathCAD

Таблица 1

Вариант	k	T_{01}	T_{02}
1	1	0,5	0,01
2	2	0,25	0,5
3	3	0,1	0,25
4	1	0,25	0,2
5	1	0,25	1
6	2	0,05	0,25
7	4	0,05	0,25
8	4	0,5	0,1
9	2	0,5	0,25
10	3	1	0,5
11	3	0,5	0,05
12	1.5	0,25	0,2
13	2	0,75	0,01
14	5	0,45	0,1
15	3	0,9	0,05
16	2.5	0,36	0,67
17	1.5	0,34	0,52
18	4	0,8	0,2
19	4.5	0,7	0,12
20	3.5	0,3	0,95
21	5	0,1	0,6
22	4	0,8	0,3
23	1	0,65	0,5
24	2	0,45	0,55
25	4	0,72	0,35

4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе формируется как листинг из MathCAD выполнения указанных пунктов в порядке исследования с добавлением от руки выводов по работе, формулируемых на основе графиков и числовых данных полученных входе исследований.

5. Контрольные вопросы

1. Математически опишите и поясните типовые входные воздействия систем управления, а именно, 1) единичная ступенчатая функция, 2) единичный импульс, 3) идеальный единичный импульс.

2. Как называются реакции системы на типовые воздействия ?

3. Дать определения переходной, весовой (импульсной) и передаточной функциям объекта, указать их взаимосвязь.

4. Пояснить на примере объекта первого порядка способы расчета переходной и весовой (импульсной) функций по заданной передаточной функции объекта (классический и операторный способы расчета переходных процессов).

5. Изобразите графики переходных функций типовых звеньев. Как параметры звеньев влияют на вид графика ?

6. Поясните физический смысл первичных показателей качества системы управления и процедуру графического определения их значений.

Библиографический список

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория автоматического регулирования.- М.: Наука, 1975.- 7S7 с.

2. Поляков К.Ю. Теория автоматического управления для чайников. – С.-Петербург, 2008. – 80 с. (http://kpolyakov.narod.ru).

3. Капалин В.И. Шаповалова Н.Е. Линейные системы управления в системе компьютерной математики Mathcad. Уч. пособие. – М. Изд-во Перо, 2013. – 132 с.

4. Макаров Н.Н., Феофилов С.В. Применение пакета Mathcad в анализе и синтезе систем автоматического управления. Уч. пособие. – Тула, Изд-во ТулГУ, 2006. – 170 с.