ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5
Аналитическое конструирование оптимального регулятора (АКОР) по функционалу обобщенной работы А.А. Красовского

1. Цель работы. Изучение метода синтеза и свойств оптимальных систем управления по функционалу обобщенной работы (ФОР); программное (численное) и аналитическое определение коэффициентов оптимального регулятора.

2. Краткие теоретические сведения
2.1. Функционал обобщенной работы А.А. Красовского

Трудности решения нелинейной задачи АКОР в постановке Летова-Калмана вызвали создание А.А. Красовским нового метода синтеза оптимальных систем – аналитического конструирования оптимальных регуляторов по так называемому критерию (функционалу) обобщенной работы. Рассмотрим данный функционал применительно к объектам управления, описываемых векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = F(X) + B(X) \cdot U(t), \tag{1}$$

где $X(t)$ – n-мерный вектор состояния объекта, $U(t)$ – m-мерный вектор его управляющих воздействий. Для объекта управления (1) критерий обобщенной работы можно записать так

$$\mathrm{J} = \int_0^\infty (\mathrm{X}^\mathrm{T}(t)\mathrm{Q}\mathrm{X}(t) + \mathrm{U}^\mathrm{T}(t)\mathrm{R}\mathrm{U}(t) + \frac{1}{4}(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{X}})^\mathrm{T}\mathrm{B}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^\mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{X}})dt. \tag{2}$$

где R, Q – симметричные вещественные положительно-определенные матрицы весовых коэффициентов критерия.

Этот критерий качества называется полуопределенным в связи с тем, что он отличается от квадратичного критерия Летова–Калмана наличием дополнительного слагаемого

$$\frac{1}{4}\int_0^\infty (\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{X}})^\mathrm{T}\mathrm{B}\mathrm{R}^{-1}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{X}}dt, \tag{3}$$

зависящим от неизвестной функции Беллмана S(X) (она определяется в дальнейшем в процессе синтеза оптимального регулятора).

Соответственно задача оптимального управления А.А. Красовским формулируется следующим образом: требуется найти управление объектом (1) в форме обратной связи

$$U(X) = U(x_1, x_2, ..., x_n),$$

переводящее его из начального состояния $X(t_0 = 0) = X_0$ в конечное нулевое состояние $X(t_k = \infty) = 0$ с минимальным значением квадратичного функционала (2).

2.2. Основная теорема Красовского А.А.

Для сформулированной задачи управления оптимальный закон управления определяется следующей теоремой.

Теорема: для объекта управления (1) оптимальными в смысле минимума функционала (2) являются управления

$$U(X) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^{T}(X)\cdot\frac{\partial S}{\partial X}, \tag{4}$$

где S(X) – есть вынужденное решение уравнения в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(X)}{\partial x_i}\cdot f_i(X) = -X^{T}QX \tag{5}$$

Строгое (длинное) доказательство данной теоремы, приводимое в работах А.А. Красовского, повторять не будем. Однако отметим, что указанный результат можно получить, повторив рассуждение теоретической части предыдущей лабораторной работы, предварительно обозначив

$$Q(X) = X^{T}(t)QX(t) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^{T}BR^{-1}B^{T}\frac{\partial S}{\partial X}. \tag{6}$$

В этом случае вместо уравнения Гамильтоно-Якоби-Беллмана (ГЯБ) получаем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^{T}F(X) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^{T}BR^{-1}B^{T}\frac{\partial S}{\partial X} + \left(X^{T}(t)QX(t) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^{T}BR^{-1}B^{T}\frac{\partial S}{\partial X}\right) = 0.$$

После сокращения слагаемых уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^{T}F(X) = -X^{T}(t)QX(t), \tag{5*}$$

эквивалентный уравнению (5). Данное уравнение известно в математике как уравнение Ляпунова. Это рассуждение не является математически строгим, так как здесь предполагается, что функция Q(X) является полностью известной (заданной), хотя она согласно (6) выражается через искомую функцию Беллмана. Но оно объясняет и подтверждает результат А.А. Красовского.

Последние выкладки показывают, что Красовский А.А. специально ввел в квадратичный функционал слагаемое (2), чтобы вместо сложного нелинейного уравнения ГЯБ получить более простое линейное уравнение (5), решение которого определяет оптимальное уравнение (4). Эта принципиальная особенность метода имеет важные практические последствия: если для объектов высокого порядка вычислительные трудности решения нелинейного уравнения ГЯБ трудно преодолимы, то и определение решений линейного уравнения (5) для тех же объектов не встречает больших затруднений. Данная главная особенность метода А.А. Красовского определяет и его последующие свойства.

2.3. Физический смысл критерия А.А. Красовского

Широкое распространение на практике метода А.А. Красовского определяется не только тем, что он существенно уменьшает объем вычислений в сравнении с методом Летова-Калмана, но и тем, что используемый функционал качества имеет глубокий физический смысл.

Для выяснения физического смысла критерия (1) рассмотрим частный его случай, когда матрица R является диагональной

$$R=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/r_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/r_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/r_3^2 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/r_m^2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

В этом случае в соответствии с (4) оптимальное управление определяется выражением

$$U_j(X)=-r_j^2\sum_{k=1}^{n}b_{kj}(X)\frac{\partial S(X)}{\partial x_k};\quad j=1,2,\dots,m\ . \tag{8}$$

Соответственно критерий (1) запишется в виде

$$\begin{aligned} J&=\int_0^\infty\left\{X^T(t)QX(t)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{U_j}{r_j}\right)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(r_j\sum_{k=1}^{n}b_{kj}(X)\frac{\partial S(X)}{\partial x_k}\right)^2\right\}dt= \\ &=\int_0^\infty\left\{X^T(t)QX(t)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{U_j}{r_j}\right)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{U_{j\,opt}}{r_j}\right)^2\right\}dt, \end{aligned} \tag{9}$$

где оптимальные управления $U_{j\,opt}$ описываются уравнениями (8).

Функционал (9) называется критерием обобщенной работы. Это название связано с тем, что последнее слагаемое в (9) можно записать как интеграл $\frac{1}{2}\int_0^\infty U_{opt}{}^T(t)RU_{opt}(t)dt$, который выражает собой энергию (обобщенную работу) оптимального управления $U_{opt}(t)$.

2.4. Решение задачи АКОР А.А. Красовского

Так как для линейного объекта

$$\dot{X}(t)=AX(t)+BU(t) \tag{10}$$

функция Беллмана-Ляпунова S(X) описывается в квадратичной форме $S(X)=X^TPX$ с симметричной положительно определенной матрицей P, то критерий (2) с учетом управления (4) можно представить в форме

$$J=\int_0^\infty\left\{X^T(t)\left[Q+PBR^{-1}B\cdot P\right]X(t)+U^T(t)RU(t)\right\}dt, \tag{11}$$

а уравнению (5*) поставить в соответствие матричное уравнение Ляпунова

$$PA+A^TP=-Q. \tag{12}$$

Заметим также, что уравнение (12) вытекает из матричного уравнения Риккати, если в него вместо матрицы Q подставить матрицу $Q+PBR^{-1}B^TP$.

Таким образом, решение задачи АКОР для объекта (10) по критерию (11) сводится к решению линейного матричного уравнения Ляпунова (12) и определяется следующими теоремами.

Теорема 1: если матрица А устойчива, то для любой положительно определенной матрицы Q существует единственное положительно определенное решение P_+ уравнения (12).

Теорема 2: Пусть матрица А исходной системы (10) устойчива, P_+ - положительно определенное решение уравнения (12). Тогда управление, минимизирующее функционал (11) с матрицами Q>0, R>0, на движениях замкнутой системы, возбужденной произвольными начальными условиями $X(0)=X_0$, определяется выражением

$$U = -K_r \cdot X \ ; \ K_r = R^{-1} B^T \cdot P_+ \ , \tag{13}$$

причем замкнутая система $\dot{X} = [A - BR^{-1}B^T P_+] \cdot X$ асимптотически устойчива, а функция $S(X) = X^T P_+ \cdot X$ является для нее функцией Ляпунова.

Из приведенных теорем следует, что метод синтеза оптимальных регуляторов по критерию обобщенной работы непосредственно применим только к устойчивым объектам управления. Это является существенным недостатком данного метода синтеза оптимальных систем. Для его устранения А.А. Красовским предложены различные модификации рассматриваемого метода, применимые к неустойчивым и нейтральным объектам. Они основаны на преобразовании исходных неустойчивых дифференциальных уравнений объекта в устойчивые с использованием так называемых способов регуляризации объектов управления.

Таким образом, для задачи АКОР А.А Красовского с линейным объектом, как и в аналогичной задаче Летова-Калмана, оптимальным регулятором является многомерный пропорциональный регулятор с матрицей коэффициентов усиления K_r, но которая вычисляется по более простому алгоритму.

3. Задания и порядок проведения исследований

Задание. Используя (модифицируя) программный модуль лабораторной работы в Mathcad (см. рис. 2) требуется провести описанные ниже исследования оптимального регулятора для заданного объекта, передаточная функция и параметры которого определяются согласно таблице 1 в зависимости от номера варианта, причем $W_1(s) = \dfrac{k}{s(T_{01}s+1)}$, $W_2(s) = \dfrac{k}{s(T_{01}s-1)}$,

$W_3(s) = \dfrac{k}{(T_{01}s+1)(T_{02}s+1)}$, $W_4(s) = \dfrac{k}{(T_{01}s+1)(T_{02}s+1)}$.

Таблица 1. Параметры передаточных функций

Вариант	$W(s)$	k	T_{01}	T_{02}
1	$W_1(s)$	*1*	*0,5*	*0,1*
2	$W_2(s)$	*2*	*0,25*	*0,5*
3	$W_3(s)$	*3*	*0,1*	*0,25*
4	$W_4(s)$	*1*	*0,25*	*0,2*
5	$W_1(s)$	*1*	*0,25*	*1*
6	$W_2(s)$	*2*	*0,05*	*0,25*
7	$W_3(s)$	*4*	*0,08*	*0,24*
8	$W_4(s)$	*4*	*0,5*	*0,1*
9	$W_1(s)$	*2*	*0,5*	*0,25*
10	$W_2(s)$	*3*	*1*	*0,5*
11	$W_3(s)$	*3*	*0,5*	*0,05*
12	$W_4(s)$	*1.5*	*0,25*	*0,2*
13	$W_1(s)$	*2*	*0,75*	*0,01*
14	$W_2(s)$	*5*	*0,45*	*0,1*
15	$W_3(s)$	*3*	*0,9*	*0,05*
16	$W_4(s)$	*2.5*	*0,36*	*0,67*
17	$W_1(s)$	*1.5*	*0,34*	*0,52*
18	$W_2(s)$	*4*	*0,8*	*0,2*
19	$W_3(s)$	*4.5*	*0,7*	*0,12*
20	$W_4(s)$	*3.5*	*0,3*	*0,95*
21	$W_1(s)$	*5*	*0,1*	*0,6*
22	$W_2(s)$	*4*	*0,8*	*0,3*
23	$W_3(s)$	*1*	*0,65*	*0,5*
24	$W_4(s)$	*2*	*0,45*	*0,55*
25	$W_1(s)$	*4*	*0,72*	*0,35*

Порядок исследований и представления их результатов

1. Создать текстовый блок, содержащий название работы, ФИО студента, номер варианта, отформатировать текст в соответствии с образцом, приведенном на рис. 1.

Лабораторная работа №5.
Аналитическое конструирование оптимального регулятора (АКОР) по функционалу обобщенной работы А.А. Красовского

Выпонил: студент гр. 111111 Иванов И.И.

Вариант: N
Дата: 01.10.2017 г.

Рис. 1. Образец форматирования текста

2. Указать передаточную функцию исследуемого объекта и ее параметры

W(p) =

3. Сформировать матрицы A и B описания объекта в каноническом пространстве состояний:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t),$$

A = …………., B = …………. .

4. Задать параметры функционала качества САУ

$$J = \int_0^{\infty} \left(X^T(t) Q X(t) + U^T(t) R U(t) \right) dt$$

Q = ……………. , R = ……………… .

5. Расчет коэффициентов оптимального регулятора

5.1. Составление и решение матричного уравнения Ляпунова

$$PA + A^T P + Q = 0$$

относительно матрицы P.

5.2. Определение оптимального управления

$$U = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial S}{\partial X} = -R^{-1} B^T P X \equiv R X .$$

6. Переходные процессы оптимальной САУ

Исследовать влияние параметров критерия качества на переходные процессы системы с начальными условиями $x_1(0) = 2 - 3$. $x_2(0) = 0$.

7. Выводы по работе:

Ниже приводится пример программного модуля выполнения работы.

1. Описание объекта $ORIGIN := 1$

$T1 := 1 \quad T2 := 2 \quad k := 1$

$$W(p) := \frac{k}{(T1\cdot p + 1)\cdot(T2\cdot p + 1)}$$

2. Формирование матриц А и В описания объекта в пространстве состояний (канонический вектор состояния)

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{T1\cdot T2} & \frac{-1}{T1} - \frac{1}{T2} \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{T1\cdot T2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1.5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

3. Задание квадратичного функционала качества

$q1 := 1 \quad r := 1$

$q2 := 1$

$$Q := \begin{pmatrix} q1 & 0 \\ 0 & q2 \end{pmatrix}$$

4. Контрольное решение задачи АКОР

5. Решение матричного уравнения Ляпунова

$$P(p11, p12, p21, p22) := \begin{pmatrix} p11 & p12 \\ p21 & p22 \end{pmatrix}\cdot A + A^T\cdot\begin{pmatrix} p11 & p12 \\ p21 & p22 \end{pmatrix} + Q$$

Given

$$P(p11, p12, p21, p22) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \frac{p21}{2} - \frac{p12}{2} & p11 - \frac{3\cdot p12}{2} - \frac{p22}{2} \\ p11 - \frac{3\cdot p21}{2} - \frac{p22}{2} & p12 + p21 - 3\cdot p22 + 1 \end{pmatrix}$$

$p11 := 0 \quad p12 := 0 \quad p21 := 0 \quad p22 := 0$

$P(p11, p12, p21, p22) = 0$

$$Res := Find(p11, p12, p21, p22) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.2.. Расчет оптимального управления

$$P := \begin{pmatrix} Res_1 & Res_2 \\ Res_3 & Res_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$K := -r^{-1} \cdot B^T \cdot P \qquad K = (-0.5 \ \ -0.5)$

$U(X) := K \cdot X$

6. Построение графиков переходных процессов оптимальной САУ

$F(t, X) := A \cdot X + B \cdot U(X)$

Начальные условия системы

$t0 := 0 \qquad tk := 8 \qquad n := 1000(\qquad j := 1..n \qquad X0 := \begin{pmatrix} 2.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$

Решение системы дифференциальных уравнений и построе
ние графиков переходных процессов оптимальной системы

$Z1 := Rkadapt(X0, t0, tk, n, F)$

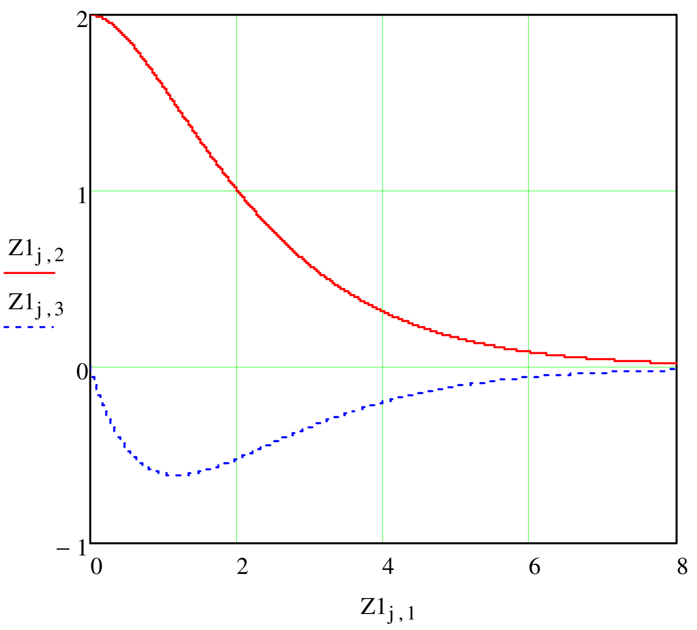

Рис. 2. Программный модуль для выполнения лабораторной работы

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе формируется как листинг из Mathcad выполнения указанных пунктов в порядке исследования с добавлением от руки выводов по работе, формулируемых на основе графиков и числовых данных полученных входе исследований.

5. Контрольные вопросы

1. В чем отличие квадратичного критерия Летова-Калмана от функционала обобщенной работы (ФОР) А.А. Красовского. Физический смысл ФОР.

2. Сформулировать задачу аналитического конструирования оптимального регулятора (АКОР) в постановке А.А. Красовского.

3. Сформулировать основную теорему А.А. Красовского по решению задачи АКОР.

4. Указать преимущество метода АКОР А.А. Красовского, чем оно определяется.

5. Указать и пояснить недостаток метода АКОР А.А. Красовского,

6. Указать связь матричного уравнения Ляпунова с уравнением Ляпунова.

Библиографический список

1. Основы теории синтеза оптимальных систем управления электротехническими объектами. / В.И. Ловчаков [и др.]: учебное пособие – Тула: Из-во ТулГУ, 2009. – 160с.

2. Александров А.Г. “Оптимальные и адаптивные системы”. - М.: Высшая школа, 1989. - 264 с.

3. Чураков П.В. Оптимальные и адаптивные системы. - М.: Энергоиздат, 1987. - 256 с.

4. Абдуллаев Н.Д., Петров Ю.П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. - Л.: Энергоатомиздат, 1985. - 240 с.

5. Макаров Н.Н., Феофилов С.В. Применение пакета Mathcad в анализе и синтезе систем автоматического управления. Уч. пособие. – Тула, Изд-во ТулГУ, 2006. – 170 с.