ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4
Аналитическое конструирование оптимального регулятора (АКОР) для линейного объекта

1. Цель работы. Изучение метода синтеза и свойств оптимальных систем управления по квадратичному критерию качества; программное (численное) и аналитическое определение коэффициентов оптимального регулятора.

2. Краткие теоретические сведения
2.1. Показатели качества управления

Для оценки успешности движения объекта к цели управления вводят числовые показатели качества управления. Исторически первым был способ, основанный на задании предельных значений определенных величин – первичных показателей качества, характеризующих кривую переходного процесса по выходной координате (для одномерных объектов): времени затухания переходного процесса, допустимого перерегулирования, колебательности и т.п. Данный способ оценки качества переходных процессов, во многом соответствующий инженерным представлениям о сущности задачи регулирования, нашел применение в основном лишь для одномерных линейных и некоторых нелинейных объектов в определенных режимах их движения.

Наиболее универсальным, особенно в применении к нелинейным многомерным объектам управления (ОУ), движение которых описывается векторно-матричным уравнением

$$\dot{X}(t) = \phi[X(t), U(t), t] = AX(t) + BU(t), \qquad (1)$$

(X(t) – *n*-мерный вектор состояния объекта, *U(t)* – *m*-мерный вектор его управляющих воздействий, является способ формализации), основанный на введении оптимизируемого функционала (критерия качества) интегрального типа. Использование интегральных критериев, в частности квадратичных функционалов, позволяет определить требования к переходным процессам систем управления (СУ) заданием значений небольшого числа их весовых коэффициентов, практически произвольный выбор которых обеспечивает фундаментальное свойство синтезируемой системы – ее асимптотическую устойчивость. Главное достоинство данного способа формализации заключается в том, что он позволяет использовать для синтеза устройств управления сложными объектами результаты теории оптимального управления и теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР).

В настоящее время в теории и практике оптимального управления широкое распространение получили интегральные квадратичные обобщенные функционалы качества систем автоматического управления:

$$J = \int_{t_0}^{t_k} F[X(t), U(t), t]dt = \int_{t_0}^{t_k} [X^T(t)QX(t) + U^T(t)RU(t)]dt \to \min, \tag{2}$$

где *R, Q* − симметричные вещественные положительно-определенные матрицы весовых коэффициентов критерия.

2.2. Принцип оптимальности Беллмана

Одним из методов решения задачи оптимального управления при наличии ограничений на управляющие воздействия и фазовые координаты объекта является метод динамического программирования, предложенный американским ученым Р. Беллманом. В его основе лежит следующий простой, на первый взгляд, принцип оптимальности: "оптимальное управление обладает тем свойством, что для любого начального условия и использованного начального управления последующее оптимальное управление совпадет с исходным оптимальным управлением относительно состояния, получающегося в результате применения начального управления".

Другими словами, принцип оптимальности утверждает, что любой отрезок оптимальной траектории, примыкающий к конечной точке $X(t_k)$, также является оптимальным. Подчеркнем, что в принципе говорится об оптимальности только конечного участка оптимальной траектории, а не какого-либо промежуточного участка.

Принцип оптимальности определяет достаточно общее необходимое условие оптимальности динамических систем. Однако он не является всеобщим – принцип справедлив только для систем, у которых оптимальная траектория не зависит от предыстории системы, а целиком определяется исходным ее состоянием. Например, принцип оптимальности не справедлив для объектов управления при наличии запаздывания в фазовых координатах.

Минимальное значение критерия, соответствующее оптимальному управлению, обозначим символом

$$S(X_0, t_0) = \min_{U \in \Omega} \int_{t_0}^{t_k} F[X(t), U(t), t]dt. \tag{3}$$

Данная функция $S(X_0, t_0)$ зависящая только от начального состояния объекта $X(t_0) = X_0$ называется функцией Беллмана. Подчеркнем, что здесь зависимость функционала от конечного состояния объекта, которое в задачах управления часто фиксировано, причем в задачах стабилизации $X_k = 0$, не рассматривается.

Используя сформулированный принцип оптимальности, можно показать, что функция Беллмана для объекта (1) с функционалом качества (2) удовлетворяет следующему функциональному уравнению Беллмана

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{U \in \Omega} \{ F[X(t), U(t), t] + \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)^T \phi[X(t), U(t), t] \}. \tag{4}$$

2.3. Постановка задачи АКОР Летова–Калмана

Задача АКОР является центральной в современной теории и практике автоматического управления. Ее решение началось с работ, опубликованных в 1960 г. в России А.М. Летовым и в США Р. Калманом. Термин "аналитическое конструирование" был введен профессором А.М. Летовым. Он определил конечную цель АКОР как получение закона управления чисто аналитическим путем, исходя из предъявляемых к качеству управления требований, формализованных в форме интегрального функционала. Теория АКОР достигла в настоящее время высокой степени теоретической завершенности применительно, в первую очередь, к линейным объектам и квадратичным функционалам-критериям качества. Методы АКОР предельно формализованы, их отличает аналитичность и логическая завершенность, они позволяют для линейных, а часто и для нелинейных объектов определить как структуру, так и параметры закона управления, гарантирующего, по меньшей мере, асимптотическую устойчивость замкнутой системы. В настоящее время в теории АКОР получили признание два основных направления, отличающихся формой минимизируемого функционала: метод Летова–Калмана, в котором используется квадратичный функционал качества управления, и метод аналитического конструирования по критерию обобщенной работы, предложенный А.А. Красовским. Предметом данной лабораторной работы является метод Летова–Калмана.

Задача оптимального управления Летова-Калмана формулируется следующим образом: требуется найти управление объектом (1) в форме обратной связи

$$U(X) = U(x_1, x_2, \dots, x_n) \ ,$$

переводящее его из начального состояния $X(t_0 = 0) = X_0$ в конечное нулевое состояние $X(t_k = \infty) = 0$ с минимальным значением квадратичного функционала (2):

$$J = \int_0^\infty [X^T(t)QX(t) + U^T(t)RU(t)]dt \to \min \ .$$

2.4. Процедура решения задачи АКОР Летова–Калмана методом динамического программирования Беллмана

Наиболее приспособленным к решению сформулированной вариационной задачи управления является метод динамического программирования Р.Беллмана, который позволяет определять оптимальное управление непосредственно в форме обратной связи. Рассмотрим решение многомерной задачи АКОР (1) – (3).

Применение метода динамического программирования начинается с записи основного функционального уравнения Беллмана (4) для рассматриваемой стационарной задачи управления (1) - (3):

$$0 = \min_U \{X^T QX + U^T RU + \left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^T (AX + BU)\} \ . \qquad (5)$$

Продифференцируем выражение в фигурных скобках по U :

$$\frac{\partial\{\ldots\}}{\partial U}=(U^T R)^T+RU+\left(\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^T B\right)^T . \qquad (6)$$

Используя матричные вычисления, выражение (6) можно упростить

$$\frac{\partial\{\ldots\}}{\partial U}=2RU+B^T\,\frac{\partial S}{\partial X}\ . \qquad (7)$$

Приравняв частную производную (7) к нулю, находим оптимальное управление

$$U=-\frac{1}{2}R^{-1}B^T\,\frac{\partial S}{\partial X}\ . \qquad (8)$$

Подставив (8) в уравнение Беллмана (4), получим уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ)

$$0=X^T QX-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^T BR^{-1}B^T\,\frac{\partial S}{\partial X}+\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^T AX\ . \qquad (9)$$

Решив уравнение в частных производных (9), учитывая начальное значение *S(0)=0*, можем найти функцию Беллмана. Продифференцировав найденную функцию Беллмана и подставив её в (8) получим искомое оптимальное управление.

Указанная процедура решения задачи АКОР методом динамического программирования полностью выполнима (осуществлена) только для линейных объектов управления.

2.5. Решение задачи АКОР для линейных объектов

В общем виде уравнение (9) решено только для линейных объектов, когда матрицы A и B не зависят от X. Известно, что для линейных объектов уравнение (9) имеет решение в квадратичной форме

$$S(X)=X^T PX. \qquad (10)$$

с симметричной, положительно определенной матрицей P, размерности nxn.
Тогда производная функции Беллмана принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial X}=PX+P^T X=2PX. \qquad (11)$$

Подставив (11) в ГЯБ (9), получаем:

$$0=X^T\{Q+PA+A^T P-PBR^{-1}B^T P\}X.$$

Так как $X\neq 0$, то последнее равенство выполняется, если

$$Q+PA+A^T P-PBR^{-1}B^T P=0. \qquad (12)$$

Уравнение (12) называется матричным уравнением Риккати. Данное уравнение является нелинейным (квадратным относительно матрицы P) и имеет несколько решений. Но решение, удовлетворяющее критерию положительной определенности Сильвестра, единственно.

Решив уравнение (12), мы найдем матрицу P и, соответственно, функцию Беллмана (10). При известной функции Беллмана согласно соотношению (8) легко определяется оптимальное управление

$$U=-R^{-1}B^{T}PX \rightarrow U=-K_{r}X,\ K_{r}=R^{-1}B^{T}P. \qquad (13)$$

Как видим, для задачи АКОР Летова-Калмана с линейным объектом оптимальным регулятором является многомерный пропорциональный регулятор с матрицей коэффициентов усиления K_r.

3. Задания и порядок проведения исследований

Задание. Используя (модифицируя) программный модуль лабораторной работы в Mathcad (см. рис. 2) требуется провести описанные ниже исследования оптимального регулятора для заданного объекта, передаточная функция и параметры которого определяются согласно таблице 1 в зависимости от номера варианта, причем $W_1(s)=\dfrac{k}{s(T_{01}s+1)}$,

$W_2(s)=\dfrac{k}{s(T_{01}s-1)}$, $W_3(s)=\dfrac{k}{(T_{01}s+1)(T_{02}s+1)}$, $W_4(s)=\dfrac{k}{(T_{01}s+1)(T_{02}s+1)}$.

Таблица 1. Параметры передаточных функций

Вариант	*W(s)*	*k*	T_{01}	T_{02}
1	$W_1(s)$	*1*	*0,5*	*0,1*
2	$W_2(s)$	*2*	*0,25*	*0,5*
3	$W_3(s)$	*3*	*0,1*	*0,25*
4	$W_4(s)$	*1*	*0,25*	*0,2*
5	$W_1(s)$	*1*	*0,25*	*1*
6	$W_2(s)$	*2*	*0,05*	*0,25*
7	$W_3(s)$	*4*	*0,08*	*0,24*
8	$W_4(s)$	*4*	*0,5*	*0,1*
9	$W_1(s)$	*2*	*0,5*	*0,25*
10	$W_2(s)$	*3*	*1*	*0,5*
11	$W_3(s)$	*3*	*0,5*	*0,05*
12	$W_4(s)$	*1.5*	*0,25*	*0,2*
13	$W_1(s)$	*2*	*0,75*	*0,01*
14	$W_2(s)$	*5*	*0,45*	*0,1*
15	$W_3(s)$	*3*	*0,9*	*0,05*
16	$W_4(s)$	*2.5*	*0,36*	*0,67*
17	$W_1(s)$	*1.5*	*0,34*	*0,52*
18	$W_2(s)$	*4*	*0,8*	*0,2*
19	$W_3(s)$	*4.5*	*0,7*	*0,12*
20	$W_4(s)$	*3.5*	*0,3*	*0,95*

Вариант	*W(s)*	*k*	T_{01}	T_{02}
21	$W_1(s)$	*5*	*0,1*	*0,6*
22	$W_2(s)$	*4*	*0,8*	*0,3*
23	$W_3(s)$	*1*	*0,65*	*0,5*
24	$W_4(s)$	*2*	*0,45*	*0,55*
25	$W_1(s)$	*4*	*0,72*	*0,35*

Порядок исследований и представления их результатов

1. Создать текстовый блок, содержащий название работы, ФИО студента, номер варианта, отформатировать текст в соответствии с образцом, приведенном на рис. 1.

Лабораторная работа №4.
Аналитическое конструирование оптимального регулятора (АКОР) для линейного объекта

Выпонил: студент гр. 111111 Иванов И.И.
Вариант: N
Дата: 01.10.2017 г.

Рис. 1. Образец форматирования текста

2. Указать передаточную функцию исследуемого объекта и ее параметры

W(p) =

3. Сформировать матрицы A и B описания объекта в каноническом пространстве состояний:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t),$$

A = …………., B = …………. .

4. Задать параметры функционала качества САУ

$$J = \int_0^{\infty} \left(X^T(t) Q X(t) + U^T(t) R U(t) \right) dt$$

Q = ……………. , R = ………………. .

5. Расчет коэффициентов оптимального регулятора

5.1. Составление и решение матричного уравнения Риккати

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

относительно матрицы P.

5.2. Определение оптимального управления

$$U = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial S}{\partial X} = -R^{-1} B^T P X \equiv RX.$$

6. Переходные процессы оптимальной САУ

Исследовать влияние параметров критерия качества на переходные процессы системы с начальными условиями $x_1(0) = 2 - 3$. $x_2(0) = 0$.

7. Выводы по работе:

Ниже приводится пример программного модуля выполнения работы.

1. Описание объекта ORIGIN:= 1

T1 := 1 T2 := 2 k := 1

$$W(p) := \frac{k}{(T1 \cdot p + 1) \cdot (T2 \cdot p + 1)}$$

2. Формирование матриц A и B описания объекта в пространстве состояний (канонический вектор состояния)

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{T1 \cdot T2} & \frac{-1}{T1} - \frac{1}{T2} \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{T1 \cdot T2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1.5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

3. Задание квадратичного функционала качества

q1 := 1 r := 1

q2 := 1

$$Q := \begin{pmatrix} q1 & 0 \\ 0 & q2 \end{pmatrix}$$

4. Контрольное решение задачи АКОР (Ловчакова ВИ)

$a1 := A_{2,1}$ $a2 := A_{2,2}$ $b := B_2$ $a1 = -0.5$ $a2 = -1.5$

$$\beta := \frac{-b^2}{4\cdot r}$$

$k1 := 0.1$

$k2 := 0.0$

$$k1 := \sqrt{\left|\frac{(q1 - a1\cdot q2)}{\beta}\right|}$$

$k1 = 4.899$

Given

$$a1\cdot a2\cdot k2 + \beta\cdot\left(-k1^2 + a1\cdot k2^2\right) = q1 - a1\cdot q2$$

$$k1 + a2\cdot k2 + \beta\cdot k2^2 = -q2$$

$K1 := \mathrm{Find}(k1, k2)$ $K1 = \begin{pmatrix} 1.657 \\ 1.657 \end{pmatrix}$

Элементы матрицы решения уравнения Риккати :

$P22 := \frac{K1_2}{2}$ $P12 := \frac{K1_1}{2}$ $P12 = 0.828$ $P22 = 0.828$

Оптимальное управление : $u(X) := \frac{-b}{2\cdot r}\cdot K1^T\cdot X$ $\frac{-b}{2\cdot r} = -0.25$

$K := \frac{-b}{2\cdot r}\cdot K1^T$ $K = (-0.414 \;\; -0.414)$

5. Решение матричного уравнения Риккати

$$P(p11, p12, p21, p22) := \begin{pmatrix} p11 & p12 \\ p21 & p22 \end{pmatrix}\cdot A + A^T\cdot\begin{pmatrix} p11 & p12 \\ p21 & p22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p11 & p12 \\ p21 & p22 \end{pmatrix}\cdot B\cdot\frac{1}{r}\cdot B^T\cdot\begin{pmatrix} p11 & p12 \\ p21 & p22 \end{pmatrix} + Q$$

Given

$$P(p11, p12, p21, p22) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \frac{p21}{2} - \frac{p12\cdot p21}{4} - \frac{p12}{2} & p11 - \frac{3\cdot p12}{2} - \frac{p22}{2} - \frac{p12\cdot p22}{4} \\ p11 - \frac{3\cdot p21}{2} - \frac{p22}{2} - \frac{p21\cdot p22}{4} & p12 - 3\cdot p22 - \frac{p22^2}{4} + p21 + 1 \end{pmatrix}$$

$p11 := 0$ $p12 := 0$ $p21 := 0$

$P(p11, p12, p21, p22) = 0$

$$\mathrm{Res} := \mathrm{Find}(p11, p12, p21, p22) = \begin{pmatrix} 1.828 \\ 0.828 \\ 0.828 \\ 0.828 \end{pmatrix}$$

5.2.. Расчет оптимального управления

$$P := \begin{pmatrix} \mathrm{Res}_1 & \mathrm{Res}_2 \\ \mathrm{Res}_3 & \mathrm{Res}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.828 & 0.828 \\ 0.828 & 0.828 \end{pmatrix}$$

$$K := -r^{-1} \cdot B^T \cdot P$$

$$U(X) := K \cdot X$$

6. Построение графиков переходных процессов оптимальной САУ

$$F(t, X) := A \cdot X + B \cdot U(X)$$

Начальные условия системы

$t0 := 0$ $\quad tk := 8$ $\quad n := 10000$ $\quad j := 1..n$ $\quad X0 := \begin{pmatrix} 2.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$

Решение системы дифференциальных уравнений и построение графиков переходных процессов оптимальной системы

$$Z1 := \mathrm{Rkadapt}(X0, t0, tk, n, F)$$

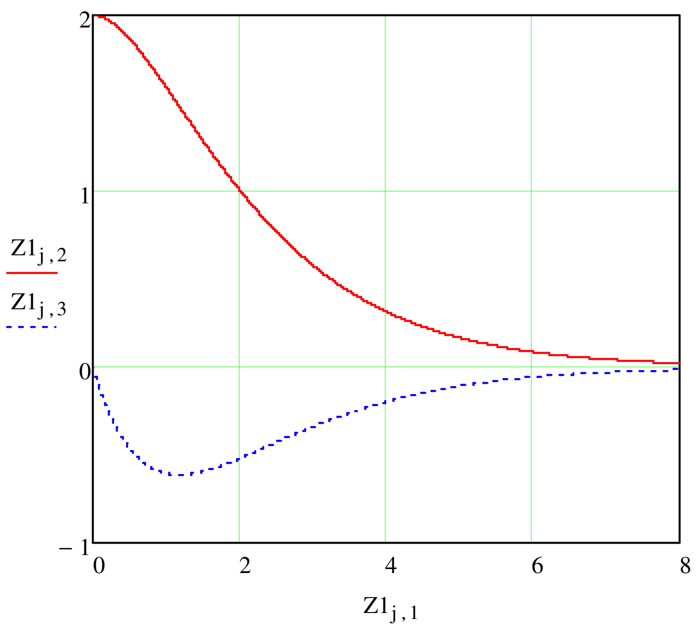

Рис. 2. Программный модуль для выполнения лабораторной работы

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе формируется как листинг из Mathcad выполнения указанных пунктов в порядке исследования с добавлением от руки выводов по работе, формулируемых на основе графиков и числовых данных полученных входе исследований.

5. Контрольные вопросы

1. Сформулировать принцип оптимальности Р. Беллмана, пояснить его физический смысл.
2. Дать определение функции Беллмана, записать функциональное уравнение Беллмана для ее определения.
3. Сформулировать задачу аналитического конструирования оптимального регулятора (АКОР) в постановке Летова-Калмана.
4. Записать для задачи АКОР Летова-Калмана уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана на основе функционального уравнения Беллмана.
5. Указать связь матричного уравнения Риккати с уравнением Гамильтона-Якоби-Беллмана.

Библиографический список

1. Основы теории синтеза оптимальных систем управления электротехническими объектами. / В.И. Ловчаков [и др.]: учебное пособие – Тула: Из-во ТулГУ, 2009. – 160с.
2. Александров А.Г. “Оптимальные и адаптивные системы”. - М.: Высшая школа, 1989. - 264 с.
3. Чураков П.В. Оптимальные и адаптивные системы. - М.: Энергоиздат, 1987. - 256 с.
4. Абдуллаев Н.Д., Петров Ю.П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. - Л.: Энергоатомиздат, 1985. - 240 с.
5. Макаров Н.Н., Феофилов С.В. Применение пакета Mathcad в анализе и синтезе систем автоматического управления. Уч. пособие. – Тула, Изд-во ТулГУ, 2006. – 170 с.