Лабораторная работа №2
Решение алгебраических и дифференциальных уравнений средствами MathCAD

1. Цель работы. Изучить способы применения solve-блока системы MathCAD для решения как алгебраических уравнений, так и обыкновенных дифференциальных уравнений, а также оптимизационных задач.

2. Краткие теоретические сведения
2.1. Решение алгебраических уравнений

Для решения различных математических задач (решение систем алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений, оптимизационных задач) в MathCAD используется так называемый solve-блок, в котором формулируется решаемая задача.

Начнем рассмотрение использования solve-блоков с простого примера: решим квадратное уравнение $x^2 - 2 = 0$. Соответствующий документ MathCAD приведен на рис. 2.1.

Given

$$x^2 - 2 = 0$$

$$\mathrm{Find}(x) \rightarrow \left(\sqrt{2} \quad -\sqrt{2}\right)$$

Рис. 2.1. Решение уравнения в среде MathCAD

Solve-блок начинается с ключевого слова Given. В следующей строке записано рассматриваемое уравнение. Следует обратить внимание, что в записи уравнения используется не операция вычисления (=), а логическое равенство (выделяется жирным шрифтом). Для ввода логического равенства используется комбинация клавиш Ctrl-= или соответствующая кнопка (значок) панели «Boolean Toolbar».

Для решения уравнения использована функция Find, которая применяется для решения уравнений и их систем. Аргументами Find являются переменные задачи: Find(x,y,z).

На рис. 2.1 уравнение решено символьно, т.е. решение уравнения точное. Очень небольшое число уравнений имеет символьное решение.

Дополним задачу условием $x \geq 0$, т.е. найдем только положительный корень уравнения.

Соответствующий документ приведен на рис. 2.2.

Given

$$x^2 - 2 = 0 \qquad x \geq 0$$

$$\mathrm{Find}(x) \rightarrow \sqrt{2}$$

Рис. 2.2. Решение уравнения с дополнительным условием

Как видно из рис. 2.2 solve-блок был дополнен одним условием.

Для задания неравенств в solve-блоке могут быть использованы операции > (больше), < (меньше), ≥ (больше или равно), ≤ (меньше или равно). Первые две операции вводятся нажатием соответствующих кнопок на клавиатуре. Для ввода последних двух операций можно использовать комбинации клавиш Ctrl-9 и Ctrl-0 соответственно или кнопки панели «Boolean Toolbar».

Как уже было сказано далеко не каждая задача может быть решена символьно. К такому уравнению относится, например, уравнение $x^5 + x^2 - 2 = 0$. Решение указанного уравнения приведено на рис. 2.3.

а)	б)
	x := 0
Given	Given
$x^5 + x^2 - 2 = 0$	$x^5 + x^2 - 2 = 0$
Find(x)→	Find(x) = 1

Рис. 2.3. Решения уравнения $x^5 + x^2 - 2 = 0$
а) символьное, б) численное

На рис. 2.3 в символьном решении вызов функции Find выделен красным цветом, так как пакет MathCAD не смог найти символьное решение задачи.

В численном решении перед solve-блоком добавилась строка x:=0. Она необходима, т.к. численным методам решения задач требуется задание некоторого начальное приближения к решению. В ряде задач полученный ответ сильно зависит от выбора начального приближения, например, задавая разные начальные приближения можно найти разные корни алгебраического уравнения.

Решение систем уравнений выполняется аналогично одиночному уравнению. В solve-блок записываются все уравнения системы. Решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 2 = 0, \\ x_1 + x_2 + 1 = 0; \end{cases}$$

показано на рис. 2.4.

x1 := 0 x2 := 0

Given

$x1^2 + x2^2 - 2 = 0$ $x1 + x2 + 1 = 0$

$$\mathrm{Find}(x1, x2) = \begin{pmatrix} -1.366 \\ 0.366 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.4. Пример решения системы уравнений

2.2. Решение оптимизационных задач

Для решения оптимизационных задач в MathCAD предусмотрено 2 функции: Minimize и Maximize для решения задач на минимум и максимум соответственно.

Формат вызова функций: Minimize(f, x1, x2), где f – целевая функция, x1, x2 – перечень ее переменных.

Пример решения оптимизационной задачи

$$\bar{\mathbf{x}}^* = \arg\min_{\bar{\mathbf{x}}\in R^3}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 - 8x_2 - 12x_3 + 100\right)$$

приведен на рис. 2.5.

В случае пустого solve-блока (а указанная выше задача является задачей безусловной оптимизации, т.е. нет никаких дополнительных ограничений) ключевое слово Given можно не указывать, а сразу вызывать функцию Minimize.

$x1 := 0 \qquad x2 := 0 \qquad x3 := 0$

$f(x1,x2,x3) := x1^2 + x2^2 + x3^2 - 4\cdot x1 - 8\cdot x2 - 12\cdot x3 + 100$

Given

$$\text{Minimize}(f, x1, x2, x3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.5. Пример решения оптимизационной задачи

2.3. Решение дифференциальных уравнений

При исследовании и проектировании систем автоматического управления (САУ) особое место среди прочих математических задач занимает решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Это объясняется тем, что САУ представляют собой сугубо динамические системы, и исследователя (проектировщика) интересуют в них не статические состояния, а протекающие в них процессы, движения, характеризующиеся изменениями каких-то величин с течением времени. Именно обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) являются наиболее подходящим математическим аппаратом для описания движения САУ. Поэтому всякое исследование САУ всегда явно или неявно связано с решением дифференциальных уравнений.

Рассмотрим решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием решающего *Odesolve*-блока, который является аналогом ранее использованного *solve*-блока. Подчеркнем, что внутри данного решающего блока дифференциальное уравнение записывается в традиционной форме, а не в нормальной форме - форме Коши.

В качестве примера рассмотрим решение ОДУ

$$10^{-6}\,\ddot{x}(t) + 2\cdot 10^{-4}\,\dot{x}(t) + x(t) = \sin(t),$$

которым описывается колебательное звено с параметрами $T = 10^{-3}, \quad \xi = 0.1, \quad K = 1$ при синусоидальном входном сигнале.

В решающем *Odesolve*-блоке это дифференциальное уравнение записывается в классической математической форме с добавлением начальных условий – см. рис. 2.6.

$T := 0.001$ $\qquad \xi := 0.1 \qquad K := 1$

Given $\qquad x(0) = 1 \qquad x'(0) = 0$

$$T^2 \cdot x''(t) + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot x'(t) + x(t) = K \cdot \sin(t) \qquad x := \mathrm{Odesolve}(t, 4, 100)$$

Рис. 2.6. Пример решения задачи Коши

После такого присвоения переменная *x* стала именем функции одного действительного аргумента, определённой на отрезке [0; 4], которая является решением содержащейся в решающем блоке задачи Коши. Например, можно вывести значение этой функции в желаемый момент времени:

$x(0) = 1 \qquad x(0.01) = 0.696$.

Для того чтобы в решающем блоке ввести символ дифференцирования - штрих, надо нажать <Ctrl>+F7.

Аргументами *Odesolve* являются: имя свободной переменной, конечное значение (правая граница) интервала решения и необязательный параметр – количество шагов в решении, который косвенно управляет величиной шага интегрирования.

Заметим, что изображать производную штрихом можно только внутри решающего блока, вне него этот символ не работает. Там надо пользоваться обычным символом дифференцирования с панели «Calculus»:

$$y(t) := \frac{d}{dt}x(t) \qquad y(0) = 0$$

Внутри решающего блока, впрочем, тоже можно использовать обычный символ дифференцирования MathCAD, но только не в начальных условиях:

Given $\qquad x'(0) = 0 \qquad x(0) = 1$

$$T^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot \left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + x(t) = K \cdot \sin(t) \qquad y := \mathrm{Odesolve}(t, 4, 1000)$$

Решающий блок лишь формирует обращение к конкретным сольверам (решающим процедурам). При этом выбирать тип сольвера можно лишь в контекстном меню (щелчок правой кнопкой мыши на слово *Odesolve*), причём доступны три варианта: **fixed** (постоянный шаг), **adaptive** (с выбором шага) и **stiff** (для жёстких ОДУ).

Для того чтобы построить графики полученных решений, нет нужды формировать векторы абсцисс и ординат, достаточно поставить имя неопределённой ранее переменной на ось абсцисс и функцию от этой переменной - на ось ординат:

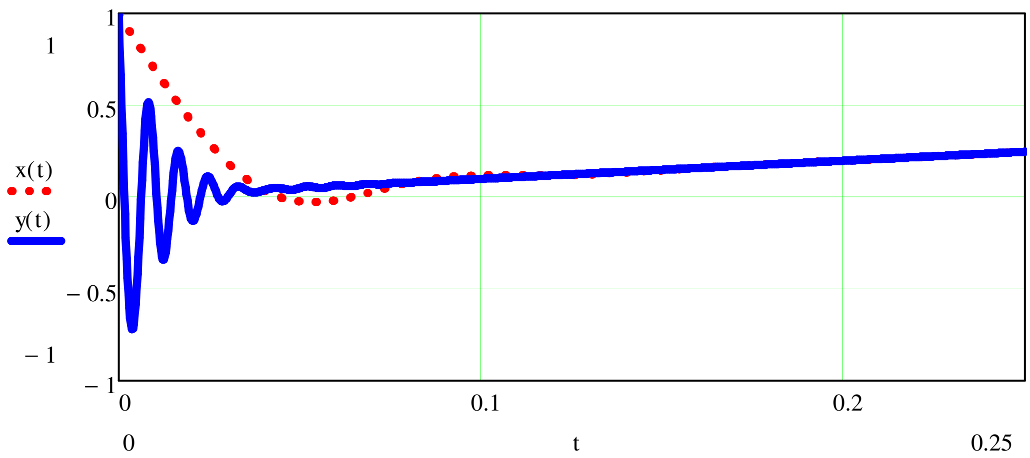

Рис. 2.7. Пример решения задачи Коши

Два графика на последнем рисунке изображают решение одной и той же системы одним и тем же (адаптивным) методом, но с разным количеством шагов. Графики совсем непохожи вначале переходного процесса и практически сливаются после 0.1 секунды. Серьёзные отличия вначале процесса – не ошибка решения, а следствие выбора слишком малого количества точек на процессе (слишком большого шага при выдаче результата): для процесса **x** вычисляется 100 точек, а остальные при необходимости интерполируются; для процесса **y** рассчитано 1000 точек. Нетрудно убедиться, что в моменты времени, кратные 0.04 (шаг по времени для **x**) графики совпадают.

Решающий блок может содержать и систему дифференциальных уравнений не обязательно первого порядка. Должны выполняться только два условия – достаточное количество начальных условий и линейность каждого ОДУ относительно старшей производной. Для того чтобы *Odesolve* возвратила вектор – функцию, первым её аргументом должен быть вектор с именами переменных, которые должны быть вычислены.

Given

$x(0) = 1 \qquad x'(0) = 0 \qquad z(0) = 1 \qquad z'(t) = x(t)$

$T^2 \cdot x''(t) + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot x'(t) + x(t) = \sin(10 \cdot t) \qquad y1 := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}, t, 2\right]$

Теперь y1 – вектор, содержащий в качестве элементов две функции. Для того чтобы как-то воспользоваться этими функциями, надо присвоить их каким-то другим именам:

$y1_0 = \mathrm{function} \qquad z1 := y1_0 \qquad z2 := y1_1$

$z1(0.1) = 1.04 \qquad z2(0.1) = 0.84$

Проще, да и правильнее, слева от *Odesolve* также использовать вектор соответствующей размерности. Пример, приведённый ниже, содержит одно уравнение третьего порядка и одно – первого:

Given $\quad x(0) = 1 \qquad x'(0) = 0 \qquad x''(0) = 0 \qquad z(0) = 1$

$2 \cdot x'''(t) + T^2 \cdot x''(t) + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot x'(t) + x(t) = \sin(t)$

$z'(t) = x(t)$ $\qquad\qquad \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}, t, 10, 100\right]$

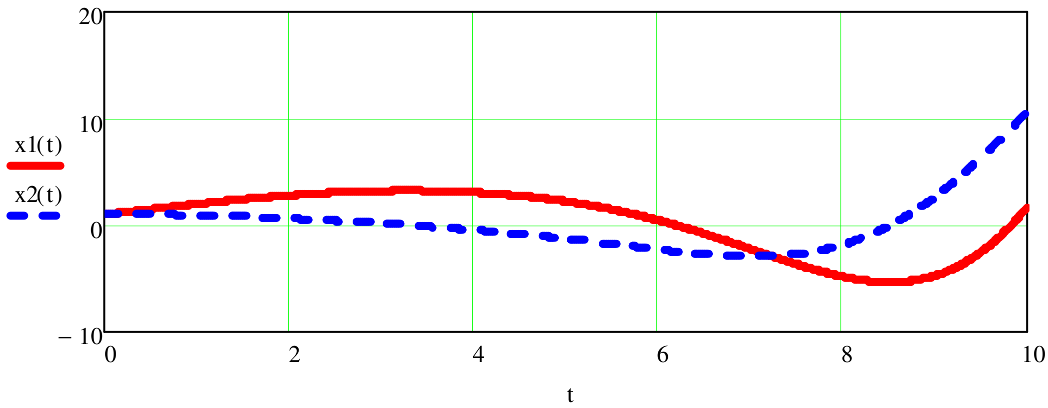

Рис. 2.8. Пример решения задачи ОДУ

Нередко возникает потребность получить не только решение ОДУ старшего порядка, но и его производную (производные). Казалось бы, достаточно добавить к вектору выходных функций соответствующий символ x’, но MathCAD этого не допускает. Он требует, чтобы размерность выходного вектора строго равнялась количеству дифференциальных уравнений в решающем блоке.

3. Задания и порядок проведения исследований

3.1. Создать текстовый блок, содержащий название работы, номер варианта, ФИО студента, отформатировать текст в соответствии с образцом, приведенном на рис. 2.9.

Лабораторная работа №2
Решение алгебраических и дифференциальных уравнений средствами MathCAD

Выпонил:	студент гр. 111111 Иванов И.И.
Вариант:	N
Дата:	16.02.2016 г.

Рис. 2.9. Образец форматирования текста

3.2. Решить систему уравнений из таблицы 2.1. с использованием функции Find численно и символьно.

3.3. Решить численно оптимизационную задачу на минимизацию целевой функции в заданной области с использованием функции Minimize. Целевые функции и области для поиска минимумов приведены в таблице 2.2.

3.4. Решить однородное дифференциальное уравнение, соответствующее передаточной функции $W(s) = \dfrac{k}{(T_{01}s+1)(T_{02}s+1)}$ системы управления с параметрами, указанными в таблице 2.3. ОДУ решить при начальных условиях

1) $x(0)=1,\quad x'(0)=1.5$; 2) $x(0)=1,\quad x'(0)=-1.5$. Построить графики переходных процессов системы.

Таблица 2.1. Системы уравнений

№	Система уравнений	№	Система уравнений
1	$\begin{cases} x_1^2+x_2^2-4=0, \\ 3x_1+4x_2-1=0; \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_1^2-x_2^2-4x_1+6x_2-16=0, \\ x_2-5+x_1^2=0; \end{cases}$
2	$\begin{cases} e^{x_1x_2}+4x_2^2-16=0, \\ x_1+x_2-1=0; \end{cases}$	17	$\begin{cases} 5x_1^2+4x_1x_2+x_2^2-16x_1-12x_2-17=0, \\ x_1^2+x_2^2-3=0; \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1+x_2-2=0, \\ 5x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+x_2-16=0; \end{cases}$	18	$\begin{cases} x_1^2+x_2^2-x_1x_2+x_1-2x_2-18=0, \\ x_1+x_2-5=0; \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1^2+12x_1x_2+2x_2^2-3=0; \\ 4x_1^2+x_2^2-25=0; \end{cases}$	19	$\begin{cases} x_1^4+x_2^2-4x_1x_2-16=0, \\ 2x_1+7x_2-15=0; \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1^2+x_2^2-6=0, \\ x_1+x_2-1=0; \end{cases}$	20	$\begin{cases} x_1^3+2x_2+x_1x_2-19=0, \\ 2x_1+7x_2+15=0; \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1+2x_2+2=0, \\ x_1^2+x_2^2-1=0; \end{cases}$	21	$\begin{cases} x_1^3x_2+2x_2^2x_1+x_1x_2-12=0, \\ 3x_1+17x_2+19=0; \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1^2-6x_1-6x_2-17=0, \\ 5x_1+x_2-1=0; \end{cases}$	22	$\begin{cases} 5x_1^3-x_2+3x_1x_2+2=0, \\ x_1^2-x_2-4=0; \end{cases}$
8	$\begin{cases} x_1x_2-3=0, \\ x_1^2-x_2^2-2=0; \end{cases}$	23	$\begin{cases} 7x_1^4+x_2x_1+9x_1^2x_2-17=0, \\ 3x_1^4-3x_2-14=0; \end{cases}$
9	$\begin{cases} -x_1^3+x_2^3-x_2+x_1-5=0, \\ x_1+x_2-1=0; \end{cases}$	24	$\begin{cases} x_1e^{x_1}-\left(1+e^{x_1}\right)\sin x_2-9=0; \\ x_1+x_2-3=0; \end{cases}$
10	$\begin{cases} 19x_2^3+x_1+3x_1^2-x_2-17=0, \\ x_1+5x_2+6=0; \end{cases}$	25	$\begin{cases} x_1^2-x_2^2-4x_1+6x_2-15=0, \\ x_1^2-x_2-3=0; \end{cases}$
11	$\begin{cases} 9x_1^3+x_2^3+3x_1^2-x_2=0, \\ x_1^3+1=0; \end{cases}$	26	$\begin{cases} 3x_1x_2+x_1^2x_2+x_1x_2^2+17=0, \\ x_1+x_2^2-3=0; \end{cases}$
12	$\begin{cases} 3x_2^3+13x_1^2+3x_2^2-13=0, \\ x_1^2+x_2^2-1=0; \end{cases}$	27	$\begin{cases} 19x_2^3+x_1+3x_1^2-x_2-15=0, \\ 19x_1+11x_2-3=0; \end{cases}$
13	$\begin{cases} 7x_1^3+x_2^2x_1+9x_1^2x_2-19=0, \\ x_1+x_2-1=0; \end{cases}$	28	$\begin{cases} -x_1^3+x_2^3-x_2+x_1-15=0, \\ x_1^2+x_2-7=0; \end{cases}$
14	$\begin{cases} x_1^3-13x_2^2+9x_1x_2-x_2+x_1-9=0, \\ 2x_1+5x_2-1=0; \end{cases}$	29	$\begin{cases} -x_1x_2+\dfrac{50}{x_1}+\dfrac{20}{x_2}-3=0, \\ x_1+x_2-56=0; \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1^2+3x_2^2+7x_1x_2-x_2+x_1=0, \\ x_1^2+x_2-x_1-2=0; \end{cases}$	30	$\begin{cases} -13x_1^2-11x_2^2x_1-2x_2^2+17=0, \\ x_1+x_2-56=0; \end{cases}$

Таблица 2.2. Целевые функции

№	Целевая функция и область поиска	№	Целевая функция
1	$f(x_1,x_2)=x_1^3+13x_2^2-9x_1-x_2$ $x_1\in[-10;10]\ \ x_2\in[-3;3]$	16	$f(x_1,x_2)=7x_1^4+x_2x_1+9x_1^2x_2$ $x_1\in[-3;5]\ \ x_2\in[-1;5]$
2	$f(x_1,x_2)=x_1^2+25x_2^2+x_1x_2-5x_2+x_1$ $x_1\in[-3;3]\ x_2\in[-10;10]$	17	$f(x_1,x_2)=5x_1^3+x_2+3x_1x_2$ $x_1\in[-2;2]\ \ x_2\in[-3;3]$
3	$f(x_1,x_2)=17x_1^4-9x_1x_2-x_1^2+x_2^2+17$ $x_1\in[-10;10]\ \ x_2\in[-3;3]$	18	$f(x_1,x_2)=4x_1^2+x_2^2-12x_1x_2-3x_1$ $x_1\in[-10;10]\ \ x_2\in[-3;3]$
4	$f(x_1,x_2)=-17x_1^3+19x_1^2x_2+x_1-x_2-17$ $x_1\in[-3;3]\ x_2\in[-10;10]$	19	$f(x_1,x_2)=x_1^3x_2+2x_2^2x_1+x_1x_2$ $x_1\in[-1;10]\ \ x_2\in[-2;6]$
5	$f(x_1,x_2)=13x_1^3-11x_2x_1+x_1+21$ $x_1\in[-10;10]\ \ x_2\in[-3;3]$	20	$f(x_1,x_2)=x_1^3+2x_2+x_1x_2$ $x_1\in[-1;10]\ \ x_2\in[-2;6]$
6	$f(x_1,x_2)=13x_1^2+x_2^2x_1+2x_2^2+x_1-17$ $x_1\in[-3;3]\ x_2\in[-10;10]$	21	$f(x_1,x_2)=x_1x_2^2+x_1^2x_2-3x_1^2-3x_2^2$ $x_1\in[-10;10]\ \ x_2\in[-2;5]$
7	$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+2x_2+2x_1+7$ $x_1\in[-10;10]\ \ x_2\in[-3;3]$	22	$f(x_1,x_2)=x_1e^{x_1}-\left(1+e^{x_1}\right)\sin x_2$ $x_1\in[-10;10]\ \ x_2\in[-2;5]$
8	$f(x_1,x_2)=x_1^3+x_2^2-2x_2-2x_1+7$ $x_1\in[-3;3]\ x_2\in[-10;10]$	23	$f(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^2-4x_1x_2$ $x_1\in[-10;10]\ \ x_2\in[-3;3]$
9	$f(x_1,x_2)=2x_1^4+x_2^4-x_2+x_1$ $x_1\in[-10;10]\ \ x_2\in[-3;3]$	24	$f(x_1,x_2)=3x_1x_2-x_1^2x_2-x_1x_2^2$ $x_1\in[-10;10]\ \ x_2\in[-3;3]$
10	$f(x_1,x_2)=-x_1^3+x_2^3-x_2+x_1$ $x_1\in[-10;10]\ \ x_2\in[-3;3]$	25	$f(x_1,x_2)=x_1^3+x_2^3-3x_1x_2$ $x_1\in[1;5]\ \ x_2\in[-2;3]$
11	$f(x_1,x_2)=19x_2^3+x_1+3x_1^2-x_2$ $x_1\in[-2;2]\ x_2\in[-5;5]$	26	$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+x_1x_2-x_1$ $x_1\in[-2;5]\ \ x_2\in[-2;3]$
12	$f(x_1,x_2)=9x_1^3+x_2^3+3x_1^2-x_2$ $x_1\in[-2;3]\ \ x_2\in[-6;-9]$	27	$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-x_1x_2+x_1-2x_2$ $x_1\in[-2;5]\ \ x_2\in[-2;3]$
13	$f(x_1,x_2)=3x_2^3+13x_1^2+3x_2^2$ $x_1\in[-1;1]\ x_2\in[-2;2]$	28	$f(x_1,x_2)=5x_1^2+4x_1x_2+x_2^2-16x_1-12x_2$ $x_1\in[-3;3]\ \ x_2\in[-2;1]$
14	$f(x_1,x_2)=3x_1^5+x_2^2x_1+11x_1^2x_2+x_1^3$ $x_1\in[-1;1]\ x_2\in[-2;2]$	29	$f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2-4x_1+6x_2$ $x_1\in[-3;3]\ \ x_2\in[-10;1]$
15	$f(x_1,x_2)=7x_1^5+x_2^2x_1+9x_1^2x_2$ $x_1\in[1;5]\ x_2\in[-1;1]$	30	$f(x_1,x_2)=x_1x_2+\dfrac{50}{x_1}+\dfrac{20}{x_2}$ $x_1\in[-3;10]\ \ x_2\in[-10;10]$

Таблица 2.3. Параметры передаточных функций

Вариант	k	T_{01}	T_{02}
1	1	0,5	0,1
2	2	0,25	0,5
3	3	0,1	0,25
4	1	0,25	0,2
5	1	0,25	1
6	2	0,05	0,25
7	4	0,08	0,24
8	4	0,5	0,1
9	2	0,5	0,25
10	3	1	0,5
11	3	0,5	0,05
12	1.5	0,25	0,2
13	2	0,75	0,01
14	5	0,45	0,1
15	3	0,9	0,05
16	2.5	0,36	0,67
17	1.5	0,34	0,52
18	4	0,8	0,2
19	4.5	0,7	0,12
20	3.5	0,3	0,95
21	5	0,1	0,6
22	4	0,8	0,3
23	1	0,65	0,5
24	2	0,45	0,55
25	4	0,72	0,35

4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе формируется как листинг из MachCAD выполнения указанных пунктов в порядке исследования с добавлением от руки выводов по работе, формулируемых на основе графиков и числовых данных полученных входе исследований.

5. Контрольные вопросы

1. Пояснить ввод уравнений и неравенств в блоке Given; указать различие действия операторов «=» и «**=**».

2. Пояснить выполнение в пакете Mathcad аналитического и численного способов решения алгебраического уравнения, указать их принципиальное различие.

3. Указать каким образом выбирается начальное приближение при численном решении алгебраического уравнения.

4. Пояснить смысл входных параметров в решающем *Odesolve*-блоке.

5. Указать особенности использования *Odesolve*-блока при решении систем дифференциальных уравнений в отличие от решения одного уравнения.

Библиографический список

1. Дьяконов В.П. Mathcad 11/12/13 в математике: справочник / В.П. Дьяконов. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 958с.

2. Макаров Н.Н., Феофилов С.В. Применение пакета Mathcad в анализе и синтезе систем автоматического управления. Уч. пособие. – Тула, Изд-во ТулГУ, 2006. – 170 с.

3. Капалин В.И. Шаповалова Н.Е. Линейные системы управления в системе компьютерной математики Mathcad. Уч. пособие. – М. Изд-во Перо, 2013. – 132 с.