

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4

### Исследование систем управления в пространстве состояний

**1. Цель работы.** Изучение методики составления уравнений объекта в пространстве состояний, способов нахождения фазовых траекторий объекта и решения дифференциальных уравнений Коши в среде Mathcad.

## 2. Краткие теоретические сведения

### 2.1. Модель в пространстве состояний

Объект управления (ОУ) по определению представляет совокупность технических устройств, нуждающихся в специальном организационном воздействии (управлении) для получения целевого результата – (рис. 1).

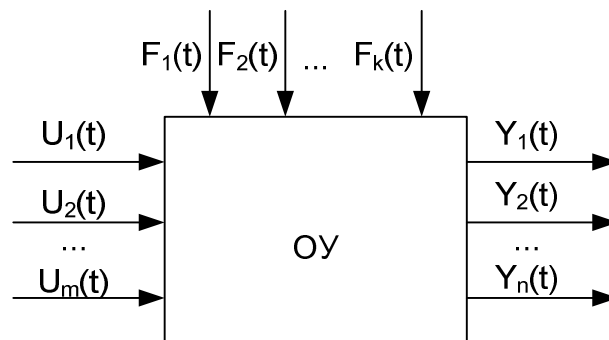


Рис. 1. Объект управления

Величины, оказывающие влияние на поведение объекта называются воздействиями. Выделяют следующие векторы воздействий:

$U(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix}$  - вектор управляющих воздействий (управлений);

$F(t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_k \end{pmatrix}$  - вектор возмущающих воздействий, описывающих

влияние окружающей среды на данный объект;

$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$  - вектор выходных сигналов – сигналов датчиков,

установленных на ОУ.

При описании ОУ в пространстве состояний вводится дополнительный вектор состояний или вектор фазовых координат объекта

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

По определению вектор  $X(t)$  называется вектором состояния объекта, если он обладает следующими двумя свойствами:

1) для данного ОУ вектор состояния должен иметь минимальную размерность;

2) размерность должна быть достаточной для того, чтобы, зная начальное состояние  $X(t_0)$  и входные воздействия на объект, рассчитать состояние объекта в следующий момент времени  $X(t_0 + \Delta t)$ .

В теории автоматического управления для объектов, движение которых описывается дифференциальным уравнением  $n$ -ого порядка, часто используется канонический вектор состояния

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

образованный из производных выходного сигнала объекта. Возможность использования этого вектора в качестве вектора состояния объекта вытекает из теории дифференциальных уравнений, из которой известно, что решение  $y(t)$  дифференциального уравнения  $n$ -ого порядка можно однозначно определить, задав  $n$  начальных условий: функцию  $y(t_0)$  в начальный момент времени и ее производные  $y^{(i)}(t_0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , т.е. задав вектор состояния в начальный момент времени  $X(t_0)$ . При этих условиях можно рассчитать решение  $y(t)$  и найти значение вектора (11) в любой момент времени – следовательно, согласно определению вектор (11) является вектором состояния для рассматриваемого объекта.

При выборе вектора состояния для исследуемого ОУ используется два подхода:

1) физический подход – компоненты вектора состояния выбираются таким образом, чтобы они имели ясный физический смысл;

2) математический подход – вектор состояния выбирается таким образом, чтобы задача управления математически решалась наиболее простым способом.

Для решения задач анализа и синтеза строится математическая модель объекта управления, представляющая собой ряд математических соотношений между компонентами указанных векторов, позволяющих при заданных входных воздействиях рассчитать значения выходных сигналов объекта.

В пространстве состояний модель ОУ представляет собой систему дифференциальных уравнений, записанных в форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \varphi_i[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), f_1(t), \dots, f_k(t)], \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ y_j(t) &= n_j[x_1(t), \dots, x_n(t)], \quad j = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (12a)$$

или в векторной форме

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \Phi[X(t), U(t), F(t)], \\ Y(t) = N[X(t)]. \end{cases} \quad (12б)$$

Первое уравнение (12б), являющееся дифференциальным, называется уравнением состояния объекта, а второе алгебраическое – уравнением наблюдения (измерений) объекта.

Часто используются линейные модели объектов, в которых функции  $\Phi(\cdot)$ ,  $N(\cdot)$  являются линейными функциями своих аргументов:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \\ Y(t) = CX(t), \end{cases} \quad (13)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – матрицы параметров объекта соответствующих размерностей.

**Пример.** Рассмотрим ОУ, заданный следующей передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \quad (14)$$

Составим описание данного объекта в пространстве состояний с каноническим вектором состояний. С этой целью предварительно запишем соответствующее дифференциальное уравнение объекта по его передаточной функции:

$$W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

или

$$\begin{aligned} (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)Y(p) &= KU(p), \\ (T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1)Y(p) &= KU(p). \end{aligned}$$

Так как передаточная функция определяется как отношение преобразований Лапласа выходной величины к входной при нулевых начальных условиях, то  $p \equiv \frac{d}{dt}$ ,  $y(t) = Y(p)$ ,  $\dot{y}(t) = pY(p)$ ,  $\ddot{y}(t) = p^2 Y(p)$ . С использованием данных соотношений переходим от операторного уравнения к дифференциальному

$$T_1 T_2 \ddot{y}(t) + (T_1 + T_2) \dot{y}(t) + y(t) = KU(t). \quad (15)$$

С использованием канонического вектора состояний

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \quad (16)$$

дифференциальному уравнению (15) второго порядка и можно поставить в соответствие систему двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{T_1 T_2} x_2(t) - \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2} U(t) \end{cases} \quad (17)$$

Уравнения (17) представляют описание объекта (14) в фазовом пространстве с вектором состояний (16).

Модель объекта (17) можно записать в матричном виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} & -\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{T_1 T_2} \end{pmatrix} U(t), \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

с матрицами параметров

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} & -(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{T_1 T_2} \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0). \quad (19)$$

## 2.2. Решение дифференциальных уравнений Коши в Mathcad

Запись моделей в единой форме (12) (форме Коши) позволяет отвлечься от смысла переменных состояния и исследовать системы разной природы стандартными методами, которые хорошо разработаны и реализованы в современных компьютерных программах. Например, в пакете Mathcad для решения систем дифференциальных уравнений (12) разработаны следующие функции (процедуры): rkadapt, Rkadapt, rkfixed, Bustoer.

Эти функции имеют аналогичное обращение к ним, которое поясним на примере функции Rkadapt(X0, t0, tk, N, F).

Rkadapt(X0, t0, tk, N, F) - ищет решение дифференциального уравнения или системы с использованием метода Рунге - Кутты с переменным шагом (там, где решение меняется медленнее, шаг увеличивается, а в области быстрого изменения решения шаг функции уменьшается). Возвращается решение с равным шагом, определяемым числом точек N.

Аргументы вышеуказанной функции имеют следующий смысл:

X0 - вектор начальных условий;

t0, tk - границы интервала для поиска решения;

N - количество точек на интервале;

F(t,X) - вектор-функция первых производных – правых частей уравнений Коши.

В результате работы указанных функций рассчитывается матрица, количество столбцов которой на единицу больше числа уравнений системы, а количество строк равно параметру N. Первый столбец содержит значения независимой переменной t, второй – значения первой фазовой координаты, третий - значения второй фазовой координаты системы и т.д. – см. пример.

## 2.3. Способы расчета фазовых траекторий объекта

Существует 4 способа построения фазовых траекторий. Рассмотрим их содержание на примере объекта с передаточной функцией интегратора второго порядка  $W(p) = \frac{K}{p^2}$ , который в каноническом фазовом пространстве описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = KU(t) \end{cases} \quad (20)$$

Для простоты расчетов построение фазовых траекторий проведем при единичном ступенчатом управляющем воздействии  $U(t) = 1(t)$ .

**Способ 1.** Основан на решении системы дифференциальных уравнений (20) или дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x}_1(t) = KU(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad \dot{x}_1(0) = x_2(0) = x_{20}$$

и единичном ступенчатом входном воздействии  $U(t) = 1(t)$  :

$$\int \dot{x}_2(t) dt = \int K \cdot 1(t) dt \Rightarrow x_2(t) = Kt + C_1.$$

Определим фазовую координату  $x_1(t)$  из первого уравнения системы (20)

$$x_1(t) = \int x_2(t) dt = \frac{1}{2} Kt^2 + C_1 t + C_2.$$

Найдем постоянные интегрирования  $C_1, C_2$  из начальных условий

$$x_2(0) = x_{20} = C_1,$$

$$x_1(0) = x_{10} = C_2.$$

В результате получаем

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} Kt^2 + x_{20}t + x_{10}, \\ x_2(t) = Kt + x_{20}. \end{cases} \quad (21)$$

Уравнения (21) параметрической форме описывают фазовую траекторию системы – зависимость одной фазовой координаты объекта от другой, т.е. функцию  $x_1 = f(x_2)$  (или  $x_2 = f(x_1)$ ).

**Способ 2.** Состоит в исключении времени  $t$  из системы уравнений (21).

Подставляя значение  $t = \frac{1}{K}(x_2 - x_{20})$  из второго уравнения системы уравнений (21) в первое, получаем

$$x_1 = \frac{1}{2K} x_2^2 + x_{10} - \frac{1}{2K} x_{20}^2 \quad (22)$$

явное уравнение фазовой траектории системы – параболическую зависимость фазовых координат между собой.

**Способ 3.** Исключение времени непосредственно из системы дифференциальных уравнений (20). Для этого перепишем эту систему уравнений в развернутом виде:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = K. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение данной системы на второе:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{1}{K} x_2 \quad (23)$$

- найдем дифференциальное уравнение фазовой траектории объекта.

Решив уравнение (23) при соответствующих начальных условиях, получим уравнение фазовой траектории объекта

$$\int \frac{dx_1}{dx_2} dx_2 = \int \frac{1}{K} x_2 dx_2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2K} x_2^2 + C$$

- ту же самую параболу (22).

**Способ 4** представляет развитие и уточнение способа 3. Часто уравнение фазовой траектории (23) получается сложным, которое аналитически не решается. В том случае решение дифференциальное уравнение фазовой

траектории находится численно с последующим построением графика зависимости  $x_1 = f(x_2)$ .

### 3. Задания и порядок проведения исследований

**Задание.** Используя (модифицируя) программный модуль лабораторной работы в Mathcad (см. рис. 3) требуется провести описанные ниже исследования для заданного объекта, передаточная функция и параметры которого определяются согласно таблице 1 в зависимости от номера варианта, причем для четных вариантов  $W(s) = \frac{k}{s(T_{01}s + 1)}$ , а для

нечетных –  $W(s) = \frac{k}{(T_{01}s + 1)(T_{02}s + 1)}$ .

**Таблица 1.** Параметры передаточных функций

Вариант	$k$	$T_{01}$	$T_{02}$
1	1	0,5	0,1
2	2	0,25	0,5
3	3	0,1	0,25
4	1	0,25	0,2
5	1	0,25	1
6	2	0,05	0,25
7	4	0,08	0,24
8	4	0,5	0,1
9	2	0,5	0,25
10	3	1	0,5
11	3	0,5	0,05
12	1,5	0,25	0,2
13	2	0,75	0,01
14	5	0,45	0,1
15	3	0,9	0,05
16	2,5	0,36	0,67
17	1,5	0,34	0,52
18	4	0,8	0,2
19	4,5	0,7	0,12
20	3,5	0,3	0,95
21	5	0,1	0,6
22	4	0,8	0,3
23	1	0,65	0,5
24	2	0,45	0,55
25	4	0,72	0,35

### **Порядок исследований и представления их результатов**

1. Создать текстовый блок, содержащий название работы, ФИО студента, номер варианта, отформатировать текст в соответствии с образцом, приведенном на рис. 2.

#### **Лабораторная работа №4.**

#### **Исследование систем управления в пространстве состояний**

Выполнил:	студент гр. 111111 Иванов И.И.
Вариант:	N
Дата:	01.03.2016 г.

Рис. 2. Образец форматирования текста

2. Указать передаточную функцию объекта и ее параметры

$W(p) =$

3. Сформировать матрицы  $A$  и  $B$  описания объекта в каноническом пространстве состояний.

4. Сформировать вектор-функцию  $F(t, X)$  правой части описания системы управления в форме Коши при  $u(t)=1(t)$ .

5. Задать начальные условия объекта  $x_1(0) = 0$  и  $x_2(0) = 0$ , решить систему дифференциальных уравнений, описывающих САУ и построить графики ее переходных процессов – графики изменения ее фазовых координат (заметим, они при указанных условиях совпадают с графиками переходной и весовой функций системы).

6. Используя матрицу  $Z$  решения системы дифференциальных уравнений построить фазовую траекторию САУ.

7. Аналитическое (аналитически-численное) определение фазовых траекторий системы.

Дать вывод уравнения фазовой траектории объекта и рассчитать ее любым другим методом, указанным в теоретической части работы.

8. Выводы по работе (о соответствии результатов п.5 и п.6)

Пример программного модуля выполнения лабораторной работы.

# Лабораторная работа № 3.

## Исследование САУ в пространстве состояний

Выполнил: студент гр. 111111 Иванов И.И.  
Вариант: N  
Дата: 01.03.2016 г.

### 2. Описание объекта

$$T1 := 1 \quad T2 := 2 \quad K := 2$$
$$W(p) := \frac{K}{(T1 \cdot p + 1) \cdot (T2 \cdot p + 1)}$$

### 3. Формирование матриц A и B описания объекта в пространстве состояний

$$ORIGIN := 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{T1 \cdot T2} & \frac{-1}{T1} - \frac{1}{T2} \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{T1 \cdot T2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1.5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### 4. Формирование вектор-функции F(t, X) правой части описания САУ

$$F(t, X) := A \cdot X + B \cdot \Phi(t)$$

### 5. Начальные условия системы

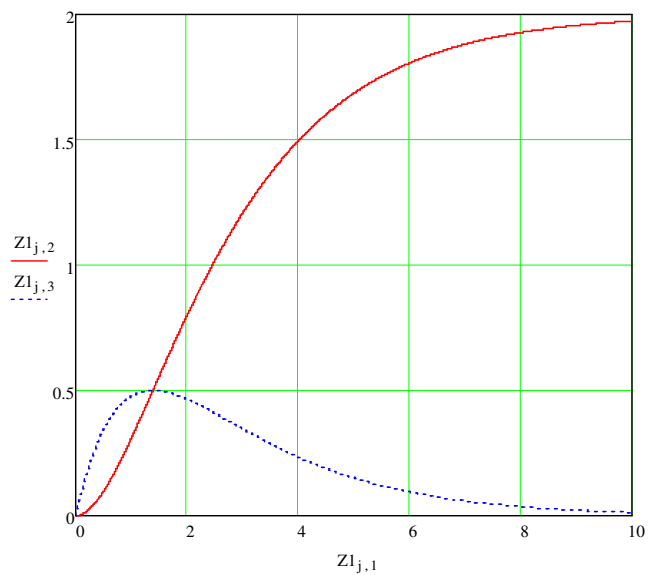
$$t0 := 0 \quad tk := 10 \quad n := 1000 \quad j := 1..n \quad X0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение системы дифференциальных уравнений и построение графиков pp

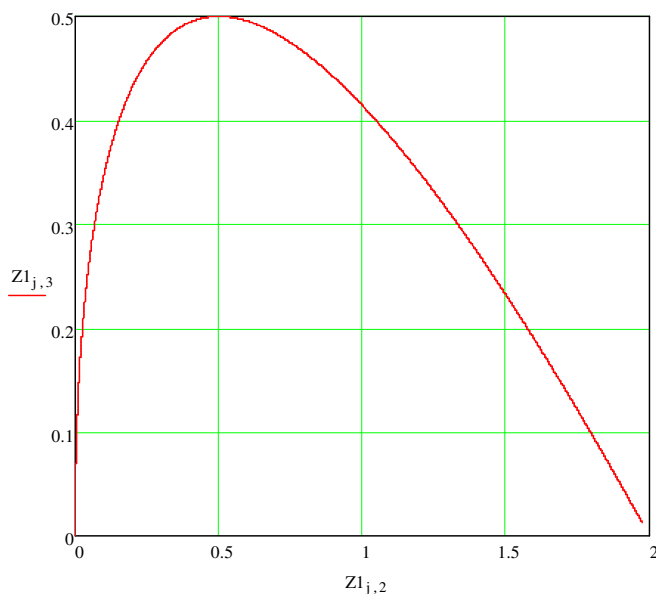
$$Z1 := Rkadapt(X0, t0, tk, n, F)$$



	1	2	3
1	0	0	0
2	$1 \cdot 10^{-3}$	$4.998 \cdot 10^{-7}$	$9.993 \cdot 10^{-4}$
3	$2 \cdot 10^{-3}$	$1.998 \cdot 10^{-6}$	$1.997 \cdot 10^{-3}$
4	$3 \cdot 10^{-3}$	$4.493 \cdot 10^{-6}$	$2.993 \cdot 10^{-3}$
5	$4 \cdot 10^{-3}$	$7.984 \cdot 10^{-6}$	$3.988 \cdot 10^{-3}$
6	$5 \cdot 10^{-3}$	$1.247 \cdot 10^{-5}$	$4.981 \cdot 10^{-3}$
7	$6 \cdot 10^{-3}$	$1.795 \cdot 10^{-5}$	$5.973 \cdot 10^{-3}$
8	$7 \cdot 10^{-3}$	$2.441 \cdot 10^{-5}$	$6.963 \cdot 10^{-3}$
9	$8 \cdot 10^{-3}$	$3.187 \cdot 10^{-5}$	$7.952 \cdot 10^{-3}$
10	$9 \cdot 10^{-3}$	$4.032 \cdot 10^{-5}$	$8.939 \cdot 10^{-3}$
11	0.01	$4.975 \cdot 10^{-5}$	$9.925 \cdot 10^{-3}$
12	0.011	$6.017 \cdot 10^{-5}$	0.011
13	0.012	$7.157 \cdot 10^{-5}$	0.012
14	0.013	$8.395 \cdot 10^{-5}$	0.013
15	0.014	$9.732 \cdot 10^{-5}$	0.014
16	0.015	$1.117 \cdot 10^{-4}$	...



## 6 Построение фазовой траектории САУ



#### 7. Аналитическое (аналитически-численное) определение фазовых траекторий

Рис. 3. Программный модуль для выполнения лабораторной работы

#### 4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе формируется как листинг из Mathcad выполнения указанных пунктов в порядке исследования с добавлением от руки выводов по работе, формулируемых на основе графиков и числовых данных полученных в ходе исследований.

#### 5. Контрольные вопросы

1. Дать определения векторам управления, наблюдения и состояния объекта; привести их примеры.
2. Сформулировать основные подходы к выбору вектора состояния для конкретного объекта.
3. Пояснить способ определения матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$  описания линейного объекта в пространстве состояний по его заданной передаточной функции.
4. Пояснить основные четыре способа определения фазовых траекторий объекта управления.
5. Пояснить смысл параметров в процедуре  $Rkadapt(X0, t0, tk, n, F)$  и элементов ее выходной матрицы  $Z$ .

#### Библиографический список

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория автоматического регулирования.- М.: Наука, 1975.- 757 с.
2. Поляков К.Ю. Теория автоматического управления для чайников. – С.-Петербург, 2008. – 80 с. (<http://kpolyakov.narod.ru>).

3. Макаров Н.Н., Феофилов С.В. Применение пакета Mathcad в анализе и синтезе систем автоматического управления. Уч. пособие. – Тула, Изд-во ТулГУ, 2006. – 170 с.

4. Капалин В.И. Шаповалова Н.Е. Линейные системы управления в системе компьютерной математики Mathcad. Уч. пособие. – М. Изд-во Перо, 2013. – 132 с.