

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие представляет собой уточненный и расширенный вариант пособия «Оптимальное управление электротехническими объектами». – Издательство ТулГУ, 2004, вышедшее под грифом учебно-методического объединения в области энергетики и электротехники и получившее вторую премию на конкурсе учебных изданий Тульского государственного университета за 2004 год. Отличительная особенность пособия состоит в том, что оно главным образом посвящено изложению основных, получивших распространение на практике методов синтеза оптимальных замкнутых систем управления.

Учебное пособие написано по материалам лекций, читаемых авторами по дисциплинам «Электрический привод», «Теория автоматического управления», «Оптимальное управление электроприводами» на факультете кибернетики ТулГУ. В данных дисциплинах важное место отводится вопросам оптимизации динамических характеристик электрических приводов. В общем случае проектирование электропривода с учетом нелинейных характеристик его звеньев представляет собой трудноразрешимую задачу даже с помощью современных методов синтеза. В настоящее время при синтезе систем управления электроприводами широко используются методы теории оптимального управления и теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР). В пособии преследовалась цель доступно, с иллюстрацией на достаточно большом числе примеров изложить основные методы АКОР, хорошо себя зарекомендовавшие в практике конструирования электромеханических систем – метод синтеза Летова-Калмана, метод АКОР А.А. Красовского по критерию обобщенной работы, методы оптимального демпфирования переходных процессов В.И. Зубова и В.М. Кунцевича, М.М. Лычака. При изложении материала предполагалось, что студенты старших курсов, магистранты будут использовать пособие главным образом при выполнении курсовых работ по указанным учебным дисциплинам, а также на дипломном проектировании.

Пособие включает в себя также оригинальные материалы по синтезу оптимальных систем управления методом матричных степенных рядов, разработанный при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проектам № 05-01-96707 «Разработка методов аналитического конструирования оптимальных регуляторов и математическое моделирование оптимальных по точности и быстродействию нелинейных систем управления» и № 07-01-96403 «Разработка методов математического моделирования сложных динамических объектов, работающих в условиях неопределенности».

Пособие состоит из пяти глав. В первой главе дается математическое описание объектов управления исследуемого класса, типичным представителем которого является привод постоянного тока. Оно включает в себя математические модели двигателя, электронного преобразователя-усилителя, механического преобразователя, имеющего нежесткие кинематические связи.

Во второй главе излагаются основные результаты вариационного исчисления, используемые в последующих главах пособия при синтезе оптимальных систем управления электроприводами. Приводятся основные понятия, определения и результаты классического вариационного исчисления, принципа макси-

мума Л.С. Понтрягина, динамического программирования Р. Беллмана.

В третьей главе уточняется постановка задачи АКОР для электроприводов с использованием концепции возмущенного-невозмущенного движения А.М. Ляпунова. Напоминаются основные результаты теории устойчивости движения динамических систем А.М. Ляпунова и излагается методы синтеза нелинейных систем В.И. Зубова и В.М. Кунцевича, М.М. Лычака с использованием функций Ляпунова, которые в дальнейшем позволяет глубже понять задачу АКОР и подходы к ее решению.

В четвертой главе рассматриваются основные, получившие широкое распространение на практике методы аналитического конструирования оптимальных регуляторов как для линейных, так и для нелинейных объектов – метод синтеза Летова-Калмана, метод АКОР по критерию обобщенной работы А.А. Красовского. Отметим, что указанные методы сводят решение задач АКОР к решению уравнений в частных производных первого порядка – соответствующих уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана или Ляпунова. В связи с этим в пособии рассмотрены и методы решения указанных уравнений, среди которых наиболее общим и методически простым является метод степенных рядов. Приводятся примеры синтеза оптимальных регуляторов для различных электротехнических объектов.

В пятой главе рассмотренные ранее методы синтеза оптимальных регуляторов обобщаются на более широкий класс объектов управления с полиномиальными нелинейностями от их фазовых координат, называемый классом полиномиальных объектов. Подчеркнем, что полиномиальные модели применяются не только для описания динамики электромеханических систем, но и объектов самой различной природы: 1) объектов химической технологии (для них характерны квадратичные нелинейности, определяющие в соответствии с законом действующих масс скорость химической реакции двух исходных веществ через произведение их концентраций); 2) промышленных объектов с рециклом (шаровые мельницы, химические реакторы, объекты в металлургии, горном деле и др.); 3) объектов биологии и экологии (в моделях их динамики, предложенными Лоткой и Вольтерра, также присутствуют произведения фазовых координат системы). Для данных объектов разработан метод синтеза, получивший название метода матричных степенных рядов. Обобщение основано на использовании теории матриц с кронекеровским (прямым) произведением.

Пособие написано преподавателями кафедры электротехники и электрооборудования и кафедры автоматики и телемеханики факультета кибернетики Тульского государственного университета и предназначено в первую очередь для студентов и аспирантов указанного факультета, обучающихся по специальностям «Электрооборудование и электрохозяйства предприятий, организаций и учреждений», «Управление и информатика в технических системах», но может использоваться и для других электротехнических специальностей. Работа авторов над пособием распределилась следующим образом: глава 1 написана Б.В. Сухининым, глава 2 – Е.И. Феофиловым и В.И. Ловчаковым, глава 3 – А.А. Фомичевым, главы 4, 5 – В.И. Ловчаковым.

## ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ

АКОР – аналитическое конструирование оптимальных регуляторов  
Д – двигатель  
ДТКЗ – двухточечная краевая задача  
МП – механический преобразователь  
ОУ – объект управления  
ОС – обратная связь  
РЛС – радиолокационные станции  
Р – регулятор  
РП – регулятор положения  
РС – регулятор скорости  
РЭ – релейный элемент  
САУ – система автоматического управления  
СП – следящие приводы  
СУ – система управления  
ФОР – функционал обобщенной работы А.А. Красовского  
ЭВМ – электронные вычислительные машины  
ЭМС – электромеханическая система  
ЭП – электропривод

## ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$U(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$  – вектор управляющих воздействий  
 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  – вектор состояния объекта управления  
 $\Psi(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)]^T$  – вектор сопряженных координат объекта  
 $\Lambda(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)]^T$  – вектор множителей Лагранжа  
 $L[X(t), U(t), \Lambda(t), t]$  – функция Лагранжа (лагранжиан)  
 $H[X(t), U(t), \Psi(t), t]$  – функция Гамильтона (гамильтониан)  
 $S(X)$  – функция Беллмана  
 $V(X)$  – функция Ляпунова  
 $C[a, b]$  – пространство непрерывных функций, заданных на интервале  $[a, b]$   
 $C_1[a, b]$  – пространство гладких функций, заданных на интервале  $[a, b]$   
 $C_k[a, b]$  – пространство непрерывных функций, заданных на отрезке  $[a, b]$  и имеющих на этом отрезке непрерывные производные до  $k$ -го порядка  
 $KC[a, b]$  – пространство кусочно-непрерывных функций  
 $\delta x(t)$  – вариация функции  $x(t)$   
 $\delta v[x(t)]$  – вариация функционала  $v[x(t)]$   
 $\delta^2 v[x(t)]$  – вторая вариация функционала  $v[x(t)]$   
 $\|X\|$  – евклидова норма вектора  $X$ , длина вектора

# **1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИЛОВОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ**

Чем проще модель, тем реже она обманет.  
(Принцип надежности)

В последние годы в связи с бурным развитием полупроводниковой техники все большее развитие получают электромеханические системы типа "управляемый преобразователь – двигатель", причем в качестве двигателя используются как двигатели постоянного тока, так и двигатели переменного тока: асинхронные и синхронные. В зависимости от типа управляемого преобразователя, системы управления преобразователем и типа двигателя изменяются статические и динамические характеристики электропривода, а электромеханическая система может приобретать ряд дополнительных свойств, отличных от свойств используемого двигателя. Примером может служить вентильный двигатель (бесколлекторный двигатель постоянного тока) на основе синхронного или асинхронного двигателя.

В главе приводится обобщенное математическое описание электромеханических систем типа "управляемый преобразователь – двигатель" и показывается, что такие системы имеют нелинейности полиномиального вида. Если же учесть, что практически любые сигналы привода имеют конечные максимальные значения (зону ограничения или насыщения), то становится понятным, что системы рассматриваемого класса являются существенно нелинейными.

## **1.1. Структурная схема силового электропривода**

Создание современного высокопроизводительного технологического оборудования как технической основы повышения эффективности производства невозможно рассматривать отдельно от проблемы совершенствования систем управления электроприводами. Проектирование силового привода относится к одной из важнейших задач, от успеха решения которой зависит качество и эффективность работы промышленного оборудования. В то же время при проектировании систем управления электроприводами необходимо учитывать информацию о характерных особенностях промышленного оборудования и технологии, в которой электропривод является самостоятельной подсистемой нижнего уровня, гарантирующей вышестоящему уровню выполнение выработанных им команд. Однако гарантированное выполнение этих команд электроприводом в условиях действия дестабилизирующих факторов среды является часто проблематичным [1,2].

К наиболее сложным в этом отношении системам, характеризующимся наличием упругих звеньев и люфтов, переменными моментами нагрузки и инерции, широким диапазоном изменения рабочих скоростей, относятся кинематические органы промышленных роботов и манипуляторов [3]. На электроприводы этих устройств действуют внешние нагрузочные моменты, изменяющиеся в широких пределах. Это могут быть моменты как внешних сил, действующих на исполнительный орган, так и неуравновешенных сил веса исполнительного ор-

гана и перемещаемого груза, т.е. сил, величина которых в процессе работы изменяется довольно сложным образом.

К сложным электромеханическим системам следует отнести следующие ЭП антенн радиолокационных станций (РЛС) автоматического сопровождения и управления, а также некоторых астрономических инструментов [1,2], для которых характерно одновременное действие большого числа разнообразных дестабилизирующих факторов. Радиолокационные станции, работающие в миллиметровом диапазоне, позволяют успешно решать задачи слежения за наземными объектами в любое время года и суток в сложных метеоусловиях и при пыледымовых помехах на дальности до 10 км. Они находят применение как в спецтехнике, так и в объектах гражданского назначения.

В общем случае система управления силовыми электроприводами включает в себя двигатель Д, питающийся от управляемого преобразователя П и приводящий в движение посредством механического преобразователя МП исполнительный орган ИО (рис. 1.1).

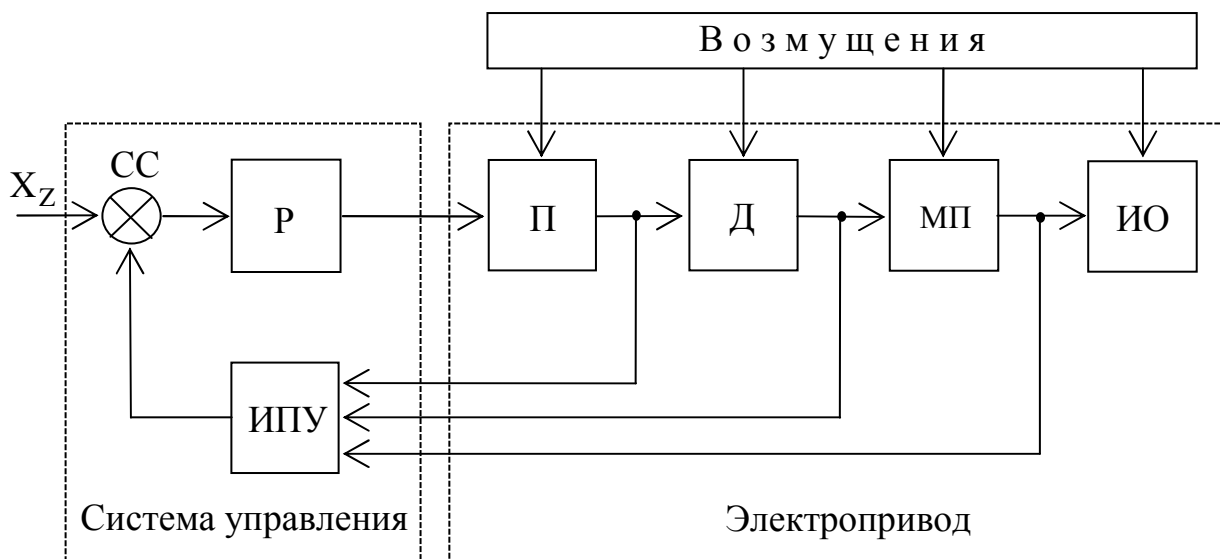


Рис. 1.1. Структура силового электропривода

Выходной координатой электропривода часто бывает скорость или перемещение исполнительного органа, что при жестких кинематических связях в МП соответствует скорости и углу поворота двигателя. Преобразователь, двигатель, механический преобразователь и исполнительный орган составляют силовую часть электропривода и являются объектом управления ОУ в системе автоматического управления. В процессе работы на электропривод действуют возмущения в виде изменений напряжения питания преобразователя, изменений момента нагрузки на двигатель, кинематическую связь и исполнительный орган и др. В результате действия возмущений появляется отклонение выходной координаты от заданного значения  $X_Z$ . Величины выходной и, если необходимо, других координат электропривода измеряются с помощью измерительно-преобразовательного устройства ИПУ. Выходной сигнал ИПУ сравнивается схемой сравнения СС с заданным значением и результат сравнения подается на

регулятор Р. Регулятор и ИПУ составляют систему управления, которая, воздействуя на электропривод, обеспечивает желаемый характер изменения координат силового привода.

Замкнутые системы автоматического управления САУ должны обеспечивать необходимые законы изменения переменных состояния ОУ в переходных режимах, например, разгон и торможение электродвигателя с постоянным ускорением, либо стабилизацию этих переменных на необходимом уровне с требуемой точностью. Для реализации заданных законов изменения управляемой переменной и компенсации влияния различных возмущающих воздействий на ОУ подается управляющее воздействие, вырабатываемое управляющим устройством или регулятором. Управляющее воздействие формируется регулятором на основании алгоритмов, определяемых целью управления. Решение компромиссной задачи обеспечения заданной статической точности САУ при требуемом или оптимальном в определенном смысле качестве ее переходных процессов достигается введением специальных обратных связей, изменяющих динамику системы в нужном направлении. Во многом решение данной задачи управления зависит от типа применяемого в системе привода, типа электрической машины и их математических моделей.

Корректная постановка задачи управления предполагает полное описание (формализацию) следующих факторов, определяющих способ (закон) управления:

- описание динамики объекта управления (ОУ);
- описание ограничений на переменные ОУ;
- формализацию критерия оптимальности движения ОУ.

Рассмотрим отдельно указанные факторы.

## 1.2. Математическая модель объекта управления

В основе анализа и синтеза автоматических систем управления лежит понятие математической модели управляемого процесса (или просто объекта управления), которая должна отражать свойства реального объекта в пределах требуемой для управления точности. В дальнейшем, согласно работе [4], объектом управления будем считать выделенную в реальном производственном процессе, функционирующем с определенной целью в условиях действия возмущений, математическую модель канала управления с  $n$  входными и  $m$  выходными переменными.

Анализ литературных источников [5–10] и проведенный анализ математических моделей различных типов электродвигателей, электронных и механических преобразователей, входящих в состав электропривода, дает основание утверждать, что с достаточной точностью реальные объекты в электромеханике можно описать векторным нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\dot{X}(t) = A(X) + B(X) \cdot U(t), \quad (1.1)$$

где  $A(X) = A_1 X + A_2(X)$  – матрица-столбец с элементами  $a_i(X) \equiv a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , представляющими собой полиномиальные функции от составляющих вектора состояния объекта определенной степени  $q$ :

$$a_i(x) = \sum_{\mu=1}^q \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_\mu=1}^n a_{j_1 j_2 \dots j_\mu}^i x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_\mu} ; \quad (1.2)$$

$B(X) = B_1 + B_2(X)$  – матрица с элементами-функциями  $b_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$  также полиномиального вида.

Вектор управления  $U(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]^T$  в общем случае считается принадлежащим следующему замкнутому множеству:

$$|u_j(t)| \leq U_{j \max}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.3)$$

причем, как правило, предполагается, что управляющие воздействия проноормированы и, следовательно,  $U_{j \max} = 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Область  $\Omega(U)$  допустимых управлений определяется двумя условиями: классом допустимых (непрерывных или кусочно-непрерывных) функций и дополнительными ограничениями (1.3) эксплуатационного или конструктивного характера, накладываемыми на  $U(t)$  внутри данного класса.

Многомерные стационарные объекты, описываемые уравнением (1.1), предполагаются управляемыми. В соответствии с результатами известных работ [9–11] необходимым условием управляемости объекта (1.1) в некоторой ограниченной области фазового пространства, содержащей точку  $X = 0$ , является управляемость линеаризованного объекта:

$$\text{rank}[B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{n-1} B_1] = n. \quad (1.4)$$

В дальнейшем условие (1.4) считается выполненным.

Для подтверждения сформулированных условий-ограничений на класс моделей исследуемых объектов управления рассмотрим типовые математические модели отдельных узлов электропривода – двигателя, управляемого электронного преобразователя-усилителя, механического преобразователя.

### 1.2.1. Модели динамики двигателей постоянного тока

В качестве типового двигателя управляемого привода рассмотрим двигатель постоянного тока по следующим причинам. Во-первых, двигатели постоянного тока (ДПТ) широко применяются в следящих приводах высокой точности. Во-вторых, модели динамики ДПТ выводятся относительно просто. В-третьих, известно, что структура уравнений динамики двигателей переменного тока во вращающихся системах координат во многом аналогична уравнениям ДПТ [7–9].

#### Модель динамики двигателя с независимым возбуждением

Рассмотрение применяемых моделей начнем с двигателя постоянного тока с независимым возбуждением (рис.1.2).

Предположим, что двигатель управляется изменением напряжения питания  $u_1(t)$  якорной цепи и напряжения возбуждения  $u_2(t)$ . Выходными координатами двигателя является угол поворота вала  $\varphi(t)$  и скорость вращения вала  $\omega(t) = d\varphi/dt$ .

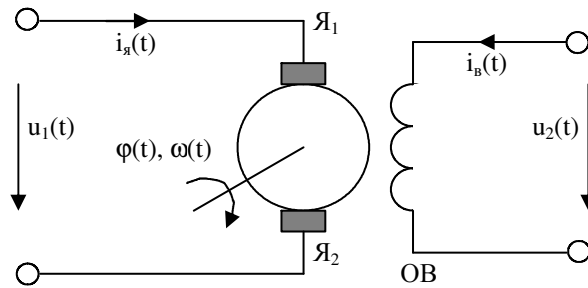


Рис. 1.2. Обозначение двигателя постоянного тока: Я<sub>1</sub>, Я<sub>2</sub> – выводы якорной цепи; ОВ – обмотка возбуждения

Принцип действия ДПТ можно описать следующей диаграммой причинно-следственных связей (следующим направленным графом – рис. 1.3).

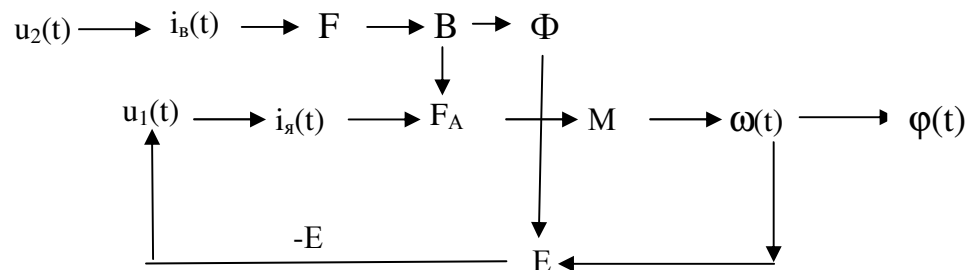


Рис. 1.3. Диаграмма причинно-следственных связей в двигателе

На диаграмме приняты обозначения:  $i_{\text{в}}(t)$  – ток обмотки возбуждения, который создает намагничивающую силу  $F = w_{\text{в}} i_{\text{в}}(t)$  данной обмотки и далее магнитную индукцию  $B$  и магнитный поток  $\Phi$  машины (предполагается, что реакция якоря скомпенсирована дополнительными полюсами или катушками магнитной системы двигателя);  $i_{\text{я}}(t)$  – ток обмотки якоря, который при взаимодействии с магнитным полем машины в соответствии с законом Ампера создает силу Ампера  $F_{\text{А}} = B \cdot l \cdot I \cdot \sin \alpha$ , действующую на проводник длиной  $l$  с током  $I$  в поле с индукцией  $B$ . Действие механической силы Ампера  $F_{\text{А}}$  на проводники якорной обмотки определяет возникновение при наличии плеча  $l_{\text{п}}$  вращающего момента двигателя

$$M = l_{\text{п}} \cdot F_{\text{А}} = l_{\text{п}} \cdot B \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot i_{\text{я}} = C_{\text{М}} \cdot \Phi \cdot i_{\text{я}}, \quad (1.5)$$

где  $C_{\text{М}}$  – механическая постоянная двигателя,  $\alpha$  – угол между направлениями магнитного поля и проводника с током.

$E$  – так называемая противоЭДС двигателя, которая возникает во вращающейся якорной обмотке в магнитном поле статора в соответствии с законом электромагнитной индукции (законом Фарадея):

$$E = B \cdot l \cdot v \sin \beta = C_{\text{Е}} \cdot \Phi \cdot \omega, \quad (1.6)$$

где  $C_{\text{Е}}$  – электрическая постоянная машины,  $\beta$  – угол между направлениями магнитного поля и вектора скорости.

Отметим, что в системе СИ значения коэффициентов  $C_{\text{М}}$  и  $C_{\text{Е}}$  приблизительно равны  $C_{\text{М}} \approx C_{\text{Е}} = C_{\text{МЕ}}$ .



В соответствии с диаграммой причинно-следственных связей для цепи возбуждения можно составить следующие уравнения:

$$w_B \frac{d\Phi(t)}{dt} + r_B \cdot i_B(t) = u_2(t); \quad \Phi = f(F); \quad F = w_B \cdot i_B(t). \quad (1.7)$$

При рассмотрении модели (1.7) полагается, что гистерезис в магнитной цепи отсутствует, т.е. намагничивающая сила однозначно определяет магнитный поток как функцию  $\Phi = f(F)$ , соответствующую известной кривой намагничивания. Хотя двигатель, как правило, работает в режиме ненасыщенной магнитной системы, для наиболее полного отражения реальных электромагнитных процессов в математическую модель ДПТ вводится функция насыщения, которая хорошо аппроксимируется полиномиальной зависимостью.

На основе уравнения второго закона Кирхгофа для электрической якорной цепи двигателя можно составить следующее дифференциальное уравнение:

$$L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}(t)}{dt} + r_{\text{я}} \cdot i_{\text{я}}(t) = u_1(t) - E,$$

или

$$L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}(t)}{dt} + r_{\text{я}} \cdot i_{\text{я}}(t) = u_2(t) - C_E \cdot \Phi \cdot \omega(t). \quad (1.8)$$

В соответствии со вторым законом Ньютона для вращательного движения составляем дифференциальное уравнение для механической части двигателя

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - m_1, \quad (1.9)$$

где  $J$  – момент инерции, в состав которого при жесткой связи двигателя и исполнительного механизма входят моменты инерции двигателя и исполнительного механизма;  $m_1$  – момент сопротивления нагрузки двигателя, который учитывает все моменты, обусловленные механическими потерями, представляющий в общем случае функцию времени, угла поворота и угловой скорости  $m_1 = m_1(t, \varphi, \omega)$ .

С учетом соотношения  $M = C_M \cdot \Phi \cdot i_{\text{я}}$  уравнение моментов принимает вид

$$J \frac{d\omega}{dt} = C_M \cdot \Phi \cdot i_{\text{я}} - m_1. \quad (1.10)$$

Таким образом, динамическая модель ДПТ описывается уравнениями (1.7), (1.8), (1.10). Введя переменные состояния  $x_1 = \varphi$ ,  $x_2 = \omega$ ,  $x_3 = i_{\text{я}}$ ,  $x_4 = \Phi$ , после некоторых преобразований запишем эти уравнения в фазовом пространстве (пространстве состояний) [13, 28]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2; \\ \dot{x}_2(t) &= (C_{ME} x_3 x_4 - m_1(x_1, x_2, t)) a_{21}; \\ \dot{x}_3(t) &= (u_1 - C_{ME} x_4 x_2 - a_{31} x_3) a_{32}; \\ \dot{x}_4(t) &= (u_2 - a_{41} f_1(x_4)) a_{42}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $a_{21} = 1/J$ ;  $a_{31} = r_{\text{я}}$ ;  $a_{32} = 1/L_{\text{я}}$ ;  $a_{41} = r_{\text{в}}/w_{\text{в}}$ ;  $a_{42} = 1/w_{\text{в}}$ ;  $f_1(\Phi)$  – характеристика намагничивания, у которой по оси абсцисс отложен поток возбуждения, а по оси ординат – намагничивающая сила. Подчеркнем, что движение объектов управления в пространстве состояний описывается дифференциальными уравнениями, представленными в так называемой форме Коши.

Таким образом, с точки зрения теории автоматического управления ДПТ представляет нелинейный объект четвертого порядка с двумя управляющими воздействиями, для которого характерны нелинейности типа произведения координат и характеристики насыщения. Таким образом, модель (1.11) двигателя постоянного тока относится к классу (1.1).

### **Модель динамики двигателя с независимым возбуждением при якорном способе управления**

Модель (1.11) имеет одну регулируемую (выходную) переменную  $x_1$  и два управляющих воздействия, которые используются независимо друг от друга. Для исключения избыточности каналов управления в практике электропривода постоянного тока наиболее часто используется так называемый якорный способ управления скоростью двигателя изменением напряжения  $u_1(t)$  при  $u_2(t) = \text{const} = U_{\text{в}}$ . С учетом последнего условия уравнения (1.11) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2; \\ \dot{x}_2(t) &= (Cx_3 - m_1)a_{21}; \\ \dot{x}_3(t) &= (u_1 - Cx_2 - a_{31}x_3)a_{32},\end{aligned}\tag{1.12}$$

где  $C = C_{\text{МЕ}}\Phi$ ,  $\Phi = \text{const}$ .

Подчеркнем, что если  $m_1 = 0$ , то ДПТ при якорном способе управления описывается *линейной* системой трех дифференциальных уравнений. Линейность модели (1.12) двигателя предопределяет простоту анализа и синтеза системы управления ЭП.

Уравнение состояния двигателя (1.12) можно записать в стандартной матричной форме

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t); \\ Y(t) = CX(t), \end{cases}$$

а именно:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{\text{МЕ}}\Phi}{J} \\ 0 & \frac{C_{\text{МЕ}}\Phi}{L_{\text{я}}} & -\frac{r_{\text{я}}}{L_{\text{я}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_{\text{я}}} \end{pmatrix} \cdot u_1(t). \tag{1.13}$$

Матрицы коэффициентов А и В данного двигателя имеют структуру

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{ME}\Phi}{J} \\ 0 & \frac{C_{ME}\Phi}{L_{я}} & -\frac{r_{я}}{L_{я}} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_{я}} \end{pmatrix}.$$

Если считать выходной координатой двигателя угол  $\varphi(t) = x_1(t)$ , то уравнение наблюдения (измерения) принимает вид

$$y(t) = CX(t) = \varphi(t) = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \\ i_{я}(t) \end{pmatrix} = (1 \ 0 \ 0) \cdot X; \quad C = (1 \ 0 \ 0). \quad (1.14)$$

Систему дифференциальных уравнений (1.13), (1.14) можно свести к одному дифференциальному уравнению третьего порядка. Действительно, на их основе можно записать

$$\begin{cases} \frac{d^2\varphi(t)}{dt} = \frac{C_{ME} \cdot \Phi}{J} i_{я}(t); \\ \frac{di_{я}}{dt} = -\frac{C_{ME} \cdot \Phi}{L_{я}} \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \frac{r_{я}}{L_{я}} i_{я}(t) + \frac{1}{L_{я}} u(t). \end{cases} \quad (1.15)$$

Из первого уравнения (1.15) выражаем ток  $i_{я}(t) = \frac{J}{C_{ME}\Phi} \frac{d^2\varphi}{dt}$ . Подставляя этот результат во второе уравнение (1.15) и получаем

$$\frac{J}{C_{ME}\Phi} \cdot \frac{d^3\varphi}{dt} + \frac{J \cdot r_{я}}{C_{ME}\Phi \cdot L_{я}} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt} + \frac{C_{ME}\Phi}{L_{я}} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{L_{я}} u(t),$$

или

$$\begin{cases} \frac{d^3\varphi}{dt^3} + a_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + a_1 \frac{d\varphi}{dt} = b_0 u(t); \\ a_2 = \frac{r_{я}}{L_{я}}; \quad a_1 = \frac{C_{ME}^2 \cdot \Phi^2}{J \cdot L_{я}}; \quad b_0 = \frac{C_{ME} \cdot \Phi}{J \cdot L_{я}}. \end{cases} \quad (1.16)$$

В соответствии с уравнением (1.16) можно также записать уравнение состояния ДПТ в так называемой канонической форме Фробениуса:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{pmatrix} \cdot u_1(t). \quad (1.17)$$

В пособии для описания динамики ДПТ часто будут использоваться модели (1.13), (1.16), (1.17), которые также являются подмоделями класса (1.1).

### Модель двигателя с параллельным возбуждением

Во многих технических устройствах использовать в приводе постоянного тока два независимых источника питания  $u_1$  и  $u_2$  нецелесообразно с точки зрения габаритов, массы устройства, его надежности, а также стоимости. В этих случаях применяют привод с одним источником энергии и двигателем, имеющим или параллельное, или последовательное, или параллельно-последовательное возбуждение.

Наиболее просто получить модель динамики двигателя постоянного тока при параллельном возбуждении, когда якорная обмотка и обмотка возбуждения включаются параллельно к одному источнику питания, т.е. в данном случае  $u_1(t) = u_2(t) = u(t)$ . Подставляя это равенство в (1.11), непосредственно получаем динамическую модель ДПТ с параллельным возбуждением:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2; \\ \dot{x}_2(t) &= (C_{ME} x_3 x_4 - m_1(x_1, x_2, t)) a_{21}; \\ \dot{x}_3(t) &= (u - C_{ME} x_4 x_2 - a_{31} x_3) a_{32}; \\ \dot{x}_4(t) &= (u - a_{41} f_1(x_4)) a_{42}.\end{aligned}\quad (1.18)$$

Использование этой нелинейной модели для анализа и синтеза САУ электроприводом представляет, в отличие от предыдущей модели, определенные сложности.

### Модель двигателя с последовательным возбуждением

Характерной особенностью ДПТ с последовательным возбуждением является то, что обмотка возбуждения находится в цепи якоря и магнитный поток определяется током якорной обмотки и, следовательно, зависит от скорости двигателя. В связи с этим, в сравнении с моделью (1.11), изменяются уравнения, описывающие электромагнитные процессы в обмотках статора и якоря:

$$F = w_B \cdot i_y(t); \quad \Phi = f(F); \quad (1.19)$$

$$L_y \frac{di_y(t)}{dt} + w_a \frac{d\Phi(t)}{dt} + (r_y + r_a) \cdot i_y(t) = u(t) - C_E \Phi \cdot \omega(t). \quad (1.20)$$

Подставив соотношения (1.19) в (1.20), получим уравнение

$$(L_y + L_B) \frac{di_y(t)}{dt} + (r_y + r_B) \cdot i_y(t) = u(t) - C_E \cdot f(w_B i_y(t)) \cdot \omega(t). \quad (1.21)$$

С учетом уравнений (1.19) – (1.21) модель (1.11) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2; \\ \dot{x}_2(t) &= (C_{ME} f(w_B x_3) x_3 - m_1(x_1, x_2, t)) a_{21}; \\ \dot{x}_3(t) &= (u - C_{ME} f(w_B x_3) x_2 - a_{31} x_3) a_{32},\end{aligned}\quad (1.22)$$

где  $a_{21} = 1/J$ ;  $a_{31} = r_y + r_B$ ;  $a_{32} = 1/(L_y + L_B)$ .

Уравнения (1.22) представляют динамическую модель ДПТ с последовательным возбуждением – нелинейную модель третьего порядка класса (1.1).

Объединяя результаты последних двух разделов, нетрудно получить динамическую модель ДПТ с параллельно-последовательным возбуждением.

### 1.2.2. Описание электронного преобразователя – усилителя

В приводах постоянного тока двигатель получает питание от тиристорного или транзисторного усилителя мощности. Как правило, данный преобразователь как элемент системы управления описывается дифференциальным уравнением первого порядка [2,3]:

$$\tau_y \frac{du}{dt} + u = k_y v, \quad (1.23)$$

связывающего управляющее напряжение  $u$  двигателя с входным напряжением  $v$  усилителя мощности; здесь  $\tau_y$ ,  $k_y$  – постоянная времени и коэффициент передачи усилителя. Питающее напряжение двигателя не должно превышать номинального значения  $U_{ном}$ , поэтому входной сигнал усилителя ограничивают величиной

$$|v(t)| \leq U_{ном} / k_y. \quad (1.24)$$

Неравенство (1.24) является одним из обоснований введения множества ограничений (1.3) на сигналы управления.

Необходимо отметить, что для многих электроприводов постоянные времени двигателя и механического преобразователя значительно (на порядок и более) превышают значение  $\tau_y$ , поэтому значением постоянной времени электронного усилителя часто пренебрегают.

### 1.2.3. Модель движения упругой двухмассовой системы

Как правило, электродвигатель связан с рабочим органом (машиной) соответствующим механическим преобразователем (МП), состоящим из редуктора, маховиков, механических передач и т.д. Механический преобразователь чаще всего представляет собой многомассовую взаимосвязанную динамическую систему, сложность структуры которой определяется совокупностью реализуемых ей функций, диктуемых особенностями технологического агрегата и реализуемого в нем технологического процесса, и к которым в общем случае относятся:

- изменение величины и знака параметров системы, например, направления вращения выходных осей, а также плоскости действия усилий и моментов;
- преобразования характера движения (вращательного в возвратно-поступательное и т.п.);
- согласование кинематических и силовых параметров двигателя с параметрами технологических агрегатов;
- разделение или объединение потоков энергии в приводе;
- ряд других специфических функций.

Динамика МП во многом предопределяет динамическое поведение ЭМС, поэтому созданию математической модели любой электромеханической системы предшествует синтез модели ее механического преобразователя.

Механическую систему "привод – нагрузка" с упругой передачей движения принято, как правило, представлять в виде двухмассовой системы [3]. Схема физической модели дана на рис. 1.4. Упругие свойства МП характеризуются

ются коэффициентом жесткости  $C$  ( $\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{рад}^{-1}$ ) и коэффициентом потерь на внутреннее вязкое трение  $\chi$  ( $\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{рад}^{-1} \cdot \text{с}$ ).

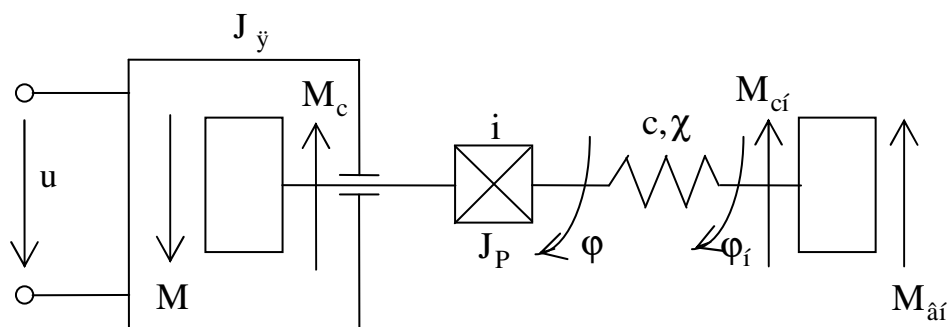


Рис. 1.4. Физическая модель двухмассовой механической системы

Напомним, что коэффициент жесткости при кручении определяется отношением крутящего момента к угловой деформации упругого звена

$$C = \frac{M}{\Delta\varphi}$$

и может быть выражен через модуль упругости материала и геометрические размеры деформируемого элемента

$$C = \frac{G\pi d^4}{32L},$$

где  $G$  – модуль упругости сдвига,  $d$  – диаметр вала,  $L$  – длина деформируемого участка.

Соответственно, коэффициент внутреннего вязкого трения определяется отношением крутящего момента к изменению угловой скорости на единице длины вала

$$\chi = \frac{M}{\Delta\omega}.$$

Структурная схема математической модели такой системы приведена на рис. 1.5. Величина  $J = J_{\text{я}} + J_{\text{р}} i^{-2}$  представляет собой суммарный момент инерции якоря и редуктора в пересчете к валу исполнительного двигателя постоянного тока с независимым возбуждением. Момент инерции нагрузки обозначен  $J_{\text{н}}$ . Двигатель характеризуется коэффициентами  $k_{\text{м}} = C_{\text{М}}\Phi$ ,  $k_{\omega} = C_{\text{Е}}\Phi$ ,  $\Phi = \text{const}$ , индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$  якорной обмотки. На схеме указаны функциональные блоки формирования момента сил сопротивления  $M_{\text{с}}(\omega)$  в механической цепи "двигатель – редуктор" и момента сил сопротивления  $M_{\text{сн}}(\omega_{\text{н}})$  в нагрузке. Угловая скорость вращения вала нагрузки обозначается  $\omega_{\text{н}} = \dot{\varphi}_{\text{н}}$ , угловая скорость вращения вала двигателя, приведенная к выходу передачи, обозначена  $\dot{\varphi} = i \cdot \omega$ . В соответствии с этим  $\omega$  есть угловая скорость до редукции. На схеме указан также внешний возмущающий момент  $M_{\text{вн}}(t)$ , приложенный к нагрузке.



вании (1.27) получаем следующие формулы для собственной частоты  $\Omega_{\text{но}}$  и коэффициента затухания  $\xi_{\text{но}}$  колебаний в рассматриваемом контуре:

$$\Omega_{\text{но}} = \sqrt{\frac{c}{J_{\text{н}}}}, \quad \xi_{\text{но}} = \frac{\chi}{2\sqrt{cJ_{\text{н}}}}. \quad (1.28)$$

Соотношения между параметрами, входящими в (1.28), как правило, таковы, что механическая система "передача – нагрузка" является существенно колебательной ( $\xi_{\text{но}} \ll 1$ ). Такая особенность вызывает известные трудности при проектировании систем автоматического управления на основе традиционных методов.

Структура модели рис. 1.5 электропривода и соответствующие ей уравнения (1.25) являются наиболее типичными моделями электромеханических объектов рассматриваемого класса (1.1).

### 1.3. Формализация критерия качества функционирования электропривода

Для завершения характеристики исследуемого класса объектов управления сформулируем требования к их желаемому движению. Эти требования обусловливаются общими технологическими и экономическими критериями функционирования реального привода и в каждом конкретном случае задаются соответствующими показателями качества работы системы управления. В теории автоматического управления используются три основных способа формализации требований к качеству переходных процессов синтезируемых систем. Исторически первым был способ, основанный на задании предельных значений определенных величин – первичных показателей качества, характеризующих кривую переходного процесса по выходной координате (для одномерных объектов): времени затухания переходного процесса, допустимого перерегулирования, колебательности и т.п.

Данный способ оценки качества переходных процессов, во многом соответствующий инженерным представлениям о сущности задачи регулирования, нашел применение в основном лишь для одномерных линейных и некоторых нелинейных объектов в определенных режимах их движения [12, 13]. Затруднения с применением первого способа выражения требований к качеству процессов многомерных систем связаны со следующими причинами: 1) число первичных показателей для многомерной системы может быть достаточно большим, и обоснованное задание их значений представляет самостоятельную задачу; 2) задаваемые показатели качества находятся в сложной зависимости от параметров даже линейных объектов; 3) для нелинейных систем назначение первичных показателей осложняется из-за зависимости вида решений нелинейных дифференциальных уравнений от начальных условий системы и характера входных воздействий.

Второй способ задания требований к качеству процессов управления состоит в представлении желаемого движения системы в виде дифференциальных или операторных уравнений. В работах [16, 17] на основе концепции решения обратных задач динамики разработаны эффективные прикладные методы синтеза систем управления, базирующиеся на удовлетворении движения синтези-



руемой системы заданному уравнению. Однако оказывается, что этот способ формирования требований практически неприемлем при учете ограничений вида (1.3), в особенности для нелинейных объектов высокого порядка [12]. Применение же его к многомерным объектам встречает серьезные трудности, связанные с выбором структуры системы дифференциальных уравнений, описывающей желаемые переходные процессы, и с заданием значений большому числу параметров этих уравнений.

Наиболее универсальным, особенно в применении к нелинейным многомерным ОУ, является способ формализации, основанный на введении оптимизируемого функционала (критерия качества) интегрального типа. Использование интегральных критериев, в частности квадратичных функционалов, позволяет определить требования к переходным процессам СУ заданием значений небольшого числа их весовых коэффициентов, практически произвольный выбор которых обеспечивает фундаментальное свойство синтезируемой системы – ее асимптотическую устойчивость. Дальнейший итерационный, целенаправленный перебор весовых коэффициентов, как правило, удовлетворяет разумные требования к первичным показателям качества переходных процессов.

Главное достоинство данного способа формализации заключается в том, что он позволяет использовать для синтеза устройств управления сложными объектами результаты теории оптимального управления [14,18–22] и теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) [23–31]. Все более широкое применение в прикладных задачах управления сложными производственными объектами методов АКОР связано с такими их достоинствами, как общность, предельная формализация, логическая завершенность, принципиальная математическая простота.

Таким образом, для объектов управления (1.1) приходим к необходимости решения задачи АКОР по соответствующему интегральному критерию.

В дальнейшем при выборе функционала качества управления (при постановке задачи АКОР) предполагается, что для рассматриваемых нелинейных приводов, функционирующих в условиях действия возмущений значительной амплитуды (мощности), желательна стабилизация выходных переменных на определенном уровне для улучшения их технологических и экономических показателей. Без потери общности решения задачи управления уровни стабилизации можно считать нулевыми. Качество стабилизации будем оценивать некоторым интегральным функционалом

$$I = I[X(t), U(t)] = \int_0^{\infty} F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) dt \quad (1.29)$$

от вектора состояния объекта  $X(t)$  и вектора управления  $U(t)$ .

Выбор конкретного вида функционала в значительной степени зависит от нелинейных свойств объекта. Общих правил выбора критериев качества для различных управляемых объектов не существует, и назначение критерия оптимальности в каждом конкретном случае является самостоятельной задачей. Функционал качества должен выбираться так, чтобы он, с одной стороны, наилучшим образом характеризовал цель управления, а с другой стороны жела-

тельно, чтобы конкретная вариационная задача была аналитически разрешимой.

В настоящее время в теории и практике оптимального управления широкое распространение получили интегральные квадратичные обобщенные функционалы качества [27–32] систем автоматического управления:

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n q_i (x_i(t))^2 + \sum_{j=1}^m r_j (u_j(t))^2 \right\} dt. \quad (1.30)$$

Первая сумма в выражении (1.30) представляет собой взвешенную с помощью весовых коэффициентов  $q_i$  сумму площадей, ограниченных квадратами отклонений координат истинного движения от установившегося движения по каждой переменной состояния. Чем меньше эти площади, тем точнее работает привод и тем быстрее протекает процесс стабилизации. В следящем электроприводе в роли таких переменных состояния выступают напряжения и токи двигателя, скорость и угол поворота ротора и др. Смысл этой составляющей критерия заключается в том, что она за счет минимизации значения интеграла от указанной суммы (минимизации величины, пропорциональной энергии отклонений координат) запрещает существование больших и длительных отклонений фазовых переменных объекта управления. Введение в функционал квадратов управляющих воздействий требует достижения оптимальности движения привода при ограничении затрат энергии на управление или при возможном ограничении энергетических ресурсов самой системы.

Важной особенностью квадратичных критериев качества типа (1.30) является возможность синтеза САУ, допускающих неограниченное увеличение коэффициента усиления системы без потери устойчивости [2]. Это определяет один из возможных путей учета целого комплекса требований к синтезируемым оптимальным системам, к которому, например, могут относиться желаемые быстродействие, колебательность переходных процессов, заданная степень устойчивость системы управления, а также ограничения на ее чувствительность к параметрическим и координатным возмущениям. Требуемый результат при таком подходе достигается в пределе при увеличении коэффициента усиления до бесконечности.

Дополнительные возможности для решения проблемы синтеза систем дает введение в функционал интегрантов полиномиального вида, содержащих слагаемые четвертой степени, которые, например, позволяют обеспечить апериодические переходные процессы с повышенным быстродействием [10]. Для электромеханических систем функционалы со слагаемыми четвертой степени имеют глубокий физический смысл – смысл квадратичных отклонений соответствующих мощностей (энергий) от их заданных значений. Например, широкие возможности в процессе синтеза регулятора положения обеспечивает учет в квадратичном функционале запаса кинетической энергии

$$W_k = J \frac{\omega_d^2}{2},$$

накапливаемой в движущихся частях электропривода.

Таким образом, в общем случае для оценки качества динамики рассматриваемых систем будем использовать функционалы вида

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\theta=\infty} [X^T(t)Q_1X(t) + Q_2[X(t)] + U^T(t)RU(t)]dt \rightarrow \min, \quad (1.31)$$

где  $Q_1, R$  – заданные симметричные положительно определенные матрицы размерности  $n \times n, m \times m$ ;  $Q(X) = X^T Q_1 X + Q_2(X)$  – положительно определенная функция полиномиального вида, содержащая слагаемые второй, четвертой и более высоких степеней. При  $Q_2(X) = 0$  критерий (1.31) переходит в квадратичный функционал качества.

С использованием критерия (1.31) задача управления рассматриваемыми объектами может быть сформулирована следующим образом.

**Задача АКОР для нелинейных электромеханических следящих систем:** на множестве допустимых управлений (1.3) следует найти закон обратной связи  $U(t) = F_1[X(t)]$ , образующий совместно с исходным нелинейным объектом (1.1) устойчивую замкнутую систему, доставляющую минимум функционалу (1.31) при переводе объекта управления из начального положения  $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, \dots, x_n(0) = x_{n0}$  в конечное нулевое.

Данная задача управления сформулирована аналогично известной задаче Летова – Калмана аналитического конструирования оптимального регулятора (АКОР) [23], но в нелинейной постановке. В работе [9] утверждается, что нелинейная задача АКОР относится к центральной проблеме современной теории автоматического управления.

Учебное пособие посвящено изложению основных методов решения указанной задачи оптимального управления, имеющей важное теоретическое и практическое значение. Излагаются методы классического вариационного исчисления, принцип максимума Л.С.Понтрягина, метод динамического программирования Р. Беллмана, метод АКОР по критерию обобщенной работы А.А.Красовского, получившие признание и достаточно широкое распространение в практике управления.

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте законы электромагнитной индукции Фарадея и Ампера, на которых основан принцип действия ДПТ. Поясните принцип функционирования двигателя.
2. Запишите дифференциальные уравнения, описывающие динамику ДПТ с независимым возбуждением. Поясните физический смысл переменных и параметров этих уравнений.
3. Дайте определение понятиям «вектор состояния объекта», «вектор управления». Поясните их смысл на примере ДПТ.
4. Определите понятия «параллельное, последовательное, смешанное возбуждение» ДПТ. Каким образом способ возбуждения отражается на уравнениях динамики ДПТ ?

5. Поясните понятие «коэффициент жесткости» механического преобразователя. От каких параметров преобразователя он зависит ?
6. Что такое «коэффициент потерь на внутреннее трение» механического преобразователя ? Укажите его единицу измерения.
7. Изобразите и поясните структурную модель привода постоянного тока с упругим механическим преобразователем.
8. Перечислите и поясните первичные показатели качества системы управления.
9. Что такое интегральный функционал качества системы управления? Приведите примеры таких функционалов.
10. Сформулируйте задачу аналитического конструирования оптимального регулятора для электропривода.

## 2. ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Знание некоторых принципов легко  
возмещает незнание некоторых фактов.  
К. Гельвеций

Сформулированная задача оптимального управления относится к задачам вариационного исчисления. Классическое вариационное исчисление, связанное с именами выдающихся математиков XVIII – XIX вв. Л.Эйлера, Ж.Л. Лагранжа, Р. Гамильтона, К.Г. Якоби, из-за наличия в задаче оптимального управления ограничений в форме неравенств, не позволяет определить оптимальное управление и оптимальную траекторию. Это привело к появлению принципа максимума Л.С. Понтрягина и метода динамического программирования Р. Беллмана, которые составляют фундамент современной теории оптимального управления – современного вариационного исчисления.

В данном разделе в сжатой форме излагаются основные определения, понятия, результаты вариационного исчисления, без которых невозможно изложение и понимание последующего материала. Многие утверждения и теоремы приводятся без доказательств, которые можно найти в известных учебниках [9,14,24]. Основное внимание уделяется физической и геометрической сущности, практической значимости обсуждаемых результатов и методов.

### 2.1. Функционалы, вариации и их свойства

Основной задачей вариационного исчисления является отыскание функций, доставляющих экстремальное значение некоторым функционалам. Понятие функционала является естественным расширением, развитием понятия функции. *Говорят, что в классе функций задан функционал, если указано правило, по которому каждой функции из этого класса или каждому набору функций, играющих роль аргументов, ставится в соответствие некоторое число.* Пример функционала: через две произвольные точки на плоскости можно провести бесконечное множество кривых, которое определяет соответствующий класс функций; длина дуги кривой, заключенной между этими точками, есть функционал, заданный в указанном классе функций. Очевидно, что среди всех функций-аргументов минимум данному функционалу доставляет функция, описывающая прямую.

В теории и практике управления получили широкое распространение интегральные функционалы вида (1.29) – (1.31). Численное значение интеграла (1.29) зависит от поведения  $n+m$  входных и выходных функций объекта управления, т.е. выражение (1.29) является функционалом от указанных функций объекта. Подчеркнем, что данный функционал емко, одним числом оценивает поведение управляемого объекта. Поэтому в теории управления функционалы часто используются как критерии качества управления, как критерии оптимальности движения объекта, которые строго математически определяют цель управления.

Необходимо отметить, что численное значение функционала, а также сложность процедуры определения его экстремального значения напрямую зависят от класса функций, на котором задан функционал. Рассмотрим основные классы и пространства функций, используемых в вариационном исчислении.

Каждую функцию  $x(t)$ , принадлежащую определенному классу, будем рассматривать как точку некоторого пространства. *Пространство, элементами которого являются функции, называется функциональным пространством.*

*Функциональное пространство  $R$  называется метрическим пространством, если между его двумя любыми элементами  $x_1(t), x_2(t) \in R$  определено понятие расстояния  $\rho(x_1, x_2)$ .* При этом должны выполняться следующие три аксиомы метрики (расстояния):

- 1)  $\rho(x_1, x_2) \geq 0$ ;
- 2)  $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$ ;
- 3)  $\rho(x_2, x_3) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_1, x_3)$ .

Последнюю аксиому принято называть неравенством треугольника.

В вариационном исчислении используются, как правило, три функциональных пространства [14, 26].

**Пространство  $C$ .** *Пространством  $C$  называют совокупность непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций  $x(t)$ , метрика в котором задается равенством*

$$\rho(x_1, x_2) = \max_{a \leq t \leq b} |x_1(t) - x_2(t)|. \quad (2.1)$$

Это пространство непрерывных функций также обозначают  $C[a, b]$ . Если расстояние (2.1) мало, то говорят, что функции  $x_1(t), x_2(t)$  близки в смысле близости нулевого порядка.

**Пространство  $C_1$ .** *Пространством  $C_1$  называют совокупность непрерывных функций, заданных на отрезке  $[a, b]$  и имеющих на этом отрезке непрерывную производную, метрика в котором задается равенством*

$$\rho(x_1, x_2) = \max_{a \leq t \leq b} |x_1(t) - x_2(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)|. \quad (2.2)$$

Это пространство гладких функций также обозначают  $C_1[a, b]$ . Если расстояние (2.2) мало, то говорят, что функции  $x_1(t), x_2(t)$  близки в смысле близости первого порядка.

**Пространство  $C_k$ .** *Пространством  $C_k$  называют совокупность непрерывных функций, заданных на отрезке  $[a, b]$  и имеющих на этом отрезке непрерывные производные до  $k$ -го порядка включительно, метрика в котором задается равенством*

$$\rho(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^k \max_{a \leq t \leq b} |x_1^{(i)}(t) - x_2^{(i)}(t)|. \quad (2.3)$$

Если расстояние (2.3) мало, то говорят, что функции  $x_1(t), x_2(t)$  близки в смысле близости  $k$ -го порядка.

На рис.2.1 изображены кривые, близкие в смысле близости нулевого порядка, но не близкие в смысле близости первого порядка, так как координаты  $x$  их близки, а направления касательных не близки.

На рис.2.2 изображены кривые, близкие в смысле близости первого порядка.

Из этих определений следует, что если кривые близки в смысле близости  $n$ -го порядка, то они тем более близки в смысле близости меньшего порядка.

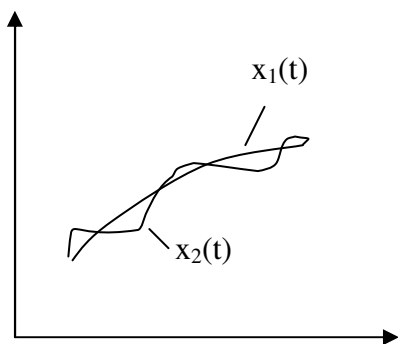


Рис. 2.1. Кривые близости нулевого порядка

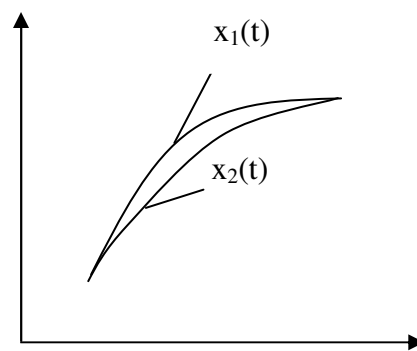


Рис. 2.2. Кривые близости первого порядка

Методы решения вариационных задач во многом аналогичны методам исследования функций на экстремум. Поэтому целесообразно кратко вспомнить основные положения теории оптимизации функций и параллельно ввести аналогичные понятия, определения, теоремы для функционалов. Сделаем это в форме табл. 1.

Таблица 1

ФУНКЦИИ	ФУНКЦИОНАЛЫ
1. Приращением $\Delta t$ аргумента $t$ функции $f(t)$ называется разность между двумя значениями этой переменной $\Delta t = t - t_1$ .	1. Приращением, или <i>вариацией</i> $\delta x$ аргумента $x(t)$ функционала $v[x(t)]$ , называется разность между двумя функциями $\delta x = x(t) - x_1(t)$ , причем $x(t), x_1(t) \in \Omega$ .
2. Функция $f(t)$ называется непрерывной, если малому изменению $t$ соответствует малое изменение функции $f(t)$ или более строго функция $f(t)$ непрерывна при $t = t_0$ , если для любого положительного $\varepsilon$ можно подобрать такое $\delta \geq 0$ , что $ f(t) - f(t_0)  \leq \varepsilon$ при $ t - t_0  \leq \delta$ .	2. Функционал $v[x(t)]$ называется непрерывным, если малому изменению $x(t)$ соответствует малое изменение функционала $v[x(t)]$ или более строго функционал $v[x(t)]$ непрерывен при $x_0(t)$ в смысле близости $k$ -го порядка, если для любого $\varepsilon \geq 0$ можно подобрать такое $\delta \geq 0$ , что $ v[x(t)] - v[x_0(t)]  \leq \varepsilon$ при $ x(t) - x_0(t)  \leq \delta,  x'(t) - x'_0(t)  \leq \delta,$ ----- $ x^{(k)}(t) - x_0^{(k)}(t)  \leq \delta$ .

ФУНКЦИИ	ФУНКЦИОНАЛЫ
<p>3. Линейной функцией называется функция <math>f(t)</math>, удовлетворяющая следующим условиям: <math>f(C \cdot t) = C \cdot f(t)</math>, где <math>C</math> – произвольная константа и <math>f(t_1+t_2) = f(t_1) + f(t_2)</math>.</p> <p>Линейная функция одной переменной имеет вид</p> $f(t) = k \cdot t,$ <p>где <math>k</math> – постоянная.</p>	<p>3. Линейным функционалом называется функционал <math>L[x(t)]</math>, удовлетворяющий условиям:</p> $L[C \cdot x(t)] = C \cdot L[x(t)],$ <p>где <math>C</math> – произвольная постоянная и</p> $L[x_1(t)+x_2(t)] = L[x_1(t)] + L[x_2(t)].$ <p>Примером линейного функционала является</p> $L[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} (p(t) \cdot x(t) + q(t) \cdot \dot{x}(t)) dt.$
<p>4. Если приращение функции</p> $\Delta f = f(t+\Delta t) - f(t)$ <p>может быть представлено в виде</p> $\Delta f = A(t) \cdot \Delta t + B(t, \Delta t) \cdot \Delta t,$ <p>где <math>A(t)</math> не зависит от <math>\Delta t</math>, и <math>B(t, \Delta t) \rightarrow 0</math> при <math>\Delta t \rightarrow 0</math>, то функция называется дифференцируемой, а линейная по отношению к <math>\Delta t</math> часть приращения <math>A(t) \cdot \Delta t</math> называется дифференциалом функции и обозначается <math>df</math>.</p> <p>5. Теорема 2.1.</p> <p>Если дифференцируемая функция <math>f(t)</math> достигает минимума во внутренней точке <math>t_0</math> области определения функции, то <math>df = 0</math>.</p>	<p>4. Если приращение функционала</p> $\Delta v = v[x(t)+\delta x] - v[x(t)]$ <p>можно представить в виде</p> $\Delta v = L[x(t), \delta x] + B(x(t), \delta x) \cdot \rho(x+\delta x, x),$ <p>где <math>L[x(t), \delta x]</math> – линейный по отношению к <math>\delta x</math> функционал, и</p> $B(x(t), \delta x) \rightarrow 0 \text{ при } \rho(x+\delta x, x) \rightarrow 0,$ <p>то линейная по отношению к <math>\delta x</math> часть приращения функционала, т.е. <math>L[x(t), \delta x]</math>, называется вариацией функционала и обозначается <math>\delta v</math>.</p> <p>5. Теорема 2.2.</p> <p>Если функционал <math>V[x(t)]</math>, имеющий вариацию, достигает минимума при <math>x_0(t)</math>, где <math>x_0(t)</math> – внутренняя точка области определения функционала, то <math>\delta v = 0</math>.</p>

Теорема 2.2 является основным инструментом исследования функционалов на экстремум (минимум или максимум). В дальнейшем в качестве основного варианта рассматривается минимизация функционала, а задача максимизации функционала сводится к задаче минимизации на основе простого соотношения

$$\max v[x(t)] = \min(-v[x(t)]) .$$

*По определению, функционал  $v[x(t)]$  достигает на кривой  $x_0(t)$  минимума, если значение функционала  $v[x(t)]$  на любой, достаточно близкой к  $x_0(t)$  кривой не меньше, чем  $v[x_0(t)]$ , т.е.*

$$\Delta v = v[x(t)] - v[x_0(t)] \geq 0 .$$

Данное понятие экстремума нуждается в уточнении. Говоря о максимуме или минимуме функционала, мы имеем в виду наибольшее или наименьшее значение функционала по отношению к его значениям на близких кривых, но



близость кривых в разных функциональных пространствах понимается различно. Если в качестве функционального пространства  $R$  рассматривается пространство  $C$ , то такой минимум называется сильным, а если в качестве  $R$  рассматривается пространство  $C_1$ , то минимум называется слабым.

Подчеркнем, что сильный минимум является одновременно и слабым, но не наоборот, так как слабый экстремум определяется по отношению к более узкому классу кривых, для которых не только модуль разности  $|x(t) - x_0(t)|$  мал, но мал также и модуль  $|\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)|$ , т.е. имеет место близость функций первого, а не нулевого порядка.

Введенное понятие вариации функционала, как главной линейной части его приращения, известное в математической литературе [33] также под названием сильного дифференциала функционала или дифференциала Фреше, относительно сложно вычислять для некоторых функционалов. В связи с этим появилось понятие слабого дифференциала функционала, или дифференциала Гато, определяемого с использованием производной функции

$$\delta v = \frac{d}{d\alpha} v[x(t) + \alpha \cdot \eta(t)] \Big|_{\alpha=0}, \quad (2.4)$$

где выражение  $\alpha \cdot \eta(t)$  есть вариация аргумента  $x(t)$  и принадлежит тому же классу функций, что и  $x(t)$ ;  $\alpha$  – параметр.

Доказана теорема [33], что если существует сильный дифференциал функционала, то существует и слабый его дифференциал, но не наоборот, причем в этом случае дифференциалы совпадают.

В рассматриваемых ниже задачах указанные дифференциалы Фреше и Гато совпадают, и поэтому мы будем широко пользоваться определением (2.4), в соответствии с которым вариация функционала вычисляется значительно проще как производная указанной функции.

Аналогично выражению (2.4) вычисляется вторая вариация функционала

$$\delta^2 v = \frac{d^2}{d\alpha^2} v[x(t) + \alpha \cdot \eta(t)] \Big|_{\alpha=0}, \quad (2.5)$$

используемая в анализе функционалов на экстремум.

Функции, на которых достигается экстремум функционала, называются *экстремалями*.

## 2.2. Основные результаты классического вариационного исчисления

### 2.2.1. Решение простейшей вариационной задачи, уравнение Эйлера

Введенные определения близости функций позволяют математически строго сформулировать простейшую вариационную задачу, изучаемую в классическом вариационном исчислении: задан функционал

$$v[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), \dot{x}(t)] dt \quad (2.6)$$

с известными пределами интегрирования  $t_0, t_1$ , причем предполагается, что функция  $F$  является однозначной и непрерывной вместе со своими частными

производными (т.е. является гладкой); требуется в классе гладких функций  $x(t) \in C_1[t_0, t_1]$ , удовлетворяющих граничным условиям

$$x(t_0) = x_0; \quad x(t_1) = x_1, \quad (2.7)$$

найти функцию  $x(t)$ , доставляющую минимум функционалу (2.6). Геометрическая трактовка задачи приведена на рис. 2.3 – искомая кривая проходит через заданные точки  $A(t_0, x_0)$ ,  $B(t_1, x_1)$ .

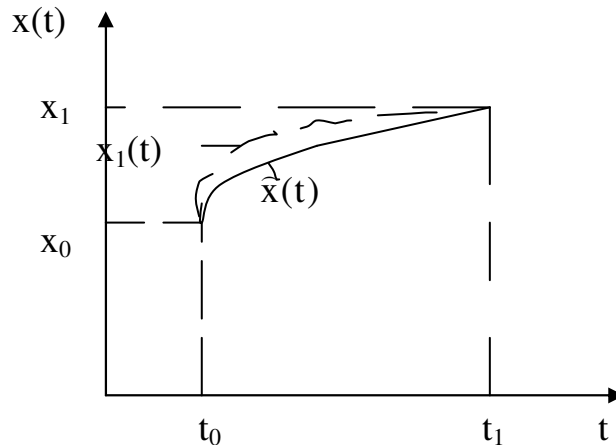


Рис. 2.3. Геометрическая иллюстрация вариационной задачи

Такая задача называется *вариационной задачей с закрепленными граничными точками*.

Подчеркнем, что в классическом вариационном исчислении определяется слабый минимум функционала, так как экстремали отыскиваются в пространстве гладких функций  $C_1$ .

Переходя к решению вариационной задачи, допустим, что ее решение – кривая  $\hat{x}(t)$  найдена. Рассмотрим допустимую кривую  $x_1(t) \in C_1$ :

$$x_1(t) = \hat{x}(t) + \alpha \cdot \eta(t), \quad (2.8)$$

где  $\alpha \cdot \eta(t)$  – вариация функции;  $\eta(t)$  – произвольная допустимая функция;  $\alpha$  – малая константа.

Так как допустимая кривая  $x_1(t)$  должна удовлетворять краевым условиям (2.7), то очевидно, что

$$\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0. \quad (2.9)$$

Вследствие принадлежности  $x_1(t) \in C_1[t_0, t_1]$  возможно продифференцировать данную функцию по времени

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\hat{x}}(t) + \alpha \cdot \dot{\eta}(t).$$

Таким образом, на функции  $x_1(t)$  функционал принимает значение

$$v[\hat{x}(t) + \alpha \cdot \eta(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F[t, \hat{x}(t) + \alpha \cdot \eta(t), \dot{\hat{x}}(t) + \alpha \cdot \dot{\eta}(t)] dt. \quad (2.10)$$

Известно, что необходимым условием экстремума функционала является обращение в нуль его вариации  $\delta V$ :

$$\delta v = \frac{d}{d\alpha} v[\hat{x}(t) + \alpha \cdot \eta(t)] \Big|_{\alpha=0} = 0. \quad (2.11)$$

**Замечание.** Выражение (2.10) можно рассматривать как функцию параметра  $\alpha$ , которая при  $\alpha = 0$  принимает минимальное значение. В этом случае соотношение (2.11) можно интерпретировать как условие минимума указанной функции по  $\alpha$ .

На основе (2.10), (2.11) с использованием правила дифференцирования сложной функции находим вариацию функционала

$$\delta v = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \eta(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \cdot \dot{\eta}(t) \right\} dt = 0. \quad (2.12)$$

После интегрирования второго слагаемого по частям имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \dot{\eta}(t) dt = UV \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} V \cdot dU = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \eta(t) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \eta(t) \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} dt.$$

Окончательно с учетом краевых условий (2.9) вариацию (2.12) запишем в виде

$$\delta v = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \right\} \eta(t) dt = 0. \quad (2.13)$$

Равенство (2.13) должно иметь место для произвольной дифференцируемой функции  $\eta(t)$ . Это возможно, если функция  $\eta(t)$  умножается на нуль, т.е. если выполняется равенство

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = 0 \quad \text{или} \quad F_{x_1} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}_1} = 0. \quad (2.14)$$

Это уравнение получило название уравнение Эйлера (было установлено в 1744 г.).

Математически строгий вывод уравнения Эйлера исходя из интегрального соотношения (2.13) опирается на основную лемму вариационного исчисления (**лемму Лагранжа**): *если для каждой непрерывной функции  $\eta(t)$ , удовлетворяющей условию  $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$ , интеграл*

$$\int_{t_0}^{t_1} \mu(t) \eta(t) dt = 0,$$

*где  $\mu(t)$  – непрерывная на отрезке  $[t_0, t_1]$  функция, то  $\mu(t) \equiv 0$  на том же отрезке.*

Данная лемма просто доказывается методом от противного [27].

Таким образом, мы доказали, что если среди допустимых функций класса  $C_1[t_0, t_1]$  существует функция, доставляющая минимум (максимум) функционалу  $v[x(t)]$ , то она будет решением уравнения Эйлера, т.е. уравнение (2.14) является необходимым условием слабого минимума (максимума) функционала (2.6) при граничных условиях (2.7).

Однако остается неясным, доставляют ли решения уравнения Эйлера функционалу максимум или минимум? Ответ на этот вопрос дает **теорема Лежандра** [28, 29]: *для того чтобы функционал (2.6) в задаче с закрепленными границами на кривой  $x(t)$  достигал минимума (максимума), необходимо, чтобы вдоль этой кривой выполнялось условие*

$$\frac{\partial^2 F[t, x(t), \dot{x}(t)]}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \geq 0 \quad \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \leq 0 \right). \quad (2.15)$$

Эту теорему, выражающую второе необходимое условие экстремума, примем без доказательства, но укажем, что условие (2.15) непосредственно получается после раскрытия второй вариации функционала  $\delta^2 v$ , которая, чтобы функция  $x(t)$  доставляла минимум функционалу  $v[x(t)]$ , должна быть неотрицательной  $\delta^2 v \geq 0$ . Здесь наблюдается полная аналогия с задачей минимизации функции  $f(x)$ , для которой необходимые условия минимума записываются следующим образом: 1)  $df = 0$ ; 2)  $d^2 f \geq 0$ . Аналогично условия Эйлера и Лежандра определяют необходимые условия экстремума функционала (2.6).

Если продифференцировать по времени выражение  $dF/d\dot{x}$ , являющееся функцией трех переменных,  $t, x(t), \dot{x}(t)$ , то уравнение Эйлера можно записать в следующей развернутой форме:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \dot{x}} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \dot{x} - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \ddot{x} = 0, \quad (2.14a)$$

$$x(t_0) = x_0; \quad x(t_1) = x_1.$$

Отсюда видно, что уравнение Эйлера является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. Его решение  $x(t, C_1, C_2)$  зависит от двух постоянных интегрирования  $C_1, C_2$ , которые находятся из условий прохождения функции  $x(t)$  через заданные граничные (краевые) точки  $x(t_0), x(t_1)$ . В связи с этим задача (2.14a) называется двухточечной краевой задачей (ДТКЗ). Если ДТКЗ линейная, то ее решение легко получить на основе известного общего решения линейного дифференциального уравнения. Сложность же решения нелинейных вариационных задач определяется именно сложностью решения ДТКЗ [23].

**Пример 2.1.** Используя уравнение Эйлера, найдем функцию, доставляющую экстремум функционалу

$$I = \int_0^\infty (x^2(t) + \tau^2 \dot{x}^2(t)) dt = \int_0^\infty F(x, \dot{x}) dt \quad (2.16)$$

при граничных условиях  $x(0) = x_0; \quad x(\infty) = 0$ .

Вычислим производные подинтегральной функции

$$F_x = 2x; \quad \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = \frac{d}{dt} (2\tau^2 \dot{x}) = 2\tau^2 \ddot{x}$$

и подставим их в уравнение (2.14):

$$2x - 2\tau^2 \ddot{x} = 0.$$

Решение этого уравнения Эйлера как линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{-t/\tau} + C_2 e^{t/\tau}.$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определим из граничных условий. Из условия  $x(\infty) = 0$  непосредственно следует, что  $C_2 = 0$ . Постоянная  $C_1$  определяется начальным условием  $x(0) = x_0$ . Отсюда  $C_1 = x_0$ . Окончательно уравнение экстремали имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau}. \quad (2.17)$$

Используя условие Лежандра

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} = 2\tau^2 > 0,$$

легко убедиться в том, что экстремаль (2.17) доставляет функционалу (2.16) минимальное значение. Следовательно, оптимальной в смысле минимума критерия (2.16) функцией является экспонента с постоянной времени  $\tau$ .

Отметим, что квадратичный функционал (2.16) широко применяется для оценки качества движений систем управления [38]. Полученный результат позволяет пояснить физический смысл квадратичного критерия качества управления (2.16): чем лучше система в смысле показателя  $I$ , тем ближе ее переходные процессы к экспоненте (2.17). Увеличение коэффициента веса  $\tau$  при формировании показателя качества означает предпочтение системам с более медленно затухающими процессами. По существу, критерий  $I$  означает принятие в виде эталона качества системы первого порядка с постоянной времени  $\tau$ .

Соответственно синтез системы управления по более общему функционалу качества

$$I_1 = \int_0^{\infty} (x^2(t) + \tau^2 \dot{x}^2(t) + r u^2(t)) dt, \quad r > 0$$

требует приближения переходных процессов синтезируемой системы к указанной экспоненте при наличии ограничения на мощность (работу) управляющего сигнала  $u(t)$ , которое учитывается величиной весового коэффициента  $r > 0$ . Уменьшение величины  $r$  означает возможность применения более мощных сигналов управления, что в последствии приводит к увеличению коэффициента усиления  $k$  конструируемой системы (в главе 5 показывается, что в пределе при  $r \rightarrow 0$  получается  $k \rightarrow \infty$ ).

Рассмотрим некоторые обобщения полученного необходимого условия экстремума функционалов – уравнения Эйлера.

### 2.2.2. Уравнение Эйлера–Пуассона

В теории управления часто используются функционалы, подынтегральная функция которых содержит производные высших порядков

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) dt. \quad (2.18)$$

Здесь предполагается, что функция  $F$  является  $(n+2)$  раза дифференцируемой по всем аргументам, а граничные условия заданными в форме

$$x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}; \quad x^{(i)}(t_1) = x_1^{(i)}; \quad i = 0, 2, \dots, n-1, \quad (2.19)$$

т.е. в граничных точках заданы значения не только функции, но и ее производные до порядка  $(n-1)$  включительно (всего  $2n$  условий).

Решение вариационной задачи ищется в классе  $C_{2n}[t_0, t_1]$  гладких  $2n$  раз дифференцируемых функций. Методика получения необходимого условия ми-

нимума функционала остается прежней: находится первая вариация критерия и приравнивается к нулю, что после преобразований приводит к уравнению

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} F_{\ddot{x}} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} F_{x^{(n)}} = 0, \quad (2.20)$$

которое называется уравнением Эйлера–Пуассона.

В общем случае оно представляет нелинейное дифференциальное уравнение  $2n$ -порядка. Его решение  $x(t, c_1, c_2, \dots, c_{2n})$  содержит  $2n$  постоянных интегрирования. Последние находятся на основе такого же количества граничных условий (2.19).

### 2.2.3. Функционалы, зависящие от нескольких функций

Другим обобщением простейшей вариационной задачи является задача отыскания экстремума функционала, зависящего от  $n$  функций

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)) dt \quad (2.21)$$

при заданных граничных значениях для всех функций

$$x_i(t_0) = x_{i0}; \quad x_i(t_1) = x_{i1}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.22)$$

Требуется в классе  $C_1[t_0, t_1]$  найти функции  $x_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , проходящие через граничные точки (2.22) и доставляющие минимум функционалу (2.21).

Для получения необходимых условий экстремума рассматриваемого функционала будем варьировать только одну из функций  $x_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , оставляя все остальные функции неизменными. При этом функционал  $J[x_1, x_2, \dots, x_n]$  превращается в функционал, зависящий только от одной варьируемой функции, например,  $J[x_1, x_2, \dots, x_n] = \tilde{J}[x_j(t)]$  от  $x_j(t)$ . Следовательно, функция, реализующая экстремум, должна удовлетворять уравнению Эйлера  $F_{x_j} - dF_{\dot{x}_j}/dt = 0$ . Так как это рассуждение применимо к любой функции  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , то приходим к системе уравнений Эйлера

$$F_{x_j} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.23)$$

которая определяет совокупность необходимых условий экстремума вариационной задачи (2.21), (2.22).

Решения системы дифференциальных уравнений (2.23) (экстремали) содержат  $2n$  постоянных интегрирования, которые находятся из заданных граничных условий (2.22).

В современной литературе по теории оптимального управления полученный результат часто записывают в матричной форме. Введем в рассмотрение вектор  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  и запишем функционал (2.21) в следующем виде:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F[t, X(t), \dot{X}(t)] dt, \quad \dot{X}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))^T.$$

Используя понятие производной скалярной функции  $\varphi(X)$  по векторному аргументу  $X$  (понятие градиента)

$$\frac{d\varphi(X)}{dX} = (\varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_n})^T, \quad \varphi_{x_n} = \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_n},$$

условия (2.23) можно записать в компактной матричной форме

$$\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{X}} = 0, \quad (2.24)$$

которая является полным аналогом скалярного уравнения Эйлера.

#### 2.2.4. Вариационные задачи на условный минимум

Рассмотренные выше обобщения относятся к задачам вариационного исчисления на безусловный экстремум. В теории управления чаще встречаются задачи, когда функции, доставляющие экстремум функционалу, сами подчинены некоторым дополнительным условиям, называемыми уравнениями связи. Такие задачи известны как *задачи на условный экстремум*. Рассмотрим сначала наиболее простой вариант вариационной задачи на условный экстремум.

**Задача Лагранжа с голономными связями.** Пусть задан функционал

$$I[X(t)] = \int_{t_0}^{t_k} F[t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n] dt \quad (2.25)$$

при наличии условий

$$\varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad m < n \quad (2.26)$$

и

$$X(t_0) = X_0; \quad X(t_k) = X_k; \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T. \quad (2.27)$$

Функции  $\varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, m$  предполагаются гладкими и независимыми по переменным  $x_1, \dots, x_n$ .

Сформулированная задача на условный экстремум решается, как правило, путем сведения ее к безусловному экстремуму некоторого функционала методом неопределенных множителей Лагранжа. Доказана [34] следующая **теорема 2.3:** *если  $X(t)$  – экстремаль функционала (2.25), удовлетворяющая условиям (2.26), (2.27), то она удовлетворяет уравнениям Эйлера, составленным для функционала*

$$G[X(t)] = \int_{t_0}^{t_k} (F + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \cdot \varphi_i) dt = \int_{t_0}^{t_k} L dt, \quad (2.28)$$

где  $\lambda_i = \lambda_i(t)$  – соответствующие функции (множители Лагранжа).

В соответствии с данной теоремой, экстремали функционала (2.25) и функции  $\lambda_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$  должны удовлетворять уравнениям Эйлера:

$$\begin{cases} L_{x_k} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_k} = 0, & k = 1, \dots, n, \\ L_{\lambda_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{\lambda}_i} \equiv \varphi_i = 0, & i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (2.29)$$

где  $L = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \varphi_i$  так называемая *функция Лагранжа*.

Уравнений (2.29) достаточно для определения множителей Лагранжа  $\lambda_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$  и искомых функций  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , если известны граничные условия. Таким образом, экстремаль задачи (2.25) – (2.27) определяется известными методами поиска экстремалей функционала (2.28).

Указанный стандартный прием решения задач на условный экстремум распространяется и на случай, когда уравнения связи содержат производные искомых функций, т.е. являются дифференциальными уравнениями

$$\varphi_i[t, x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)] = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.30)$$

В классическом вариационном исчислении этот прием не имеет строгого обоснования, в сущности, его доказательство дается в современных работах Л.С. Понтрягина при изложении принципа максимума. В указанном случае вариационная задача формулируется как задача определения экстремума функционала (2.25) на решениях системы дифференциальных уравнений (2.30), удовлетворяющих краевым условиям (2.27). Данная задача называется *общей задачей Лагранжа*. Она является наиболее общей задачей вариационного исчисления и другие известные задачи (Больца, Майера, изопериметрическая задача) можно рассматривать как ее частные случаи [27,28].

**Изопериметрическая задача**, являющаяся частным случаем задачи Лагранжа и представляющая самостоятельный интерес, в простейшем варианте формулируется следующим образом: определить экстремум функционала

$$J_0 = \int_{t_0}^{t_k} F[t, x(t), \dot{x}(t)] dt$$

при условии, что другой функционал

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_k} \varphi_1[t, x(t), \dot{x}(t)] dt = C$$

сохраняет заданное значение  $C$ , а экстремаль проходит через точки:  $x(t_0) = x_0$ ;  $x(t_k) = x_k$ .

Название изопериметрических такого рода задачи получили по названию одной из них: среди всех кривых равной длины (одинакового периметра) найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь. Эта задача была известна еще древним грекам под названием «задача Дидоны» [29].

Изопериметрическую задачу легко свести к общей задаче Лагранжа. Действительно, обозначив

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi_1[t, x(t), \dot{x}(t)] dt$$

(интеграл с переменным верхним пределом), получим

$$\dot{\psi}(t) = \varphi_1[t, x(t), \dot{x}(t)],$$

и приходим к следующей задаче Лагранжа: найти функции  $x(t)$ ,  $\psi(t)$ , доставляющие экстремум функционалу  $J_0$  при наличии уравнения связи



$$\psi - \varphi_1 = 0.$$

Согласно теореме 2.3, для решения этой задачи следует для вспомогательной функции  $L = F + \lambda(\psi - \varphi_1)$  составить уравнения Эйлера

$$L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 0; \quad L_{\psi} - \frac{d}{dt}L_{\dot{\psi}} = -\frac{d}{dt}\lambda(t) = 0.$$

Из второго уравнения Эйлера следует, что  $\lambda = \text{const}$ , т.е. для изопериметрической задачи множитель Лагранжа обращается в постоянное число. В то же время это уравнение не дает никакой информации о функции  $\psi(t)$ , однако в этом и нет необходимости: мы должны найти только одну функцию  $x(t)$ , доставляющую экстремум функционалу  $J_0$  при наличии условия на  $J_1$ . Для этого достаточно одного уравнения – первого уравнения Эйлера, в котором  $L_x = F_x - \lambda\varphi_{1x}$ ;  $L_{\dot{x}} = F_{\dot{x}} - \lambda\varphi_{1\dot{x}}$ .

Таким образом, получаем следующее мнемоническое правило: для того чтобы найти функцию  $x(t)$ , доставляющую экстремум интегралу  $J_0$  при условии, что интеграл  $J_1$  сохраняет заданное значение, следует составить одно уравнение Эйлера для промежуточной функции

$$L = F[t, x(t)\dot{x}(t)] + \lambda_0 \cdot \varphi_1[t, x(t), \dot{x}(t)].$$

В решение уравнения Эйлера будут входить три произвольные постоянные – две постоянные интегрирования и постоянная  $\lambda_0$ . Для их определения имеем как раз три уравнения: два уравнения следуют из условий прохождения экстремали через две заданные точки, а третье – из условия, что интеграл  $J_1$  равен заданному значению  $C$ .

**Пример 2.2.** Для двигателя постоянного тока с независимым возбуждением, описываемого уравнением

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = k_m \cdot i(t) + m, \quad m = \text{const},$$

(обозначения см. в 1.2.1) необходимо определить оптимальные диаграммы скорости  $\omega(t)$  и тока  $i(t)$ , доставляющие минимум потерь энергии в обмотке якоря

$$P = \int_0^T r \cdot i^2(t) dt$$

(минимальный нагрев якорной обмотки) при заданном угле поворота вала двигателя

$$\varphi = \int_0^T \omega(t) dt$$

за фиксированное время  $T$  при нулевых граничных условиях  $\omega(0) = \omega(T) = 0$ .

Выразив из уравнения движения двигателя ток

$$i(t) = J_1 \dot{\omega}(t) + m_1; \quad J_1 = \frac{J}{k_m}; \quad m_1 = \frac{m}{k_m}$$

и подставив его в интеграл потерь энергии, сведем определение оптимальной диаграммы скорости к изопериметрической задаче: требуется найти функцию  $\omega(t)$ , обеспечивающую минимум интегралу

$$P = r \int_0^T (J_1 \dot{\omega}(t) + m_1)^2 dt$$

при заданном значении угла  $\varphi$ , определяемом соответствующим интегралом.

Для решения сформулированной вариационной задачи составляем функцию Лагранжа

$$L(\omega, \dot{\omega}) = r(J_1 \dot{\omega}(t) + m_1)^2 + \lambda_0 \omega.$$

Для нее уравнение Эйлера принимает вид

$$L_{\omega} - \frac{d}{dt} L_{\dot{\omega}} = \lambda_0 - 2rJ_1^2 \ddot{\omega} = 0.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет форму

$$\omega(t) = \frac{\lambda_0}{4rJ_1^2} t^2 + c_1 t + c_2.$$

Таким образом, оптимальной диаграммой скорости является парабола, а соответственно оптимальная диаграмма тока имеет линейный характер

$$i(t) = \frac{\lambda_0}{2rJ_1} t + (J_1 c_1 + m_1).$$

Диаграмма скорости зависит от трех произвольных постоянных:  $\lambda_0, c_1, c_2$ .

Для их определения имеем три уравнения:  $\omega(0) = 0$ ;  $\omega(T) = 0$ ;  $\int_0^T \omega(t) dt = \varphi$ . Из

первого уравнения сразу следует, что  $c_2 = 0$ . Далее из системы оставшихся двух уравнений с двумя неизвестными

$$\frac{\lambda_0}{4rJ_1^2} T^2 + c_1 T = 0; \quad \frac{\lambda_0}{12rJ_1^2} T^3 + 0.5 \cdot c_1 T^2 = \varphi$$

находим

$$\lambda_0 = -\frac{24rJ_1^2 \varphi}{T^3}, \quad c_1 = \frac{6\varphi}{T^2}.$$

Окончательно оптимальные диаграммы скорости и тока двигателя описываются уравнениями

$$\omega(t) = \frac{6\varphi}{T^2} \left( -\frac{t^2}{T} + t \right), \quad i(t) = -\frac{12J_1 \varphi}{T^3} t + \frac{6J_1 \varphi}{T^2} + m_1. \quad (2.31)$$

Заметим, оптимальные диаграммы не зависят от величины сопротивления  $r$  якорной обмотки двигателя. Это просто объясняется: постоянный коэффициент  $r$  при минимизируемом функционале  $P$  можно было опустить – он не влияет на экстремаль функционала, изменяя только его численное значение.

Исследуем условие Лежандра:  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\omega} \partial \dot{\omega}} = 2J_1^2 > 0$ . Таким образом, на экстремальных (2.31) действительно может достигаться минимум функционала потерь энергии  $P$ .

### 2.2.5. Каноническая форма уравнений Эйлера–Лагранжа для задач оптимального управления

Повторим формулировку задачи оптимального управления в несколько обобщенной постановке. Пусть объект управления описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i(t) = f_i(X, U, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.32)$$

или в матричной форме уравнением

$$\dot{X}(t) = F[X(t), U(t), t].$$

Уравнения (2.32) являются обобщением модели (1.1) на случай нестационарных объектов с нелинейностями общего, а не только полиномиального вида.

Требуется найти вектор управлений  $U(t)$  и соответствующую фазовую траекторию  $X(t)$  перевода объекта из начального состояния

$$X(t_0) = X_0 \quad (2.33)$$

в конечное

$$X(t_k) = X_k \quad (2.34)$$

с минимальным значением функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_k} f_0[X(t), U(t), t] dt. \quad (2.35)$$

Очевидно, что данная задача является вариационной задачей и отличается от рассмотренных ранее задач на условный экстремум только тем, что в нее входят два вида функций: векторная функция  $X(t)$ , характеризующая состояние системы, и функция управления  $U(t)$ . Но это отличие не является принципиальным для задач вариационного исчисления и легко показать, что задача оптимального управления, удовлетворяющая основным положениям классического вариационного исчисления (отсутствие ограничений на фазовые координаты и управляющие воздействия, дифференцируемость управляющих воздействий), является общей задачей Лагранжа. Действительно, интеграл (2.35) можно рассматривать как функционал, зависящий от  $n+m$  функций  $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n$ .

Эти функции связаны дифференциальными уравнениями объекта (2.32), которые можно записать в виде уравнений связи

$$\varphi_i(X, \dot{X}, U, t) = \dot{x}_i - f_i(X, U, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.36)$$

Следовательно, для решения указанной задачи оптимального управления можно использовать метод неопределенных множителей Лагранжа и записать необходимое условие экстремума функционала (2.35) при наличии ограничений (2.36) в виде системы уравнений Эйлера–Лагранжа. Согласно методу неопределенных множителей введем вспомогательный функционал

$$I^* = \int_{t_0}^{t_k} L[X(t), U(t), \Lambda(t), t] dt, \quad (2.37)$$

где

$$L(X, U, \Lambda, t) = f_0(X, U, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [\dot{x}_i - f_i(X, U, t)] \quad (2.38)$$

есть функция Лагранжа. Тогда уравнения Эйлера–Лагранжа будут иметь вид

$$\begin{cases} L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ L_{\lambda_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{\lambda}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ L_{u_j} - \frac{d}{dt} L_{\dot{u}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (2.39)$$

Решая систему дифференциальных уравнений (2.39), при граничных условиях (2.33), (2.34) можем определить оптимальное управление  $U(t)$  и соответствующую ему оптимальную траекторию  $X(t)$  движения объекта.

В теории оптимального управления часто используется каноническая форма записи уравнений Эйлера–Лагранжа. Для приведения уравнений (2.39) к этой форме вводится так называемая *функция Гамильтона (гамильтониан)* [27,28]:

$$H(X, U, \Lambda, t) = -f_0(X, U, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(X, U, t) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(X, U, t), \quad \lambda_0 = -1. \quad (2.40)$$

Выразим функцию Лагранжа (2.38) через гамильтониан (2.40):

$$L(X, U, \Lambda, t) = -H(X, U, \Lambda, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \dot{x}_i(t), \quad \Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)^T. \quad (2.41)$$

Запишем уравнения Эйлера–Лагранжа (2.39) с использованием функции Гамильтона. Для производных, которые входят в уравнения (2.39), согласно (2.41) имеем

$$\begin{cases} L_{x_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; & L_{\dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \lambda_i; \\ L_{\lambda_i} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} + \dot{x}_i; & L_{\dot{\lambda}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_i} = 0; \\ L_{u_j} = \frac{\partial L}{\partial u_j} = -\frac{\partial H}{\partial u_j}; & L_{\dot{u}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} = 0. \end{cases}$$

Подставляем данные выражения в (2.39), получаем уравнения Эйлера–Лагранжа в канонической форме:

$$\text{(из 2-го уравнения)} \quad \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.42а)$$

$$\text{(из 1-го уравнения)} \quad \dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.42б)$$

$$\text{(из 3-го уравнения)} \quad \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.42в)$$

Уравнения (2.42) имеют глубокий физический смысл. Во-первых, непосредственным дифференцированием убеждаемся, что уравнения (2.42а) являются уравнениями исходного объекта (2.32). Соответственно, уравнения (2.42б), записанные относительно вспомогательных переменных  $\lambda_i(t)$ , образу-

ют так называемую сопряженную к объекту (2.42 а) систему уравнений. Они, согласно (2.40), имеют вид

$$\dot{\lambda}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial f_0(X, U, t)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(X, U, t)}{\partial x_i} \lambda_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.43)$$

Переменные  $\lambda_i(t)$ , в отличие от координат объекта управления, называют *сопряженными координатами*.

Во-вторых, замечаем, что уравнения (2.42в) являются алгебраическими

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = -\frac{\partial f_0(X, U, t)}{\partial u_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(X, U, t)}{\partial u_j} \lambda_k(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.44)$$

устанавливающими условия равенства нулю градиента функции Гамильтона по вектору  $U$  – условия возможного максимума гамильтониана. Как известно из работы [9], функция Гамильтона определяет полную энергию системы, описываемой уравнениями (2.42 а) и (2.42 б). Следовательно, уравнения (2.44) указывают, что полная энергия системы при оптимальном управлении должна быть наибольшей по сравнению с другими возможными управлениями.

Уравнения (2.44) позволяют определить оптимальное управление в виде функции переменных  $X$  и  $\Lambda$ :

$$U = U(X, \Lambda, t). \quad (2.45)$$

Подставив выражение (2.45) в (2.42 а) и (2.42 б), получим систему  $2n$  дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i[X(t), U(X(t), \Lambda(t), t)], \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \dot{\lambda}_i(t) = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j[X(t), U(X(t), \Lambda(t), t)]}{\partial x_i} \lambda_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ X(t_0) = X_0, \quad X(t_k) = X_k. \end{cases} \quad (2.46)$$

Общее решение такой системы, как известно, зависит от  $2n$  начальных (краевых) условий. В задаче управления с закрепленными концами  $n$  начальных условий задано на левом конце фазовой траектории ( $X(t_0) = X_0$ ), и  $n$  условий – на правом конце ( $X(t_k) = X_k$ ). Задача (2.46), как известно, называется двухточечной краевой задачей (ДТКЗ).

Таким образом, задача оптимального управления оказалась сведенной к решению ДТКЗ (2.46). Подчеркнем, что в силу только необходимости уравнений Эйлера–Лагранжа решение системы (2.42) не обязательно определяет оптимальное управление, но только решение системы (2.42) может претендовать на роль оптимального управления. С помощью уравнений Эйлера–Лагранжа обычно удается найти оптимальную траекторию системы, поскольку существование и характер экстремума функционала в реальной задаче управления, как правило, известны из ее физической сущности.

Указанный результат (уравнения Гамильтона (2.42)) можно считать основным достижением классического вариационного исчисления. Данный результат был развит и обобщен Л.С. Понтрягиным в принципе максимума.

### 2.3. Принцип максимума Л.С. Понтрягина

Принципом максимума называют математический метод, который был развит академиком Л.С. Понтрягиным и его учениками для решения задач оптимального управления при наличии ограничений на вектор управления в форме неравенств.

Данная задача управления, которую условно можно назвать задачей Л.С. Понтрягина, в целом аналогична рассмотренной задаче (2.32) – (2.35), но отличается от нее следующими особенностями.

#### 1. Критерий качества и объект управления

$$\dot{X}(t) = F[X(t), U(t)] \quad (2.47)$$

считаются стационарными.

Сразу отметим, что независимость функций  $f_0, f_i, i=1,2,\dots,n$  критерия и объекта от времени  $t$  не снижает общность задачи управления, так как в противном случае, вводя новую переменную  $x_{n+1}=t$  и дополняя систему (2.32)

уравнением  $\dot{x}_{n+1}=1$ , получим объект, правая часть которого не зависит явно от времени.

2. Предполагается, что компоненты вектора управления  $u_1(t), \dots, u_m(t)$  при каждом  $t$  принимают значения из некоторого замкнутого множества  $\Omega(U)$ . В качестве такого множества в практических задачах часто выступает множество управлений, ограниченных по модулю:

$$U \in \Omega(U); \quad |u_k(t)| \leq U_{k \max}, \quad k=1,2,\dots,m. \quad (2.48)$$

При этом управляющие воздействия считаются принадлежащими функциональному пространству кусочно-непрерывных функций с метрикой (2.1), которое условимся обозначать символами  $KC[t_0, t_k]$ . Указанные воздействия называются допустимыми управлениями.

Если в процессе оптимального управления функции  $u_k(t), k=1,2,\dots,m$  не достигают границ множества (2.48), то для них выполняются соотношения (2.42в). Однако часто оптимальное управление принимает граничные значения  $U_{k \max}$ , либо  $-U_{k \max}$ ,  $k=1,2,\dots,m$ , и более того, оптимальное управление может скачком переходить с одной границы на другую. Такие управления уже будут являться кусочно-непрерывными функциями времени.

При попадании управляющих воздействий на границу множества  $\Omega(U)$  соотношения (2.42 в) нарушаются. В этом случае оптимальные управления удовлетворяют принципу максимума Л.С. Понтрягина, формулируемого в виде следующей теоремы [18, 27].

**Теорема 2.4.** Пусть  $U(t), X(t), t \in [t_0, t_k]$  решение задачи управления (2.33)–(2.35), (2.47), (2.48). Тогда существует непрерывная вектор-функция  $\Psi(t) = \Lambda(t)$  и постоянная  $\Psi_0 = \lambda_0$ , такие, что:

1)  $\Psi(t)$  является решением сопряженной системы (2.42б), соответствующей рассмотренному решению  $X(t), U(t)$ ;

2) при каждом  $t \in [t_0, t_k]$  функция Гамильтона  $H[\psi_0, \Psi, X, U]$  переменного  $U \in \Omega(U)$  достигает в точке  $U(t)$  максимума:

$$H[\psi_0, \Psi, X, U] = \max_{U \in \Omega} H[\psi_0, \Psi, X, U] = M[\psi_0, \Psi, X], \quad (2.49)$$

3) если  $\Psi(t)$ ,  $X(t)$ ,  $U(t)$ , удовлетворяют (2.42а), (2.42б), (2.49), то функции  $\lambda_0(t)$  и  $M[\psi_0, \Psi(t), X(t)]$  переменного  $t \in [t_0, t_k]$  являются постоянными, причем  $\lambda_0 < 0$ , а  $M[\psi_0, \Psi(t), X(t)] = 0$ .

Таким образом, согласно приведенной теореме, управление  $U(t)$ , переводящее объект из заданного начального состояния  $X_0$  в заданное конечное  $X_k$ , только в том случае окажется оптимальным, если найдутся постоянная  $\psi_0$  и отличное от нуля решение системы (2.42 б), при которых вдоль рассматриваемой траектории функция  $H$  все время будет достигать наибольшего (нулевого) значения по переменной  $U$ :  $M = \max_{U \in \Omega} H$ .

Центральное место в этой теореме занимает условие максимума функции Гамильтона, вследствие чего необходимое условие оптимальности, сформулированное теоремой, называется принципом максимума.

Доказательство теоремы является достаточно сложным, и мы не будем его приводить. Однако подчеркнем, что принцип максимума устанавливает необходимые условия **сильного** экстремума функционала, т.е. экстремума в классе кусочно-непрерывных функций. Это следует из того, что в принципе максимума варьирование управлений осуществляется на бесконечно малом интервале  $\tau - \varepsilon \leq t \leq \tau$ ,  $t_0 < \tau < t_k$  и вариация представляет импульс бесконечно малой длительности  $\varepsilon$ , амплитуда которого может быть любой, но не должно выводить управление за область существующих ограничений (рис. 2.4). Подобная вариация называется *игольчатой*. Таким образом, проварьированное управление является кусочно-непрерывным с разрывами первого рода, что обеспечивает установление условий сильного экстремума функционала (2.35).

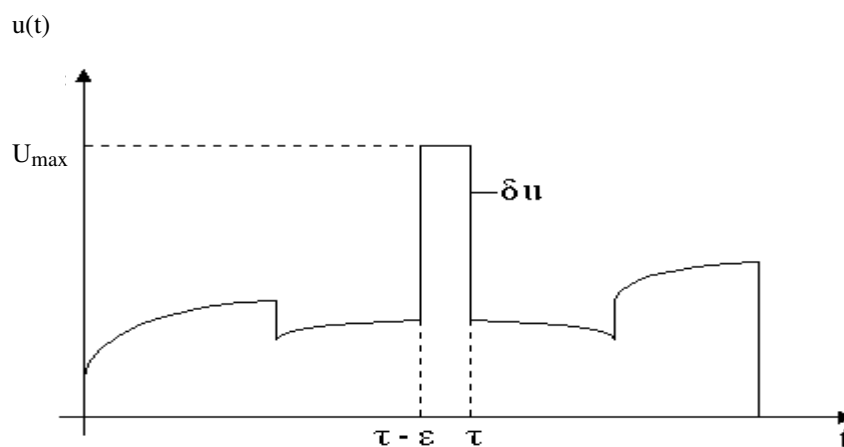


Рис. 2.4. Игольчатая вариация управления

Для подтверждения справедливости теоремы подчеркнем, что во внутренних точках множества  $\Omega(U)$  для оптимального управления выполняются условия (2.42в), которые являются необходимыми для выполнения условия максимума (2.49). Условие (2.49) можно рассматривать, как развитие, усиление условия (2.42 в) максимума функции  $H$  при отсутствии ограничений. Таким образом, принцип максимума является непосредственным, прямым развитием классического вариационного исчисления.

**Пример 2.3.** Применим принцип максимума к определению оптимального управления объектом первого порядка

$$T\dot{x}(t) + x(t) = K \cdot u(t) \quad \text{или} \quad \dot{x}(t) = -a \cdot x(t) + b \cdot u(t), \quad |u(t)| \leq U_m, \quad (2.50)$$

переводящего его из начального состояния  $x(0) = x_0$  в конечное  $x(\infty) = 0$  с минимальным значением квадратичного функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_k} (qx^2(t) + ru^2(t))dt, \quad (2.51)$$

где  $a = 1/T$ ;  $b_1 = K/T$ ;  $T, K$  – постоянная времени и коэффициент усиления объекта;  $q, r$  – положительные весовые коэффициенты критерия.

Для данной вариационной задачи составляем функцию Гамильтона

$$H(x, u, \lambda) = -qx^2 - ru^2 + \lambda(-ax + bu) = -r\left(u - \frac{b}{2r}\lambda\right)^2 + \frac{b^2}{4r}\lambda^2 - qx^2 - a\lambda x. \quad (2.52)$$

Оптимальное управление в соответствии с принципом максимума определим из условия максимума функции (2.52) по переменной  $u$ . Возможные случаи достижения квадратичной функцией (2.52) максимального значения при наличии ограничения  $|u(t)| \leq U_m$  представлены на рис. 2.5.

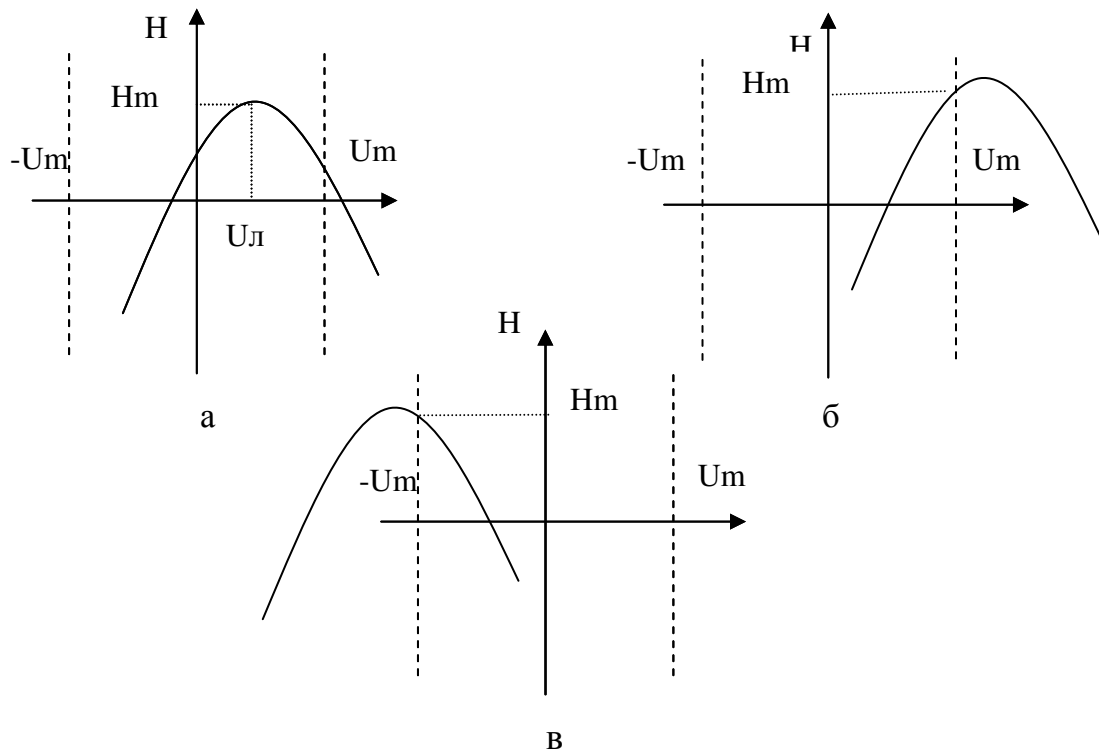


Рис. 2.5. Определение максимума функции Гамильтона



Согласно рис. 2.5, в случае “а” гамильтониан достигает максимума при управлении  $u(t) = U_{\text{л}} = (b/2r)\lambda(t)$ ; в случае “б” –  $u(t) = U_{\text{м}}$ ; в случае “в” –  $u(t) = -U_{\text{м}}$ .

Таким образом, оптимальное управление описывается выражением

$$u(t) = \begin{cases} U_{\text{м}}, & \text{если } U_{\text{л}}(t) > U_{\text{м}}, \\ U_{\text{л}}(t) = (b/2r)\lambda(t), & \text{если } |U_{\text{л}}(t)| \leq U_{\text{м}}, \\ -U_{\text{м}}, & \text{если } U_{\text{л}}(t) < -U_{\text{м}}. \end{cases} \quad (2.53)$$

Введем в рассмотрение стандартную функцию  $y(x) = \text{sat}(x)$ , которая определяется следующим образом:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 1, \\ x, & \text{если } |x| \leq 1, \\ -1, & \text{если } x < -1. \end{cases} \quad (2.54)$$

С использованием данной функции управление (2.53) компактно описывается выражением

$$u(t) = U_{\text{м}} \text{sat}[(b/2rU_{\text{м}})\lambda(t)]. \quad (2.55)$$

Для полного определения оптимального управления (2.55) необходимо найти сопряженную координату  $\lambda(t)$ . На начальном этапе решения задачи предположим, что значения данной координаты находятся в зоне линейности функции (2.55). В этом случае для определения функции  $\lambda(t)$  возможно использовать уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dH}{d\lambda} = -ax + bu, \quad \dot{\lambda} = -\frac{dH}{dx} = 2qx + a\lambda, \\ \frac{dH}{du} &= -2ru + b\lambda = 0 \rightarrow u = \frac{b}{2r}\lambda. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Подставляя оптимальное управление из последнего уравнения системы (2.56) в первые два уравнения, приходим к необходимости решать следующую двухточечную краевую задачу:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t) + \frac{b^2}{2r}\lambda(t); \\ \dot{\lambda}(t) = 2qx(t) + a\lambda(t); \\ x(0) = x_0, \quad x(\infty) = 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

Системы уравнений (2.57) сведем к одному дифференциальному уравнению второго порядка. Для этого из первого уравнения выражаем координату  $\lambda$ :

$$\lambda = (\dot{x} + ax) \frac{2r}{b^2}$$

и подставляем ее во второе уравнение

$$(\ddot{x} + a\dot{x}) \frac{2r}{b^2} = 2qx + a(\dot{x} + ax) \frac{2r}{b^2}.$$

Окончательно это уравнение после приведения подобных членов принимает вид

$$\ddot{x}(t) - (a^2 + \frac{b^2 q}{r})x(t) = 0. \quad (2.58)$$

Решением данного дифференциального уравнения является функция

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}, \quad \alpha = \sqrt{a^2 + \frac{b^2 q}{r}}, \quad (2.59)$$

постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  которой определяются из граничных условий. Так как  $x(\infty)=0$ , то для выполнения этого краевого условия полагаем

$C_1 = 0$ . При  $t = 0$  имеем  $C_1 e^0 + C_2 e^0 = x_0$  и для выполнения данного равенства должно быть  $C_2 = x_0$ .

Таким образом, оптимальное движение объекта описывается экспонентой

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t}. \quad (2.60)$$

Используя уравнение объекта (2.53), находим оптимальное программное управление

$$u(t) = \frac{1}{b}(ax + \dot{x}) = \frac{1}{b}(ax_0 e^{-\alpha t} - \alpha x_0 e^{-\alpha t}) = \frac{a - \alpha}{b} x_0 e^{-\alpha t}. \quad (2.61)$$

На основе соотношений (2.60) и (2.61) легко определить управление в форме обратной связи

$$u(t) = \frac{a - \alpha}{b} x(t). \quad (2.62)$$

Заметим, что выражение (2.62) описывает оптимальное управление при отсутствии ограничений  $|u(t)| \leq U_m$ . При их наличии в соответствии с (2.55) закон оптимальной обратной связи принимает вид

$$u(t) = U_m \text{sat} \left[ \frac{a - \alpha}{b U_m} x(t) \right]. \quad (2.63)$$

Обоснование этого утверждения имеется в работе [9].

## 2.4. Динамическое программирование

Другим известным методом решения задачи оптимального управления (2.32) – (2.35) при наличии ограничений на управляющие воздействия и фазовые координаты объекта является метод динамического программирования, предложенный американским ученым Р. Беллманом. В его основе лежит следующий простой, на первый взгляд, **принцип оптимальности**: "оптимальное управление обладает тем свойством, что для любого начального условия и использованного начального управления последующее оптимальное управление совпадет с исходным оптимальным управлением относительно состояния, получающегося в результате применения начального управления" [19].

Другими словами, принцип оптимальности утверждает, что любой отрезок оптимальной траектории, примыкающий к конечной точке  $X(t_k)$ , также является оптимальным. Подчеркнем, что в принципе говорится об оптимальности только **конечного** участка оптимальной траектории, а не какого-либо промежуточного участка.

Принцип оптимальности определяет достаточно общее необходимое условие оптимальности динамических систем. Однако он не является всеобщим – принцип справедлив только для систем, у которых оптимальная траектория не зависит от предыстории системы, а целиком определяется исходным ее состоянием. Например, принцип оптимальности не справедлив для объектов управления при наличии запаздывания в фазовых координатах.

Несмотря на почти очевидный характер принципа оптимальности, он своим следствием имеет далеко не очевидное функциональное уравнение. Переходя к его выводу, предположим, что задача управления Л.С. Понтрягина (2.33)–(2.35), (2.47), (2.48) решена и найдены оптимальное управление  $U^*(t)$  и соответствующая ему траектория движения объекта  $X^*(t)$ . *Минимальное значение критерия, соответствующее оптимальному управлению, обозначим символом*

$$S(X_0, t_0) = \min_{U \in \Omega} \int_{t_0}^{t_k} f_0[X(t), U(t), t] dt ; \quad (2.64)$$

данная функция  $S(X_0, t_0)$ , зависящая только от начального состояния объекта  $X(t_0) = X_0$  называется *функцией Беллмана*. Подчеркнем, что здесь зависимость функционала от конечного состояния объекта, которое в задачах управления часто фиксировано, причем в задачах стабилизации  $X_k = 0$ , не рассматривается.

Выберем на оптимальной траектории две точки, соответствующие моментам  $t$  и  $t + \Delta t$ , где  $\Delta t$  – малая величина. В соответствии с принципом оптимальности участки оптимальной траектории от точек  $t$  и  $t + \Delta t$  до конечной точки  $t_k$  являются оптимальными. Обозначим  $S(X(t), t)$  и  $S(X(t + \Delta t), t + \Delta t)$  минимальные значения функционала (2.35), соответствующие этим участкам:

$$S[X(t), t] = \min_{U \in \Omega(U)} \int_t^{t_k} f_0[X(t), U(t), t] dt,$$

$$S[X(t + \Delta t), t + \Delta t] = \min_{U \in \Omega(U)} \int_{t + \Delta t}^{t_k} f_0[X(t), U(t), t] dt.$$

Между этими величинами с использованием принципа оптимальности можно установить связь

$$S[X(t), t] = \min_{U \in \Omega} \left\{ \int_t^{t + \Delta t} f_0[X(t), U(t), t] dt + S[X(t + \Delta t), t + \Delta t] \right\}. \quad (2.65)$$

Учитывая малость величины  $\Delta t$ , представим

$$\int_t^{t + \Delta t} f_0[X(t), U(t), t] dt = F[X(t), U(t), t] \Delta t + Q_1(t), \quad (2.66)$$

где  $Q_1(t)$  – малая величина с большим порядком малости, чем  $\Delta t$ .

Функцию  $X(t + \Delta t)$  разложим в ряд Тейлора в окрестности точки  $t$  и, учитывая малость величины  $\Delta t$ , разложение представим в виде  $X(t + \Delta t) = X(t) + (dX/dt) \cdot \Delta t + Q_2(t)$ , или

$$\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t) = (dX/dt) \cdot \Delta t + Q_2(t), \quad (2.67)$$

где  $Q_2(t)$  – совокупность последующих членов ряда Тейлора.

Далее предположим, что функция  $S(X,t)$  дифференцируема по своим аргументам. Это предположение ничем не обосновано, поскольку сама функция неизвестна. Это обстоятельство вносит определенный элемент необоснованности непрерывного варианта метода динамического программирования в отличие от его дискретного аналога, который обязательно необходимо учитывать при применении данного метода. Основываясь на предположении о дифференцируемости и учитывая представление (2.67), функцию  $S[X(t + \Delta t), t + \Delta t]$  разложим в ряд Тейлора:

$$S[X(t + \Delta t), t + \Delta t] = S[X(t), t] + \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T \Delta X + \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right) \Delta t + O_3(t), \quad (2.68)$$

где  $\partial S / \partial X = (\partial S / \partial x_1, \partial S / \partial x_2, \dots, \partial S / \partial x_n)^T$  – вектор частных производных функции  $S(X)$  по компонентам вектора  $X$ , вычисленных в точке  $(X(t), t)$ ;  $O_3(t)$  – совокупность последующих членов ряда Тейлора.

Подставим соотношения (2.66) – (2.68) в уравнение (2.65):

$$S[X(t), t] = \min_{U \in \Omega} \left\{ f_0[X(t), U(t), t] \cdot \Delta t + S[X(t), t] + \left( \frac{\partial S[X(t), t]}{\partial X} \right)^T \cdot \frac{dX}{dt} \cdot \Delta t + \right. \\ \left. + \frac{\partial S[X(t), t]}{\partial t} \cdot \Delta t + O_4(t), \right\} \quad (2.69)$$

где  $O_4(t)$  – совокупность всех членов с порядком малости большим, чем у  $\Delta t$ .

Величина  $S[X(t), t]$  не зависит от оптимального управления  $U(t)$ , так как представляет наименьшее значение функционала по управлению, поэтому ее можно вынести из-под символа операции минимизации и взаимно уничтожить с такой же величиной в левой части (2.69). Оставшееся выражение разделим на  $\Delta t$  и устремим  $\Delta t \rightarrow 0$ . В силу сделанных замечаний о порядке малости слагаемого  $O_4(t)$  выполняется условие  $\lim O_4(t) / \Delta t = 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Производная  $\partial S / \partial t$ , так же как и функция  $S$ , не зависит от управления и может быть вынесена за фигурные скобки. После проведения всех указанных операций соотношение (2.69) превращается в известное функциональное уравнение Беллмана

$$-\frac{\partial S[X(t), t]}{\partial t} = \min_{U \in \Omega} \left\{ f_0[X(t), U(t)] + \left( \frac{\partial S[X(t), t]}{\partial X} \right)^T F[X(t), U(t)] \right\}, \quad (2.70)$$

или в скалярной форме записи

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{U \in \Omega} \{ f_0[X(t), U(t), t] \} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S[X(t), t]}{\partial x_i} \cdot f_i[X(t), U(t), t]. \quad (2.71)$$

Уравнение Беллмана представляет своеобразное дифференциальное уравнение в частных производных, которое от известных уравнений данного класса отличается наличием операции минимизации. Процедура определения оптимального управления с его помощью сводится к следующим операциям.

1. Из условия минимума выражения в фигурных скобках находится оптимальное управление  $U^*$  как функция аргументов  $X, S, t$ , т.е. в форме

$$U^*[X(t), S[X(t), t], t].$$

2. Найденное управление  $U^*$  подставляется в уравнение (2.71):

$$-\frac{\partial S[X(t),t]}{\partial t} = f_0[X(t), U^*[X(t), S(X(t), t)]] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S[X(t),t]}{\partial x_i} \cdot f_i[X(t), U^*[X(t), S[X(t), t]], t]. \quad (2.72)$$

Это уравнение в частных производных относительно функции Беллмана  $S[X(t), t]$  называется уравнением *Гамильтона–Якоби–Беллмана*. Данное название связано с тем, что ранее уравнения аналогичного вида изучались известными математиками Р. Гамильтоном, К. Г. Якоби.

3. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана решается относительно функции  $S[X(t), t]$  при граничном условии  $S[X(t_k), t_k] = 0$ , которое очевидным способом вытекает из определения функции Беллмана  $S[X(t), t]$ . Здесь необходимо подчеркнуть, что в настоящее время не существует универсального способа решения, позволяющего в аналитической форме найти функцию Беллмана.

4. Функцию  $S[X(t), t]$  подставляют в выражение оптимального управления  $U^*[X(t), S[X(t), t], t]$ , что позволяет определить его как функцию состояния и времени, т.е. в форме обратной связи  $U^*[X(t), t]$ .

Таким образом, если можно реализовать изложенную последовательность операций, то метод динамического программирования позволяет решить задачу синтеза оптимальной замкнутой системы управления. В этом состоит основное достоинство данного метода в сравнении с классическим вариационным исчислением и принципом максимума Л.С. Понтрягина, которые ориентированы на определение программного оптимального управления.

Однако при применении метода динамического программирования необходимо иметь в виду следующее.

1. В заданном классе допустимых управлений не всегда существует такое, при котором достигается минимум выражения (2.71) (напомним, что управление  $U[X(t), t]$  называется допустимым, если при этом управлении существует решение уравнений (2.32), а функционал (2.35) конечен).

2. Функция Беллмана  $S[X, t]$  не всегда обладает той гладкостью, которая была использована при выводе уравнения (2.70). Иными словами, решение уравнения (2.70) не обязательно совпадает с искомой функцией Беллмана.

3. Решение уравнений Беллмана может оказаться не единственным. В этом случае требуется дополнительное исследование, позволяющее установить, какое из этих решений является функцией Беллмана исходной задачи оптимального управления.

В связи с указанными причинами приведем без доказательства теорему, которая устанавливает достаточные условия определения решения задачи оптимального управления методом динамического программирования [24].

**Теорема 2.5.** Пусть существует единственное непрерывно дифференцируемое решение  $S_0$  задачи (2.70) и существует допустимое управление  $U_0[X, t]$  такое, что

$$\min_{U \in \Omega} \left\{ f_0[X, U, t] + \left( \frac{\partial S[X, t]}{\partial X} \right)^T F[X, U, t] \right\} = f_0[X, U_0, t] + \left( \frac{\partial S_0[X, t]}{\partial X} \right)^T F[X, U_0, t].$$

Тогда управление  $U_0[X, t]$  является оптимальным, а соответствующая функ-

ция Беллмана есть  $S_0[X, t]$ .

**Замечание.** Требование дифференцируемости функции  $S[X, t]$  является существенно ограничительным; оно не выполняется во многих, даже простых задачах, например, в задаче об оптимальном по быстродействию управлении двумя последовательно соединенными интеграторами [32]. В определенной степени требование к гладкости функции Беллмана можно ослабить. Так, в работе [21] показано, что требуется только непрерывность произведения  $\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^T \cdot F$  в любой момент времени  $t = \tau$ , когда  $\partial S / \partial X$  и  $F[X, U, t]$  разрывны.

В статье В.Г. Болтянского [26] установлено, что допустимы разрывы частных производных от  $S[X, t]$  на некотором конечном множестве точек  $M$ .

**Пример 2.4.** Рассмотрим применение указанной процедуры динамического программирования к определению решения задачи оптимального управления примера 2.3.

На основании (2.71) записываем функциональное уравнение Беллмана для объекта (2.50) с функционалом качества (2.51):

$$\min_{U \in \Omega} \left\{ qx^2 + rU^2 + (-ax + bu) \frac{\partial S}{\partial x} \right\} = 0. \quad (2.73)$$

Вначале для простоты решения предположим, что ограничения на сигнал управления отсутствуют. В этом случае находим минимум выражения в фигурных скобках из условия равенства нулю производной по  $u$  от данного выражения

$$2ru + b \frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

Отсюда определяем оптимальное управление

$$u(t) = -\frac{b}{2r} \cdot \frac{\partial S}{\partial x}. \quad (2.74)$$

Управление (2.74) подставляем в уравнение (2.73):

$$qx^2 + \frac{b^2}{4r} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - ax \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{b^2}{2r} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (2.75)$$

Решение дифференциального уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (2.75) будем определять в форме квадратичной функции

$$S(x) = Ax^2 \quad (2.76)$$

с неизвестным (искомым) коэффициентом  $A$ . После подстановки решения (2.76) в уравнение (2.75) получаем

$$qx^2 - \frac{b^2}{r} A^2 x^2 - 2aAx^2 = 0 \quad \text{или} \quad b^2 A^2 + 2arA - rq = 0.$$

Решением данного квадратичного уравнения находим

$$A_{1,2} = -\frac{ar}{b^2} \pm \sqrt{\left( \frac{ar}{b^2} \right)^2 + \frac{rq}{b^2}} = -\frac{r}{b^2} (a \pm \sqrt{a^2 + qb^2/r}).$$

Теперь в соответствии с уравнениями (2.74) и (2.76) находим оптимальное

управление

$$U = -\frac{b}{r} AX = K_{oc} x; \quad K_{oc} = -\frac{b}{r} A = \frac{1}{b} (a - \sqrt{a^2 + qb^2 / r}) \quad (2.77)$$

(знак перед радикалом выбран из условия устойчивости замкнутой системы).

Теперь решим задачу управления с учетом ограничения  $|u(t)| \leq U_m$ . Выражение в фигурных скобках уравнения (2.73), как легко заметить, при обозначении  $\partial S / \partial x = -\lambda$  совпадает с функцией Гамильтона (2.52). Здесь необходимо подчеркнуть, что в общем случае объекта  $n$ -го порядка между множителями Лагранжа, сопряженными координатами принципа максимума Л.С. Понтрягина и функцией Беллмана существует следующая взаимосвязь:

$$\lambda_i(t) = \psi_i(t) = -\frac{\partial S[X(t), t]}{\partial x_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому, проводя в выражении (2.73) минимизацию по  $u$  с учетом ограничения  $|u(t)| \leq U_m$  по аналогии с нахождением экстремума функции Гамильтона (2.52), можно установить

$$u(t) = U_m \operatorname{sat} \left[ -\frac{b}{2rU_m} \frac{\partial S}{\partial x} \right].$$

Подставляя в это уравнение выражение производной функции (2.76), окончательно получаем оптимальный закон управления

$$u(t) = U_m \operatorname{sat} \left[ \frac{a - \alpha}{bU_m} x(t) \right]; \quad \alpha = \sqrt{a^2 + qb^2 / r}. \quad (2.78)$$

Замечаем, что данное управление совпадает с ранее найденным с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина решением (2.63) рассматриваемой задачи управления.

### Контрольные вопросы

1. Какие функции  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  называются близкими в смысле близости нулевого, первого,  $k$ -го порядков?
2. Определите понятия функционал, непрерывный функционал, линейный функционал.
3. Что такое сильная вариация (синонимы – сильный дифференциал, дифференциал Фреше) функционала  $v[x(t)]$ ?
4. Что такое слабая вариация (синонимы – слабый дифференциал, дифференциал Гато) функционала?
5. При каких условиях основная лемма вариационного исчисления утверждает равенство нулю интеграла  $\int_{t_0}^{t_1} \mu(t) \eta(t) dt = 0$ ?
6. Составить уравнения Эйлера для функционалов

$$J = \int_0^5 \left( 7x(t) + 2\dot{x}^2(t) \right) dt, \quad J = \int_0^1 \left( 5t + 3x(t) + \dot{x}^2(t) \right) dt.$$

7. Составить уравнения Эйлера – Пуассона для функционалов

$$J_1 = \int_0^1 (x^2(t) + \ddot{x}^2(t))dt, \quad J_2 = \int_0^5 (t + x^2(t) + 0,5\ddot{x}^2(t))dt.$$

8. С помощью обобщенного условия Лежандра исследовать характер экстремума функционала  $J = \int_0^1 (x^2(t) + 0,25\ddot{x}^2(t))dt$ .

9. Что представляет собой функция Лагранжа в вариационной задаче на условный экстремум?

10. Записать уравнения Эйлера – Лагранжа для определения экстремали функционала  $J = \int_0^{10} (x^2(t) + u^2(t))dt$  на траекториях движения объекта управления  $\dot{x} = -x + 2 \cdot u$ .

11. Составить функцию Гамильтона для объекта, описываемого уравнениями  $\dot{x}_1 = a_{11}x_2 + a_{12}x_2$ ,  $\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b \cdot u$ , качество управления которого оценивается критерием быстродействия  $J = \int_0^T dt \rightarrow \min$ .

12. Для задачи управления п.11 составить уравнения для сопряженных координат, используемых в принципе максимума Л.С. Понтрягина.

13. Что утверждает основная теорема Л.С. Понтрягина (принцип максимума)?

14. В чем состоит принцип оптимальности Р. Беллмана?

15. Поясните физический смысл функции Беллмана.

16. Используя метод динамического программирования, записать уравнение в частных производных для определения функции Беллмана (уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана) для объекта управления

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2^2 + 2u \text{ и функционала качества } J = \int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t))dt.$$



### 3. ЗАДАЧА СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРА. КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Не решай сложную задачу, не решив простую.  
Принцип простоты

В данной главе уточняется постановка задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) с использованием концепции возмущенного-невозмущенного движения А.М.Ляпунова. Напоминаются основные результаты теории устойчивости движения динамических систем А.М. Ляпунова и отмечается их связь с результатами теории АКОР. Излагается методы синтеза нелинейных систем В.И. Зубова и В.М. Кунцевича, М.М. Лычака с использованием функций Ляпунова, который в дальнейшем позволяет глубже понять задачу АКОР и подходы к ее решению. Приводятся примеры его применения.

#### 3.1. Задача синтеза оптимального регулятора

Самые разнообразные по своему физическому содержанию задачи управления объектом

$$\dot{y}_i = h_i(y_1, y_2, \dots, y_n, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad m \leq n, \quad (3.1)$$

где  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – переменные, описывающие состояние системы, а  $h_i$  – известные функции этих переменных и управляющих воздействий  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , могут быть сведены к двум основным математическим постановкам. Во-первых, к задаче программирования траекторий движения, обладающих, в частности, некоторым желаемым экстремальным свойством и соответственно для решения которых могут быть использованы вариационные методы гл. 2. Во-вторых, к задаче синтеза регулятора, позволяющего стабилизировать движение объекта вдоль программной траектории в соответствии с выбранным критерием качества. Эти две задачи определяют основное содержание и существо теории управления.

Реализация оптимального программного управления встречает принципиальные затруднения, связанные: 1) с невозможностью точного определения начальных условий объекта и его параметров; 2) с действием неконтролируемых возмущений. Неточность в определении начальных условий и параметров объекта вызывает отклонение действительного движения системы от программного, более того, это отклонение со временем обычно возрастает. Положение усугубляется и тем обстоятельством, что на рассматриваемый объект управления (3.1) могут действовать внешние возмущения, которые «сталкивают» объект с программной траектории. В этом случае, даже когда возмущения не очень значительны и исчезают со временем, объект «сойдет» с программной траектории  $y_{\text{ипр}}(t)$  и в конечном итоге не попадет в желаемое  $y_{\text{ик}}$  конечное состояние.

Данные обстоятельства вызвали необходимость разработки нового подхода к реализации программных движений, основанного на использовании регуляторов, функционирующих по принципу обратной связи по отклонениям от программного движения и гасящих эти отклонения. В основе теории данных

регуляторов лежит знаменитая *концепция возмущенного-невозмущенного движения* А.М. Ляпунова и его теория устойчивости движения динамических систем [9].

Кратко изложим основные результаты А.М. Ляпунова, используемые при синтезе регуляторов.

Всякое решение  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  системы (3.1) представляет собой закон движения изображающей точки М в рассматриваемом фазовом пространстве. При  $n = 1$  движение рассматривается на фазовой линии; при  $n = 2$  – на фазовой плоскости; при  $n = 3$  – в трехмерном фазовом пространстве и т.д.

Решение системы (3.1) называется движением, а путь, описываемый изображающей точкой в фазовом пространстве – траекторией этого движения. Среди траекторий системы (3.1) всегда можно выделить программное (желаемое) движение:

$$Y_{\text{пр}}(t) = (y_{1\text{пр}}(t), y_{2\text{пр}}(t), \dots, y_{n\text{пр}}(t))^T. \quad (3.2)$$

В частном случае для систем стабилизации желаемое движение определяется константами, являющимися корнями уравнений статики системы

$$h_i(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Концепция возмущенного-невозмущенного движения А.М. Ляпунова математически точно может быть отражена в виде следующих двух важных определений [9]:

- *во-первых, любое программное движение  $y_{\text{пр}}(t)$ , согласно Ляпунову, называется **невозмущенным движением**, которое соответствует единственному частному решению дифференциальных уравнений (3.1);*
- *во-вторых, отклонение  $x_i(t)$  реального движения  $y_i(t)$  объекта от его программного  $y_{i\text{пр}}(t)$ , т.е.*

$$x_i(t) = y_i(t) - y_{i\text{пр}}(t) \quad (3.3)$$

*по терминологии Ляпунова, называется **возмущенным движением** объекта и описывается общим решением дифференциальных уравнений возмущенного движения.*

Для того чтобы составить уравнения возмущенного движения, необходимо ввести в рассмотрение дополнительное отклонение  $u_{\text{рх}}(t)$  управляющего воздействия сверх его программного значения  $u_{\text{гпр}}(t)$ , т.е.

$$u_{\text{рх}}(t) = u_{\text{г}}(t) - u_{\text{гпр}}(t), \quad r = 1, 2, \dots, m. \quad (3.4)$$

Составляющие  $u_{\text{рх}}(t)$  (3.4) позволяют погасить возмущенное движение  $x_i(t)$  (3.3) и, следовательно, реализовать действительное движение объекта, близкое к программному, т.е.

$$x_i(t) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad y_i(t) \cong y_{i\text{пр}}(t). \quad (3.5)$$

Именно условия (3.5) должен обеспечить автоматический регулятор в соответствующей системе управления.

На рис. 3.1 представлена графическая иллюстрация концепции возмущенного-невозмущенного движения; показаны три характерные траектории движения системы: траектория задания (программа)  $y_{\text{пр}}(t)$ , траектория действительное движения  $y_i(t)$  и траектория отклонения (ошибки)  $x_i(t)$ .

Таким образом, действительное движение объекта описывается компонентами векторов состояния  $y_i$  и управления  $u_r$ , т.е.

$$\begin{aligned} y_i &= y_{\text{inp}} + x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ u_r &= u_{\text{np}} + u_{\text{rx}}, \quad r = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.6)$$

подставив которые в (3.1), можем записать *уравнения возмущенного движения*:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_{1x}, u_{2x}, \dots, u_{mx}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.7)$$

где

$$f_i = h_i(y_{\text{np}1} + x_1, y_{\text{np}2} + x_2, \dots, y_{\text{np}n} + x_n) - h_i(y_{1\text{np}}, y_{2\text{np}}, \dots, y_{n\text{np}}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

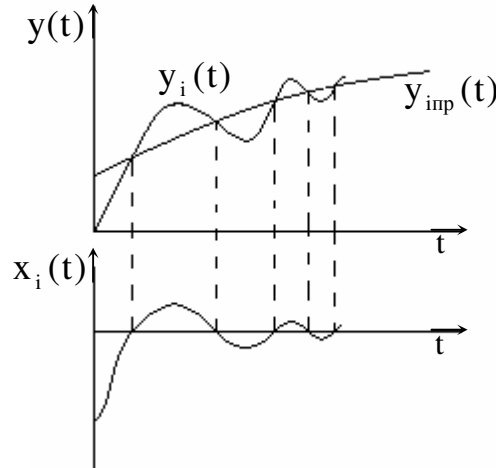


Рис. 3.1. Геометрическая интерпретация возмущенного, невозмущенного и действительного движения системы управления

Пусть при  $t = 0$  переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  принимают начальные значения  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ , из которых, по крайней мере, одно не равно нулю. Эти значения называются возмущениями. Каждой системе возмущений соответствует однозначное и непрерывное решение

$$x_i(t) = x_i(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

уравнений (3.7). Решение (3.8) называется возмущенным движением системы автоматического управления.

Соответственно, выражение (3.3) определяет преобразование переноса начала координат в точку с координатами  $y_{1\text{np}}, y_{2\text{np}}, \dots, y_{n\text{np}}$ . Вследствие этого невозмущенному движению (3.2) системы (3.1) соответствует нулевое решение

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0 \quad (3.9)$$

системы (3.7).

Уравнения возмущенного движения (3.7) имеют важное значение в теории автоматического управления, так как позволяют математически строго сформулировать разнообразные задачи синтеза регуляторов, существенным образом отличающиеся от задач программирования траекторий движения. Сущность этой задачи состоит в определении таких отклонений  $u_{\text{rx}}$  органов управления, которые позволяют наилучшим образом погасить возмущенное движение ( $x_i \rightarrow 0$ ) и тем самым обеспечить близкое к программному действительное движение объекта. Управления  $u_{\text{rx}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  являются функциями отклонений

$x_i(t)$ , для формирования которых необходимо ввести переменные состояния  $y_i(t)$  и вычесть из них, согласно (3.3), текущие программные значения  $y_{\text{imp}}(t)$ . Указанная здесь процедура означает введение обратных связей по координатам  $y_i(t)$ , и поэтому синтез регулятора – это задача поиска законов обратных связей, обеспечивающих наилучшее гашение возмущенного движения  $x_i(t)$  в соответствии с некоторым выбранным критерием качества переходных процессов, например квадратичного вида:

$$J = \int_0^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2(t) + \sum_{r=1}^m \beta_r u_r^2(t) \right) dt. \quad (3.10)$$

Тогда задача синтеза регулятора состоит в определении таких управлений

$$u_{\text{rx}} = \xi(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.11)$$

которые совместно с объектом образуют асимптотически устойчивую систему и обеспечивают на траекториях ее движения минимум критерия качества (3.10). Выражение (3.11) является законом управления – уравнением регулятора, который, согласно (3.3), представляет собой некоторую совокупность обратных связей, вводимых по координатам  $y_i(t)$  состояния объекта. В зависимости от выбранных весовых коэффициентов  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  критерия (3.10) в системе (3.1), замкнутой оптимальным регулятором (3.11), протекают соответствующие устойчивые переходные процессы гашения возмущенного движения. Примерами задач синтеза регуляторов (3.11) являются задачи автопилота в авиации, авторулевого в судовождении, следящие системы всевозможного назначения и т.д.

Для разработчиков систем управления более естественным и привычным по сравнению с выражением (3.3) является преобразование координат вида

$$x_i = y_{\text{imp}} - y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.12)$$

которое представляет собой так называемое уравнение замыкания системы. Эти соотношения непосредственно нашли отражение в универсальной структурной схеме рассматриваемой системы управления (рис. 3.2), включающей в себя объект управления (ОУ), охваченный отрицательными обратными связями (ОС), и регулятор (Р), который на основе текущей информации о координатах объекта формирует требуемое управление. Это управление стремится свести отклонение от программного движения к нулю. В результате, после окончания переходных процессов, т.е. погашения возмущенного движения, в замкнутой системе (3.1), (3.11) реализуется заданное программное движение.

Подчеркнем, что с точки зрения учения Ляпунова об устойчивости движения, преобразования (3.3) и (3.12) адекватны, но выражение (3.12), на наш взгляд, является более наглядным.

Поставленная задача управления, как отмечалось ранее во введении, есть так называемая задача об аналитическом конструировании оптимального регулятора (АКОР). Здесь она сформулирована более четко и с пояснением ее физической сущности.

Задача АКОР является центральной в современной теории и практике автоматического управления [9]. Ее решение началось с работ, опубликованных в 1960 г. в России А.М. Летовым и в США Р. Калманом. Термин "аналитическое конструирование" был введен профессором А.М. Летовым. Он определил

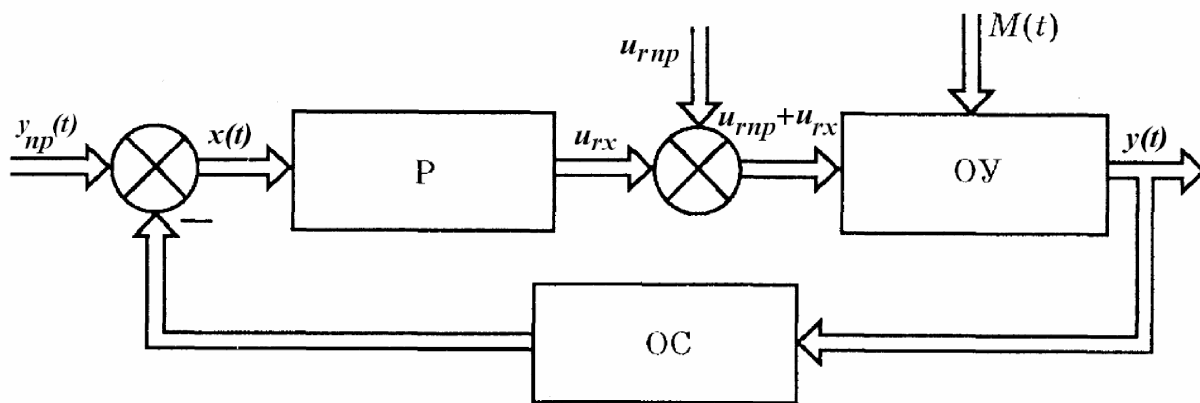


Рис. 3.2. Общая структурная схема системы управления

конечную цель АКОР как получение закона управления чисто аналитическим путем, исходя из предъявляемых к качеству управления требований, формализованных в форме интегрального функционала. Теория АКОР достигла в настоящее время высокой степени теоретической завершенности применительно, в первую очередь, к линейным объектам и квадратичным функционалам-критериям качества. Методы АКОР предельно формализованы, их отличает аналитичность и логическая завершенность, они позволяют для линейных, а часто и для нелинейных объектов определить как структуру, так и параметры закона управления, гарантирующего, по меньшей мере, асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Однако методы АКОР при практическом применении наталкиваются на целый ряд существенных затруднений вычислительного и принципиального характера, особенно для нелинейных объектов. Так, с повышением порядка объекта быстро нарастают численные и тем более аналитические трудности, связанные, как известно, с необходимостью решения нелинейного уравнения в частных производных — так называемого уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, относительно производящей функции, к которому сводится процедура определения законов управления [9, 28].

Подчеркнем, что основными требованиями к синтезируемому регулятору являются: 1) свойство асимптотической устойчивости движений замкнутой системы управления и 2) свойство оптимальности системы в смысле выбранного функционала качества управления (3.10). В работах А.М. Летова [23] установлена тесная связь между функциями Ляпунова, разрешающими задачу асимптотической устойчивости движения динамической системы, и указанным уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана. Эта связь состоит в том, что данному уравнению удовлетворяет некоторое множество производящих функций. Оказывается, что действительное решение задачи оптимального синтеза могут дать только те из них, которые являются функциями Ляпунова для замкнутой системы. Соответственно, полученные на основе таких функций регуляторы будут оптимальными и, кроме того, они обеспечивают асимптотическую устойчивость движения системы. Следовательно, с помощью метода Ляпунова мож-

но отбирать требуемые решения среди всех возможных, которые определяются уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Так как теория устойчивости Ляпунова играет указанную существенную роль в решении проблемы синтеза оптимальных систем, то познакомимся с ее основными положениями и результатами.

### 3.2. Основные понятия и теоремы устойчивости А.М. Ляпунова

Основным методом анализа устойчивости решений линейных и нелинейных систем является прямой (второй) метод Ляпунова, основанный на использовании специальных (пробных) функций, называемых функциями Ляпунова. Эти функции являются основным инструментом также и синтеза нелинейных систем: с их использованием вначале синтезируется устойчивая структура проектируемой системы, далее, на втором этапе синтеза, выбираются параметры полученной структуры таким образом, чтобы система обеспечивала требуемые показатели качества управления (длительность переходных процессов, перерегулирование, заданные ограничения на переменные, значение функционала качества и т.п.).

Сформулируем основные понятия и определения устойчивости по Ляпунову. Рассмотрим замкнутую некоторым регулятором систему управления, которой согласно (3.7) соответствует система из  $n$  нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\dot{X}(t) = F[X(t)], \quad (3.13)$$

где  $F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X))$  – нелинейная вектор-функция столбца  $X$  фазовых координат системы;  $f_i(X)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – вообще говоря, любые функции  $X$ , удовлетворяющие только условиям существования решений задачи Коши для системы (3.13) и обращающиеся одновременно в нуль при  $X = 0$  (см. пояснения к соотношениям (3.9)).

Будем рассматривать движение системы (3.13) в фазовом пространстве  $E^n$ . Точка  $X^* \in E^n$ , которая удовлетворяет равенству

$$X^* = F(X^*), \quad (3.14)$$

называется *инвариантной* точкой системы (3.13). Инвариантной точке  $X_0$  соответствует *состояние покоя (равновесия)* исследуемой системы, поэтому данную точку часто называют также равновесной, или неподвижной точкой системы (3.13). По определению функции  $F(X)$ , имеет место равенство

$$F(0) = 0. \quad (3.15)$$

Следовательно, точка  $X^* = 0$  (начало координат фазового пространства  $E^n$ ), соответствующая тривиальному решению системы (3.13), является ее инвариантной точкой.

Сформулируем для объекта (3.13) определения устойчивости по Ляпунову [9, 20].

Если для любого положительного числа  $\varepsilon > 0$ , которое может быть сколь угодно малым, можно указать такое положительное число  $\delta(\varepsilon)$ , что при

$$\|X_0 - X^*\| < \delta(\varepsilon) \quad (3.16)$$

(здесь и далее символом  $\|\cdot\|$  условимся обозначать евклидову норму вектора  $X$   
 $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  ) решение  $X(t, X_0)$  системы (3.13) с начальным условием  $X(t_0) = X_0$   
удовлетворяет условию

$$\|X(t, X_0) - X^*\| < \varepsilon \text{ для всех } t > t_0, \quad X(t_0, X_0) = X_0, \quad (3.17)$$

то тривиальное решение  $X^* = 0$  системы (3.13) устойчиво по Ляпунову.

Если тривиальное решение системы (3.13) устойчиво по Ляпунову и, кроме того, при любом  $X_0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t, X_0) = 0, \quad (3.18)$$

то говорят, что оно асимптотически устойчиво. Если из неравенства (3.16) не следует неравенство (3.17), то тривиальное решение системы (3.13) неустойчиво.

При выполнении условий устойчивости (асимптотической устойчивости) для любых начальных точек  $X_0 \in E^n$  имеет место устойчивость (асимптотическая устойчивость) в целом; при выполнении этих условий только для  $X_0 \in A$ , где  $A$  – некоторая односвязная область пространства  $E^n$ , имеет место устойчивость (асимптотическая устойчивость) в области  $A$ .

Прямой метод Ляпунова сводит задачу исследования устойчивости системы (3.13) к изучению свойств некоторой пробной функции  $V = V(X)$  (функции Ляпунова) и ее первой производной по времени, взятой в силу уравнений (3.13), которая рассчитывается по формуле

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot f_i(X) = \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right)^T F(X). \quad (3.19)$$

**Определение:** функция  $V = V(X)$  называется функцией Ляпунова, если:

1) функция  $V: R^n \rightarrow R$  – непрерывное скалярное отображение, имеющее непрерывные частные производные в  $b$ -окрестности  $B$ ,  $b > 0$  с центром в начале координат, т.е.  $B = \{X \in R^n : \|X\| < b\}$ ;

2) функция  $V(X)$  является **положительно определенной** на  $B$ , т.е.  $V(0)=0$ , и  $V(X) > 0$  (строгое неравенство !) для всех  $X \in B$ ,  $X \neq 0$ .

3) ее первая производная, взятая в силу системы (3.13), определяемая выражением (3.19), является **отрицательно полуопределенной** в  $B$ , т.е.  $dV(X)/dt \leq 0$  (нестрогое неравенство) для всех  $X \in B$ .

Исходя из указанных определений, А.М. Ляпунов в 1888-1892 гг. доказал основополагающие теоремы.

**Теорема 3.1** (теорема устойчивости) Если функция Ляпунова может быть найдена для некоторой открытой области начала координат системы, то начало координат является устойчивой точкой равновесия системы.

**Теорема 3.2** (теорема об асимптотической устойчивости). Пусть  $V$  является функцией Ляпунова в  $B$ , открытой окрестности начала координат. Предположим далее, что первая производная  $dV/dt$ , взятая в силу уравнений (3.13), отрицательно определена в  $B$ , т.е.  $dV/dt < 0$  для всех  $X \in B$ , за исключе-

нием точки  $X = 0$ , в которой  $dV/dt = 0$ . Тогда начало координат является асимптотически устойчивой точкой равновесия системы (3.13).

Приведем доказательство теоремы 3.1 следуя работе [36]. Обозначим через  $I_\varepsilon$  внутренность шара радиуса  $\varepsilon$  с центром в начале координат фазового пространства рассматриваемой динамической системы, через  $S_\varepsilon$  – сферическую поверхность этого шара.

Выберем  $\varepsilon$  таким, что  $I_\varepsilon$  лежит в области  $B$ , и пусть  $m$  – минимальное значение функции  $V(X)$  на сфере  $S_\varepsilon$ . Зададимся положительным числом  $\delta$  таким, чтобы в точках шара  $I_\delta$  выполнялось неравенство  $V(X) < m$ , и пусть  $X_0$  – произвольная точка из  $I_\delta$ . Рассмотрим траекторию  $X(t) = X(t, X_0)$ , выходящую из точки  $X_0$ , и допустим, что она пересечет сферу  $S_\varepsilon$  в некоторой точке  $X(t_1)$ . Так как

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot f_i(X) \leq 0,$$

то функция  $V(X)$  не возрастает вдоль траектории, поэтому будем иметь  $V(X(t_1)) \leq V(X_0) < m$ . С другой стороны, так как  $m$  – минимум функции  $V(X)$  на  $S_\varepsilon$ , должно выполняться неравенство  $V(X(t_1)) \geq m$ . Полученное противоречие доказывает, что точка  $X(t)$  с ростом времени не выйдет за пределы сферы  $S_\varepsilon$ . Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.2 можно найти в той же работе [36], из которого следует, что предположение об отрицательной определенности производной  $dV/dt$  в области  $B$  приводит не только к тому, что решения уравнения (3.13) не будут уклоняться слишком далеко от начала координат при определенных начальных условиях, но в соответствии с определением асимптотической устойчивости будут асимптотически приближаться к нему.

Вместо доказательства данной теоремы приведем ее геометрический смысл. Как известно, знакоопределенная функция, равная некоторому постоянному числу  $V(X) = c$ , определяет в  $n$ -мерном пространстве замкнутую поверхность – поверхность уровня. В случае  $n = 2$  такие поверхности представляют собою замкнутые линии, охватывающие начало координат. Они приведены на рис. 3.3,б. Эти линии являются линиями пересечения параболоида (рис. 3.3,а), изображающего функцию Ляпунова, с плоскостями, параллельными плоскости

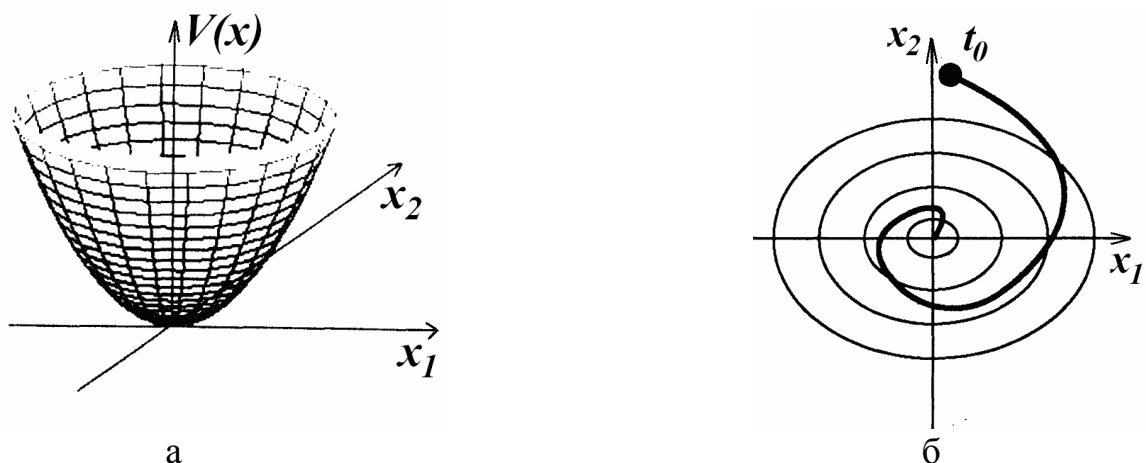


Рис 3.3. Изображение функции Ляпунова (а) и ее линий уровня (б)



$x_1, x_2$  и соответствующими убывающим значениям чисел  $c_i, i = 1, 2, \dots$ , причём  $c_1 > c_2 > c_3 > c_4 > 0$ . Поэтому теорема Ляпунова имеет простой геометрический смысл: если в силу какой-либо системы типа (3.1) функция Ляпунова  $V(X) > 0$ , а её производная  $\dot{V}(X) < 0$ , то все траектории этой системы, как показано на рис. 3.3,б, пересекают любую поверхность уровня  $V(X) = c$  снаружи вовнутрь, т.е. стремятся к началу координат при  $t \rightarrow \infty$ .

Из данных теорем следует, что с математической точки зрения не обязательно было считать функцию  $V(X)$  положительно определенной, она могла быть и отрицательно определенной. Для устойчивости главное, чтобы функции  $V(X)$  и  $dV(X)/dt$  имели противоположные знаки. Однако с методической точки зрения для исключения неопределенности удобнее предварительно оговорить положительную определенность функции Ляпунова.

**Теорема 3.3** (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости в целом). *Если функция  $V = V(X)$  удовлетворяет условиям теоремы 3.2, причем  $V(X) \rightarrow \infty$  при  $\|X\| \rightarrow \infty$ , то тривиальное решение системы (3.13) асимптотически устойчиво в целом.*

Доказательство этой теоремы имеется в работах [20, 34, 35].

Заметим, что теорема 3.3 определяет для стационарных линейных систем необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в целом, потому что для указанных систем функцию Ляпунова всегда можно выбрать в виде  $V(X) = \|X\|^2$ .

Рассмотрим применение теорем 3.1-3.3 к исследованию устойчивости динамических систем, которые составляют основу так называемого второго метода Ляпунова анализа устойчивости. Соответственно укажем, что первый метод Ляпунова применяется для анализа локальной устойчивости нелинейных систем, когда точки устойчивости и неустойчивости разделяются на основе устойчивости и неустойчивости линеаризованных систем в окрестностях точек равновесия.

**Пример 3.1.** Проведем анализ устойчивости движений автономной системы второго порядка с собственными значениями  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ .

Данная система описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{X}(t) = AX(t) = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1(t) - \omega x_2(t) \\ \omega x_1(t) + \alpha x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно записать характеристическое уравнение системы

$$G(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & -\omega \\ \omega & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 + \omega^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega.$$

Решение линейных дифференциальных уравнений, как известно [31], имеет вид

$$X(t) = e^{At} X_0 = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}.$$

Из него следует, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$  при любых конечных значениях вектора начальных условий  $X_0$ , если  $\alpha < 0$ , т.е. неравенство  $\alpha < 0$  является условием асимптотической устойчивости в целом точки равновесия  $X=0$  исследуемой системы.

Теперь проанализируем устойчивость тривиального решения  $X=0$  данной системы с использованием второго метода Ляпунова. Воспользуемся простейшей функцией Ляпунова  $V(X) = X^T X = x_1^2 + x_2^2$ , которая очевидно является положительно определенной во всем пространстве  $R^2$ , причем  $V(X) \rightarrow \infty$  при  $\|X\| \rightarrow \infty$ . Найдем производную  $dV(X)/dt$  в силу уравнений системы

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(X) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(X) = 2x_1(\alpha x_1 - \omega x_2) + 2x_2(\omega x_1 + \alpha x_2) = \\ &= 2\alpha(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

Эта производная, как видно, будет отрицательной в пространстве  $R^2$  при  $\alpha < 0$ . В данном случае, в соответствии с теоремой 3.3, точка равновесия  $X=0$  системы является асимптотической устойчивой в целом. Таким образом, метод Ляпунова дал тот же указанный выше результат, но важно подчеркнуть, что результат был получен без решения дифференциальных уравнений. Поэтому второй метод Ляпунова является общим методом анализа устойчивости как линейных, так и нелинейных динамических систем.

**Пример 3.2.** Проанализируем устойчивость состояний равновесия нелинейной системы первого порядка с кубической нелинейностью

$$\dot{x}(t) = -x(t) + ax^3(t), \quad a > 0,$$

которая имеет три точки равновесия  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1/\sqrt{a}$ ,  $x_3 = -1/\sqrt{a}$ .

В качестве функции Ляпунова попытаемся, как и в первом примере, применить простейшую функцию  $V(x)=x^2$ , которая является положительно определенной в пространстве  $R^1$ . Ее производная

$$\dot{V}(x) = 2x\dot{x} = 2x(-x + ax^3) = -2x^2(1 - ax^2)$$

будет отрицательно определенной при  $ax^2 < 1$ , что верно, конечно, для достаточно малых значений  $x$ . Следовательно, согласно теореме 3.2 начало координат является асимптотически устойчивой точкой равновесия.

Исследуем теперь поведение системы в окрестности точки  $x_2 = 1/\sqrt{a}$ . Положим

$$V(x) = (x - 1/\sqrt{a})^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2(x - 1/\sqrt{a})\dot{x} = 2(x - 1/\sqrt{a})(-x + ax^3) = \\ &= 2ax(x - 1/\sqrt{a})(-1/a + x^2) = 2ax(x - 1/\sqrt{a})^2(x + 1/\sqrt{a}). \end{aligned}$$

Так как  $V(x)$  является положительно определенной в окрестности точки равновесия  $x_2 = 1/\sqrt{a}$ , а ее производная в окрестности этой точки может менять свой знак, то на основе теорем 3.1 и 3.2 нельзя утверждать, что исследуемая точка равновесия устойчива. Более тщательный анализ [20], показывает, что положе-

ние  $x_2 = 1/\sqrt{a}$  неустойчиво. Аналогичный результат дает исследование положения  $x_3 = -1/\sqrt{a}$ .

Заметим, что при отрицательном значении параметра  $a < 0$  поведение системы резко меняется. Во-первых, в этом случае она будет иметь единственную (действительную) точку равновесия  $x=0$ . Во-вторых, эта точка будет асимптотически устойчивой в целом. Действительно, если положить  $V(x)=x^2$ , то легко показать, что

$$\dot{V}(x) = 2x\dot{x} = 2x(-x + ax^3) = 2x^2(-1 + ax^2) < 0 \quad \text{при} \quad a < 0,$$

кроме точки равновесия. Так как при этом функция  $V(x)$  положительно определена во всем пространстве  $R^1$ , то на основе теоремы 3.3. делаем заключение, что анализируемое положение системы асимптотически устойчиво в целом.

Как следует из изложенного, для применения метода функций Ляпунова, вообще говоря, не требуется ни гладкость, ни непрерывность функций правых частей дифференциальной системы (3.13). Необходимо только, чтобы эти функции удовлетворяли условиям существования решения системы (3.13). Именно благодаря этому метод функций Ляпунова получил столь широкое распространение и применяется для исследования и синтеза самых разнообразных динамических систем.

### 3.3. Нахождение функций Ляпунова. Решение уравнений Ляпунова

Анализ устойчивости нелинейных систем и, тем более, синтез высококачественных систем управления, имеющих, как правило, широкие области устойчивости, обязательно предполагает определение соответствующих функций Ляпунова. За более чем столетнюю историю применения функций Ляпунова предложено большое число (десятки) приемов, способов, подходов и методов отыскания этих функций [24, 35, 36].

Рассмотрим некоторые методы определения функций Ляпунова, которые удобно использовать при синтезе устойчивых систем управления, на примере нелинейного объекта, описываемого уравнением (3.13).

Один из наиболее общих подходов к определению  $V(X)$  состоит в следующем. Задаются положительно определенной функцией  $Q(X)$ , например, в виде квадратичной формы  $Q(X)=X^T Q X$ . Так как для устойчивой системы (3.13) значение производной по времени от  $V[X(t)]$  на траекториях этой системы

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \varphi_i = \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right)^T F(X) < 0 \quad (3.20)$$

должно быть отрицательным, то функцию Ляпунова пытаются найти решением уравнения вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \varphi_i = -Q(X) \quad \text{или} \quad \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right)^T F(X) = -Q(X). \quad (3.21)$$

Очевидно, что если выполняется равенство (3.21), то выполняется и неравенство (3.20), которое гарантирует асимптотическую устойчивость исходной систе-

мы. Уравнение в частных производных (3.21) называется *уравнением Ляпунова* для непрерывных систем.

Таким образом, в данном подходе проблема определения функций Ляпунова сводится к задаче решения соответствующего уравнения Ляпунова.

В общем случае решение в частных производных уравнения (3.21) представляет достаточно сложную математическую задачу. Рассмотрим некоторые широко используемые методы решения уравнения Ляпунова отдельно для линейных и нелинейных объектов.

### 3.3.1. Решение уравнения Ляпунова для нелинейных объектов

Рассмотрение начнем с методов для нелинейных объектов, из которых как частные случаи будут вытекать соответствующие методы решения уравнений Ляпунова для линейных систем.

Для нелинейных объектов можно выделить два общих подхода к решению уравнения (3.21): метод степенных рядов и метод построения функций Ляпунова с помощью последовательных решений системы дифференциальных уравнений объекта [11].

#### 1. Метод степенных рядов

Метод основан на определении функции Ляпунова в структуре

$$S(X) = \sum_{i=1}^n A_i x_i + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j,k=1}^n A_{ijk} x_i x_j x_k + \dots \quad (3.22)$$

с искомыми коэффициентами  $A_i$ ,  $A_{ij}$ ,  $A_{ijk}$ . Этот метод применим только к объектам (3.13) с полиномиальными нелинейностями, когда функции  $f_i(X)$  представляются или аппроксимируются соответствующими полиномами. В аналогичной форме представляется и функция  $Q(X)$ .

Метод предполагает выполнение следующих процедур.

1. Подстановка в уравнение (3.21) функций  $V(X)$ ,  $f_i(X)$ ,  $Q(X)$  в форме полиномов, выполнение операций перемножения и суммирования полиномов с целью приведения левой части (3.21) к результирующему полиному.

2. Составление системы алгебраических уравнений для определения искоемых параметров  $A_i$ ,  $A_{ij}$ ,  $A_{ijk}$  приравниванием коэффициентов при одинаковых произведениях координат объекта в левой и правой частях уравнения (3.21).

3. Решение полученной системы алгебраических уравнений, которая распадается на независимые подсистемы для коэффициентов  $A_{ij}$  при квадратичных членах функции Ляпунова, для коэффициентов  $A_{ijk}$  при кубических членах и т.д.

**Пример 3.3.** Требуется найти функцию Ляпунова для нелинейного объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1^*; \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{222}x_2^2 + ku = f_2^* + ku, \end{cases} \quad (3.23)$$

исходя из положительно определенной функции  $Q(X) = q_1x_1^2 + q_2x_2^2$ . Отметим, что уравнения (3.23) при  $a_{11} < 0$ ;  $a_{11} \rightarrow 0$  соответствуют описанию привода при вязком нелинейном трении [37].

Искомую функцию  $V(X)$  определим как решение уравнения Ляпунова (3.21):

$$\frac{\partial V(X)}{\partial x_1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \frac{\partial V(X)}{\partial x_2}(a_{22}x_2 + a_{222}x_2^2) = -q_1x_1^2 - q_2x_2^2. \quad (3.24)$$

Уравнения (3.24) будем решать с точностью до кубических членов степенного ряда

$$V(X) = A_1x_1 + A_2x_2 + A_{11}x_1^2 + A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_2^2 + A_{111}x_1^3 + A_{112}x_1^2x_2 + A_{122}x_1x_2^2 + A_{222}x_2^3. \quad (3.25)$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{\partial V(X)}{\partial x_1} = A_1 + 2A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + 3A_{111}x_1^2 + 2A_{112}x_1x_2 + A_{122}x_2^2, \\ \frac{\partial V(X)}{\partial x_2} = A_2 + A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2 + A_{112}x_1^2 + 2A_{122}x_1x_2 + 3A_{222}x_2^2. \end{cases} \quad (3.26)$$

Подставляя производные (3.26) в уравнение (3.24) и приравнявая коэффициенты при одинаковых произведениях координат объекта, получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $A_i$ ,  $A_{ij}$ ,  $A_{ijk}$  функции Ляпунова:

$$\begin{cases} x_1 : & a_{11}A_1 = 0, \\ x_2 : & a_{12}A_1 + a_{22}A_2 = 0, \\ x_1^2 : & 2a_{11}A_{11} = -q_1, \\ x_1x_2 : & 2a_{12}A_{11} + a_{11}A_{12} + a_{22}A_{12} = 0, \\ x_2^2 : & a_{12}A_{12} + 2a_{22}A_{22} = -q_2, \\ x_1^3 : & 3a_{11}A_{111} = 0, \\ x_1^2x_2 : & 3a_{12}A_{111} + 2a_{11}A_{112} + a_{22}A_{112} = 0, \\ x_1x_2^2 : & 2a_{12}A_{112} + a_{11}A_{122} + 2a_{22}A_{122} + a_{222}A_{12} = 0, \\ x_2^3 : & a_{12}A_{122} + 3a_{22}A_{222} + 2a_{222}A_{22} = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Решением системы уравнений (3.27) находим искомые коэффициенты:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = 0; \quad A_{11} &= \frac{-q_1}{2a_{11}}; \quad A_{12} = \frac{2a_{12}A_{11}}{a_{11} + a_{22}}; \quad A_{22} = \frac{-(q_2 + a_{12}A_{12})}{2a_{22}}, \\ A_{111} = A_{112} &= 0; \quad A_{122} = -\frac{2a_{222}A_{12}}{a_{11} + 2a_{22}}; \quad A_{222} = -\frac{a_{12}A_{122} + 2a_{222}A_{22}}{3a_{22}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Таким образом, искомая функция Ляпунова определяется выражением (3.25) с коэффициентами (3.28).

**Замечание.** Если функция  $Q(X)$  не содержит линейных членов, то для объекта  $n$ -го порядка, по аналогии с рассмотренным объектом второго порядка, легко установить, что коэффициенты функции Ляпунова  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$ .

## 2. Построение функций Ляпунова с помощью последовательных решений системы дифференциальных уравнений объекта

Другим общим подходом к решению уравнения Ляпунова является использование соотношения

$$V(X) = \int_0^{\infty} Q(R(t, X)) dt, \quad (3.29)$$

где  $R(t, X)$  – решение в форме Коши системы дифференциальных уравнений (3.13) с начальным условием  $X(0) = X$ .

Формула (3.29) непосредственно выводится из уравнения Ляпунова

$$\frac{dV[X(t)]}{dt} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(X)}{\partial x_i} f_i(X(t)) = -Q(X(t)),$$

для асимптотически устойчивого объекта (3.13). Интегрируя это уравнение по времени в интервале  $[t, T]$  получаем

$$V[X(T)] - V[X(t)] = - \int_t^T Q(X(t)) dt. \quad (3.30)$$

Вследствие асимптотической устойчивости нулевого решения имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} V[X(T)] = V[0] = 0.$$

С учетом этого обстоятельства из уравнения (3.30) при  $T \rightarrow \infty$  и  $t = 0$  следует соотношение (3.29).

На соотношении (3.29) основан целый ряд методик, алгоритмов решения уравнения Ляпунова [11]. Непосредственно из формулы (3.29) вытекает следующий простой алгоритм определения функций Ляпунова.

1. Для задаваемых начальных условий  $X_0 = X_k, k = 1, 2, \dots, N$ , принадлежащих области асимптотической устойчивости системы  $\dot{X}(t) = F[X(t)]$ , отыскивается численное решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F[X(t)], & X(t_0) = X_k, \\ \dot{Z}_k(t) = Q[X(t)], & Z_k(t_0) = 0 \end{cases} \quad (3.31a)$$

$$(3.31b)$$

на достаточно длительном интервале  $[0, T_k]$ . Заметим, что уравнение (3.31б) есть дифференциальный аналог интегрального уравнения (3.29).

2. С помощью интерполяционных формул восстанавливается функция Ляпунова  $V(X)$ , для которой известны приближенно численные значения

$$V(X_k) \approx \int_0^{T_k} Q[X(t, X_k)] dt = Z_k(T_k), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.32)$$

Этот алгоритм находит достаточно широкое применение [11].

Отметим, что формула (3.29) позволяет точно найти функцию Ляпунова для устойчивой динамической системы, для которой известно аналитическое решение в форме Коши. К таким системам, кроме линейных стационарных, относятся, например, нелинейные электромеханические системы, описываемые в канонической форме Г.И. Мельникова [6].

Рассмотрим объект третьего порядка в интегрируемой канонической форме Г.И. Мельникова

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + p_2[x_1(t)], \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + p_3[x_1(t), x_2(t)], \end{cases} \quad (3.33)$$

где  $p_2[x_1]$ ,  $p_3[x_1, x_2]$  – полиномы от указанных переменных.

Так как первое уравнение системы (3.33) не зависит от второго и третьего уравнений, а второе уравнение – от третьего, то систему уравнений (3.33) легко последовательно аналитически проинтегрировать

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{a_{11}t} \cdot x_{10}, \\ x_2(t) = e^{a_{22}t} \cdot x_{20} + \int_0^t e^{a_{22}(t-\tau)} [a_{21}e^{a_{11}\tau} \cdot x_{10} + p_2[e^{a_{11}\tau} \cdot x_{10}]] d\tau, \\ x_3(t) = e^{a_{33}t} \cdot x_{30} + \int_0^t e^{a_{33}(t-\tau)} [a_{31}x_1(\tau) + a_{32}x_2(\tau) + p_3[x_1(\tau), x_2(\tau)]] d\tau. \end{cases} \quad (3.34)$$

Каноническая форма (3.33) легко обобщается на объекты  $n$ -го порядка

$$\dot{X}(t) = AX(t) + P[X(t)], \quad (3.35)$$

где  $A$  – нижняя треугольная матрица, а вектор  $P[X(t)]$  имеет структуру

$$P[X(t)] = (0, p_2[x_1], p_3[x_1, x_2], p_4[x_1, x_2, x_3], \dots, p_n[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}])^T.$$

Подставив аналитические решения вида (3.34) в формулу (3.29), после интегрирования можно получить точное выражение для функции Ляпунова.

**Пример 3.4.** Определим функцию Ляпунова для объекта второго порядка, описываемого дифференциальными уравнениями в канонической форме Г.И. Мельникова

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t), \quad a_{11} < 0, \quad a_{22} < 0; \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{211}x_1^2(t). \end{cases} \quad (3.36)$$

на основе использования положительно определенной функции  $Q(X) = q_{11}x_1^2(t) + q_{22}x_2^2(t)$ ;  $q_{11}, q_{22} > 0$ .

Для объекта (3.36) указанным выше способом можно найти аналитическое решение

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{10}e^{a_{11}t}, \\ x_2(t) &= x_{20}e^{a_{22}t} + \int_0^t e^{a_{22}(t-\tau)} (a_{21}x_{10}e^{a_{11}\tau} + a_{211}x_{10}^2e^{2a_{11}\tau}) d\tau = c_1e^{a_{11}t} + c_2e^{2a_{11}t} + c_3e^{a_{22}t}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где

$$c_1 = \frac{a_{21}}{a_{11} - a_{22}} x_{10} = \alpha_1 x_{10}; \quad c_2 = \frac{a_{211}}{2a_{11} - a_{22}} x_{10}^2 = \alpha_2 x_{10}^2; \quad c_3 = x_{20} - \alpha_1 x_{10} - \alpha_2 x_{10}^2.$$

Теперь в соответствии с формулой (3.29) на основе решения (3.37) определяем функцию Ляпунова

$$\begin{aligned}
V[X_0] &= \int_0^\infty Q[X(X_0, t)] dt = \int_0^\infty [q_{11} \cdot x_1^2(t) + q_{22} \cdot x_2^2(t)] dt = \\
&= \int_0^\infty [q_{11} x_{10}^2 e^{2a_{11}t} + q_{22} (c_1 e^{a_{11}t} + c_2 e^{2a_{11}t} + c_3 e^{a_{22}t})^2] dt = \\
&= -\frac{q_{11}}{2a_{11}} x_{10}^2 - \frac{q_{22}c_1^2}{2a_{11}} - \frac{q_{22}c_3^2}{2a_{22}} - \frac{q_{22}c_2^2}{4a_{11}} - \frac{q_{22}c_1c_3}{a_{11} + a_{22}} - \frac{q_{22}c_1c_2}{3a_{11}} - \frac{q_{22}c_2c_3}{2a_{11} + a_{22}} = \\
&= - \left[ \frac{q_{11}}{2a_{11}} x_{10}^2 + \frac{q_{22}\alpha_1^2}{2a_{11}} x_{10}^2 + \frac{q_{22}(x_{20} - \alpha_1 x_{10} - \alpha_2 x_{10}^2)^2}{2a_{22}} + \frac{q_{22}\alpha_2^2}{4a_{11}} x_{10}^4 + \frac{q_{22}\alpha_1\alpha_2}{3a_{11}} x_{10}^3 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{q_{22}}{a_{11} + a_{22}} \alpha_1 x_{10} (x_{20} - \alpha_1 x_{10} - \alpha_2 x_{10}^2) + \frac{q_{22}}{2a_{11} + a_{22}} \alpha_2 x_{10}^2 (x_{20} - \alpha_1 x_{10} - \alpha_2 x_{10}^2) \right].
\end{aligned}$$

Так как последнее уравнение справедливо для любых начальных условий, то в нем можно заменить  $x_{10} \rightarrow x_1$  и  $x_{20} \rightarrow x_2$  и после несложных алгебраических преобразований получить искомую функцию Ляпунова

$$V(X) = A_{11}x_1^2 + A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_2^2 + A_{111}x_1^3 + A_{112}x_1^2x_2 + A_{1111}x_1^4, \quad (3.38)$$

где

$$\begin{aligned}
A_{11} &= -\frac{q_{11}}{2a_{11}} - \frac{q_{22}\alpha_1^2}{2a_{11}} - \frac{q_{22}\alpha_1^2}{2a_{22}} + \frac{q_{22}\alpha_1^2}{a_{11} + a_{22}}; \quad A_{12} = \frac{q_{22}\alpha_1}{4a_{22}} - \frac{q_{22}\alpha_1}{a_{11} + a_{22}}; \\
A_{22} &= -\frac{q_{22}}{2a_{22}}; \quad A_{111} = -\frac{q_{22}\alpha_1\alpha_2}{a_{22}} + \frac{q_{22}\alpha_1\alpha_2}{a_{11} + a_{22}} - \frac{q_{22}\alpha_1\alpha_2}{3a_{11}} + \frac{q_{22}\alpha_1\alpha_2}{2a_{11} + a_{22}}; \\
A_{112} &= \frac{q_{22}\alpha_2}{a_{22}} - \frac{q_{22}\alpha_2}{2a_{11} + a_{22}}; \quad A_{1111} = -\frac{q_{22}\alpha_2^2}{2a_{22}} - \frac{q_{22}\alpha_2^2}{4a_{11}} + \frac{q_{22}\alpha_2^2}{2a_{11} + a_{22}}.
\end{aligned}$$

### 3.3.2. Решение уравнения Ляпунова для линейных объектов

Применяя метод степенных рядов к объектам  $\dot{X}(t) = AX(t)$  в случае задания положительно определенной функции  $Q(X)$  в виде квадратичной формы  $Q(X) = X^T Q X$ , легко установить, что ряд (3.22), представляющий решение уравнения (3.21), будет иметь только один первый член, т.е. в данном случае функция Ляпунова допускает представление в квадратичной форме:

$$V(X) = X^T P X, \quad (3.39)$$

где матрица  $P$  является, как установлено [20, 24] симметричной, положительно определенной матрицей размерности  $n \times n$ .

Напомним, что матрица  $P$  называется *симметричной*, если  $P = P^T$ . Соответственно матрица  $P$  называется *положительно определенной*, если квадратичная форма  $X^T P X > 0$  для всех  $X$ , за исключением  $X = 0$ . Положительная определенность матрицы  $P$ , которую будем указывать неравенством  $P > 0$ , как правило, проверяется с использованием *критерия Сильвестра* [38]:



$$p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (3.40)$$

Получим уравнение, определяющее матрицу  $P$ . Для этого предварительно вспомним операции дифференцирования функций по векторному аргументу. Известно, что производная скалярной функции  $f(X)$  по вектору  $X$  (градиент функции) определяется следующим образом:

$$\frac{df}{dX} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T.$$

Рассмотрим функцию  $f(X, Y) = Y^T B X$  от двух векторов  $X, Y$ , где  $B$  – матрица размерности  $n \times n$ . Для этой функции справедливы соотношения:

$$\frac{df}{dX} = (Y^T B)^T = B^T \cdot Y, \quad \frac{df}{dY} = B \cdot X. \quad (3.41)$$

Эти соотношения легко проверить для функции от двумерных векторов

$$f(X, Y) = (y_1 \ y_2) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = y_1 \cdot (b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + y_2 \cdot (b_{21}x_1 + b_{22}x_2).$$

Для этой функции находим

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 b_{11} + y_2 b_{21} \\ y_1 b_{12} + y_2 b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = B^T \cdot Y;$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 b_{11} + x_2 b_{12} \\ x_1 b_{21} + x_2 b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B \cdot X.$$

Таким образом, соотношения (3.41) действительно имеют место.

С использованием формулы (3.41) дифференцируем функцию Ляпунова (3.39) по вектору  $X$ :

$$\frac{dV}{dX} = \frac{d}{dX} (X^T P X) = (X^T P)^T + P X = P^T X + P X = 2P X.$$

С учетом данного выражения уравнение Ляпунова (3.21) принимает вид

$$X^T (2PA) X = -X^T Q X.$$

Так как матрица  $Q$  является симметричной, а матрица  $2PA$  вследствие несимметричности  $A$  – нет, то из последнего уравнения следует, что в общем случае для  $X \neq 0$  не выполняется равенство  $2PA = -Q$ . Такого типа равенство может выполняться только для симметричных матриц. Используя известный прием получения из несимметричной матрицы  $B$  симметричной матрицы

$$C = (B + B^T)/2,$$

поставим в соответствие матрице  $2PA$  симметричную матрицу  $A^T P + PA$ . Так как значения квадратичной формы от матриц  $B$  и  $C$  совпадают, то для нахождения искомой матрицы  $P$ , определяющей функцию Ляпунова линейной системы, приходим к необходимости решения следующего уравнения:

$$A^T P + PA = -Q, \quad (3.42)$$

называемого *матричным уравнением Ляпунова*.

Для уравнения (3.42) А.М. Ляпуновым доказана следующая теорема существования решения.

**Теорема 3.4.** *Если матрица  $A$  устойчива, то для любой положительно определенной матрицы  $Q$  существует единственное положительно определенное решение  $P_+$  уравнения (3.42).*

Рассмотрим два широко применяемых метода решения матричного уравнения Ляпунова.

### 1. Решение матричного уравнения Ляпунова методом Е.А. Барбашина

Относительно элементов искомой матрицы  $P$  уравнение (3.42) является линейным. Поэтому его можно переписать в стандартной форме  $AX = B$  и решить известными методами. Удачный вариант преобразования уравнения (3.42) к стандартному виду был предложен Е.А. Барбашиным [36].

Сущность метода первоначально рассмотрим на примере объекта управления второго порядка, возмущенное движение которого описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2; \quad \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \quad (3.43)$$

Соответственно положительно определенная функция  $Q(X)$  задана в виде квадратичной формы

$$Q(X) = q_{11}x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2. \quad (3.44)$$

Найдем функцию Ляпунова

$$V(X) = p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2, \quad (3.45)$$

полная производная по времени которой на траекториях свободного движения объекта (3.43) равна функции (3.44), взятой с противоположным знаком.

Подставив выражения (3.43), (3.44) и (3.45) в уравнение (3.21) и производя операцию дифференцирования, получим

$$2(p_{11}a_{11} + p_{12}a_{21})x_1^2 + 2[p_{11}a_{12} + p_{12}(a_{11} + a_{22}) + p_{22}a_{21}]x_1x_2 + \\ + 2(p_{12}a_{12} + p_{22}a_{22})x_2^2 = -[q_{11}x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2].$$

Приравнявая коэффициенты при переменных  $x_1^2$ ,  $x_1x_2$ ,  $x_2^2$  в правой и левой частях этого уравнения, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}p_{11} + a_{21}p_{12} &= -0.5q_{11}, \\ a_{12}p_{11} + (a_{11} + a_{22})p_{12} + a_{21}p_{22} &= -q_{12}, \\ a_{12}p_{12} + a_{22}p_{22} &= -0.5q_{22}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

для определения искомых коэффициентов  $p_{11}$ ,  $p_{12}$ ,  $p_{22}$  функции Ляпунова.

Система линейных алгебраических уравнений (3.46) имеет стандартный вид и ее можно решить, используя, например, формулы Крамера

$$p_{11} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -0.5q_{11} & a_{21} & 0 \\ -q_{12} & (a_{11} + a_{22}) & a_{21} \\ -0.5q_{22} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad p_{12} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & -0.5q_{11} & 0 \\ a_{12} & -q_{12} & a_{21} \\ 0 & -0.5q_{22} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$p_{22} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & -0.5q_{11} \\ a_{12} & (a_{11} + a_{22}) & -q_{12} \\ 0 & a_{12} & -0.5q_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & (a_{11} + a_{22}) & a_{21} \\ 0 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (3.47)$$

На основе соотношений (3.45), (3.47) искомую функцию Ляпунова можно записать в форме так называемого определителя Е.А. Барбашина:

$$V(X) = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 \\ -0.5q_{11} & a_{11} & a_{21} & 0 \\ -q_{12} & a_{12} & (a_{11} + a_{22}) & a_{21} \\ -0.5q_{22} & 0 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (3.48)$$

Для линейного объекта n-го порядка аналогичные рассуждения и преобразования приводят к следующей форме определителя Е.А. Барбашина:

$$V(X) = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & \dots & 2x_1x_n & x_2^2 & \dots & 2x_1x_k & \dots & x_n^2 \\ -0.5q_{11} & C_{11,11} & \dots & C_{1n,11} & C_{22,11} & \dots & C_{ik,11} & \dots & C_{nn,11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -q_{1n} & C_{11,1n} & \dots & C_{1n,1n} & C_{22,1n} & \dots & C_{ik,1n} & \dots & C_{nn,1n} \\ -0.5q_{22} & C_{11,22} & \dots & C_{1n,22} & C_{22,22} & \dots & C_{ik,22} & \dots & C_{nn,22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -q_{ik} & C_{11,ik} & \dots & C_{1n,ik} & C_{22,ik} & \dots & C_{ik,ik} & \dots & C_{nn,ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -0.5q_{nn} & C_{11,nn} & \dots & C_{1n,nn} & C_{22,nn} & \dots & C_{ik,nn} & \dots & C_{nn,nn} \end{vmatrix}, \quad (3.49)$$

где элементы  $C_{\alpha j, ik}$  выражаются через вещественные коэффициенты дифференциальных уравнений (4.1) возмущенного движения объекта управления и подчиняются следующим соотношениям:

$$C_{\alpha j, ik} = C_{j\alpha, ik} = C_{\alpha j, ki}, \quad C_{\alpha j, ik} = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \neq i \neq j \neq k, \\ a_{jk} & \text{при } \alpha = i, j \neq k, \\ a_{\alpha\alpha} + a_{jj} & \text{при } \alpha = i, j = k, i \neq j, \\ a_{\alpha\alpha} & \text{при } \alpha = j = i = k, \end{cases}$$

$\Delta$  – минор, относящийся к первому элементу первой строки последнего определителя.

Данный результат впервые был получен Е.А. Барбашиным и приведен в монографии [36]. Порядок  $N$  определителя (3.49) связан с порядком  $n$  системы дифференциальных уравнений (4.1) следующей зависимостью:

$$N = n(n+1)/2 + 1.$$

Из этой формулы следует, что при увеличении порядка  $n$  системы дифференциальных уравнений порядок определителя Е.А. Барбашина  $N$  увеличивается в квадратичной зависимости. Это резко усложняет расчет коэффициентов функции Ляпунова. В связи с этим метод Е.А. Барбашина, как правило, используется при аналитическом определении функций Ляпунова для объектов управления не выше четвертого порядка (для него определитель имеет уже одиннадцатый порядок). Для объектов более высокого порядка используются специальные численные методы, позволяющие существенно уменьшить объем вычислительных операций.

## 2. Решение матричного уравнения Ляпунова на основе формулы (3.29)

Формула (3.29) позволяет найти функцию Ляпунова для линейной динамической системы, для которой известно аналитическое решение задачи Коши с начальным условием  $X(0) = X_0$ :

$$X(t, X_0) = e^{At} \cdot X_0. \quad (3.50)$$

Подставляя (3.50) в (3.29), получаем

$$V(X_0) = \int_0^{\infty} (e^{At} \cdot X_0)^T \cdot Q \cdot e^{At} \cdot X_0 dt = \int_0^{\infty} X_0^T [e^{A^T t} \cdot Q \cdot e^{At}] X_0 dt.$$

Из данного выражения вытекает хорошо известный факт, что для устойчивой линейной системы функция Ляпунова является квадратичной формой

$$V(X_0) = X_0^T P X_0; \quad P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt. \quad (3.51)$$

Формула (3.51) является основой многих численных алгоритмов решения матричного уравнения Ляпунова (3.42).

**Алгоритм 1.** В работе [11] на основе формул (3.51) и метода (3.31), (3.32) предложен следующий простой способ отыскания элементов матрицы  $P$ .

1. Задаются основные координатные векторы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Интегрируются последовательно системы дифференциальных уравнений на достаточно большом интервале времени  $[0, T]$

$$\dot{X}(t) = AX(t); \quad \dot{z}_{ks} = X^T(t) Q X(t); \quad k, s = 1, 2, \dots, n; \quad k \geq s \quad (3.52)$$

с начальными условиями  $X(0) = X_k + X_s$ ;  $z_{ks}(0) = 0$ .

3. Рассчитываются элементы матрицы  $P$  по формулам

$$p_{kk} = 0.25 z_{kk}(T); \quad p_{ks} = 0.5(z_{ks}(T) - p_{kk} - p_{ss}), \quad k \neq s. \quad (3.53)$$

Для расчета всех различных элементов  $p_{ks}$ ,  $k, s = 1, 2, \dots, n$  симметричной матрицы  $P$  в данном алгоритме приходится  $0.5n(n+1)$  раз численно интегрировать систему уравнений (3.52) с различными начальными условиями.

**Алгоритм 2** [11]. В данном алгоритме матрица  $P$  уравнения Ляпунова находится непосредственным вычислением матричного интеграла (3.51).

1. Задается достаточно малое число  $h > 0$  и вычисляется матрица

$$e^{Ah} = E + A \frac{h}{1!} + A^2 \frac{h^2}{2!} + A^3 \frac{h^3}{3!} + \dots = \Theta$$

по формулам

$$\Theta = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_N; \quad A_0 = E; \quad A_k = \frac{1}{k} h A A_{k-1}; \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

2. Матрица  $P$  находится вычислением интеграла (3.51) по формуле Симпсона

$$P \approx I_{2q} = \int_0^{2qh} e^{A^T t} Q e^{A t} dt \approx \frac{h}{3} (\Theta_0 + 4\Theta_1 + 2\Theta_2 + \dots + 4\Theta_{2q-1} + \Theta_{2q}); \quad (3.54)$$

$$\Theta_0 = Q; \quad \Theta_{s+1} = \Theta^T \Theta_s \Theta; \quad s = 1, 2, \dots, 2q-1.$$

Выход из счета делается при выполнении условия  $\|\Theta_{2q}\| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заранее заданная малая положительная величина.

### 3.4. Применение функций Ляпунова в синтезе нелинейных систем.

#### Задача оптимального демпфирования переходных процессов

Учение Ляпунова об устойчивости движения, позволяющее судить о свойствах возмущенных движений, не прибегая к интегрированию уравнений (3.7), указывает путь к рациональному конструированию регуляторов. Поэтому метод функций Ляпунова широко используется непосредственно для синтеза так называемых стабилизирующих управлений, т.е. обеспечивающих устойчивость конструируемой динамической системы [35]. Изложим идею общего подхода к отысканию стабилизирующего управления для объектов

$$\dot{X}(t) = F[X(t), u(t)] \quad (3.55)$$

со скалярным управляющим воздействием  $u(X)$ .

Введем положительно определенную функцию Ляпунова  $V = V(X)$ , имеющую непрерывные частные производные в области ее определения  $\Omega_X$ , и вычислим ее полную производную по времени в силу уравнений (3.55):

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot f_i(X, u) = \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right)^T F(X, u). \quad (3.56)$$

Потребуем такого выбора управления  $u(X)$ , при котором

$$\dot{V}(X, u) \leq -Q(x), \quad \forall X \in \Omega_X \text{ и } t \geq t_0, \quad (3.57)$$

где  $Q(X)$  – некоторая заданная положительно определенная функция. Выполнение неравенства (3.57) в соответствии с теоремами Ляпунова обеспечивает устойчивость синтезируемой системы управления.

С учетом (3.56) перепишем неравенство (3.57) в виде

$$W(X, u, t) = \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right)^T F(X, u) + Q(X) \leq 0, \quad \forall X \in \Omega_X \text{ и } t \geq t_0. \quad (3.58)$$

При фиксированной функции Ляпунова  $V(X)$  неравенство (3.58) в неявном виде задает ограничения на управление  $u(t) = u[X(t)]$ , при котором это управление стабилизирует объект (3.55). Если известно, что стабилизирующее

управление существует, то можно эти ограничения выделить в явном виде, разрешая аналитически неравенство (3.58) относительно переменной  $u$ .

Применение указанного подхода определения стабилизирующего управления встречает на практике следующие затруднения: 1) трудно установить условия разрешимости нелинейного неравенства (3.58); 2) еще труднее найти его аналитические решения относительно управления  $u(t) = u[X(t)]$ ; 3) неравенству (3.58), как правило, удовлетворяет не одна функция, а целый класс управлений.

С точки зрения устранения указанных трудностей представляет несомненный интерес метод оптимального демпфирования переходных процессов В.И. Зубова [22], так как в нем решение неравенства заменяется решением уравнения относительно, как правило, единственной и оптимальной в определенном смысле функции управления. Этот метод получил достаточно широкое применение на практике [39].

Метод основан на своеобразном определении оптимальности движения синтезируемой системы, выражаемом через соответствующую функцию Ляпунова. Введем понятие оптимальности по В.И. Зубову.

Рассмотрим управляемый объект вида (3.7). Предположим, что управления  $U = (u_1, \dots, u_m)^T$  принадлежат некоторому множеству  $\Omega[U]$  совокупности всех кусочно-непрерывных управлений с конечным числом точек разрыва.

Каждому управлению  $U \in \Omega[U]$  отвечает движение объекта

$$X = X(t, U, X_0, t_0), \quad (3.59)$$

проходящее через начальную точку  $X_0$  при  $t = t_0$ .

Пусть задана некоторая скалярная функция  $V(X)$ , которую можно рассматривать как меру отклонения движущейся точки (3.59) от установившегося состояния. Будем рассматривать наиболее простой случай, когда установившееся состояние определяется тривиальным решением системы (3.7):  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . В этом случае в качестве функции  $V(X)$ , например, можно задать евклидову норму вектора  $\|X\|$  или квадрат ее значения

$$V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (3.60)$$

Если роль системы управления сводится к тому, чтобы уменьшить расстояние между движущейся точкой (3.59) и установившимся значением  $X=0$ , то становится естественным следующее понятие об оптимальном управлении по отношению к демпфированию функции  $V(X)$ .

**Определение.** Управление  $U^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0)^T$  называется оптимальным по отношению к демпфированию функции  $V$ , если эта функция убывает вдоль траектории  $X(t, U^0, X_0, t_0) = X^0(t)$ , соответствующей этому управлению наибольшим образом.

Полная производная по  $t$  от функции  $V$  вдоль траектории движения системы (3.7) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot f_i(X) \equiv W(t, X, U). \quad (3.61)$$

Следовательно, оптимальным по отношению к демпфированию функции  $V(X)$  будет управление, которое доставляет функции  $W(t, X, U)$  наименьшее **отрицательное** значение среди всех управлений  $U \in \Omega[U]$ :

$$U_{\text{ид}}(t) = \arg \left\{ \min_{U \in \Omega} W[t, X(t), U] \right\}. \quad (3.62)$$

Заметим, что функция (3.60), определяющая геометрическое расстояние от состояния объекта (3.59) до точки равновесия  $X = 0$ , является простейшей функцией Ляпунова, позволяющей судить об устойчивости движения системы. Естественно, что при синтезе системы управления в качестве  $V(X)$  может быть выбрана любая подходящая функция Ляпунова. При использовании метода В.И. Зубова, как правило, выбирают функцию Ляпунова, отвечающую объекту при отсутствии управлений ( $U = 0$ ). Это имеет большой физический смысл: 1) такой выбор гарантирует устойчивость синтезируемой системы управления; 2) минимизация производной (3.61) по управлению определяет максимальную область устойчивости проектируемой системы при выбранной функции Ляпунова.

Подчеркнем, что понятие оптимальности системы по В.И. Зубову, связанное со свойствами движения системы в **текущий момент времени**, существенно отличается от понятия оптимальности, выраженного соответствующим интегральным функционалом, представляющим, например, собой интегральные оценки качества переходных процессов **на всем интервале** их протекания. Отказ от интегрального критерия качества и переход к критерию с оценкой качества в каждый текущий момент времени существенно упрощает процедуру синтеза. Однако, как будет показано в последующих разделах, метод В.И. Зубова способствует более глубокому пониманию задачи АКОР и подходов к ее решению.

Если правые части уравнений (3.7) зависят от воздействий  $u_1, u_1, \dots, u_m$  линейно, то управление, оптимальное по отношению к демпфированию функции  $V(X)$ , сравнительно легко определяется в общем виде.

Например, применим метод синтеза В.И. Зубова к объекту

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{r=1}^m b_{ir}(t, X) \cdot u_r, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.63)$$

где  $\|a_{ij}\|_n^n$  – матрица коэффициентов, имеющая собственные числа с отрицательными вещественными частями (т.е. положение равновесия  $X = 0$  системы (3.63) при  $U = 0$  асимптотически устойчиво), величины  $b_{ir}(t, X)$  – нелинейные функции переменных  $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Предполагается, что компоненты вектора управления  $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$  ограничены неравенствами (1.3), т.е.  $|u_r(t)| \leq 1, r = 1, \dots, m$ .

Вследствие устойчивости объекта (3.63) существует единственная положительно определенная квадратичная форма

$$V = \sum_{i,j=1}^n p_{ij} x_i x_j \equiv X^T P X, \quad (3.64)$$

удовлетворяющая уравнению Ляпунова

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) = -Q(X), \quad (3.65)$$

где  $Q(X)$  – заданная положительно определенная функция. Если  $Q(X) = X^T Q X$ , то уравнение (3.65) равносильно матричному уравнению Ляпунова (3.42), определяющему матрицу  $P$  функции Ляпунова. Предположим, что с использованием методов подразд. 3.3.2 матрица  $P$  найдена.

Будем рассматривать найденную указанным способом квадратичную форму (3.64) в качестве критерия отклонения движущегося объекта (3.63) от положения равновесия  $X = 0$ . В этом случае функция (3.61) для объекта (3.63) принимает вид

$$W(X, U) = -Q(X) + \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ir}(X) \frac{\partial V}{\partial x_i} u_r. \quad (3.66)$$

Минимизируя функцию (3.66) по управлениям с учетом ограничений (1.3), получим

$$u_r^0(t) = -\text{sign} \left( \sum_{i=1}^n b_{ir}(X) \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) = -\text{sign} \left( \sum_{j=1}^n k_{jr} x_j \right), \quad k_{jr} = \sum_{i=1}^n d_{ij} b_{ir}(X), \quad r = 1, \dots, m. \quad (3.67)$$

Таким образом, управления нелинейным объектом (3.63), оптимальные по отношению к демпфированию функции (3.64), являются релейными управлениями, имеющими поверхности переключения

$$\sum_{j=1}^n k_{jr} x_j = 0, \quad r = 1, \dots, m.$$

В заключение отметим, что релейные оптимальные регуляторы обладают рядом замечательных свойств, которые предопределяют их широкое применение в практике управления электроприводами [1, 2]: 1) за счет бесконечно большого коэффициента усиления обеспечивают нулевую или достаточно малую ошибку стабилизации; 2) за счет работы в скользящем режиме имеют низкую чувствительность к изменению параметров объекта; 3) отличаются простой технической реализацией.

**Пример 3.5.** Найдём управление объектом (3.23), оптимальное по отношению к демпфированию функции Ляпунова (3.25) с коэффициентами (3.28), рассматриваемыми в примере 3.3.

Записываем выражение производной по времени функции (3.25) на траекториях объекта (3.23)

$$W(X, u) = \dot{V}(t) = \frac{\partial V(X)}{\partial x_1} (a_{11} x_1 + x_2) + \frac{\partial V(X)}{\partial x_2} (a_{22} x_2 + a_{222} x_2^2 + Ku).$$

Минимизацией последней функции по  $u$  с учетом ограничения  $|u(t)| \leq 1$  найдём оптимальное управление

$$u(t) = -\text{sign} \left( K \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) = -\text{sign} (K(A_{12} x_1 + 2A_{22} x_2 + A_{112} x_1 x_1 + 2A_{122} x_1 x_2 + 3A_{222} x_2 x_2))$$

со значениями коэффициентов (3.28).



Выражение релейного управления можно упростить за счет вынесения за знак  $\text{sign}$  постоянного положительного множителя, например,  $KA_{12}$ , так как эта операция не повлияет на знак выражения, стоящего под знаком  $\text{sign}$ :

$$u(t) = -\text{sign} \left( x_1 + 2 \frac{A_{22}}{A_{12}} x_2 + \frac{A_{112}}{A_{12}} x_1^2 + 2 \frac{A_{122}}{A_{12}} x_1 x_2 + 3 \frac{A_{222}}{A_{12}} x_2^2 \right). \quad (3.68)$$

С использованием соотношений (3.28) рассчитываем коэффициенты управления (3.68):

$$K_2 = 2A_{22}/A_{12} = -\frac{q_2}{a_{22}A_{12}} - \frac{a_{12}}{a_{22}}; \quad K_{122} = 2A_{122}/A_{12} = 0; \quad (3.69)$$

$$K_{122} = 2A_{122}/A_{12} = -\frac{4a_{222}}{a_{11} + 2a_{22}}; \quad K_{222} = 3A_{222}/A_{12} = -\frac{a_{12}}{2a_{22}}K_{122} - \frac{a_{222}}{a_{22}}K_2.$$

Найдем значения коэффициентов (3.69) для привода с вязким трением, у которого  $a_{11} < 0$ ;  $a_{11} \rightarrow 0$ . Так как в этом случае

$$\frac{1}{A_{12}} = -\frac{(a_{11} + a_{22})a_{11}}{q_1 a_{12}} = 0,$$

то коэффициенты искомого закона управления

$$u(t) = -\text{sign} (x_1 + K_2 x_2 + K_{122} x_1 x_2 + K_{222} x_2^2)$$

принимают значения

$$K_2 = -\frac{a_{12}}{a_{22}}; \quad K_{122} = -\frac{2a_{222}}{a_{22}}; \quad K_{222} = \frac{2a_{12}a_{222}}{a_{22}^2}. \quad (3.70)$$

### 3.4.2. Синтез оптимальных систем методом В.М. Кунцевича, М.М. Лычака

Данный метод можно рассматривать как развитие метода Зубова В.И. оптимального демпфирования переходных процессов. В качестве критерия качества управления В.М. Кунцевич, М.М. Лычак [35] используют так называемую функцию удельных потерь

$$\mu(X, U, t) = \frac{dV}{dt} + U^T R U, \quad (3.71)$$

где  $dV/dt$  – полная производная функции Ляпунова, вычисляемая вдоль траектории движения исследуемого объекта (3.7), а  $R^T = R$  – симметричная положительно определенная квадратичная матрица весовых коэффициентов критерия, учитывающая потребление энергии (потери) на управление. Задавая матрицу  $R$  определенным образом можно также косвенно учитывать и некоторые другие ограничения на управляющие воздействия.

При этом задача управления объектом (3.7) формулируется как задача определения управления из условия

$$\min_{U \in \Omega} \{ \dot{V} + U^T R U \}. \quad (3.72)$$

При решении задачи (3.72) рекомендуется выбирать функцию Ляпунова  $V(X)$  и матрицу  $R$  таким образом, чтобы производная  $\dot{V}(X)$  была отрицательно определена либо во всем фазовом пространстве объекта, либо при  $X \in \Omega(X)$ , что

гарантирует асимптотическую устойчивость синтезируемым системам в указанной области в соответствии с теоремами устойчивости Ляпунова.

Подчеркнем, что условие оптимальности управления (3.72) отличается от условия В.И. Зубова только лишь дополнительным слагаемым  $U^T R U$ , поэтому метод В.М. Кунцевича, М.М. Лычака является несколько более общим, причем критерий (3.72) имеет ясный физический смысл.

Если правые части уравнений объекта (3.7) зависят от управляющих воздействий  $u_1, u_2, \dots, u_n$  линейно, то оптимальное управление по удельным потерям сравнительно легко определяется в общем виде. Так, например, рассмотрим применение метода В.М. Кунцевича, М.М. Лычака к объектам (3.63), исследуемым в предыдущем разделе.

Вследствие устойчивости объекта (3.63) существует единственная положительно определенная квадратичная форма

$$V(X) = \sum_{i,j=1}^n p_{ij} x_i x_j = X^T P X, \quad (3.73)$$

с матрицей  $P$ , удовлетворяющей матричному уравнению Ляпунова (3.42). Будем считать, что это уравнение решено и определена функция Ляпунова (3.73), которую будем рассматривать в качестве критерия отклонения движущегося объекта от положения равновесия  $X=0$ . Используя данную функцию и считая, что сигналы управления явно не стеснены ограничениями, найдем оптимальные управления из условия (3.72). Для этого раскроем функцию:

$$\mu(X, U) = \dot{V}(X) + U^T R U = \left( \frac{\partial V(X)}{\partial X} \right)^T \dot{X} + U^T R U = (2PX)^T (AX + B(X)U) + U^T R U. \quad (3.74)$$

Для нахождения минимума функции (3.74) определяем

$$\frac{\partial \mu}{\partial U} = (2X^T P B(X))^T + 2RU = 0.$$

Отсюда находим

$$U = R^{-1} B^T(X) P X, \quad (3.75)$$

где матрица  $P$  является решением матричного уравнения Ляпунова (3.42).

Отметим, что результат (3.75) совпадает с решением задачи оптимального управления по критерию обобщенной работы А.А. Красовского, рассматриваемым в следующей главе.

### Контрольные вопросы

1. Определите понятия возмущенного и невозмущенного движения динамической системы по Ляпунову. Какими уравнениями они описываются?
2. Каким образом находятся состояния покоя (равновесия) динамической системы?
3. Дайте определение устойчивости состояния равновесия объекта управления по Ляпунову.
4. Поясните различие понятий устойчивости, асимптотической устойчивости и устойчивости в целом (большом), предложенных А.М. Ляпуновым.

5. Каким условиям удовлетворяет функция Ляпунова? Поясните ее физический, геометрический смысл.
6. Сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости (асимптотической устойчивости) состояния равновесия динамической системы?
7. Запишите уравнение Ляпунова - уравнение в частных производных, определяющее функцию Ляпунова для заданного объекта управления.
8. Перечислите основные этапы решения уравнения Ляпунова методом степенных рядов.
9. Поясните идею метода решения уравнения Ляпунова с использованием решений в форме Коши системы дифференциальных уравнений управляемого объекта.
10. Укажите классы объектов управления, для которых возможно аналитически точно определить функцию Ляпунова.
11. В какой форме можно представить функцию Ляпунова для линейной динамической системы?
12. Запишите матричное уравнение Ляпунова для заданного линейного объекта управления.
13. Какая матрица называется положительно определенной? Укажите критерий выделения таких матриц.
14. Поясните идею метода Е.А. Барбашина решения матричного уравнения Ляпунова.
15. Запишите представление функции Ляпунова для стационарного линейного объекта через матричную экспоненту объекта.
16. Каким образом задается критерий оптимальности в методе оптимального демпфирования переходных процессов, предложенного В.И.Зубовым?
17. Какую структуру имеет закон оптимального демпфирования переходных процессов для линейного объекта с ограниченным управлением  $|u(t)| \leq U_{\max}$  ?

## 4. МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Цель расчетов не числа, а понимание.  
Прежде чем решать задачу, подумай,  
что делать с ее решением.

Законы Р. Хеминга

Как известно, под синтезом в теории автоматического управления понимается процесс выбора структуры СУ и расчет ее параметров с целью получения требуемых свойств системы. До недавнего времени основным и практически единственным методом, имеющимся в распоряжении инженеров для решения задач синтеза, был частотный метод [38], в котором сочетались инженерная интуиция в определении структуры СУ и некоторые слабо формализованные методики расчета параметров систем, обобщающие опыт проектирования и моделирования подобных систем.

Попытки создания более совершенных и более формализованных (математических) методов синтеза, позволяющих непосредственно в процессе синтеза определять также и структуру регулятора, привели к новому подходу, получившему название **аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР)**. Теория АКОР началась с работ, опубликованных в 1960г. в России А.М. Летовым и в США Р. Калманом. А.М. Летов определил конечную цель АКОР как получение закона управления чисто аналитическим путем, исходя из предъявляемых к качеству управления требований, формализованных в форме интегрального функционала. В настоящее время в теории АКОР получили признание два основных направления, отличающихся формой минимизируемого функционала: метод Летова–Калмана, в котором используется квадратичный функционал качества управления, и метод аналитического конструирования по критерию обобщенной работы, предложенный А.А. Красовским. В данной главе относительно подробно, с соответствующими примерами излагаются указанные методы аналитического конструирования регуляторов.

### 4.1. Решение задачи АКОР Летова–Калмана

Рассматриваемая задача АКОР была сформулирована в разд. 1, а ее физический смысл уточнялся в разд. 3. Для удобства пользования пособием кратко повторим формулировку нелинейной задачи управления А.М. Летова. Пусть имеется стационарный объект управления, движение которого описывается нелинейным векторно-матричным уравнением:

$$\dot{X}(t) = A[X(t)] + B[X(t)] \cdot U(t), \quad (4.1)$$

причем составляющие  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  вектора состояния  $X$  имеют смысл отклонений траектории от заданного (невозмущенного) движения.

Предполагается, что компоненты функциональных матриц  $A(X)$ ,  $B(X)$  размерностей  $n \times n$  и  $n \times m$  этого уравнения представляют собой полиномиальные зависимости или разложимы в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_1 = \dots = x_n = 0$ :

$$a_i(X) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{j,k=1}^n a_{ijk} x_j x_k + \sum_{j,k,l=1}^n a_{ijkl} x_j x_k x_l + \dots, \quad i=1,2,\dots,n; \quad (4.2)$$

$$b_{ij}(X) = b_{ij} + \sum_{k=1}^n b_{ijk} x_k + \sum_{k,l=1}^n b_{ijkl} x_k x_l + \dots, \quad i=1,2,\dots,n, \quad j=1,2,\dots,m. \quad (4.3)$$

Требуется найти  $m$ -мерное управление

$$U = U(X) \equiv U(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.4)$$

которое в совокупности с объектом (4.1) образует асимптотически устойчивую систему, переводящее ее из начального состояния  $X(t=0) = X_0$  в конечное нулевое состояние  $X(t \rightarrow \infty) = 0$  с минимальным значением квадратичного функционала:

$$I = \int_0^{\infty} (X^T(t) Q X(t) + U^T(t) R U(t)) dt, \quad (4.5)$$

где  $R, Q$  – симметричные вещественные положительно-определенные матрицы размерностей  $n \times n$  и  $m \times m$  весовых коэффициентов критерия.

Подчеркнем, что в задаче А.М. Летова ограничения на координаты векторов  $X, U$  не накладываются.

Наиболее приспособленным к решению сформулированной вариационной задачи управления является метод динамического программирования Р.Беллмана, который в отличие от классического вариационного исчисления и принципа максимума Л.С. Понтрягина позволяет определять оптимальное управление непосредственно в форме обратной связи. Для объекта управления первого порядка задача (4.1) – (4.5) была решена в подразд. 2.4, посвященном изложению метода Р. Беллмана. Применяя матричные операции, указанное решение распространим на многомерную задачу АКОР (4.1) – (4.5).

Переходя к решению задачи (4.1)–(4.5), запишем основное функциональное уравнение Р. Беллмана

$$\min_U \left\{ \frac{dS[X(t)]}{dt} + X^T Q X + U^T R U \right\} = 0. \quad (4.6)$$

Учтем, что

$$\frac{dS[X(t)]}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S[X(t)]}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i(t). \quad (4.7)$$

Введем в рассмотрение вектор

$$\frac{\partial S[X]}{\partial X} = \left( \frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x_n} \right)^T, \quad (4.8)$$

с помощью которого выражение (4.7) можно записать так:

$$\frac{dS[X(t)]}{dt} = \left( \frac{\partial S[X]}{\partial X} \right)^T \cdot \dot{X} = \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T (A(X) + B(X)U). \quad (4.9)$$

С учетом соотношения (4.9) уравнение Беллмана (4.6) принимает вид

$$\min_U \left\{ \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T (A(X) + B(X)U) + X^T QX + U^T R U \right\} = 0. \quad (4.10)$$

Для определения оптимального управления дифференцируем выражение в фигурных скобках по  $U$ ; с учетом того, что согласно соотношениям (3.41)

$$\frac{d}{dU} (U^T R U) = (U^T R)^T + R U = R^T U + R U = 2R U, \quad (4.11)$$

получаем

$$\left( \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T B(X) \right)^T + 2R U = 0.$$

Отсюда находим оптимальное управление

$$U = -\frac{1}{2} R^{-1} B(X)^T \frac{\partial S}{\partial X}. \quad (4.12)$$

Подставим это управление в уравнение Беллмана (4.10):

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T A(X) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T B(X) R^{-1} B^T(X) \frac{\partial S}{\partial X} + X^T QX + \\ & + \frac{1}{4} \left( R^{-1} B^T(X) \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T \cdot R \cdot \left( R^{-1} B^T(X) \frac{\partial S}{\partial X} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Последнее слагаемое в уравнении (4.13) с учетом симметрии матрицы  $R = R^T$  и матричного равенства

$$(R^{-1})^T = (R^T)^{-1} \quad (4.14)$$

преобразуется к виду

$$\frac{1}{4} \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T \cdot (R^{-1} B^T(X))^T \cdot B^T(X) \frac{\partial S}{\partial X} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T B(X) R^{-1} B^T(X) \frac{\partial S}{\partial X}.$$

Таким образом, уравнение (4.13) принимает вид

$$\left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T A(X) - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T B(X) R^{-1} B^T(X) \frac{\partial S}{\partial X} + X^T QX = 0, \quad (4.15)$$

которое является уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана для рассматриваемой задачи оптимального управления.

Если мы сможем найти решение нелинейного уравнения в частных производных (4.15) относительно функции  $S(X)$  при граничном условии  $S[X(t_\infty)] = 0$  (оно непосредственно вытекает из определения функции Беллмана), то в соответствии с уравнением (4.12) легко определим искомый оптимальный закон обратной связи. Таким образом, в прикладном плане задача синтеза регулятора сведена к поиску решений уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Необходимо отметить, что, хотя уравнение (4.15) известно более 40 лет, однако общие методы решения этого уравнения в настоящее время по существу отсутствуют и синтез оптимальных управлений нелинейными объектами наталкивается на серьезные математические трудности поиска численного и, тем более, аналитического решения данного уравнения [9].

Общее решение уравнения в частных производных (4.15) установлено только для линейных объектов управления.

#### 4.1.1. Синтез оптимальных регуляторов для линейных объектов

Для линейных объектов

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot U, \quad \dim X = n; \dim U = m \quad (4.16)$$

известно [20, 27], что уравнение в частных производных (4.15) имеет решение в квадратичной форме

$$S(X) = X^T P X \quad (4.17)$$

с симметричной, положительно определенной матрицей  $P$  размерности  $n \times n$ .

Повторяя выкладки (3.41) – (3.42) применительно к функции (4.17) и уравнению (4.15), получаем

$$X^T (PA + A^T P) X - (PX)^T B R^{-1} B^T (PX) + X^T Q X = 0,$$

или

$$X^T [(PA + A^T P) - P B R^{-1} B^T P + Q] X = 0.$$

Так как  $X \neq 0$ , то последнее равенство выполняется, если

$$PA + A^T P - P R^* P + Q = 0, \quad R^* = B R^{-1} B^T. \quad (4.18)$$

В литературе уравнение (4.18) известно как *алгебраическое матричное уравнение Риккати*. Данное уравнение является нелинейным и имеет несколько решений. Но решение, удовлетворяющее критерию положительной определенности Сильвестра (3.40), единственно.

Таким образом, подводя итог рассуждениям (4.16) – (4.18), можно утверждать, что оптимальным управлением для линейного объекта (4.16) по квадратичному критерию качества (4.5) является линейный закон обратной связи

$$U(t) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial S}{\partial X} = -R^{-1} B^T P X(t) = K X(t), \quad K = R^{-1} B^T P, \quad (4.19)$$

в котором матрица  $P$  находится как положительно определенное решение уравнения Риккати (4.18).

Заметим, что многомерный П-регулятор (4.19) достаточно просто реализуется на практике, поскольку матрица усиления  $K$  в этом регуляторе постоянна. Это объясняет широкое применение законов управления вида (4.19) в технических задачах.

**Пример 4.1.** Пусть электропривод описывается в первом приближении уравнениями

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = k \cdot u(t), \quad k > 0, \quad (4.20)$$

где переменная  $x_1$  имеет размерность угла,  $x_2$  – угловой скорости,  $u$  – вращающего момента. Описание (4.20) соответствует приводу, для которого можно пренебречь малыми постоянными времени электрических процессов двигателя в сравнении с постоянной времени механической части привода.

Рассмотрим задачу синтеза замкнутой системы управления, отрабатывающей отклонения фазовых координат с минимальным значением квадратичного функционала

$$J = \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + qx_2^2(t) + ru_2^2(t)]dt, \quad q, r > 0. \quad (4.21)$$

Воспользуемся результатами (4.18), (4.19) при решении сформулированной задачи, для которой используемые матрицы имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

В соответствии с выражением (4.19) определяем оптимальное управление

$$u(X) = -\frac{1}{r}(0 \quad k) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\frac{k}{r}(p_{21}x_1 + p_{22}x_2),$$

коэффициенты  $p_{ij}$  которого удовлетворяют уравнению Риккати (4.18):

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} - \frac{1}{r} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это матричное уравнение равносильно системе четырех уравнений  $-p_{12}^2 k^2 / r + 1 = 0$ ;  $p_{11} - p_{12} p_{22} k^2 / r = 0$ ;  $p_{11} - p_{21} p_{22} k^2 / r = 0$ ;  $2p_{12} - p_{22}^2 k^2 / r + q = 0$ , которая имеет решения

$$p_{12} = p_{21} = \pm \sqrt{r} / k; \quad p_{22} = \pm \sqrt{r(q + 2p_{12}) / k^2}; \quad p_{11} = p_{12} p_{22} k^2 / r.$$

Критерию Сильвестра удовлетворяет только решение

$$p_{12} = p_{21} = \sqrt{r} / k; \quad p_{22} = \sqrt{r(q + 2p_{12}) / k^2}; \quad p_{11} = \sqrt{q + 2\sqrt{r} / k}.$$

Соответственно искомый оптимальный закон управления принимает вид

$$u(X) = -1 / \sqrt{r} \cdot x_1 - \sqrt{(kq + 2\sqrt{r}) / kr} \cdot x_2. \quad (4.22)$$

Определение управления (4.19) для линейного стационарного объекта, главным образом, сводится к решению уравнения Риккати (4.18). Необходимо отметить, что численное решение нелинейных алгебраических уравнений (4.18) при  $n > 2$  является не менее трудной проблемой, чем решение краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных. Однако специфический характер уравнения (4.18) позволил разработать ряд эффективных численных методов его решения: метод Репина–Третьякова, метод Ньютона–Рафсона, метод диагонализации [24,27,31]. Эти методы входят в известные математические пакеты, например, Matlab 6.0.

Рассмотрим наиболее распространенный метод решения матричного уравнения (4.18) – метод Ньютона–Рафсона [38]. Введем матричную функцию

$$F(P) = PA + A^T P - PR^*P + Q,$$



где  $Q$  – в общем случае неотрицательно определенная матрица. Задача заключается в том, чтобы определить неотрицательно определенную матрицу  $P$ , удовлетворяющую условию  $F(P) = 0$ . Построим итерационную процедуру решения последнего уравнения. Пусть  $P^{(i)}$  – решение, которое получено на  $i$ -м шаге. Положим

$$P^{(i+1)} = P^{(i)} + \Delta P. \quad (4.23)$$

Предполагая, что  $\Delta P$  является малой величиной, и пренебрегая квадратичным членом относительно  $\Delta P$ , устанавливаем соотношение

$$F(P^{(i+1)}) = F(P^{(i)}) + (A^T - P^{(i)} R^*) \Delta P + \Delta P (A - R^* P^{(i)}).$$

Приравняв правую часть нулю, получим линейное матричное уравнение

$$F(P^{(i)}) + (A^T - P^{(i)} R^*) \Delta P + \Delta P (A - R^* P^{(i)}) = 0 \quad (4.24)$$

для нахождения поправки  $\Delta P$ . Это уравнение структурно аналогично уравнению (3.42). Таким образом, решение матричного уравнения Риккати сведено к решению матричного уравнения Ляпунова, методы определения которого рассмотрены ранее в подразд. 3.3.2.

На основе уравнения (4.24) можно предложить следующую итерационную процедуру решения матричного уравнения Риккати:

- а) вначале полагается  $i = 0$  и выбирается  $P^{(0)}$ ;
- б) из уравнения (4.24) методами подразд. 3.3.2 находится поправочная матрица  $\Delta P$ ;
- в) если  $\Delta P$  не превышает заданной допустимой ошибки, то итерационная процедура заканчивается; в противном случае увеличивается  $i$  на единицу и по формуле (4.23) вычисляется  $P^{(i)}$ , соответствующее новому значению  $i$ , а затем происходит возврат к пункту б.

Процедура сходится, если правильно выбрать начальное приближение  $P^{(0)}$ . Справедливо следующее утверждение [38]: если алгебраическое уравнение Риккати имеет единственное неотрицательно определенное решение, то

$$P^{(i+1)} \leq P^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{и} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} P^{(i)} = P$$

при условии, что начальное приближение  $P^{(0)}$  выбрано таким образом, что матрица  $(A - R^* P^{(0)})$  асимптотически устойчива, т.е. ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части.

Если начальное приближение выбрано неудачно, то может наблюдаться сходимость процедуры к произвольному решению алгебраического уравнения Риккати или вообще ее расходимость. Если матрица  $A$  асимптотически устойчива, то рекомендуется задаваться  $P^{(0)} = 0$ .

#### 4.1.2. Синтез оптимальных регуляторов для нелинейных объектов

Ранее мы установили, что решение нелинейной задачи АКOP (4.1) – (4.5) определяется законом управления (4.12), в котором функция Беллмана  $S(X)$  удовлетворяет уравнению (4.15).

Сложность синтеза оптимальных регуляторов для нелинейных объектов состоит в сложности решения именно данного нелинейного уравнения в част-

ных производных. Для объектов (4.1) в настоящее время известен один общий метод приближенного решения уравнения (4.15) – метод степенных рядов, в котором функция Беллмана определяется в форме ряда:

$$S(x) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j,k=1}^n A_{ijk} x_i x_j x_k + \dots \quad (4.25)$$

с искомыми параметрами  $A_{ij}$ ,  $A_{ijk}$ , ... . Процедура применения метода полностью аналогична процедуре решения уравнения Ляпунова с применением степенных рядов (см. подразд. 3.3.1): уравнения для определения указанных параметров находятся приравниванием коэффициентов при одинаковых произведениях независимых переменных  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  в уравнении (4.15) после подстановки в него полиномов (4.2) и (4.25). Таким способом можно установить, что матрица  $A_2 = \|A_{ij}\|_n$  удовлетворяет известному матричному уравнению Риккати:

$$A_2 A + A^T A_2 - A_2 B R^{-1} B^T A_2 = -Q,$$

где  $A$ ,  $B$  – матрицы линейной подмодели объекта управления. Методы решения этого уравнения были рассмотрены в предыдущем подразделе.

Последующие коэффициенты  $A_{ijk}$ ,  $A_{ijkl}$ ... функции Беллмана находятся решением линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{i,j,k=1}^n C_{ijk}^{v\mu\varepsilon} A_{ijk} = D_{v\mu\varepsilon}; \quad v, \mu, \varepsilon = 1, 2, \dots, n, \quad (4.26)$$

где параметры  $C_{ijk}^{v\mu\varepsilon}$  и  $D_{v\mu\varepsilon}$  соответствующим образом выражаются через параметры объекта, критерия качества и ранее найденные коэффициенты  $A_{ij}$ .

**Пример 4.2.** Рассмотрим электропривод с вязким трением, движение которого описывается дифференциальным уравнением

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + B_1 \frac{d\theta(t)}{dt} + B_2 \left[ \frac{d\theta(t)}{dt} \right]^2 = \mu(t),$$

где  $\theta$  – угол поворота привода;  $J$  – момент инерции всех вращающихся элементов, приведенных к валу привода;  $B_1$ ,  $B_2$  – коэффициенты вязкого трения;  $\mu$  – момент, развиваемый двигателем,  $\mu(t) = k_0 \cdot u(t)$ ;  $k_0$  – коэффициент усиления объекта.

Введем обозначения:  $x_1 = \theta(t)$ ,  $\dot{x}_1 = d\theta(t)/dt$  и запишем дифференциальные уравнения объекта в форме Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{12} x_2 = f_1; \\ \dot{x}_2 = a_{22} x_2 + a_{222} x_2^2 + k u = f_2, \end{cases} \quad (4.27)$$

где  $a_{12} = 1$ ;  $a_{22} = -B_1/J$ ;  $a_{222} = -B_2/J$ ;  $k = k_0/J$ .

Требуется синтезировать регулятор, переводящий объект из начального состояния  $x_1(0) = x_{10}$ ;  $x_2(0) = x_{20}$  в конечное нулевое состояние с минимальным значением функционала

$$I = \int_0^{\infty} f_0(X, u) dt = \int_0^{\infty} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + ru^2) dt \quad (4.28)$$

с заданными значениями весовых коэффициентов  $q_1, q_2, r \geq 0$ .

Оптимальное управление объектом (4.27), согласно формуле (4.12), определяется выражением

$$u = -\frac{k}{2r} \frac{\partial S(X)}{\partial x_2}. \quad (4.29)$$

Запишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (4.15) для задачи (4.27) – (4.28):

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} (a_{22} x_2 + a_{222} x_2^2) - \frac{k^2}{4r} \left( \frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 = -q_1 x_1^2 - q_2 x_2^2. \quad (4.30)$$

Решение уравнения (4.30) будем определять с точностью до кубических членов степенного ряда

$$S(X) = A_{11} x_1^2 + A_{12} x_1 x_2 + A_{22} x_2^2 + A_{111} x_1^3 + A_{112} x_1^2 x_2 + A_{122} x_1 x_2^2 + A_{222} x_2^3. \quad (4.31)$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x_1} = 2A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + 3A_{111} x_1^2 + 2A_{112} x_1 x_2 + A_{122} x_2^2, \\ \frac{\partial S}{\partial x_2} = 2A_{12} x_1 + 2A_{22} x_2 + A_{112} x_1^2 + 2A_{122} x_1 x_2 + 3A_{222} x_2^2. \end{cases} \quad (4.32)$$

Подставляя производные (4.32) в уравнение (4.30) и приравнявая коэффициенты при одинаковых произведениях координат объекта, получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $A_{ij}, A_{ijk}$  функции Беллмана:

$$\begin{cases} x_1^2: & -\frac{k^2}{4r} A_{12}^2 = -q_1, \\ x_1 x_2: & 2A_{11} + a_{22} A_{12} - \frac{k^2}{r} A_{12} A_{22} = 0, \\ x_2^2: & A_{12} + 2a_{22} A_{22} - \frac{k^2}{r} A_{22} A_{22} = -q_2, \\ x_1^3: & -\frac{k^2}{2r} A_{12} A_{112} = 0, \\ x_1^2 x_2: & 3A_{111} + A_{112} a_{22} - \frac{k^2}{r} A_{22} A_{112} = 0, \\ x_1 x_2^2: & 2A_{112} + 2a_{22} A_{122} + a_{222} A_{12} - \frac{k^2}{4r} (6A_{12} A_{222} + 8A_{22} A_{122}) = 0, \\ x_2^3: & A_{122} + 3a_{22} A_{222} + 2a_{222} A_{22} - \frac{3k^2}{r} A_{22} A_{222} = 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Решением нелинейной системы уравнений (4.33) находим искомые коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{12} = \frac{2\sqrt{rq_1}}{k}; \quad A_{11} = 0.5A_{12} \left( \frac{k^2}{r} A_{22} - a_{22} \right); \\ A_{22} = \frac{a_{22}r}{k^2} + \sqrt{\left( \frac{a_{22}r}{k^2} \right)^2 + \frac{r}{k^2} (q_2 + A_{12})}; \\ A_{112} = A_{111} = 0; \quad A_{122} = 3 \left( \frac{k^2}{r} A_{22} - a_{22} \right) A_{222} - 2a_{222} A_{22}; \\ A_{222} = \frac{[4(a_{22}r - 2k^2 A_{22})A_{22} - rA_{12}] \cdot a_{222}r}{6(a_{22}r - 2k^2 A_{22})(k^2 A_{22} - a_{22}r) + 1.5k^2 A_{12}r}. \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Отметим, что знаки при радикалах в выражениях (4.34) выбраны, как и в примере 4.1, из условия устойчивости линеаризованной части синтезируемой системы управления (выполнения критерия Сильвестра).

Таким образом, согласно соотношениям (4.29) и (4.32), приближенно оптимальный закон управления описывается выражением

$$u = -\frac{k}{r} (A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2 + A_{112}x_1^2 + 2A_{122}x_1x_2 + 3A_{222}x_2^2), \quad (4.35)$$

коэффициенты которого определяются формулами (4.34).

Необходимо подчеркнуть, что размерность системы уравнений (4.26), определяющей параметры  $A_{ijk}$ , достигает величины  $N_3 = n(n+1)(n+2)/3!$ , а размерность системы для параметров  $A_{ijkl} - N_4 = n(n+1)(n+2)(n+3)/4!$ . Поэтому даже для объектов относительно невысокого порядка ( $n=10$ ) решение систем уравнений размерностей  $N_3=220$  и  $N_4=715$  составляет существенные трудности. Эту ситуацию Р. Беллман образно назвал «проклятием размерности».

Далее отметим, что расчет параметров  $C_{ijk}^{\nu\mu\epsilon}$  и  $D_{\nu\mu\epsilon}$  через параметры объекта, критерия качества и ранее найденные коэффициенты  $A_{ij}$  функции Беллмана трудно формализовать и соответственно алгоритмизировать. Указанные причины делают изложенный метод Летова-Калмана решения задачи АКОР практически неприменимым к нелинейным объектам выше третьего порядка. Эти же причины предопределили создание А.А. Красовским нового метода синтеза оптимальных систем управления – метода аналитического конструирования оптимальных регуляторов по критерию обобщенной работы [25].

## 4.2. Решение задачи АКОР по критерию обобщенной работы

Для преодоления указанных трудностей решения нелинейной задачи АКОР в постановке Летова-Калмана А.А. Красовский предложил при синтезе оптимальных систем управления использовать так называемый функционал обобщенной работы (ФОР), который, сохраняя матричное описание объекта и критерия качества предыдущего раздела, можно записать так:

$$J = \int_0^{\infty} (X^T(t)QX(t) + U^T(t)RU(t) + \frac{1}{4}(\frac{\partial S}{\partial X})^T BR^{-1}B^T \frac{\partial S}{\partial X})dt. \quad (4.36)$$

Этот критерий качества является полуопределенным в связи с тем, что он отличается от квадратичного функционала Летова–Калмана наличием дополнительного слагаемого

$$\frac{1}{4} \int_0^{\infty} (\frac{\partial S}{\partial X})^T BR^{-1}B^T \frac{\partial S}{\partial X} dt, \quad (4.37)$$

зависящего от неизвестной функции Беллмана  $S(X)$ . Критерий качества управления (4.36) становится известным после завершения процедуры синтеза регулятора.

В данном случае оптимальный закон управления определяется следующей теоремой.

**Теорема 4.1** [25]. Для процесса, описываемого уравнением

$$\dot{X} = A(X) + B(X) \cdot U,$$

в смысле минимума функционала (4.36) являются управления

$$U(X) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T(X) \cdot \frac{\partial S}{\partial X},$$

где  $S(X)$  есть вынужденные решения уравнения в частных производных

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial S(X)}{\partial x_i} \cdot a_i(X) = -X^T QX. \quad (4.38)$$

Строгое доказательство данной теоремы не будем приводить. Однако отметим, что указанный результат легко получить, если ввести обозначение

$$Q(X) = X^T(t)QX(t) + \frac{1}{4}(\frac{\partial S}{\partial X})^T BR^{-1}B^T \frac{\partial S}{\partial X}$$

и повторить рассуждения (4.5) – (4.15) предыдущего подраздела. В этом случае вместо уравнения (4.15) получаем

$$(\frac{\partial S}{\partial X})^T A(X) - \frac{1}{4}(\frac{\partial S}{\partial X})^T BR^{-1}B^T \frac{\partial S}{\partial X} + (X^T(t)QX(t) + \frac{1}{4}(\frac{\partial S}{\partial X})^T BR^{-1}B^T \frac{\partial S}{\partial X}) = 0.$$

После сокращения слагаемых с коэффициентами  $1/4$  уравнение принимает вид

$$(\frac{\partial S}{\partial X})^T A(X) = -X^T(t)QX(t), \quad (4.38 \text{ a})$$

эквивалентный уравнению (4.38).

Данные выкладки свидетельствуют, что А.А. Красовский специально ввел в квадратичный функционал слагаемое (4.37), чтобы вместо сложного нелинейного уравнения (4.15) получить более простое линейное уравнение в частных производных (4.38) – уравнение А.М. Ляпунова, решение которого определяет оптимальное управление (4.12). Принципиальное отличие метода синтеза А.А. Красовского состоит именно в замене решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (4.15) решением уравнения Ляпунова (4.38). Эта особенность метода имеет важные практические последствия: если для объектов высокого

порядка вычислительные трудности решения нелинейного уравнения (4.15) трудно преодолимы, то определение решений линейного уравнения (4.38) для тех же объектов не встречает больших затруднений.

Широкое распространение на практике метода А.А. Красовского определяется не только тем, что он существенно уменьшает объем вычислений в сравнении с методом Лето́ва–Калмана, но и тем, что используемый функционал качества (4.36) имеет глубокий физический смысл.

Для выяснения физического смысла критерия (4.36) рассмотрим частный его случай, когда матрица  $R$  является диагональной

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/r_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/r_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/r_3^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/r_m^2 \end{pmatrix}.$$

В этом случае, в соответствии с (4.12), управления описываются выражением

$$u_j(X) = -r_j^2 \sum_{k=1}^n b_{kj}(X) \frac{\partial S(X)}{\partial x_k}; \quad j=1,2,\dots,m, \quad (4.39)$$

а критерий (4.36) принимает вид

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \left\{ X^T(t) Q X(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left( \frac{u_j}{r_j} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left( r_j \sum_{k=1}^n b_{kj}(X) \frac{\partial S(X)}{\partial x_k} \right)^2 \right\} dt = \\ &= \int_0^\infty \left\{ X^T(t) Q X(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left( \frac{u_j}{r_j} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left( \frac{u_{j \text{ opt}}}{r_j} \right)^2 \right\} dt, \end{aligned} \quad (4.40)$$

где оптимальные управления  $u_{j \text{ opt}}$  описываются уравнениями (4.39).

Функционал (4.40) называется критерием обобщенной работы. Это название связано с тем, что последнее слагаемое в (4.40) можно записать в векторной форме как интеграл  $\frac{1}{2} \int_0^\infty U_{\text{opt}}^T(t) R U_{\text{opt}}(t) dt$ , который определяет энергию (обобщенную работу) оптимального управления  $U_{\text{opt}}(t)$ .

В заключение раздела подчеркнем тесную связь методов аналитического конструирования оптимальных регуляторов с теорией устойчивости Ляпунова динамических систем. Во-первых, укажем, что функция Беллмана  $S(X)$  в задаче АКОР Лето́ва должна выбираться как решение уравнение ГЯБ (4.15) (это уравнение имеет несколько, множество решений), которое обладает свойством положительной определенности в фазовом пространстве объекта управления, и поэтому является функцией Ляпунова. Установлено [24], что функция  $S(X)$  является функцией Ляпунова для оптимальной замкнутой системы управления, определяющей ее асимптотическую устойчивость, в связи с чем ее часто называют оптимальной функцией Ляпунова.

Во-вторых, отметим, что функция  $S(X)$  в задаче АКОР по критерию обоб-

щенной работы А.А. Красовского непосредственно является функцией Ляпунова, поскольку она находится решением уравнения Ляпунова (4.38). Более того подчеркнем, что результат, сформулированный в теореме 4.1, совпадает с результатом применения метода синтеза Кунцевича-Лычака к объекту (4.1), если в последнем задаться функцией Ляпунова, удовлетворяющей уравнению (4.38) – см. раздел 3.4.2. Таким образом, методы теории функций Ляпунова и АКОР взаимно дополняют и развивают друг друга.

#### 4.2.1. Применение метода Красовского к линейным объектам

Так как для линейного объекта (4.16) функция Беллмана–Ляпунова  $S(X)$  описывается квадратичной формой  $S(X) = X^T P X$  с симметричной положительно определенной матрицей  $P$ , то критерий (4.36) можно представить в виде

$$J = \int_0^{\infty} \{ X^T(t) [Q + PBR^{-1}B^T P] X(t) + U^T(t)RU(t) \} dt, \quad (4.41)$$

а уравнению (4.38 а) поставить в соответствие матричное уравнение Ляпунова

$$PA + A^T P = -Q. \quad (4.42)$$

Заметим также, что уравнение (4.42) непосредственно вытекает из матричного уравнения Риккати (4.18), если в него вместо матрицы  $Q$  подставить матрицу  $Q + PBR^{-1}B^T P$ .

Таким образом, решение задачи АКОР для объекта (4.16) по критерию (4.41) сводится к решению линейного матричного уравнения Ляпунова (4.42), условия существования и методы определения которого рассмотрены в подразд. 3.3. На основе этих результатов может быть доказана следующая теорема.

**Теорема 4.2.** Пусть матрица  $A$  исходной системы (4.16) устойчива,  $P_+$  – положительно определенное решение уравнения (4.42). Тогда управление, минимизирующее функционал (4.41) с матрицами  $Q > 0$ ,  $R > 0$  на движение замкнутой системы, возбужденной произвольными начальными условиями  $X(0)=X_0$ , определяется выражением

$$U = -K_P \cdot X; \quad K_P = R^{-1}B^T \cdot P_+, \quad (4.43)$$

причем замкнутая система  $\dot{X} = [A - BR^{-1}B^T P_+] \cdot X$  асимптотически устойчива, а функция  $S(X) = X^T P_+ X$  является для нее функцией Ляпунова.

Из данной теоремы следует, что метод синтеза оптимальных регуляторов по критерию обобщенной работы непосредственно применим только к устойчивым объектам управления. Это является существенным недостатком данного метода синтеза оптимальных систем. Для его устранения предложены различные модификации рассматриваемого метода [2, 25], применимые к неустойчивым и нейтральным объектам. Они основаны на преобразовании моделей динамики исходных неустойчивых объектов в устойчивые модели с использованием так называемых способов регуляризации объектов управления.

Один из возможных способов регуляризации заключается в следующем. Пусть  $\gamma > 0$  – наибольшая вещественная часть неустойчивых полюсов исходного объекта (для нейтрального объекта  $\gamma = 0$ ) и пусть  $\alpha > \gamma$ . Рассмотрим следующую задачу АКОР:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU; \quad X(0) = X_0, \\ J = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} [X^T (Q + PBR^{-1}B \cdot P)X + U^T RU] dt; \quad Q, R > 0. \end{cases} \quad (4.44)$$

Данную задачу с использованием преобразования переменных

$$\tilde{X} = e^{-\alpha t} \cdot X; \quad \tilde{U} = e^{-\alpha t} \cdot U \quad (4.45)$$

можно свести к стандартной, ранее рассмотренной задаче АКОР. Действительно, умножением на  $e^{-\alpha t}$  описание объекта принимает вид

$$e^{-\alpha t} \cdot \dot{X} = A\tilde{X} + B\tilde{U}. \quad (4.46)$$

На основе уравнений (4.45) находим производную

$$\frac{d}{dt}(\tilde{X}(t)) = -\alpha e^{-\alpha t} \cdot X + e^{-\alpha t} \cdot \dot{X}.$$

Отсюда выражаем

$$e^{-\alpha t} \cdot \dot{X} = \dot{\tilde{X}}(t) + \alpha \cdot \tilde{X}(t). \quad (4.47)$$

Подстановкой формулы (4.47) в (4.46) получаем описание объекта управления

$$\dot{\tilde{X}}(t) = (A - \alpha E)\tilde{X}(t) + B \cdot \tilde{U}(t) \quad (4.48)$$

в координатах (4.45).

В переменных (4.45) критерий качества (4.44) принимает форму

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ \tilde{X}^T(t) [Q + PBR^{-1}B \cdot P] \tilde{X}(t) + \tilde{U}^T(t) R \cdot \tilde{U}(t) \right\} dt. \quad (4.49)$$

Таким образом, задача (4.44) преобразуется в эквивалентную задачу АКОР для объекта (4.48) по критерию качества (4.49).

Так как матрица  $(A - \alpha E)$  устойчива, то в соответствии с теоремами 4.1, 4.2 решение указанной задачи (4.48), (4.49) дается выражениями

$$\tilde{U} = -K\tilde{X}; \quad K = R^{-1}B^T \cdot P_+, \quad (4.50)$$

$$P[A - \alpha E] + [A - \alpha E]^T P = -Q. \quad (4.51)$$

Осуществляя в (4.50) обратную замену переменных (4.45), получим решение исходной задачи (4.44) в виде

$$U = -KX \quad K = -R^{-1}B^T \cdot P_+. \quad (4.52)$$

**Пример 4.3.** Для привода примера 4.1 решим задачу управления по критерию обобщенной работы, отвечающему квадратичному функционалу (4.21).

Описанию электропривода (4.20) и рассматриваемому ФОР соответствуют матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \quad R = r.$$

Так как исследуемый объект является неустойчивым (он представляет последовательное соединение двух интегрирующих звеньев), то введем стабилизирующий параметр  $\alpha > 0$  и соответствующий критерий вида (4.44).



Согласно выражению (4.52) находим оптимальное управление

$$u(X) = -\frac{1}{r}(0 \quad k) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\frac{k}{r}(p_{21}x_1 + p_{22}x_2), \quad (4.53)$$

коэффициенты  $p_{ij}$  которого должны удовлетворять матричному уравнению Ляпунова (4.51):

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

Это матричное уравнение равносильно системе четырех уравнений

$-\alpha p_{11} - \alpha p_{11} = -1$ ;  $p_{11} - \alpha p_{12} - \alpha p_{12} = 0$ ;  $-\alpha p_{21} + p_{11} - \alpha p_{21} = 0$ ;  $2p_{12} - \alpha p_{22} - \alpha p_{22} = -q$ ,  
которая имеет решение

$$p_{11} = 1/2\alpha; \quad p_{12} = p_{21} = 1/4\alpha^2; \quad p_{22} = 1/4\alpha^3 + q/2\alpha.$$

Соответственно оптимальный закон управления (4.53) принимает вид

$$u(X) = -\frac{k}{4\alpha^2 r} \cdot x_1 - \frac{k}{2\alpha r} \left( q + \frac{k}{2\alpha^2} \right) \cdot x_2.$$

Подчеркнем, что рассмотренное решение задачи синтеза регулятора получено существенно легче, чем в примере 4.1 на основе квадратичного функционала качества (4.21).

Необходимо отметить, что при решении задачи АКОР по критерию обобщенной работы имеются некоторые вычислительные трудности, связанные с решением матричного уравнения Ляпунова, особенно при высокой размерности конструируемой системы. Однако в силу линейного характера уравнения Ляпунова и единственности его решения (для устойчивой матрицы  $A$ ) эти трудности несоизмеримы с трудностями, возникающими при решении матричного уравнения Риккати.

#### 4.2.2. Применение метода Красовского к нелинейным объектам

Подход к решению нелинейной задачи АКОР (4.1) – (4.5) определяется теоремой 4.1, которая сводит нахождение оптимального управления (4.12) к решению уравнения Ляпунова (4.38). Методы решения последнего уравнения (см. подразд. 3.3) предопределяют соответствующие процедуры синтеза оптимальных регуляторов. Это свидетельствует о глубокой связи теории АКОР с теорией устойчивости А.М. Ляпунова. Процедуры синтеза регуляторов рассмотрим на примерах.

**Пример 4.4.** Для привода примера 4.2 решим задачу оптимального управления по критерию обобщенной работы, сформированному на основе квадратичного функционала (4.28). В основу процедуры синтеза положим метод степенных рядов, используемый для приближения функции Ляпунова.

В связи с тем, что метод А.А. Красовского применим только к устойчивым объектам, проведем регуляризацию объекта (4.27) простейшим способом – путем замены интегрирующего звена апериодическим:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1^*; \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{222}x_2^2 + ku = f_2^* + ku, \end{cases} \quad (4.54)$$

где  $a_{12}=1$ ;  $a_{22}=-B_1/J$ ;  $a_{222}=-B_2/J$ ;  $k=k_0/J$ ; причем коэффициент  $a_{11} \neq 0$ ,  $a_{11} < 0$  является малым параметром регуляризации ( $a_{11} \rightarrow 0$ , при  $a_{11}=0$  апериодическое звено превращается в интегрирующее).

Оптимальное управление объектом (4.54), согласно теореме 4.1, определяется выражением

$$u = -\frac{k}{2r} \frac{\partial S(X)}{\partial x_2}, \quad (4.55)$$

в котором функция  $S(X)$  является вынужденным решением уравнения Ляпунова

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \frac{\partial S}{\partial x_2}(a_{22}x_2 + a_{222}x_2^2) = -q_{11}x_1^2 - q_{22}x_2^2. \quad (4.56)$$

Как и в примере 4.2, функцию  $S(X)$  будем определять в виде степенного выражения (4.31), частные производные которой соответственно имеют вид (4.32). Подставляя производные (4.32) в (4.56) и приравнявая коэффициенты при одинаковых произведениях координат объекта, получим систему алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов  $A_{ij}$ ,  $A_{ijk}$  функции Беллмана:

$$\begin{cases} x_1^2: & 2a_{11}A_{11} = -q_{11}, \\ x_1x_2: & 2a_{12}A_{11} + a_{11}A_{12} + a_{22}A_{12} = 0, \\ x_2^2: & a_{12}A_{12} + 2a_{22}A_{22} = -q_{22}, \\ x_1^3: & 3a_{11}A_{111} = 0, \\ x_1^2x_2: & 3a_{12}A_{111} + 2a_{11}A_{112} + a_{22}A_{112} = 0, \\ x_1x_2^2: & 2a_{12}A_{112} + a_{11}A_{122} + 2a_{22}A_{122} + a_{222}A_{12} = 0, \\ x_2^3: & a_{12}A_{122} + 3a_{22}A_{222} + 2a_{222}A_{22} = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы линейных уравнений определяем искомые коэффициенты:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{-q_{11}}{2a_{11}}; \quad A_{12} = \frac{-2a_{12}A_{11}}{a_{11} + a_{22}}; \quad A_{22} = \frac{-(q_{22} + a_{12}A_{12})}{2a_{22}}, \\ A_{111} &= A_{112} = 0; \quad A_{122} = -\frac{2a_{222}A_{12}}{a_{11} + 2a_{22}}; \quad A_{222} = -\frac{a_{12}A_{122} + 2a_{222}A_{22}}{3a_{22}}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Согласно (4.55) и (4.32) квазиоптимальный закон управления описывается выражением

$$u = -\frac{k}{r} (A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2 + 2A_{122}x_1x_2 + 3A_{222}x_2^2) \quad (4.58)$$

с коэффициентами (4.57).

Отметим, что процедуры синтеза оптимальных регуляторов в примерах 4.2 и 4.4 методом динамического программирования и методом А.А. Красовского с использованием степенных рядов практически тождественны, но последняя выполняется с меньшим объемом вычислений.

**Пример 4.5.** Определим оптимальное управление объектом второго порядка, описываемого дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + ku(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{211}x_1^2(t), \quad a_{11} < 0, \quad a_{22} < 0, \end{cases} \quad (4.59)$$

по критерию обобщенной работы

$$J = \int_0^{\infty} (q_{11}x_1^2(t) + q_{22}x_2^2(t) + ru^2(t) + ru_{\text{opt}}^2(t))dt; \quad q_{11}, q_{22} > 0. \quad (4.60)$$

В основу синтеза управления положим процедуру решения уравнения Ляпунова с использованием формулы (3.29).

В соответствии с теоремой 4.1 оптимальное управление объектом (4.59) описывается выражением

$$u = -\frac{k}{2r} \frac{\partial S(X)}{\partial x_1}, \quad (4.61)$$

в котором функция  $S(X)$  является решением уравнения Ляпунова

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}(a_{11}x_1) + \frac{\partial S}{\partial x_2}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{211}x_1^2) = -q_{11}x_1^2 - q_{22}x_2^2. \quad (4.62)$$

Объект управления (4.59) описывается дифференциальными уравнениями в канонической форме Г.И. Мельникова. Для него с использованием формулы (3.29), как показано в примере 3.2, можно аналитически точно решить уравнение (4.62):

$$S(X) = A_{11}x_1^2 + A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_2^2 + A_{111}x_1^3 + A_{112}x_1^2x_2 + A_{1111}x_1^4. \quad (4.63)$$

Согласно (4.61), (4.63) находим оптимальное управление

$$u = -\frac{k}{2r} (2A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + 3A_{111}x_1^2 + 2A_{112}x_1x_2 + 4A_{1111}x_1^3), \quad (4.64)$$

коэффициенты которого в соответствии с (3.38)

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\frac{q_{11}}{2a_{11}} - q_{22}\alpha_1^2 \left( \frac{1}{2a_{11}} + \frac{1}{2a_{22}} - \frac{1}{a_{11} + a_{22}} \right); \quad A_{12} = q_{22}\alpha_1 \left( \frac{1}{4a_{22}} - \frac{1}{a_{11} + a_{22}} \right); \\ A_{111} &= q_{22}\alpha_1\alpha_2 \left( -\frac{1}{a_{22}} + \frac{1}{a_{11} + a_{22}} - \frac{1}{3a_{11}} + \frac{1}{2a_{11} + a_{22}} \right); \quad A_{112} = q_{22}\alpha_2 \left( \frac{1}{a_{22}} - \frac{1}{2a_{11} + a_{22}} \right); \\ A_{1111} &= q_{22}\alpha_2^2 \left( -\frac{1}{2a_{22}} - \frac{1}{4a_{11}} + \frac{1}{2a_{11} + a_{22}} \right). \end{aligned}$$

### 4.3. Выбор весовых коэффициентов интегральных критериев качества

Для конкретности рассмотрим задачу АКОР для объекта (4.1) по следующему функционалу качества:

$$J = \int_0^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n q_{ii}x_i^2(t) + \sum_{j=1}^m r_{jj}u_j^2(t) + q_{1111}x_1^4(t) + q_{2222}x_2^4(t) + \dots \right) dt \quad (4.65)$$

с весовыми положительными коэффициентами  $q_{ii}, r_{jj}, i, j = 1, 2, \dots, q_{1111}, q_{2222}$ .

В соответствии с изложенными выше процедурами решения задачи АКОР, можно получить оптимальный закон обратной связи

$$U(x) = F[X, q_{ii}, r_{jj}, q_{ijkl}], \quad (4.66)$$

причем структура функции  $F[X, q_{ii}, r_{jj}, q_{ijkl}]$  для данного объекта определяется структурой подынтегральной функции критерия (4.65), а ее параметры – весовыми коэффициентами критерия.

Так как подынтегральная функция критерия (4.65) выбрана положительно определенной, то это гарантирует устойчивость замкнутой системы управления (4.1), (4.66), т.е. ее принципиальную работоспособность. Показатели качества ее работы (точность, быстродействие, перерегулирование и другие инженерные критерии функционирования системы) будут определяться задаваемыми значениями весовых коэффициентов функционала (4.65). Необходимо подчеркнуть, что зависимость между весовыми коэффициентами критерия и указанными инженерными показателями качества системы является сложной даже для линейных объектов управления (4.16). В связи с этим задача выбора значений весовых коэффициентов критерия, обеспечивающих требуемые инженерные показатели качества, в настоящее время является основной проблемой в теории АКОР. Для ее решения предложены отдельные подходы, методы и рекомендации [25, 27, 29–31].

Для предварительного выбора коэффициентов функционала часто используется метод равных вкладов максимальных отклонений [25].

#### 4.3.1. Метод равных вкладов максимальных отклонений

Этот метод основан на предположении, что при проектировании СУ почти всегда известны предельно допустимые ошибки или отклонения переменных  $x_{i\max}$ ,  $u_{i\max}$ . Например, для электропривода всегда можно определить максимальные значения для угла поворота выходного вала, скорости его вращения, напряжения питания, тока и вращающего момента двигателя. Если такие максимальные отклонения указаны, то предварительный выбор коэффициентов функционала рекомендуется производить на основе соотношений

$$\begin{aligned} q_{11} x_{1\max}^2 &= q_{22} x_{2\max}^2 = \dots = q_{nn} x_{n\max}^2 = q_{1111} x_{1\max}^4 = q_{2222} x_{2\max}^4 = \dots \\ &= \beta_{11} u_{1\max}^2 = \dots = \beta_{mm} u_{m\max}^2. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Подчеркнем, что один из коэффициентов функционала (4.65) может быть принят за базовый и выбран произвольно, например,  $q_{11} = 1$ . Тогда равенства (4.67) позволяет рассчитать последующие коэффициенты критерия:

$$\begin{aligned} q_{22} &= (x_{1\max} / x_{2\max})^2, \dots, q_{nn} = (x_{1\max} / x_{n\max})^2, \quad q_{1111} = 1 / x_{1\max}^2, \\ q_{2222} &= (x_{1\max} / x_{2\max}^2)^2, \dots, \beta_{11} = (x_{1\max} / u_{1\max})^2, \dots \end{aligned} \quad (4.68)$$

Конечно, такое задание коэффициентов функционала можно рассматривать только как предварительное. Согласно общей идее метода АКОР, после определения оптимальных управлений следует проверка качества процессов управления в синтезированной системе на основе ее моделирования на аналоговой или цифровой (как правило) вычислительной технике. Если процессы в этой

системе в каком-либо отношении не удовлетворяют проектировщика, производится целенаправленная корректировка весовых коэффициентов критерия качества и определение скорректированных оптимальных управлений. При необходимости этапы итерационного процесса АКОР повторяются несколько раз.

В работе [10] предложена модификация рассмотренного метода введением в него коэффициентов веса  $d_i$  составляющих критерия. Здесь значения коэффициентов критерия задаются в виде

$$q_{ii} = d_i / x_{i\max}^2, i = 1, 2, \dots, n; q_{1111} = d_{n+1} / x_{1\max}^4; q_{2222} = d_{n+2} / x_{2\max}^4, \dots \quad (4.69)$$

С использованием соотношений (4.69) критерий качества (4.65) можно переписать в форме

$$J = \int_0^\infty \left( \sum_{i=1}^n d_i \bar{x}_i^2 + \sum_{i=n}^{2n} d_i \bar{x}_i^4 + \sum_{i=2n}^{2n+n} d_i \bar{u}_i^2 \right) dt, \quad (4.70)$$

причем  $\bar{x}_i(t) = x_i(t) / x_{i\max}$ ;  $\bar{u}_j(t) = u_j / u_{j\max} \leq 1$  являются относительными, нормированными к единице значениями переменных объекта управления.

Задание всех коэффициентов критерия (4.70) равными единице отвечает выбору коэффициентов функционала в соответствии со способом равных вкладов максимальных отклонений. В этом случае значения интегралов от слагаемых интегранта имеют одинаковый порядок для переходных процессов проектируемой системы, т.е. вносят приблизительно равный вклад в значение принятого функционала качества. Введение коэффициентов  $d_1, d_2, \dots$  позволяет дифференцировать все составляющие критерия, исходя, например, из некоторых физических особенностей движения объекта или требуемых условий функционирования системы. Так, можно рекомендовать следующий методический прием выбора этих коэффициентов.

Для выходной, целевой координаты системы (например,  $x_1(t)$ ) коэффициент веса  $d_1$  принимается максимальным и равным 1, а значения остальных коэффициентов  $d_i$  назначаются из предполагаемой нежелательности отклонений координаты  $x_i(t)$  в сравнении с целевой координатой  $x_1(t)$ . Например, если отклонения некоторой переменной являются не критичными для качества функционирования системы, то значение коэффициента веса при этой переменной задается близким к нулю. Если же значения отдельной координаты или некоторой ее функции не должны превышать заданного уровня, то коэффициент веса при этой координате выбирается таким, чтобы выполнить имеющееся ограничение.

Последнюю процедуру выбора можно формализовать, используя методы нелинейного программирования.

#### 4.3.2. Применение методов нелинейного программирования

Пусть требуется удовлетворить ограничения по некоторой совокупности функционалов

$$J_i[X(t), U(t)] \leq 0, i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.71)$$

Выполнение этих ограничений означает выполнение определенных технических требований к системе управления, например, требований к уровню пере-

грузок, напряжений, деформаций отдельных элементов конструкции электропривода или к характеру переходных процессов (быстродействию, колебательности и т.д.).

Обозначим  $D$  область возможных значений параметров  $d_1, d_2, \dots$  функционала (4.70). Требуется определить такие параметры  $d = (d_1, d_2, \dots)^T$ , при которых удовлетворялись бы условия (4.71). Эти условия выделяют в  $N$ -мерном пространстве некоторую область  $\Omega$ . При  $N=2$  область  $\Omega$  представлена на рис. 4.1. При заданных значениях составляющих вектора параметров  $d$  функционалы  $J_i$  принимают конкретные значения, т.е. процессу управления будет соответствовать некоторая изображающая точка  $R[J_1, J_2, \dots, J_N]$ . Задача будет решена, если изображающая точка попадет в область  $\Omega$ .

Для отыскания параметров  $d$ , при которых управляемый процесс удовлетворяет условиям (4.71), можно воспользоваться методами теории оптимизации функций, если ввести меру  $\rho$  удаления изображающей точки  $R$  от области  $\Omega$ . В качестве такой меры можно взять, например [40],

$$\rho = \max_i J_i.$$

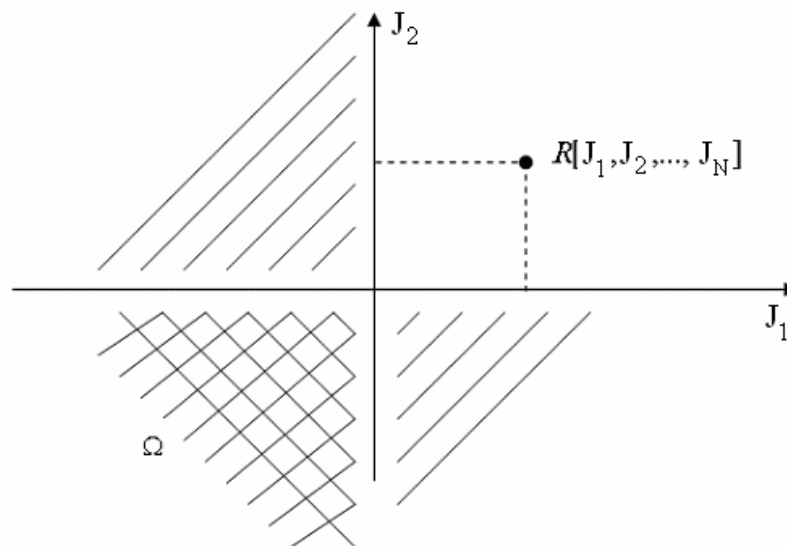


Рис. 4.1. Область возможных значений параметров  $d$

Тогда условие

$$\min_{d \in D} \rho \leq 0 \quad (4.72)$$

будет необходимым и достаточным условием разрешимости поставленной задачи определения весовых коэффициентов критерия качества.

Известно, что задача (4.72) минимизации расстояния  $\rho$  по параметрам  $d \in D$  есть задача нелинейного программирования, для решения которой могут быть использованы известные алгоритмы [9, 14, 32].

Следует отметить, что мера  $\rho$  не является единственно возможной. Можно ввести меру

$$\rho_1 = \sum^* J_i ,$$

где  $\sum^*$  означает суммирование по неудовлетворенным условиям. Абсолютный минимум такой меры будет равен нулю и достигается тогда, когда изображающая точка  $R$  попадает в область  $\Omega$ , т.е. когда будут удовлетворены условия (4.71). Таким образом, необходимым и достаточным условием разрешимости исходной постановки задачи будет

$$\min_{d \in D} \rho_1 \leq 0 . \quad (4.73)$$

Введенные меры  $\rho$  и  $\rho_1$  позволяют задачу поиска параметров  $d$ , при которых удовлетворяются условия (4.71), свести к решению задач нелинейного программирования (4.72) или (4.73).

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте задачу аналитического конструирования оптимального регулятора (АКОР) в постановке Летова–Калмана. В чем состоят основные достоинства синтеза систем управления с использованием теории АКОР?
2. Запишите уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для объекта  $\dot{X} = A(X) \cdot X + B(X) \cdot U$ , качество управления которого оценивается квадратичным функционалом.
3. В какой форме можно представить решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана – функцию Беллмана для линейного объекта управления?
4. Запишите матричное уравнение Риккати, определяющее матрицу оптимального закона обратной связи для линейного объекта. Поясните входящие в него переменные и параметры.
5. Перечислите и поясните основные этапы решения матричного уравнения Риккати методом Ньютона–Рафсона.
6. Каким образом выбирается начальное приближение решения уравнения Риккати в итерационном методе Ньютона–Рафсона?
7. Перечислите и поясните основные этапы решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана методом степенных рядов.
8. Что представляет собой критерий обобщенной работы А.А. Красовского? Поясните физический смысл его слагаемых.
9. Сформулируйте основную теорему А.А. Красовского о синтезе оптимального регулятора по критерию обобщенной работы.
10. Укажите преимущества метода синтеза А.А. Красовского в сравнении с подходом Летова–Калмана.
11. К каким объектам управления непосредственно можно применять метод синтеза оптимальных регуляторов по критерию обобщенной работы? Почему?
12. В какой форме определяется оптимальный регулятор для линейного объекта по критерию обобщенной работы?
13. Что такое регуляризация описания объекта управления в методе А.А.Красовского? Приведите способы регуляризации.

14. В чем состоит сущность основной проблемы в теории АКОР – проблемы выбора коэффициентов функционала качества управления ?

15. На основе каких соотношений выбираются значения коэффициентов функционала качества в методе равных вкладов максимальных отклонений?

16. Поясните идею применения методов нелинейного программирования в решении проблемы выбора коэффициентов функционала качества.



## 5. МЕТОД МАТРИЧНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ В РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ АКОР

При изучении наук примеры не  
менее поучительны, чем правила.  
И. Ньютон

В данном разделе рассмотренные ранее методы синтеза оптимальных регуляторов для электромеханических систем обобщаются, конкретизируются применительно к объектам управления с полиномиальными нелинейностями достаточно широкого класса. Обобщение основано на использование теории матриц с кронекеровским (прямым) произведением.

### 5.1. Класс полиномиальных объектов управления и новая форма их описания

Необходимо подчеркнуть, что полиномиальная модель (1.1), (1.2) применяется не только для описания динамики электромеханических систем, но и объектов самой различной природы. Для обоснования этого утверждения приведем примеры из разных областей науки и техники, в которых применяются полиномиальные модели динамики.

**1. Объекты химической технологии.** Типичным классом полиномиальных объектов управления являются химические реакторы [50]. Для моделей динамики химических процессов характерны квадратичные нелинейности вида  $v_r = K \cdot C_A \cdot C_B$ , определяющие в соответствии с законом действующих масс скорость химической реакции между исходными компонентами  $A$ ,  $B$  с концентрациями  $C_A$ ,  $C_B$  и константой скорости  $K$ . Так, например, динамика обратимого гетерогенного процесса превращения веществ  $A$  и  $B$  в продукт  $C$  с выделением тепла описывается системой уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dC_A(t)}{dt} = \frac{1}{V} \hat{O}_A(t) + k_A C_A(t) - K_1 C_A(t) C_B(t) + K_2 C_C(t), \\ \frac{dC_B(t)}{dt} = \frac{1}{V} \hat{O}_B(t) + k_B C_B(t) - K_1 C_A(t) C_B(t) + K_2 C_C(t), \\ \frac{dC_C(t)}{dt} = K_1 C_A(t) C_B(t) - (k_C + K_2) C_C(t), \\ T_0 \frac{dT(t)}{dt} + T(t) = k_0 [V k_C C_C(t) - V k_C C_C(0) + \hat{O}_0(t)], \\ K_1 = k_{10} + k_1 \cdot T; \quad K_2 = k_{20} + k_2 \cdot T, \end{array} \right.$$

где  $V$  – объем реактора;  $\Phi_A(t)$ ,  $\Phi_B(t)$  – массовые потоки веществ  $A$  и  $B$  в реакционный объем аппарата,  $\Phi_0(t)$  – массовый поток хладагента;  $K_1$ ,  $K_2$  – константы скорости прямой и обратной реакций, которые предполагаются линейно зависящими от температуры  $T$  с постоянными коэффициентами  $k_{10}$ ,  $k_1$ ,  $k_{20}$ ,  $k_2$ ;  $k_A$ ,  $k_B$ ,  $k_C$  – коэффициенты пропорциональности, связывающие поток вещества на выходе из реакционного объема с количеством вещества в данном объеме;  $T_0$ ,

$k_0$  – постоянная времени и коэффициент усиления тепловой модели реактора.

**2. Промышленные объекты с рециклом.** Объект с рециклом представляет собой аппарат, в котором часть выходного продукта возвращается на его вход для более полной, качественной переработки. Такие аппараты весьма распространены в различных областях промышленности [50, 51]. В качестве примера объектов этого класса рассмотрим шаровую мельницу с классификатором [51]. Основная управляемая переменная данного агрегата – количество материала, циркулирующего в его рабочем объеме. Установлено, что при малом запасе входного материала также, как и при слишком большом, работа мельницы неэффективна. Это указывает на экстремальный характер статической характеристики шаровой мельницы. Если подача материала осуществляется с помощью интегрирующего механизма, то переходные процессы в мельнице можно описать системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = b \cdot u(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) - x_2(t) + a_{222}x_2^2(t), \end{cases}$$

где  $x_1(t)$  – входной поток материала в относительных единицах;  $x_2(t)$  – запас материала в агрегате;  $a_{21}$ ,  $a_{222}$ ,  $b$  – параметры мельницы.

**3. Объекты биологии и экологии.** Полиномиальные модели динамики широко используются при моделировании процессов, протекающих в биологических и экологических системах. Так большинство современных моделей, описывающих динамику популяций, связано с моделями, предложенными Лоткой и Вольтерра [52]. В качестве простейшей иллюстрации рассмотрим два вида соответственно с популяциями  $x_1$  и  $x_2$ . Стандартная модель взаимодействия этих видов определяется системой полиномиальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1x_1(t) - \omega_1x_1(t)x_2(t) + \beta_1x_1(t)[\theta_1 - x_1(t)], \\ \dot{x}_2(t) = a_2x_2(t) - \omega_2x_1(t)x_2(t) + \beta_2x_2(t)[\theta_1 - x_2(t)]. \end{cases}$$

Слагаемое  $a_1x_1(t)$  представляет скорость роста популяции по Мальтусу, член  $\omega_1x_1(t)x_2(t)$  описывает связь хищник-жертва (здесь параметры  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  подчинены условию  $\text{sign } \omega_1 = -\text{sign } \omega_2$ ), а член  $\beta_1x_1(t)[\theta_1 - x_1(t)]$  описывает эффект насыщения. Отметим, что некоторые из параметров  $a_i$ ,  $\omega_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2$  уравнений можно рассматривать как управляющие воздействия на развитие популяций.

В приведенных выше трех примерах затронуты наиболее широкие области техники и естествознания, в которых используются полиномиальные модели явлений. Вообще же полиномиальная модель появляется во всех случаях, когда группы переменных взаимодействуют между собой, конкурируя или изменяясь согласованно, а также в тех случаях, когда семейство переменных возмущается параметрически. Для подтверждения многообразия применений полиномиальных моделей отметим, что они находят использование также при моделировании и управлении процессами в летательных аппаратах [25], при исследовании динамики процессов урбанизации. Здесь уместно подчеркнуть, что класс исследуемых объектов можно значительно расширить, включив в него объекты с нелинейными характеристиками, являющимися непрерывными действительными функциями, после предварительной аппроксимации их поли-

номиальными зависимостями. Теоретическое обоснование такому расширению дает теорема Вейерштрасса [49], согласно которой любую непрерывную действительную функцию  $a(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на любом компактном множестве  $n$ -мерного пространства ее аргументов можно равномерно приблизить соответствующим полиномом. Динамика полученной таким путем полиномиальной системы будет с некоторой точностью аппроксимировать динамику исходной нелинейной системы.

Указанное широкое распространение полиномиальных моделей для описания процессов самой различной природы вызвало появление и становление теории полиномиальных систем, отдельные аспекты, направления которой нашли отражение в работах [53 - 56]. С целью развития этой теории представляется целесообразным предложить соответствующий метод решения задачи АКОР для указанных объектов, учитывающий особенности их движения, специфику известных методов описания и анализа этих движений. Задачу оптимального управления рассмотрим в постановке А.А. Красовского [25]: требуется найти закон управления в функции координат  $U(X)$ , который вместе с объектом (1.1), (1.2) образует асимптотически устойчивую систему управления, переводящий её из произвольного начального состояния  $X(t=0) = X_0$  в конечное  $X(t \rightarrow \infty) = 0$  с минимальным значением функционала обобщённой работы (ФОР):

$$J = \int_0^{\infty} \left( X^T(t) Q X(t) + U^T(t) R U(t) + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T B(X) R^{-1} B^T(X) \frac{\partial S}{\partial X} \right) dt, \quad (5.1)$$

где  $Q, R$  – заданные симметричные, положительно определённые матрицы, определяющие критерий оптимальности движения системы.

Применение функционала обобщённой работы (ФОР), оптимизация по которому мало что меняет в техническом существе требований, предъявляемых к движению оптимальной системы по сравнению с квадратичным интегральным функционалом, позволяет существенно сократить вычислительные затраты в решении сложных задач управления [25]. Кроме того, общее сопоставление систем, оптимальных в смысле минимума ФОР и классических функционалов, в отношении традиционных прямых показателей качества переходных процессов свидетельствует в пользу ФОР [9]. Эти обстоятельства дают возможность перейти от теоретических исследований к решению достаточно сложных практических задач управления многомерными нелинейными объектами.

Использование полуопределённого ФОР (5.1) существенным образом облегчает нахождение оптимальных управлений

$$U(X) = -0.5 R^{-1} B^T(X) \frac{\partial S(X)}{\partial X} \quad (5.2)$$

вследствие линейности дифференциального уравнения в частных производных

$$\left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)^T A(X) = -X^T Q X, \quad (5.3)$$

определяющего функцию  $S(X)$  Беллмана-Ляпунова. Основным общим методом решения дифференциального уравнения Ляпунова (5.3) и, соответственно, не-

линейных задач АКОР в настоящее время является метод степенных рядов, который достаточно подробно был рассмотрен в разделах 3 и 4. Его применение к объектам высокого порядка связано с выполнением большого числа аналитических операций перемножения, сложения полиномов многих переменных и приведения подобных слагаемых после указанных операций. Эти операции оказывается возможным осуществить предварительно аналитически, и метод синтеза свести к чисто вычислительным операциям, если описание объектов управления (1.1), (1.2) представить в следующей форме

$$\dot{X}(t) = A_1 X(t) + A_2 [X(t) \otimes X(t)] + A_3 [X(t) \otimes X \otimes X(t)] + B(X)U(t), \quad (5.4)$$

где  $A_1, A_2, A_3$  – матрицы размерности  $1 \times n, 1 \times n^2, 1 \times n^3$  параметров объекта;  $X \otimes X = X^{[2]}$  – кронекеровское произведение (степень) вектора состояния объекта, матрица  $B(X)$  имеют тот же вид и смысл, что и в формуле (1.1) [41, 42].

В общем случае кронекеровское (прямое) произведение векторов (матриц)  $A=(a_{ij}), i,j=1,\dots,m$  и  $B=(b_{ij}), i,j=1,\dots,n$  определяется как блочная матрица  $A \otimes B=(a_{ij} \cdot B)$  размерности  $mn \times mn$  [43, 44]. Согласно этому определению для объекта второго порядка имеем

$$X \otimes X = X^{[2]} = \begin{pmatrix} x_1 X \\ x_2 X \end{pmatrix} = (x_1 x_1 \quad x_1 x_2 \quad x_2 x_1 \quad x_2 x_2)^T, \quad (5.5)$$

$$X^{[3]} = \begin{pmatrix} x_1 X^{[2]} \\ x_2 X^{[2]} \end{pmatrix} = (x_1 x_1 x_1 \quad x_1 x_1 x_2 \quad x_1 x_2 x_1 \quad x_1 x_2 x_2 \quad x_2 x_1 x_1 \quad x_2 x_1 x_2 \quad x_2 x_2 x_1 \quad x_2 x_2 x_2)^T.$$

Используя векторы (5.5), на основе описания (1.1), (1.2) легко составить матрицы коэффициентов  $A_1, A_2, A_3$ .

В дальнейшем кроме описания (5.4), которое условно называется квадратично-кубическим, широко используется квадратичная модель

$$\dot{X}(t) = A_1 X(t) + A_2 [X(t) \otimes X(t)] + B(X)U(t) \quad (5.6)$$

для объектов с несимметричными характеристиками, и кубическая модель

$$\dot{X}(t) = A_1 X(t) + A_3 [X(t) \otimes X(t) \otimes X(t)] + B(X)U(t) \quad (5.7)$$

для объектов с симметричными характеристиками относительно начала координат фазового пространства.

Подчеркнем, что формально при решении рассматриваемых задач АКОР можно было бы ограничиться простейшей моделью (5.6). Действительно, описание нелинейных объектов, содержащих нелинейные члены в виде произведений фазовых координат выше второй степени, можно привести к виду (5.6) путём расширения пространства состояния объекта новыми координатами, представляющими собой произведения исходных координат. Например, уравнение стационарного объекта первого порядка с кубической нелинейностью

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) = bu(t)$$

за счёт введения новых координат  $x_1(t) = x(t), x_2 = x_1^2(t)$  преобразуется к виду (5.6). Это можно сделать следующим образом. Уравнение рассматриваемого объекта в новых координатах принимает вид

$$\dot{x}_1(t) = -a_1 \cdot x_1(t) - a_2 \cdot x_2(t) - a_3 \cdot x_1(t)x_2(t) + b \cdot u(t),$$

а соответственно производная  $\dot{x}_2(t)$  – форму

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= 2x_1(t)\dot{x}_1(t) = 2x_1(t)[bu(t) - a_1x_1(t) - a_2x_2(t) - a_3x_1(t)x_2(t)] = \\ &= 2bx_1(t)u(t) - 2a_1x_2(t) - 2a_2x_1(t)x_2(t) - 2a_3x_2^2(t).\end{aligned}$$

Систему двух последних уравнений возможно записать в виде уравнения (5.6) со следующими матрицами:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 0 & -2a_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & -2a_2 & 0 & -2a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b \\ 2bx_1(t) \end{pmatrix}.$$

Данный пример показывает, что описание объектов (5.4) и других с более высокой степенью нелинейности можно свести к уравнению (5.6) и соответственно модель (5.6) описывает достаточно широкий для приложений класс нелинейных объектов управления.

В то же время необходимо подчеркнуть, что многие объекты управления имеют симметричные нелинейные характеристики относительно начала координат фазового пространства. Симметрия характеристик существенно упрощает анализ движения этих объектов и соответственно синтез регуляторов для них. Так, например, оптимальные по обобщенному квадратичному функционалу качества регуляторы для данных объектов также имеют симметричные характеристики. Как показал анализ, сводить описание симметричных объектов к модели (5.6) нецелесообразно по следующим причинам.

Во-первых, в описании (5.6) свойство симметрии характеристик объекта становится далеко неочевидным, его необходимо устанавливать специальным исследованием.

Во-вторых, переход от описания (5.7) к (5.6) повышает размерность вектора состояния объекта, что при синтезе оптимального регулятора значительно увеличивает объем вычислений.

В-третьих, переход от описания симметричного объекта с высокой степенью нелинейности к модели (5.7) осуществить значительно проще, чем к модели (5.6). Покажем это на примере объекта с полиномиальной нелинейностью пятой степени

$$\dot{x}(t) + a_1x(t) + a_3x^3(t) + a_5x^5(t) = bu(t). \quad (5.8)$$

В фазовых координатах

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2 = x_1^3(t)$$

уравнение (5.8) принимает вид

$$\dot{x}_1(t) = bu(t) - a_1x_1(t) - a_3x_2(t) - a_5x_1^2(t)x_2(t). \quad (5.9)$$

Соответственно производная второй координаты будет определяться так

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= 3x_1^2(t)\dot{x}_1(t) = 3x_1^2(t)[bu(t) - a_1x_1(t) - a_3x_2(t) - a_5x_1^2(t)x_2(t)] = \\ &= 3bx_1^2(t)u(t) - 3a_1x_2(t) - 3a_3x_1^2(t)x_2(t) - 3a_5x_1(t)x_2^2(t).\end{aligned} \quad (5.10)$$

Систему уравнений (5.9), (5.10) легко записать в форме (5.7) введя в рассмотрение матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_3 \\ 0 & -3a_1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3a_3 & 0 & -3a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b \\ 3bx_1^2(t) \end{pmatrix}.$$

Переход же от описания (5.8) к модели (5.6), во-первых, осуществляется неоднозначно, а, во-вторых, в любом случае требуется не две, а три фазовые координаты. Один из вариантов введения координат следующий:

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2 = x_1^2(t), \quad x_3 = x_2^2(t).$$

Повторяя аналогичные преобразования, получаем

$$\dot{x}_1(t) = bu(t) - a_1x_1(t) - a_3x_1(t)x_2(t) - a_5x_1(t)x_3(t), \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= 2x_1(t)\dot{x}_1(t) = 2x_1(t)[bu(t) - a_1x_1(t) - a_3x_1(t)x_2(t) - a_5x_1(t)x_3(t)] = \\ &= 2bx_1(t)u(t) - 2a_1x_2(t) - 2a_3x_3(t) - 2a_5x_2(t)x_3(t), \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= 2x_2(t)\dot{x}_2(t) = 4x_2(t)[bx_1(t)u(t) - a_1x_2(t) - a_3x_3(t) - a_5x_2(t)x_3(t)] = \\ &= 4bx_1(t)x_2(t)u(t) - 4a_1x_3(t) - 4a_3x_2(t)x_3(t) - 4a_5x_3^2(t). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Система уравнений (5.11) – (5.13) представима в форме (5.6) с матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2a_1 & -2a_3 \\ 0 & 0 & -4a_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & -a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4a_3 & 0 & 0 & -4a_5 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b \\ 2bx_1(t) \\ 4bx_1(t)x_2(t) \end{pmatrix}.$$

В связи с указанными обстоятельствами в работе рассматриваются два основных класса объектов управления, описываемых моделями (5.6), (5.7), и, как их комбинация, рассматривается также класс (5.4). Последний имеет важное самостоятельное значение: часто нелинейные характеристики реальных объектов с инженерной точностью аппроксимируются полиномами третьей степени (5.4), причем переход к модели (5.6) нецелесообразен из-за существенного увеличения размерности вектора состояния. Класс (5.4) в данной работе имеет и методическое значение: вместо того, чтобы отдельно рассматривать решения задач АКОР для объектов (5.6) и (5.7), в работе приводится решение этой задачи для объектов (5.4), из которого как частные случаи вытекают решения для объектов основных классов (5.6) и (5.7).

Подчеркнем, что для теории оптимального управления, согласно проведенному обзору литературных источников, форма (5.6) или (5.7) описания объектов является новой, хотя модель (5.4) использовалась в работе [45], в которой показана целесообразность ее использования для анализа движения этих объектов с помощью функциональных рядов Вольтерра.

Завершая раздел, отметим, что с учетом предложенного способа расширения вектора состояния нелинейной системы управления, совокупное множество объектов, подпадающее под описания (5.6) или (5.7), на наш взгляд, является очень широким для применения. Для данных объектов предлагается метод синтеза алгоритмов оптимального управления, который даёт результаты, сов-

падающие с результатами АКОР при отыскании функции Беллмана-Ляпунова стандартным методом степенных рядов, но в сравнении с ним гораздо легче поддается алгоритмизации и уменьшает объем вычислений вследствие использования матричных операций, включая операцию кронекеровского произведения матриц.

Предварительно, прежде чем излагать данный метод синтеза, приведем основные результаты теории матриц с кронекеровским произведением.

## 5.2. Сведения из теории матриц с кронекеровским произведением

Синтез оптимального управления сводится к решению уравнения в частных производных – уравнения Ляпунова (5.3). Решение этого уравнения будем определять в следующей форме:

$$S(X) = C_2(X \otimes X) + C_3(X \otimes X \otimes X) + \dots = \sum_{i=2}^{\infty} C_i X^{[i]}, \quad (5.14)$$

где  $C_2, C_3, C_4, \dots$  – матрицы размерности  $1 \times n^2, 1 \times n^3, 1 \times n^4$ . Выражение (5.14) условно далее называется матричным степенным рядом, который предполагается сходящимся.

Так как данный подход синтеза нелинейных систем предполагает непосредственное использование теории матриц с кронекеровским (прямым) произведением, то кратко, без доказательств, приведем известные [43, 44] и используемые в дальнейшем свойства прямого произведения матриц.

Следующие свойства кронекеровского произведения непосредственно следуют из определения:

- а) Если  $\mu = \text{const}$ , то  $(\mu A) \otimes B = A \otimes (\mu B) = \mu(A \otimes B)$ ;
- б)  $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$ ;
- в)  $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$ ;
- г)  $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$ ;
- д)  $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$ .

В данных соотношениях предполагается, что размерности входящих в формулы матриц таковы, что все операции осуществимы.

Отметим, что, вообще говоря, кронекеровское произведение не коммутативно. Нам понадобится еще одно свойство, которое не столь очевидно, но широко используется в будущем. Его формулирует следующая **теорема** [43]: если  $A, C$  – комплекснозначные матрицы размерности  $m \times m$  и  $B, D$  – комплекснозначные матрицы размерности  $n \times n$ , то

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD. \quad (5.16)$$

Эта теорема приводит к некоторым важным выводам, которые укажем в следующем **следствии**: если  $A, B$  – комплекснозначные матрицы размерности  $m \times m$  и  $n \times n$ , то

$$A \otimes B = (A \otimes I_n)(I_m \otimes B), \quad (5.17)$$

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^n (\det B)^m, \quad (5.18)$$

где  $I_m, I_n$  – единичные матрицы размерности  $m \times m, n \times n$ ; если дополнительно  $A$  и  $B$  неособые, то

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}. \quad (5.19)$$

При решении уравнения (5.3) нам придется ряд (5.14) дифференцировать по вектору  $X$ . В связи с этим рассмотрим операции дифференцирования по векторному аргументу. Пусть вектор  $X$  является функцией параметров  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и существуют частные производные этого вектора по каждому из параметров. Оператор производной по вектору  $a$  определим как вектор-столбец [46]:

$$\frac{d}{da} = \left( \frac{\partial}{\partial a_1}, \frac{\partial}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial a_n} \right)^T, \quad (5.20)$$

т.е. для некоторой скалярной функции  $f(a)$  имеем

$$\frac{df(a)}{da} = \left( \frac{\partial f}{\partial a_1}, \frac{\partial f}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial a_n} \right)^T.$$

Эта производная также называется градиентом и обозначается символом  $\nabla_a f = df(a)/da$ .

Поскольку оператор (5.20) является вектором-столбцом, то он не может быть применен к вектору

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Поэтому будем применять его к вектору-строке  $X^T$ , результатом является матрица

$$\frac{dX^T}{da} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial a_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial a_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial a_n} & \frac{\partial x_2}{\partial a_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial a_n} \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

т.е. оператор  $d/da$  применяется к каждому элементу вектора-строки. Часто матрица транспонированная к (5.21) называется якобианом и обозначается символом  $J_a\{X(a)\}$  [20], где

$$(J_a\{X(a)\})_{ij} = \left( \frac{dX}{da} \right)_{ij} = \left( \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right), \quad (5.22)$$

причем, как принято в теории матриц, индекс  $i$  обозначает номер строки, а  $j$  – номер столбца.

Применяя оператор  $d/da$  к скалярному произведению двух векторов



$$V^T W = (v_1, v_2, \dots, v_p) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_p \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_p w_p ,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{da}(V^T W) &= \frac{dV^T}{da} W + \frac{dW^T}{da} V = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial a_1} w_1 + \dots + \frac{\partial v_p}{\partial a_1} w_p \\ \frac{\partial v_1}{\partial a_2} w_1 + \dots + \frac{\partial v_p}{\partial a_2} w_p \\ \dots \\ \frac{\partial v_1}{\partial a_n} w_1 + \dots + \frac{\partial v_p}{\partial a_n} w_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial a_1} v_1 + \dots + \frac{\partial w_p}{\partial a_1} v_p \\ \frac{\partial w_1}{\partial a_2} v_1 + \dots + \frac{\partial w_p}{\partial a_2} v_p \\ \dots \\ \frac{\partial w_1}{\partial a_n} v_1 + \dots + \frac{\partial w_p}{\partial a_n} v_p \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

На основе равенства (5.23) установим важные частные соотношения. Если элементы вектора  $V$  не зависят от параметров  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  и если  $W = a$ , то из (5.23) следует

$$\frac{d}{da}(V^T \cdot a) = V. \quad (5.24)$$

Если, наоборот, элементы вектора  $W$  не зависят от параметров  $a_i$  и  $V = a$ , то

$$\frac{d}{da}(a^T \cdot W) = W. \quad (5.25)$$

Важно подчеркнуть, что при замене векторов  $V$  и  $W$  на соответствующие матрицы, последние два равенства (5.24), (5.25) остаются справедливыми.

Пусть  $A$  – квадратная матрица. Тогда на основе (5.24), (5.25) для квадратичной формы выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX}(X^T A Y) &= A Y, \\ \frac{d}{dY}(X^T A Y) &= (X^T A)^T = A^T X, \\ \frac{d}{dX}(X^T A X) &= 2AX, \text{ если } A = A^T - \text{симметричная матрица.} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Теперь рассмотрим операции, содержащие частные производные. Пусть существует гладкая функция  $f = f(Y, X, t)$ ,  $Y = Y(X, t)$  и  $X = X(t)$ , причем  $X, Y$  – векторы соответствующих размерностей. Определим для них следующие операции дифференцирования. Найдем производную [20]:

$$\frac{df}{dX} = \left[ \frac{\partial Y^T}{\partial X} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial X}. \quad (5.27)$$

Подчеркнем, что в первом слагаемом (5.27) порядок сомножителей отличается

от порядка сомножителей при дифференцировании сложной функции по скалярным аргументам

$$\frac{df(y, x, t)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x},$$

что можно объяснить необходимостью обеспечения условий выполнимости матричных операций: чтобы получить вектор-столбец необходимо матрицу умножить на вектор-столбец.

Согласно [20] рассмотрим производную

$$\frac{df}{dt} = \left[ \frac{\partial f}{\partial X} + \left( \frac{\partial Y^T}{\partial X} \right) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial Y} \right)^T \right] \cdot \frac{dX}{dt} + \left[ \frac{\partial f}{\partial Y} \right]^T \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (5.28)$$

Заметим, что в (5.28) первое и второе слагаемые представляют скалярное произведение соответствующих векторов.

Аналогичные операции можно определить и над векторными функциями  $Z, Y, X$ :  $Z = Z(Y, X, t)$ ,  $Y = Y(X, t)$ ,  $X = X(t)$ . Для них справедливы следующие формулы дифференцирования [20]:

$$\frac{dZ}{dX} = \left[ \frac{\partial Z^T}{\partial Y} \right]^T \cdot \left[ \frac{\partial Y^T}{\partial X} \right]^T + \frac{\partial Z}{\partial X}, \quad (5.29)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \left[ \frac{\partial Z}{\partial Y} \right]^T \cdot \left[ \left( \frac{\partial Y^T}{\partial X} \right)^T \cdot \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial t} \right] + \left[ \frac{\partial Z^T}{\partial X} \right]^T \frac{dX}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial t}. \quad (5.30)$$

Используя указанные соотношения дифференцирования, докажем **утверждение 5.1**: если  $G(X)$  и  $H(X)$  – вещественнозначные вектор-функции от вектора  $X$ , то производная от их кронекеровского произведения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial X} [G(X) \otimes H(X)]^T = \frac{\partial G^T(X)}{\partial X} \otimes H^T(X) + G^T(X) \otimes \frac{\partial H^T(X)}{\partial X}. \quad (5.31)$$

Доказательство соотношения (5.31) опирается непосредственно на определение (5.21). Для компактности записей рассмотрим два вектора-функции размерности  $3 \times 1$ :

$$G(X) = \begin{pmatrix} g_1(X) \\ g_2(X) \\ g_3(X) \end{pmatrix}, \quad H(X) = \begin{pmatrix} h_1(X) \\ h_2(X) \\ h_3(X) \end{pmatrix},$$

где  $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ . Обобщение доказательства для более высокой размерности вектора не представляет принципиальных затруднений.

Для этих векторов находим

$$\begin{aligned} [G(X) \otimes H(X)]^T = & (g_1(X) \cdot h_1(X) \ g_1(X) \cdot h_2(X) \ g_1(X) \cdot h_3(X) \\ & g_2(X) \cdot h_1(X) \ g_2(X) \cdot h_2(X) \ g_2(X) \cdot h_3(X) \\ & g_3(X) \cdot h_1(X) \ g_3(X) \cdot h_2(X) \ g_3(X) \cdot h_3(X)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial X} [G(X) \otimes H(X)]^T = \\
& = \left( \frac{\partial g_1(X)}{\partial X} \cdot h_1(X) + \frac{\partial h_1(X)}{\partial X} \cdot g_1(X) \quad \frac{\partial g_1(X)}{\partial X} \cdot h_2(X) + \frac{\partial h_2(X)}{\partial X} \cdot g_1(X) \quad \frac{\partial g_1(X)}{\partial X} \cdot h_3(X) + \frac{\partial h_3(X)}{\partial X} \cdot g_1(X) \right. \\
& \quad \frac{\partial g_2(X)}{\partial X} \cdot h_1(X) + \frac{\partial h_1(X)}{\partial X} \cdot g_2(X) \quad \frac{\partial g_2(X)}{\partial X} \cdot h_2(X) + \frac{\partial h_2(X)}{\partial X} \cdot g_2(X) \quad \frac{\partial g_2(X)}{\partial X} \cdot h_3(X) + \frac{\partial h_3(X)}{\partial X} \cdot g_2(X) \\
& \quad \left. \frac{\partial g_3(X)}{\partial X} \cdot h_1(X) + \frac{\partial h_1(X)}{\partial X} \cdot g_3(X) \quad \frac{\partial g_3(X)}{\partial X} \cdot h_2(X) + \frac{\partial h_2(X)}{\partial X} \cdot g_3(X) \quad \frac{\partial g_3(X)}{\partial X} \cdot h_3(X) + \frac{\partial h_3(X)}{\partial X} \cdot g_3(X) \right) = \\
& = \left( \frac{\partial g_1(X)}{\partial X} \cdot h_1(X) \quad \frac{\partial g_1(X)}{\partial X} \cdot h_2(X) \quad \frac{\partial g_1(X)}{\partial X} \cdot h_3(X) \quad \frac{\partial g_2(X)}{\partial X} \cdot h_1(X) \quad \frac{\partial g_2(X)}{\partial X} \cdot h_2(X) \quad \frac{\partial g_2(X)}{\partial X} \cdot h_3(X) \right. \\
& \quad \left. \frac{\partial g_3(X)}{\partial X} \cdot h_1(X) \quad \frac{\partial g_3(X)}{\partial X} \cdot h_2(X) \quad \frac{\partial g_3(X)}{\partial X} \cdot h_3(X) \right) + \left( \frac{\partial h_1(X)}{\partial X} \cdot g_1(X) \quad \frac{\partial h_2(X)}{\partial X} \cdot g_1(X) \quad \frac{\partial h_3(X)}{\partial X} \cdot g_1(X) \right. \\
& \quad \left. \frac{\partial h_1(X)}{\partial X} \cdot g_2(X) \quad \frac{\partial h_2(X)}{\partial X} \cdot g_2(X) \quad \frac{\partial h_3(X)}{\partial X} \cdot g_2(X) \quad \frac{\partial h_1(X)}{\partial X} \cdot g_3(X) \quad \frac{\partial h_2(X)}{\partial X} \cdot g_3(X) \quad \frac{\partial h_3(X)}{\partial X} \cdot g_3(X) \right) = \\
& = \left( \frac{\partial g_1(X)}{\partial X} \quad \frac{\partial g_2(X)}{\partial X} \quad \frac{\partial g_3(X)}{\partial X} \right) \otimes (h_1(X) \quad h_2(X) \quad h_3(X)) + \\
& + (g_1(X) \quad g_2(X) \quad g_3(X)) \otimes \left( \frac{\partial h_1(X)}{\partial X} \quad \frac{\partial h_2(X)}{\partial X} \quad \frac{\partial h_3(X)}{\partial X} \right) = \frac{\partial G^T(X)}{\partial X} \otimes H^T(X) + G^T(X) \otimes \frac{\partial H^T(X)}{\partial X}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\frac{\partial}{\partial X} [G(X) \otimes H(X)]^T = \frac{\partial G^T(X)}{\partial X} \otimes H^T(X) + G^T(X) \otimes \frac{\partial H^T(X)}{\partial X}$$

доказываемое соотношение.

Следствием этого утверждения является **утверждение 5.2:** производные от кронекеровских степеней определяются выражениями

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial X} [X \otimes X]^T = I \otimes X^T + X^T \otimes I \equiv \widetilde{I \otimes X^T}, \\
& \frac{\partial}{\partial X} [X \otimes X \otimes X]^T = I \otimes X^T \otimes X^T + X^T \otimes I \otimes X^T + X^T \otimes X^T \otimes I \equiv \widetilde{I \otimes X^{[2]T}}, \quad (5.32) \\
& \frac{\partial}{\partial X} X^{[k]T} = \widetilde{I \otimes X^{[k-1]T}}.
\end{aligned}$$

Первое соотношение (5.32) непосредственно вытекает из (5.31) при  $G(X)=H(X)=X$ . Для доказательства второго соотношения обозначим  $G(X)=X$ ,  $H(X)=X \otimes X$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial X} [X \otimes X \otimes X]^T = \frac{\partial}{\partial X} [G(X) \otimes H(X)]^T = \frac{\partial G^T(X)}{\partial X} \otimes H^T(X) + G^T(X) \otimes \frac{\partial H^T(X)}{\partial X} = \\
& = I \otimes (X \otimes X)^T + X^T \otimes \frac{\partial (X \otimes X)^T}{\partial X} = I \otimes X^T \otimes X^T + X^T \otimes [I \otimes X^T + X^T \otimes I] = \\
& = I \otimes X^T \otimes X^T + X^T \otimes I \otimes X^T + X^T \otimes X^T \otimes I \equiv \widetilde{I \otimes X^{[2]T}}.
\end{aligned}$$

Продолжая рекуррентно указанный процесс, получим последнее соотношение (5.32).

Как обобщение структуры матрицы первой формулы (5.32) рассмотрим матрицу  $A \otimes I_m + I_n \otimes B$ , где  $A, B$  – квадратные матрицы размерности  $m \times m, n \times n$ . Известно [44], что собственные значения этой матрицы совпадают с  $mn$  числами  $\lambda_r + \mu_s, r=1,2,\dots,m, s=1,2,\dots,n$ , причем  $\lambda_r, \mu_s$  – собственные числа соответственно матриц  $A$  и  $B$ . По этой причине матрицу  $A \otimes I_m + I_n \otimes B$  часто называют кронекеровской суммой матриц  $A$  и  $B$ . Отметим также, что собственные значения матрицы  $A \otimes B$  совпадают с  $mn$  числами  $\lambda_r \mu_s$ .

Очевидным следствием утверждения 5.2 является **утверждение 5.3:** *производная от ряда (5.14) описывается выражением*

$$\frac{\partial S(X)}{\partial X} = \partial \left[ \sum_{i=2}^{\infty} C_i X^{[i]} \right]^T / \partial X = \overline{(X^T \otimes I) C_2^T} + \overline{((X^T)^{[2]} \otimes I) C_3^T} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{((X^T)^{[i]} \otimes I) C_{i+1}^T}. \quad (5.33)$$

Рассмотрим  $i$ -го слагаемое транспонированного ряда (5.33). Для него докажем **утверждение 5.4:** *если вектор  $Z$  имеет размерность  $n \times 1$ , то*

$$\overline{(X^{[i]} \otimes I_n) Z} = \overline{(X^{[i]} \otimes Z)}. \quad (5.34)$$

Предварительно для произвольных векторов  $X, Y$  и вектора  $Z$  размерности  $n \times 1$ , докажем соотношения

$$\begin{aligned} (Y \otimes I_n) Z &= Y \otimes Z, \\ (I_n \otimes Y) Z &= Z \otimes Y, \\ (X \otimes I_n \otimes Y) Z &= X \otimes Z \otimes Y. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Доказательство осуществляется непосредственно на основе определения кронекеровского произведения:

$$\begin{aligned} (Y \otimes I_n) Z &= \begin{pmatrix} y_1 I_n \\ y_2 I_n \\ \vdots \\ y_N I_n \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} y_1 Z \\ y_2 Z \\ \vdots \\ y_N Z \end{pmatrix} = Y \otimes Z, \\ (I_n \otimes Y) Z &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} z_1 Y \\ z_2 Y \\ \vdots \\ z_n Y \end{pmatrix} = Z \otimes Y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X \otimes I_n \otimes Y]Z &= X \otimes \left[ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \vdots \\
&\quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \left. \right] Z = \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \begin{pmatrix} Y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Y \end{pmatrix} \\ \vdots \\ x_n \begin{pmatrix} Y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Y \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 z_1 Y \\ x_1 z_2 Y \\ \vdots \\ x_1 z_n Y \\ \vdots \\ x_n z_1 Y \\ x_n z_2 Y \\ \vdots \\ x_n z_n Y \end{pmatrix} = X \otimes Z \otimes Y.
\end{aligned}$$

Из выражений (5.32) и (5.35) непосредственно следует соотношение (5.34).

В заключение раздела приведем сведения о нормах векторов и матриц [43], которые используются при анализе сходимости ряда (5.14). Норма вектора определяется как его длина (метрика):

$$h(X) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (5.36)$$

– так называемая евклидова норма. Однако часто удобно использовать не евклидовы нормы, а более простые выражения метрики, удовлетворяющие следующим аксиомам длины:

- а)  $h(X) \geq 0$ ;  $h(X) = 0$ ,  $\Leftrightarrow X = 0$ ;
- б)  $h(cX) = |c| h(X)$  для любого комплексного числа  $c$ ;
- в)  $h(X + Y) \leq h(X) + h(Y)$ .

Например, в дальнейшем используется метрика вектора

$$\rho(X) = \max_i |x_i|. \quad (5.37)$$

По аналогии с вектором определяется матричная норма (обычно записываемая в виде  $\|A\|$ ), как вещественная функция, определенная на всех квадрат-

ных матрицах  $A$  с комплексными элементами, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

- а)  $\|A\| \geq 0$ ;  $\|A\| = 0$ , если  $A = 0$ ;
- б)  $\|cA\| = |c| \|A\|$  для любого комплексного числа  $c$ ;
- в)  $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ;
- г)  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

Наиболее распространенными матричными нормами являются [43, 44]:

$$\|A\| = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \quad (5.38)$$

$$\|A\| = n \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|. \quad (5.39)$$

В дальнейшем используются согласованные векторные и матричные нормы. Векторная норма  $h(X)$  и матричная норма  $\|\cdot\|$  называются согласованными, если для всех комплекснозначных  $n$ -мерных векторов  $X$  и матриц  $A$  размерности  $n \times n$  имеем  $h(AX) \leq \|A\| h(X)$ .

Известно, что матричная норма (5.39) согласована с нормами (5.36), (5.37), доказана согласованность евклидовых матричной и векторной норм [43].

Из определений кронекеровского произведения матриц и норм (5.37), (5.39) непосредственно следует, что

$$\rho(X^{[k]}) = \rho^k(X), \quad (5.40)$$

$$\|AX^{[k]}\| \leq \|A\| \rho(X^k) = n^k \max_{i,j} |a_{ij}| \rho^k(X), \quad (5.41)$$

где  $A$  – квадратная матрица размерности  $n^k \times n^k$ .

### 5.3. Решение задачи оптимального управления

#### 5.3.1. Рекуррентный алгоритм синтеза регулятора

В основе синтеза оптимального регулятора лежит решение уравнения Ляпунова (5.3). Подставим в это уравнение предполагаемое решение (5.14), точнее его производную (5.33):

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} \overline{((X^T)^{[i]} \otimes I) C_{i+1}^T} \right)^T (A_1 X + A_2 X^{[2]} + A_3 X^{[3]}) = -Q_2 X^{[2]},$$

в котором слагаемое  $X^T Q X$  записано с использованием кронекеровской степени  $X^{[2]}$ , т.е.  $X^T Q X = Q_2 X^{[2]}$ , где  $Q_2$  – соответствующая матрица размерности  $l \times n^2$ . После выполнения операции транспонирования получаем уравнение

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} C_{i+1} \overline{(X^{[i]} \otimes I)} \right) (A_1 X + A_2 X^{[2]} + A_3 X^{[3]}) = -Q_2 X^{[2]}. \quad (5.42)$$

С учетом соотношения (5.34) рассмотрим следующее его слагаемое:

$$\begin{aligned} \overline{(X^{[i]} \otimes I) A_1 X} &= \overline{(X^{[i]} \otimes I) Z} = \overline{(X^{[i]} \otimes Z)} = \overline{(X^{[i]} \otimes A_1 X)} = \\ &= \overline{(I^{[i]} X^{[i]} \otimes A_1 X)} = \overline{(I^{[i]} \otimes A_1) X^{[i+1]}} = \overline{(A_1 \otimes I^{[i]}) X^{[i+1]}}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Аналогичным образом преобразуем и последующие слагаемые уравнения

$$\begin{aligned} \overline{(X^{[i]} \otimes I)A_2 X^{[2]}} &= \overline{(X^{[i]} \otimes I)Z} = \overline{(X^{[i]} \otimes Z)} = \overline{(X^{[i]} \otimes A_2 X^{[2]})} = \\ &= \overline{(I^{[i]} X^{[i]} \otimes A_2 X^{[2]})} = \overline{(I^{[i]} \otimes A_2)X^{[i+2]}} = \overline{(A_2 \otimes I^{[i]})X^{[i+2]}}, \\ \overline{(X^{[i]} \otimes I)A_3 X^{[3]}} &= \overline{(X^{[i]} \otimes I)Z} = \overline{(X^{[i]} \otimes Z)} = \overline{(X^{[i]} \otimes A_3 X^{[3]})} = \\ &= \overline{(I^{[i]} X^{[i]} \otimes A_3 X^{[3]})} = \overline{(I^{[i]} \otimes A_3)X^{[i+3]}} = \overline{(A_3 \otimes I^{[i]})X^{[i+3]}}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

С учетом соотношений (5.43), (5.44) уравнение (5.42) преобразуется к виду

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_{i+1} \overline{(I^{[i]} \otimes A_1)} \cdot X^{[i+1]} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{i+1} \overline{(I^{[i]} \otimes A_2)} \cdot X^{[i+2]} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{i+1} \overline{(I^{[i]} \otimes A_3)} \cdot X^{[i+3]} = -Q_2 X^{[2]}. \quad (5.45)$$

В выражении (5.45) приравняем коэффициенты при одинаковых кронекеровских степенях  $X^{[i]}$ ,  $i=2,3,\dots$ .

При  $i=2$  имеем

$$C_2 \overline{(I \otimes A_1)} = -Q_2, \quad (5.46)$$

или, если матрица  $\overline{(I \otimes A_1)}$  неособенная, то

$$C_2 = -Q_2 \left[ \overline{(I \otimes A_1)} \right]^{-1}.$$

При  $i=3$  аналогично получаем

$$C_3 \overline{(I^{[2]} \otimes A_1)} + C_2 \overline{(I \otimes A_2)} = 0, \text{ или } C_3 = -C_2 \overline{(I \otimes A_2)} \left[ \overline{(I^{[2]} \otimes A_1)} \right]^{-1}. \quad (5.47)$$

Соответственно при  $i=4$  имеем

$$C_4 \overline{(I^{[3]} \otimes A_1)} + C_3 \overline{(I^{[2]} \otimes A_2)} + C_2 \overline{(I \otimes A_3)} = 0,$$

или

$$C_4 = - \left[ C_3 \overline{(I^{[2]} \otimes A_2)} + C_2 \overline{(I \otimes A_3)} \right] \left[ \overline{(I^{[3]} \otimes A_1)} \right]^{-1}. \quad (5.48)$$

Итерация при  $i=5$  дает

$$C_5 \overline{(I^{[4]} \otimes A_1)} + C_4 \overline{(I^{[3]} \otimes A_2)} + C_3 \overline{(I^{[2]} \otimes A_3)} = 0,$$

или

$$C_5 = - \left[ C_4 \overline{(I^{[3]} \otimes A_2)} + C_3 \overline{(I^{[2]} \otimes A_3)} \right] \left[ \overline{(I^{[4]} \otimes A_1)} \right]^{-1}. \quad (5.49)$$

Продолжая итерации, методом математической индукции устанавливаем

$$C_{k+1} = - \left[ C_k \overline{(I^{[k-1]} \otimes A_2)} + C_{k-1} \overline{(I^{[k-2]} \otimes A_3)} \right] \left[ \overline{(I^{[k]} \otimes A_1)} \right]^{-1}, \quad k=3,4,\dots \quad (5.50)$$

рекуррентный алгоритм нахождения коэффициентов степенного ряда (5.14), описывающего искомую функцию Ляпунова. Эта функция, согласно (5.2), (5.33), однозначно определяет искомый закон управления

$$U(X) = -0.5R^{-1}B^T(X) \sum_{i=1}^{\infty} \left[ C_{i+1} \overline{(X^{[i]} \otimes I)} \right]^T, \quad (5.51)$$

доставляющий минимум функционалу качества (5.1).

### 5.3.2. Условия осуществимости рекуррентного алгоритма синтеза

Рекуррентный процесс (5.50) вычисления коэффициентов функции Ляпунова осуществим, если получаемые матрицы  $\widetilde{(I^{[k]} \otimes A_1)}$ ,  $k=1,2,\dots$ , являются неособыми. Установим, при каких условиях указанные матрицы обладают данным свойством.

Сначала рассмотрим матрицу при  $k=1$ :  $\widetilde{(I \otimes A_1)} = I \otimes A_1 + A_1 \otimes I = A_1 \otimes I + I \otimes A_1$ . Структура этой матрицы аналогична матрице  $A \otimes I_m + I_n \otimes B$ , названной кронекеровской суммой матриц  $A$ ,  $B$ , и имеющей собственные значения  $\lambda_r + \mu_s$ ,  $r=1,2,\dots,m$ ,  $s=1,2,\dots,n$ , где  $\lambda_r$ ,  $\mu_s$  – собственные числа соответственно матриц  $A$  и  $B$  [43]. При  $A=B=A_1$  матрицы  $\widetilde{(I \otimes A_1)}$  и  $A \otimes I_m + I_n \otimes B$  совпадают, поэтому  $\widetilde{(I \otimes A_1)}$  имеет собственные значения  $\lambda_i + \lambda_j$ ,  $i, j=1,2,\dots,n$ , составленные из собственных чисел матрицы  $A_1$ . На этом основании матрицу  $\widetilde{(I \otimes A_1)}$  можно назвать двойной кронекеровской суммой матрицы  $A_1$ .

Заметим, что уравнение (5.46) является другой формой записи (с использованием операции кронекеровского произведения матриц) матричного уравнения Ляпунова

$$A_1^T P + P A_1 = -Q, \quad (5.52)$$

причем матрица  $C_2$  размерности  $1 \times n^2$  получается из квадратной  $n \times n$  матрицы  $P$  записью ее строк последовательно друг за другом в виде одной строки. Для уравнения (5.52) в работе [43] доказана **лемма**: *матричное уравнение Ляпунова определяет взаимно однозначное соответствие между вещественными симметричными матрицами  $P$  и  $Q$  в том и только том случае, когда матрица  $A$  не имеет нулевых собственных значений и пар собственных значений  $\lambda, \mu$ , для которых  $\lambda + \mu = 0$ .*

Вследствие эквивалентности уравнений (5.46) и (5.52) лемма определяет и условия однозначного решения уравнения (5.46): условия леммы всегда выполняются для **устойчивой** матрицы  $A_1$ , вещественные части собственных чисел которой отрицательны. В связи с этим при применении метода синтеза А.А. Красовского по критерию обобщенной работы предполагается устойчивость движений объекта управления.

Теперь рассмотрим исследуемую матрицу при  $k=2$ :  $\widetilde{(I^{[2]} \otimes A_1)} = I \otimes I \otimes A_1 + I \otimes A_1 \otimes I + A_1 \otimes I \otimes I$ . Так как справедливы преобразования

$$\begin{aligned} \widetilde{(I^{[2]} \otimes A_1)} &= I \otimes I \otimes A_1 + I \otimes A_1 \otimes I + A_1 \otimes I \otimes I = \\ &= I \otimes [I \otimes A_1 + A_1 \otimes I] + (A_1 \otimes I) \otimes I \equiv I \otimes A^* + B^* \otimes I, \end{aligned}$$

то рассматриваемая матрица представляет кронекеровскую сумму матриц  $A^*$ ,  $B^*$ . Поэтому она имеет собственные значения равные сумме собственных чисел матриц  $A^*$ ,  $B^*$ , которые в свою очередь равны  $\lambda_i + \lambda_j$ ,  $i, j=1,2,\dots,n$  для матрицы  $A^*$  и  $\lambda_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  – для матрицы  $B^*$ . Отсюда непосредственно следует, что матрица  $\widetilde{(I^{[2]} \otimes A_1)} = I \otimes I \otimes A_1 + I \otimes A_1 \otimes I + A_1 \otimes I \otimes I$  имеет собственные числа



$\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n$ . На этом основании данную матрицу по аналогии с  $\overline{(I \otimes A_1)}$  будем условно называть тройной кронекеровской суммой матрицы  $A_1$ .

Следствием отмеченного свойства собственных чисел матрицы  $\overline{(I^{[2]} \otimes A_1)}$  и указанной леммы является утверждение, что система уравнений (5.47) имеет однозначное решение в том и только том случае, когда матрица  $A_1$  не имеет нулевых собственных значений и троек собственных значений  $\lambda, \mu, \nu$ , для которых  $\lambda + \mu + \nu = 0$ .

Данное утверждение очевидным образом обобщается на матрицу  $\overline{(I^{[k]} \otimes A_1)}$ , которую по аналогии будем называть  $(k+1)$  кронекеровкой суммой матрицы  $A_1$ . **Утверждение 5.5:** *Рекуррентный алгоритм (5.50) с обратной матрицей  $\overline{(I^{[k]} \otimes A_1)}^{-1}$  однозначно определяет вектор коэффициентов функции Ляпунова в том и только том случае, когда матрица  $A_1$  не имеет нулевых собственных значений  $\lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$ , и сумма любых  $(k+1)$  собственных значений этой матрицы не равна нулю:  $\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_{k+1}} \neq 0, \quad i_1, i_2, \dots, i_{k+1} = 1, 2, \dots, n$ .*

Еще раз подчеркнем, что условия этого утверждения всегда выполняются для устойчивой матрицы  $A_1$ , поэтому при применении предлагаемого метода синтеза оптимальных систем предполагается устойчивость указанной матрицы.

Уравнения (5.2), (5.14), (5.46), (5.47), (5.50), (5.51) описывают решение рассматриваемой задачи АКОР для объектов с квадратично-кубическими нелинейностями так называемым методом матричных степенных рядов. Численные результаты, даваемые методом, совпадают с результатами стандартного метода степенных рядов, но они получаются при значительно меньшем объеме вычислений вследствие исключения процедуры составления и решения систем уравнений для искоемых (многочисленных) коэффициентов функции Ляпунова (она выполнена предварительно) и использования вычислительных матричных операций, включая операцию кронекеровского произведения матриц. Совпадение результатов объясняется методологической тождественностью методов – методы отличаются только формой записи уравнений. Матричная форма записи расчетных соотношений оказалась более компактной и приспособленной для алгоритмической реализации метода. Особо подчеркнем, что матричная форма метода позволила получить простое рекуррентное соотношение (5.50) для матриц коэффициентов функции Ляпунова, с помощью которого можно решить задачу АКОР практически с любой заданной точностью.

Из данного метода как частные случаи вытекают алгоритмы синтеза оптимальных регуляторов для объектов только с квадратичными или только кубическими нелинейностями. Полагая в уравнениях (5.46), (5.47), (5.50)  $A_3 = 0$ , получаем алгоритм расчета оптимального управления (5.51) объектами с квадратичными характеристиками по функции Ляпунова (5.14), матричные коэффициенты которой определяется следующей рекуррентной процедурой

$$C_{k+1} = -C_k \overline{(I^{[k-1]} \otimes A_2)} \left[ \overline{(I^{[k]} \otimes A_1)} \right]^{-1}, \quad C_2 = -Q_2 \left[ \overline{(I \otimes A_1)} \right]^{-1}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (5.53)$$

Соответственно, полагая в уравнениях (5.46), (5.47), (5.50)  $A_2=0$ , получаем алгоритм расчета оптимального управления объектами с кубическими нелинейностями, для которого матричные коэффициенты функции Ляпунова находятся по рекуррентной процедуре

$$\begin{cases} \tilde{N}_{2k+1} = 0, & \tilde{N}_2 = -Q_2(\overline{A_1 \otimes I})^{-1}, \\ \tilde{N}_{2(k+1)} = -\tilde{N}_{2k}(\overline{A_3 \otimes I^{[2k-1]}}) \cdot (\overline{A_1 \otimes I^{[2k+1]}})^{-1}, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.54)$$

Подчеркнем, что согласно (5.54) оптимальный регулятор, так же как и объект управления, имеет симметричные характеристики, так как коэффициенты при слагаемых нечетных степеней функции Ляпунова (5.14) равны нулю. Подтвердить это можно следующим образом. Из уравнения (5.47) при  $A_2=0$  и невырожденности матрицы  $(I^{[2]} \otimes A_1)$  непосредственно вытекает  $C_3=0$ . Так как матрица  $C_5$  линейным образом (5.50) выражается через  $C_3$ , то  $C_5=0$  и т.д.

### 5.3.3. Условия сходимости матричного степенного ряда

Вышесказанное о предложенном методе синтеза оптимальных регуляторов справедливо только при сходимости ряда (5.14), описывающего функцию Ляпунова. Установим условия сходимости этого ряда.

Воспользовавшись понятием нормы вектора (5.37) и соотношениями (5.40), (5.41), для ряда (5.14) построим мажорирующий его ряд

$$|S(X)| = \left| \sum_{i=2}^{\infty} C_i X^{[i]} \right| \leq \sum_{i=2}^{\infty} |C_i X^{[i]}| \leq \sum_{i=2}^{\infty} \|C_i\| \|X^{[i]}\|. \quad (5.55)$$

Предполагая, что норма вектора состояния  $\|X\|$  ограничена числом

$$\|X\| = \rho_X, \quad (5.56)$$

определяющим область фазового пространства объекта управления, в которой рассматривается движение объекта, на основе (5.55), (5.56) получаем

$$|S(X)| \leq \sum_{i=2}^{\infty} \|C_i\| \|X^{[i]}\| = \sum_{i=2}^{\infty} \|C_i\| \rho_X^i \quad (5.57)$$

– мажорирующий ряд, одномерный относительно  $\rho_X$ .

На первом этапе найдем оценку норм  $\|C_i\|$  для наиболее простых рассматриваемых объектов с квадратичными нелинейностями, для которых матрицы  $C_i$  вычисляются в соответствии с алгоритмом (5.53). Для этого в соответствии с данным алгоритмом определим норму вектора  $C_{k+1}(\overline{I^{[k]} \otimes A_1})$ . Так как матрица  $(\overline{I^{[k]} \otimes A_1})$  имеет размерность  $n^{k+1} \times n^{k+1}$  и представляет сумму  $(k+1)$  матриц

$$(\overline{I^{[k]} \otimes A_1}) = I^{[k]} \otimes A_1 + I^{[k-1]} \otimes A_1 \otimes I + I^{[k-2]} \otimes A_1 \otimes I^{[2]} + \dots + A_1 \otimes I^{[k]}, \quad (5.58)$$

то

$$\|C_{k+1}(\overline{I^{[k]} \otimes A_1})\| \leq \|C_{k+1}\| \|(\overline{I^{[k]} \otimes A_1})\| \leq \|C_{k+1}\| \|A_1\| (k+1). \quad (5.59)$$

Теперь оценим норму вектора  $C_k(\overline{I^{[k-1]} \otimes A_2})$ , матрица  $\overline{I^{[k-1]} \otimes A_2}$  которого является прямоугольной размерности  $n^k \times n^{k+1}$ . Для указанной неквадратной матрицы неравенство (5.41) не выполняется. В связи с этим возникает необходимость расширения понятия нормы (5.39) на прямоугольные матрицы. С этой целью рассмотрим вектор  $Y$  размерности  $n \times 1$ , определенный через  $m$ -мерный вектор  $X$  с помощью матрицы  $A$  размерности  $n \times m$ :

$$Y = AX = \left( \sum_{j=1}^m a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^m a_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{nj} x_j \right)^T. \quad (5.60)$$

Найдем его норму

$$\|Y\| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left[ \sum_{j=1}^m |a_{ij}| |x_j| \right] \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left[ \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right] \|X\|. \quad (5.61)$$

На основе неравенства (5.61) для прямоугольных матриц можно ввести в рассмотрение согласованную норму вида

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left[ \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right], \quad (5.62)$$

в соответствии с которой  $\|Y\| \leq \|A\| \|X\|$ . Подчеркнем, что суммирование в (5.62) ведется по индексу столбцов, число которых  $m$  совпадает с размерностью исходного вектора  $X$  (суммируются элементы строк матрицы).

На основе неравенства

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left[ \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right] \leq \sum_{j=1}^m |a_{\max}| = m \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|. \quad (5.63)$$

для прямоугольных матриц можно также ввести норму

$$\|A\| = m \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|, \quad (5.64)$$

( $m$  – число столбцов матрицы), являющуюся аналогом нормы (5.39) квадратной матрицы. Так как согласно неравенству (5.63)

$$\|A\|_{(5.62)} \leq \|A\|_{(5.64)}, \quad (5.65)$$

то далее применяется матричная норма (5.62) как более тонкая, точная.

С использованием нормы (5.62) оцениваем норму вектора

$$\|C_k(\overline{I^{[k-1]} \otimes A_2})\| \leq \|C_k\| \|\overline{I^{[k-1]} \otimes A_2}\| \leq \|C_k\| \|A_2\| k. \quad (5.66)$$

Из рекуррентного алгоритма (5.53) следует равенство оценок (5.59), (5.66):

$$\|C_{k+1}\| \|A_1\| (k+1) = \|C_k\| \|A_2\| k, \quad k = 2, 3, \dots,$$

и, соответственно,

$$\|C_{k+1}\| = \|C_k\| \frac{\|A_2\|}{\|A_1\|} \cdot \frac{k}{(k+1)} = \|C_k\| q, \quad q = \frac{\|A_2\|}{\|A_1\|} \cdot \frac{k}{(k+1)}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (5.67)$$

Подчеркнем, что на сходимость ряда (5.14) главным образом влияют коэффициенты  $C_k$  при больших значениях индекса  $k \rightarrow \infty$ , для которых отношение

$k/(k+1) \rightarrow 1$ , а величина

$$q \rightarrow \text{const} = \|A_2\|/\|A_1\|.$$

Для этих значений  $q$  на основе рекуррентного алгоритма (5.67) устанавливаем

$$\begin{aligned} \|C_3\| &= \|C_2\|q, \quad \|C_4\| = \|C_3\|q = \|C_2\|q^2, \quad \|C_5\| = \|C_4\|q = \|C_2\|q^3, \dots, \\ \|C_k\| &= \|C_2\|q^{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.68)$$

Ряд (5.57) с учетом (5.68) принимает вид

$$\begin{aligned} |S(X)| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \|C_k\| \rho_X^k = \|C_2\| \rho_X^2 + \|C_3\| \rho_X^3 + \|C_4\| \rho_X^4 + \dots = \\ &= \|C_2\| \rho_X^2 + \|C_2\| q \rho_X^3 + \|C_2\| q^2 \rho_X^4 + \dots = \|C_2\| \rho_X^2 [1 + q \rho_X + q^2 \rho_X^2 + \dots] \end{aligned} \quad (5.69)$$

геометрической прогрессии со знаменателем

$$q_1 = q \rho_X = \rho_X \|A_2\|/\|A_1\|. \quad (5.70)$$

Известно, что геометрическая прогрессия сходится при  $q_1 = \rho_X \|A_2\|/\|A_1\| < 1$ . Из данного неравенства легко найти радиус области фазового пространства объекта

$$\rho_X < \|A_1\|/\|A_2\|, \quad (5.71)$$

в которой ряд (5.14) сходится и, соответственно, существует оптимальное управление (5.51).

Сжато повторим рассуждения (5.55) – (5.71) применительно к объектам с кубическими нелинейностями, для которых матрицы  $C_k$  ряда вычисляются по алгоритму (5.54). Так как  $C_{2k+1} = 0$ , то ряд (5.57) принимает вид

$$|S(X)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|C_{2i}\| \rho_X^{2i}. \quad (5.72)$$

На основе (5.54), (5.59), (5.66) находим

$$\|C_{2(k+1)}\| = \|C_{2k}\| \frac{\|A_3\|}{\|A_1\|} \cdot \frac{k}{(k+1)} = \|C_{2k}\| q, \quad q = \frac{\|A_3\|}{\|A_1\|} \cdot \frac{k}{(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.73)$$

Аналогично при больших значениях  $k$  имеем

$$q \simeq \text{const} = \|A_3\|/\|A_1\|.$$

По рекуррентной формуле (5.73) получаем

$$\begin{aligned} \|C_4\| &= \|C_2\|q, \quad \|C_6\| = \|C_4\|q = \|C_2\|q^2, \quad \|C_8\| = \|C_6\|q = \|C_2\|q^3, \dots, \\ \|C_{2k}\| &= \|C_2\|q^{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.74)$$

С учетом (5.74) ряд (5.72) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} |S(X)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|C_{2k}\| \rho_X^{2k} = \|C_2\| \rho_X^2 + \|C_4\| \rho_X^4 + \|C_6\| \rho_X^6 + \dots = \\ &= \|C_2\| \rho_X^2 + \|C_2\| q \rho_X^4 + \|C_2\| q^2 \rho_X^6 + \dots = \|C_2\| \rho_X^2 [1 + q \rho_X^2 + q^2 \rho_X^4 + \dots] = \\ &= \|C_2\| \rho_X^2 [1 + q r_X + q^2 r_X^2 + \dots], \quad r_X = \rho_X^2 \end{aligned}$$

геометрической прогрессии со знаменателем

$$q_1 = q r_X = \rho_X^2 \|A_3\|/\|A_1\|.$$

Из условия сходимости геометрической прогрессии  $q_l < 1$  находим радиус

$$\rho_x < \sqrt{\|A_1\|/\|A_3\|} \quad (5.75)$$

области фазового пространства объекта, в которой ряд (5.14) сходится.

Наконец, определим область существования оптимального управления для объектов с квадратично-кубическими нелинейностями, для которых коэффициенты ряда (5.14) находятся в соответствии с (5.50) или

$$C_{k+1}(\overline{I^{[k]} \otimes A_1}) = - \left[ C_k(\overline{I^{[k-1]} \otimes A_2}) + C_{k-1}(\overline{I^{[k-2]} \otimes A_3}) \right], \quad k = 3, 4, \dots$$

Применяя к данному соотношению понятия нормы, аналогично предыдущим случаям получаем

$$\begin{aligned} \|C_{k+1}\| \|\overline{I^{[k]} \otimes A_1}\| &= \|C_k\| \|\overline{I^{[k-1]} \otimes A_2}\| + \|C_{k-1}\| \|\overline{I^{[k-2]} \otimes A_3}\|, \\ \|C_{k+1}\| \|A_1\| (k+1) &= \|C_k\| \|A_2\| k + \|C_{k-1}\| \|A_3\| (k-1), \\ \|C_{k+1}\| &= \|C_k\| \frac{\|A_2\| k}{\|A_1\| (k+1)} + \|C_{k-1}\| \frac{\|A_3\| (k-1)}{\|A_1\| (k+1)}, \quad k = 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Соответственно, при больших значениях  $k$  устанавливаем

$$\|C_{k+1}\| = \|C_k\| q_2 + \|C_{k-1}\| q_3, \quad q_2 = \frac{\|A_2\|}{\|A_1\|}, \quad q_3 = \frac{\|A_3\|}{\|A_1\|}, \quad k = 3, 4, \dots \quad (5.76)$$

Соотношение (5.76) можно рассматривать как разностное линейное уравнение второго порядка относительно решетчатой функции  $\|C_k\|$ , общее решение которого имеет вид [26]

$$\|C_k\| = d_1 z_1^k + d_2 z_2^k. \quad (5.77)$$

В (5.77)  $d_1, d_2$  - некоторые постоянные, а  $z_1, z_2$  - корни характеристического уравнения

$$z^2 = q_2 z + q_3, \quad z_{1,2} = q_2/2 \pm \sqrt{(q_2/2)^2 + q_3}. \quad (5.78)$$

Уточним решаемую задачу: нам необходимо найти область сходимости степенного ряда

$$|S(X)| \leq \sum_{i=2}^{\infty} \|C_i\| \|X^{[i]}\| = \sum_{i=2}^{\infty} \|C_i\| \rho_x^i,$$

коэффициенты которого вычисляются согласно уравнению (5.77). Для оценки области сходимости можно воспользоваться известными формулами Коши-Адамара или Даламбера

$$\rho_x < 1/\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left( \sqrt[k]{\|C_k\|} \right), \quad \rho_x < 1/\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\|C_{k+1}\|}{\|C_k\|} \right), \quad (5.79)$$

где символ  $\overline{\lim}$  означает наибольшее значение предела [47].

Применим формулу Даламбера в предположении  $|z_1| > |z_2|$ :

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\|C_{k+1}\|}{\|C_k\|} \right) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{d_1 z_1^{k+1} + d_2 z_2^{k+1}}{d_1 z_1^k + d_2 z_2^k} \right) = z_1 \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{d_1 + d_2 (z_2/z_1)^{k+1}}{d_1 + d_2 (z_2/z_1)^k} \right) = z_1.$$

Тогда

$$\rho_x < 1/z_1, \quad z_1 = q_2/2 + \sqrt{(q_2/2)^2 + q_3}. \quad (5.80)$$

Отметим, что применение формулы Коши-Адамара дает тот же результат. Также подчеркнем, что из (5.80) при  $q_3=0$  и  $q_2=0$  следуют соотношения (5.71) и (5.75). Это подтверждает правильность указанных соотношений.

Соотношения (5.71), (5.75), (5.80) определяют для объектов трех распространенных классов радиусы областей их фазового пространства, в которых работоспособен предложенный метод синтеза оптимальных систем управления. Как следует из формулы Даламбера, величина обратная радиусу указанной области

$$\frac{1}{\rho_x} > \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\|C_{k+1}\|}{\|C_k\|} \right)$$

в определенном образом связана со скоростью сходимости степенного ряда, описывающего функцию Ляпунова. Для объектов с квадратичными или кубическими нелинейностями скорость сходимости предложенного рекуррентного метода сравнима со скоростью соответствующей геометрической прогрессии. Из свойств геометрической прогрессии легко установить, что для того, чтобы в методе синтеза возможно было с инженерной погрешностью ( $\leq 5\%$ ) ограничиться тремя членами степенного ряда в описании оптимальной функции Ляпунова (три итерациями), знаменатель прогрессии должен быть  $1/3$  и менее. Применительно к объектам с квадратичными нелинейностями это выливается в следующую практическую рекомендацию: коэффициенты при квадратичных членах нелинейной характеристики приблизительно в три раза должны быть меньше по модулю, чем коэффициенты линейной части модели объекта. Более точную оценку необходимого числа итераций можно установить подсчетом знаменателя прогрессии (5.70) и далее моделированием синтезируемых систем.

Подчеркнем, что указанная возможность оценки скорости сходимости матричного степенного ряда является одним из важных достоинств предлагаемого метода синтеза – для стандартного метода степенных рядов неизвестны такие оценки.

## 5.4. Метод синтеза оптимальных систем управления

### 5.4.1. Основные этапы метода

В предыдущих разделах описана сущность и дано обоснование предлагаемого метода синтеза оптимальных регуляторов – метода матричных степенных рядов. Суммируя предыдущие результаты, конкретизируем основные этапы применения этого метода.

1. Задаются исходные данные для синтеза системы управления: матрицы параметров  $A_1, A_2, A_3$  и  $B$  объекта (5.4); матрицы  $Q, R$  критерия качества (5.1); границы области допустимых начальных состояний (отклонений) объекта.

2. По любой известной методике проверяется устойчивость матрицы  $A_1$  (отрицательность вещественных частей ее собственных чисел (корней)). Если

матрица  $A_1$  неустойчива, то производится регуляризация описания объекта (см. раздел 4.2).

3. По рекуррентному алгоритму (5.50), или (5.53) при  $A_3=0$ , или алгоритму (5.54) при  $A_2=0$  рассчитываются матрицы коэффициентов  $C_2, C_3, C_4, \dots$  функции Ляпунова (5.14).

4. По формуле (5.51) определяется оптимальный закон управления.

5. По формуле (5.80) рассчитывается радиус области фазового пространства объекта, в которой работоспособен данный метод синтеза. Если границы допустимой области пространства состояний объекта заданы и они находятся в области работоспособности метода, то соотношение (5.80) позволяет оценить число итераций алгоритма по п.3, необходимых для достижения заданной точности решения задачи АКОР в допустимой области состояний объекта.

6. Осуществляется моделирование системы управления с синтезированным законом управления с последующей оценкой показателей качества переходных процессов системы и точности решения поставленной задачи оптимального управления. Точность решения может быть оценена по числам  $S_k(X_0), J_k(X_0), S_k(X_0) - J_k(X_0)$ , где  $S_k(X_0)$  и  $J_k(X_0)$  – соответственно значения функции Ляпунова и критерия качества (5.1), вычисленных при использовании  $k$  членов (итераций) ряда (5.14).

7. При необходимости с целью получения требуемых заказчиком показателей качества переходных процессов системы и соответствующей точности решения задачи АКОР пп. 3 – 6 повторяются при уточненных значениях матриц  $Q$  и  $R$  критерия (5.1) и новом числе итераций алгоритма синтеза.

В представленной в приложении 1 программе ММСР.mcd, разработанной в среде Mathcad 2001, реализованы пп. 1 – 6 предложенного метода синтеза. В данной распечатке программы представлен пример расчета параметров регулятора для задачи управления, сформулированной в примере 4.4 со следующими параметрами  $a_{11}=0.1, a_{22}=-3, a_{222}=-1, k=b=1, q_{11}=1, q_{22}=1, r=0.5$ . Распечатка показывает совпадение результатов расчета с результатами примера 4.4 (обозначения переменных в пособии и программе, за редким исключением, совпадают). Она также свидетельствует, что предложенный метод синтеза имеет достаточно простую программную реализацию.

#### 5.4.2. Упрощение метода синтеза - применение кронереровской степени-II

Заметим, что при вычислении предложенным методом матриц  $C_k$  коэффициентов обратных связей регулятора для объекта высокого порядка  $n$ , приходится обращаться матрицу (5.58) большой размерности  $n^{k+1} \times n^{k+1}$ , что сопряжено с существенным объемом вычислений. Объем вычислений можно существенно сократить, если воспользоваться понятием кронереровской степени-II [44], которая отличается от степени (5.5) меньшей размерностью за счет исключения повторяющихся элементов

$$X^{[2]} = (x_1 x_1 \ x_1 x_2 \ x_2 x_2)^T, \quad X^{[3]} = (x_1 x_1 x_1 \ x_1 x_1 x_2 \ x_1 x_2 x_2 \ x_2 x_2 x_2)^T. \quad (5.81)$$

Для объекта третьего порядка размерности указанных векторов уменьшаются с 9 и 27 соответственно до 6 и 10:

$$X^{[2]} = (x_1x_1 \quad x_1x_2 \quad x_1x_3 \quad x_2x_2 \quad x_2x_3 \quad x_3x_3)^T,$$

$$X^{[3]} = (x_1x_1x_1 \quad x_1x_1x_2 \quad x_1x_1x_3 \quad x_1x_2x_2 \quad x_1x_2x_3 \quad x_1x_3x_3 \quad x_2x_2x_2 \quad x_2x_2x_3 \quad x_2x_3x_3 \quad x_3x_3x_3)^T.$$

Отметим, что элемент  $x_1x_2$  в векторе (5.81) представляет второй и третий элементы  $x_1x_2$  и  $x_2x_1$  в (5.5), соответственно элемент  $x_1x_1x_2$  в векторе (5.81) представляет 2, 3 и 5-й элементы  $x_1x_1x_2$ ,  $x_1x_2x_1$ ,  $x_2x_1x_1$  в (5.5), а элемент  $x_1x_2x_2$  в векторе (5.81) – 4, 6 и 7-й элементы  $x_1x_2x_2$ ,  $x_2x_1x_2$ ,  $x_2x_2x_1$  в (5.5). На этом основании для объекта второго порядка систему уравнений (5.46) можно упростить (уменьшить их число), просуммировав в матрице  $(I \otimes A_1)$  элементы второго и третьего столбца и, соответственно, второй и третьей строки, причем сумма строк берется с коэффициентом 0.5. Аналогично упрощается система уравнений (5.47) суммированием в матрице  $(I^{[2]} \otimes A_1)$  элементов 2, 3 и 5-й строк и столбцов и, соответственно, элементов 4, 6 и 7-й строк и столбцов, причем сумма строк вычисляется с коэффициентом 1/3 (см. пример 5.1). Легко составить аналогичные рекомендации по суммированию элементов строк и столбцов матриц для объектов более высоких порядков.

**Пример 5.1.** Для сравнения методов синтеза еще раз (но аналитически) решим предложенным методом задачу управления, сформулированную в примере 4.4.

В данном примере стандартным методом степенных рядов находилось оптимальное по критерию обобщенной работы (5.1) управление для объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + x_2 = f_1^*; \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{222}x_2^2 + bu = f_2^* + bu. \end{cases} \quad (5.82)$$

Описание этого объекта можно представить в форме

$$\dot{X} = A_1X + A_2[X \otimes X] + BU \quad (5.83)$$

с матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{222} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Для данного объекта составим уравнения (5.46), определяющие матрицу  $C_2$  коэффициентов при квадратичных слагаемых функции Ляпунова. С этой целью раскроем матрицу

$$\begin{aligned} \widetilde{(I \otimes A_1)} &= I \otimes A_1 + A_1 \otimes I = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2a_{11} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a_{11} + a_{22} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{11} + a_{22} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



С использованием этой матрицы уравнение (4.46) принимает вид

$$(c_{11} \ c_{12} \ c_{21} \ c_{22}) \begin{pmatrix} 2a_{11} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a_{11} + a_{22} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{11} + a_{22} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{22} \end{pmatrix} = -(q_{11} \ 0 \ 0 \ q_{22}), \quad (5.84)$$

или в покомпонентной форме

$$\begin{cases} 2a_{11}c_{11} = -q_{11}, \\ c_{11} + c_{12}(a_{11} + a_{22}) = 0, \\ c_{11} + c_{21}(a_{11} + a_{22}) = 0, \\ c_{12} + c_{21} + 2a_{22}c_{22} = -q_{22}. \end{cases} \quad (5.85)$$

Последовательным решением уравнений (5.85) находим

$$c_{11} = \frac{-q_{11}}{2a_{11}}, \quad c_{12} = \frac{-c_{11}}{(a_{11} + a_{22})}, \quad c_{21} = \frac{-c_{11}}{(a_{11} + a_{22})}, \quad c_{22} = \frac{-(q_{22} + c_{12} + c_{21})}{2a_{22}}. \quad (5.86)$$

Соответственно квадратичная часть функции Ляпунова принимает вид

$$\begin{aligned} S_2(X) &= C_2 X^{[2]} = c_{11}x_1x_1 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2 = \\ &= c_{11}x_1x_1 + (c_{12} + c_{21})x_1x_2 + c_{22}x_2x_2 = -\frac{q_{11}x_1x_1}{2a_{11}} - \frac{2c_{11}x_1x_2}{(a_{11} + a_{22})} - \frac{(q_{22} + c_{12} + c_{21})x_2x_2}{2a_{22}}. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Отсюда следует, что при согласовании обозначений  $A_{11}=c_{11}$ ,  $A_{12}=c_{12}+c_{21}$ ,  $A_{22}=c_{22}$ , решения (4.57) и (5.86) совпадают.

Отметим, что для нахождения функции (5.87) в примере 4.4 пришлось решать систему трех первых уравнений (4.56), а в примере 5.1 – систему четырех уравнений (5.85). Однако если воспользоваться рекомендациями по упрощению системы уравнений (5.46), приходим к уравнению

$$(c_{11} \ c_{12} \ c_{22}) \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2 & 0 \\ 0 & (a_{11} + a_{22}) & 1 \\ 0 & 0 & 2a_{22} \end{pmatrix} = -(q_{11} \ 0 \ q_{22}), \quad (5.88)$$

которое получается из (5.84) суммированием второй и третьей столбцов и строк матриц этого уравнения с коэффициентами 1 и 0.5. В покомпонентной форме записи уравнение (5.88) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} 2a_{11}c_{11} = -q_{11}, \\ 2c_{11} + c_{12}(a_{11} + a_{22}) = 0, \\ c_{12} + 2a_{22}c_{22} = -q_{22}, \end{cases}$$

совпадающей с точностью до обозначений с первыми тремя уравнениями системы (4.56), что говорит об эквивалентности методов, применяемых в примерах 4.4 и 5.1.

Теперь составим уравнения (5.47) для исследуемого объекта, определяющие матрицу  $C_3$  коэффициентов при кубических составляющих функции Ляпунова. Для этого найдем матрицу

$$\begin{aligned}
& \widetilde{(I^{[2]} \otimes A_1)} = I \otimes I \otimes A_1 + I \otimes A_1 \otimes I + A_1 \otimes I \otimes I = \\
& = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} 3a_{11} & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} + 2a_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3a_{11} & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} + 2a_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{11} + a_{22} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{11} + a_{22} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a_{22} \end{pmatrix}. \quad (5.89)
\end{aligned}$$

Найдем также матрицу

$$\begin{aligned}
C_2(\widetilde{I \otimes A_2}) &= C_2(I \otimes A_2 + A_2 \otimes I) = \\
&= (c_{11} \quad c_{12} \quad c_{21} \quad c_{22}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{222} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{222} \end{pmatrix} + \\
&+ (c_{11} \quad c_{12} \quad c_{21} \quad c_{22}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{222} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{222} \end{pmatrix} = \\
&= (0 \quad 0 \quad 0 \quad c_{12}a_{222} \quad 0 \quad 0 \quad c_{21}a_{222} \quad 2c_{22}a_{222}).
\end{aligned} \tag{5.90}$$

Упростим составляемую систему уравнений суммированием в матрицах  $(I^{[2]} \otimes A_1)$  и  $C_2(\widetilde{I \otimes A_2})$ , как ранее установлено, элементов 2, 3 и 5-й строк и столбцов и, соответственно, элементов 4, 6 и 7-й строк и столбцов с коэффициентами 1 для столбцов и 1/3 для строк:

$$\begin{pmatrix} 3a_{11} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_{11} + a_{22} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} + 2a_{22} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3a_{22} \end{pmatrix}, \quad (0 \quad 0 \quad (c_{12} + c_{21})a_{222} \quad 2c_{22}a_{222}).$$

Таким образом, для исследуемого объекта уравнение (5.47) принимает вид

$$\begin{pmatrix} c_{111} \\ c_{112} \\ c_{122} \\ c_{222} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3a_{11} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_{11} + a_{22} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} + 2a_{22} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3a_{22} \end{pmatrix} = -(0 \quad 0 \quad (c_{12} + c_{21})a_{222} \quad 2c_{22}a_{222}),$$

или в покоординатной форме

$$\begin{cases} 3a_{11}c_{111} = 0, \\ 3c_{111} + (2a_{11} + a_{22})c_{112} = 0, \\ 2c_{112} + (a_{11} + 2a_{22})c_{122} = -(c_{12} + c_{21})a_{222}, \\ c_{122} + 3a_{22}c_{222} = -2c_{22}a_{222}. \end{cases} \tag{5.91}$$

Система (5.91) с точностью до обозначений совпадает с последними четырьмя уравнениями системы (4.57), что еще раз подтверждает идентичность результатов сравниваемых методов.

В то же время данный пример наглядно показывает, что матричный метод степенных рядов не приспособлен к аналитическим расчетам, он является численным методом, легко программируемым для применения на ЭВМ – см. приложение 1: листинг программы ММСР.mcd решения нелинейной задачи АКОР в среде Mathcad 2001.

### 5.4.3. Упрощение метода на основе диагонализации описания объектов

Число операций при вычислении обратной матрицы  $\overline{(I^{[k]} \otimes A_l)}$  также можно многократно сократить, если предварительно описание объекта управления (5.4) привести к виду с диагональной матрицей  $A_l$ . В этом случае матрица  $\overline{(I^{[k]} \otimes A_l)}$  будет диагональной, в чем легко убедиться непосредственным перемножением указанных матриц. Для нее обратная матрица является также диагональной с элементами на главной диагонали, равными обратным значениям соответствующих элементов обрабатываемой матрицы. Таким образом, в этом случае алгоритм обращения матрицы оказывается предельно простым.

В зависимости от вида матрицы  $A_l$  можно предложить два способа перехода к диагональному описанию объекта управления.

**Способ 1.** Если матрица  $A_l$  имеет вещественные собственные числа, то можно воспользоваться преобразованием координат объекта  $X=CY$  с матрицей преобразования  $C$ , являющейся модальной к  $A_l$ . Как известно [49], модальная матрица составляется из собственных векторов матрицы  $A_l$ , поэтому для ее определения можно воспользоваться программами нахождения собственных чисел и собственных векторов, имеющихся в известных математических пакетах Mathcad, Matlab, Mathematica.

Для преобразованного объекта в соответствии с описанным методом синтеза находится закон управления  $U^*(Y)$ . Закон обратной связи для исходного объекта определяется уравнением  $U(X)=U^*(C^{-1}X)$ .

**Способ 2.** Если матрица  $A_l$  имеет отличные от нуля диагональные элементы, то для получения диагонального описания объекта можно использовать дополнительную фазовую координату  $x_{n+1}(t) = 1$  или  $\dot{x}_{n+1}(t) = 0$ ,  $x_{n+1}(0) = 1$ : линейные недиагональные слагаемые модели умножением на указанную координату представляется как квадратичные составляющие описания (5.4), а в линейных слагаемых описания остаются составляющие, отвечающие диагональным элементам матрицы  $A_l$ .

Для преобразованного таким образом объекта, имеющего расширенный вектор состояния  $X^*$  размерности  $n+1$ , находится закон управления  $U^*(X^*)$  предложенным методом синтеза. Управление для исходного объекта определяется уравнениями:  $U(X)=U^*(X^*)$ ,  $x_{n+1}^* \equiv 1$ .

Необходимо отметить, что второй способ диагонализации описания в сравнении с первым является менее трудоемким, но применим к более узкому классу объектов.

### 5.5. Обобщенный метод степенных рядов

Изложим применительно к объектам (5.6) простейший вариант обобщенного метода степенных рядов в решении уравнения Ляпунова (5.3), повышающего точность его решения и, соответственно, точность решения задачи АКОР.

Метод базируется на первоначальном ограничении степени полинома, описывающего функцию Ляпунова, вытекающего из естественного предположения, что рассчитать бесконечно длинный ряд (3.1) невозможно. Подчеркнем,

что в стандартном методе степенных рядов степень полинома (число членов ряда) заранее не ограничивается, а предполагается рекуррентно увеличивающейся. Например, при описании простейшего варианта метода будем считать максимальную степень полинома равной четырем. В этом случае уравнение (5.45), принимающее вид

$$\sum_{i=1}^3 C_{i+1} \widetilde{(I^{[i]} \otimes A_1)} \cdot X^{[i+1]} + \sum_{i=1}^3 C_{i+1} \widetilde{(I^{[i]} \otimes A_2)} \cdot X^{[i+2]} = -Q_2 X^{[2]}, \quad (5.92)$$

будет содержаться члены с максимальной степенью  $X^{[5]}$ .

Предположим, что матрицы коэффициентов  $C_2, C_3$  определены в соответствии с методом матричных степенных рядов, с использованием соотношений (5.53). Модификация метода состоит в том, что элементы матрицы  $C_4$  будем находить из условия *приближенного обнуления* оставшихся членов четвертой и пятой степеней уравнения (5.92):

$$\begin{cases} C_4 (A_1 \otimes I^{[3]}) = -C_3 (A_2 \otimes I^{[2]}), \\ C_4 (A_2 \otimes I^{[3]}) = 0. \end{cases} \quad (5.93)$$

Система уравнений (5.93) является переопределенной: число уравнений  $n^4 + n^5$  превышает число неизвестных  $n^4$ . Наиболее простым и математически обоснованным методом решения переопределенной системы уравнений является метод наименьших квадратов (МНК) [48]. Для применения МНК систему (5.93) запишем с использованием блочных матриц

$$C_4 \tilde{A} = \tilde{D}, \quad (5.94)$$

где

$$\tilde{A} = \left[ \widetilde{(A_1 \otimes I^{[3]})} : \widetilde{(A_2 \otimes I^{[3]})} \right], \quad \tilde{D} = \left[ \widetilde{C_3 (A_2 \otimes I^{[2]})} : 0 \right].$$

Для получения системы уравнений МНК умножаем уравнение (5.94) справа на матрицу  $\tilde{A}^T$ :

$$C_4 \tilde{A} \tilde{A}^T = \tilde{D} \tilde{A}^T. \quad (5.95)$$

Ее решением определяем искомую матрицу

$$C_4 = \tilde{D} \tilde{A}^T \left( \tilde{A} \tilde{A}^T \right)^{-1}. \quad (5.96)$$

Подчеркнем, что возможны и более сложные варианты метода, например, в соответствии со стандартным методом определяются только коэффициенты матрицы  $C_2$ , а элементы матриц  $C_3, C_4$  находятся методом наименьших квадратов решением переопределенной системы уравнений (5.47), (5.93). Возможно также элементы всех матриц  $C_2, C_3, C_4$  полиномиальной функции Ляпунова определять МНК. Так как искомые коэффициенты  $C_2, C_3, C_4$ , в отличие от стандартного метода степенных рядов, определяется без отбрасывания уравнений для коэффициентов при членах пятой степени, то можно надеяться, что обобщенный метод даст более точное решение задачи АКОР. Проверим это предположение моделированием соответствующих САУ.

**Пример 5.2.** Требуется найти управление объектом

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + b u(t), \\ a_1 = -2, a_2 = -3, a_{11} = -1, a_{12} = -1, a_{22} = -1, b = 1, \end{cases} \quad (5.97)$$

которое переводит его из начального состояния  $x_1(0) = 2.5$ ,  $x_2(0) = 0$  в конечное  $x_1(\infty) = 0$ ,  $x_2(\infty) = 0$ , с минимальным значением функционала

$$J = \int_0^T [q_1 x_1^2(t) + q_2 x_2^2(t) + r(u_{\text{опт}}^2(t) + u^2(t))] dt \rightarrow \min, \quad q_1 = q_2 = 1. \quad (5.98)$$

Необходимо произвести сравнительное моделирование квазиоптимальных систем управления, синтезированных стандартным и обобщенным методами степенных рядов. При моделировании весовой коэффициент  $r$  критерия рекомендуется выбрать такой величины, чтобы переходные процессы систем имели аperiodический характер и были как можно с большим быстродействием.

### *Стандартный метод степенных рядов*

Решение сформулированной задачи АКОР, полученное указанным методом с точностью до членов пятой степени имеет вид

$$\begin{aligned} u(X) = & -\frac{1}{2r} \cdot (A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2 + A_{112}x_1^2 + 2A_{122}x_1x_2 + 3A_{222}x_2^2 + A_{1112}x_1^3 + 2A_{1122}x_1^2x_2 + 3A_{1222}x_1x_2^2 + \\ & + 4A_{2222}x_2^3 + A_{11112}x_1^4 + 2A_{11122}x_1^3x_2 + 3A_{11222}x_1^2x_2^2 + 4A_{12222}x_1x_2^3 + 5A_{22222}x_2^4 + A_{111112}x_1^5 + \\ & + 2A_{111122}x_1^4x_2 + 3A_{111222}x_1^3x_2^2 + 4A_{112222}x_1^2x_2^3 + 5A_{122222}x_1x_2^4 + 6A_{222222}x_2^5), \end{aligned} \quad (5.99)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1,25 \quad A_{12} = 0,5 \quad A_{22} = 0,25 \quad A_{111} = -0,15 \quad A_{112} = -0,25 \quad A_{122} = -0,175 \quad A_{222} = -0,075 \\ A_{1111} &= 0,073 \quad A_{1112} = 0,125 \quad A_{1122} = 0,1293 \quad A_{1222} = 0,0707 \quad A_{2222} = 0,0246 \quad A_{11111} = -0,023 \\ A_{11112} &= -0,0625 \quad A_{11122} = -0,0778 \quad A_{11222} = -0,0631 \quad A_{12222} = -0,0293 \quad A_{22222} = -0,00853 \\ A_{111111} &= 0,0114 \quad A_{111112} = 0,03125 \quad A_{111122} = 0,0482 \quad A_{111222} = 0,0458 \quad A_{112222} = 0,0303 \\ A_{122222} &= 0,0123 \quad A_{222222} = 0,00305 \end{aligned}$$

Расчет коэффициентов управления (5.99) осуществлен с использованием программы ММСР.mcd, представленной в приложении 1.

Переходные процессы движения системы из начального состояния  $X(t=0) = X_0 = (2,5 \ 0)^T$  при  $r = 0,65$  приведены на рис. 5.1. Рисунок подтверждает, что синтез САУ осуществлен правильно:  $S(X_0) = 8,85 \cong J(X_0) = 8,65$ .

### *Обобщенный метод степенных рядов*

Если ограничиться в полиномиальной функции Ляпунова слагаемыми не выше четвертой степени, то простейший вариант обобщенного метода степенных рядов для сформулированной задачи АКОР дает следующий вид закона управления (использована программа ОМСР.mcd приложения 2):

$$\begin{aligned} u_{\text{опт}}^{\text{об}}(X) = & -\frac{1}{2r} (0,5x_1 + 0,5x_2 - 0,35x_1x_2 - 0,25x_1^2 - 0,15x_2^2 + 0,04624x_2^3 - \\ & - 0,04486x_1^3 + 0,0625x_1^2x_2 + 0,16395x_1x_2^2). \end{aligned} \quad (5.100)$$

Переходные процессы системы при движении объекта из начального состояния  $X(t=0) = X_0 = (2,5 \ 0)^T$  и соответствующее управление, построенное в пакете MathCad 2001, приведены на рис. 5.2. Моделирование показало, что наилучшее быстродействие системы управления при наименьшем перерегулировании достигается при значении  $r = 0,5$ .

Сравнивая полученные законы, необходимо отметить, что полиномиальное управление третьей степени (5.100) обеспечивает практически то же качество переходных процессов, как и управление пятой степени (5.99), хотя законы третьей и пятой степеней по своей сложности сильно разнятся (расчет сигнала обратной связи по первому закону требует приблизительно в 2.6 раза меньше операций умножения и сложения).

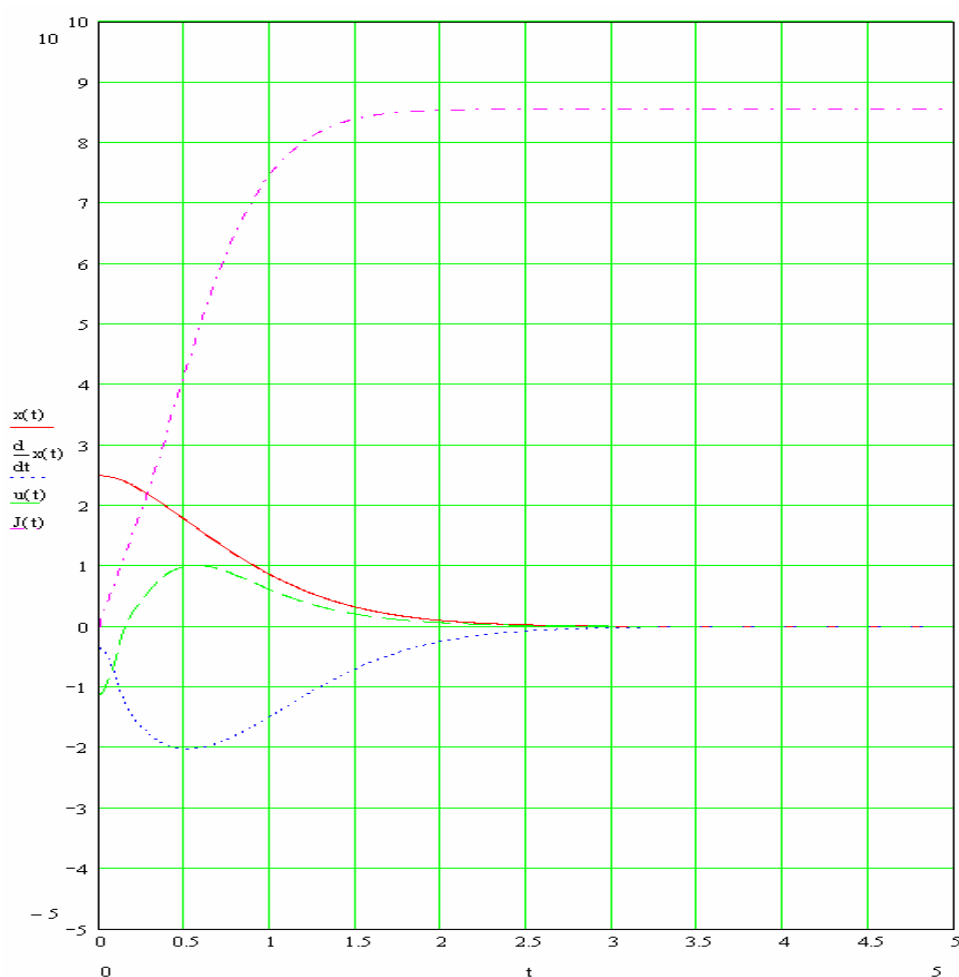


Рис. 5.1. Переходные процессы системы при  $r = 0,65$

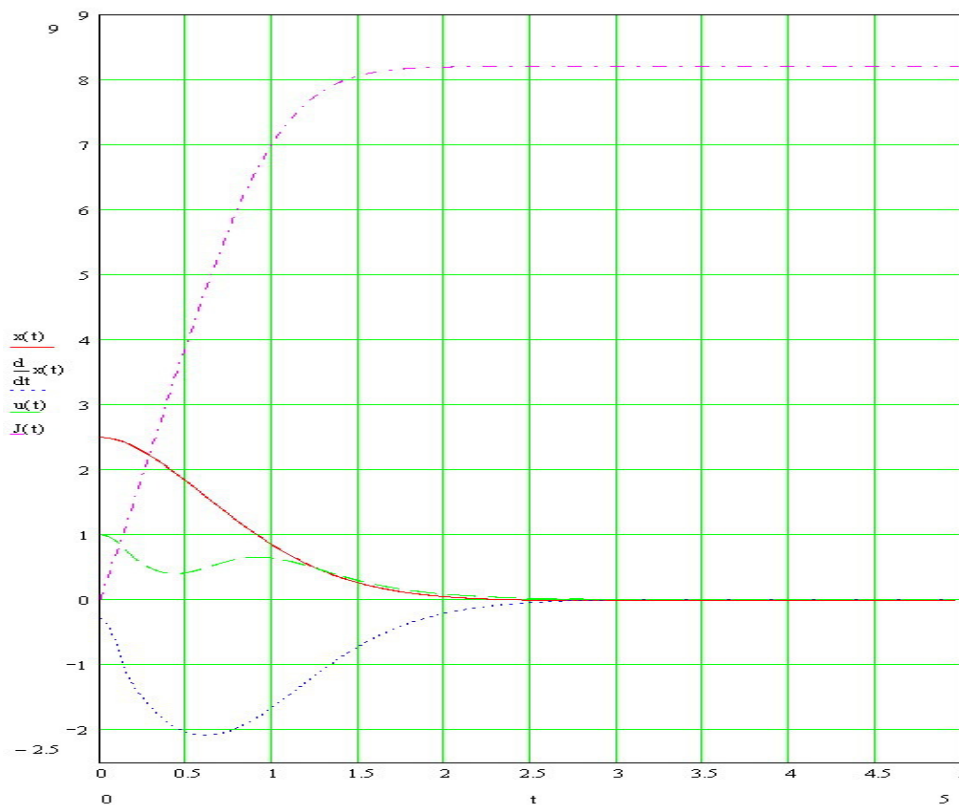


Рис. 5.2. Переходные процессы системы при  $r = 0,5$

Таким образом, обобщенный метод степенных рядов в сравнении со стандартным методом действительно может обеспечить существенное упрощение закона обратной связи при той же точности приближения или увеличение точности приближения к оптимальному управлению при одинаковой степени используемых полиномиальных аппроксимаций.

### 5.6. Аналитическое конструирование оптимального регулятора скорости для асинхронного привода

В данном разделе разработанный выше метод матричных степенных рядов применяется для синтеза квазиоптимальных регуляторов, используемых в системе векторного управления скоростью асинхронного двигателя антенны радиолокационной станции, работающей в режиме поиска цели.

Необходимо подчеркнуть, что проектирование силового электропривода относится к одной из важнейшей научно-технической проблеме, от успеха решения которой во многом зависит качество и эффективность работы многочисленных агрегатов, комплексов и устройств. На современном этапе проектирования систем управления достижению предельных показателей точности и быстродействия функционирования электропривода препятствует главным образом нелинейность характеристик привода как объекта управления. Подтверждением этого утверждения является широкое применение в прецизионных электроприводах двигателей постоянного тока, имеющих простое (линейное) математическое описание по сравнению с двигателями переменного тока. Однако двигатели постоянного тока обладают рядом недостатков: высокая стоимость и сложность изготовления, большие габариты и масса, невысокая надёж-



ность вследствие наличия щёточно-коллекторного узла, ограниченная перегрузочная способность. По этому в настоящее время ядром большинства исполнительных механизмов в различных отраслях производства являются асинхронные двигатели (АД) с короткозамкнутым ротором, которые лишены вышеуказанных недостатков.

Регулирование частоты вращения машин переменного тока изменением частоты питающего напряжения является наиболее эффективными и экономичным способом [57]. В классе систем с частотным управлением наиболее совершенными являются системы векторного управления асинхронными двигателями [7], основанные на координатных преобразованиях измеряемых и регулируемых переменных. Эти электроприводы успешно конкурируют с приводами постоянного тока, превосходя последние по динамическим показателям.

Ниже предложенный ММСР используется для синтеза систем управления частотно-регулируемым асинхронным приводом, обеспечивающего как высокоточную стабилизацию скорости привода при действии возмущающих факторов, так и высокоточную обработку программы изменения скорости, в частности, программу линейного изменения от одного заданного (стабилизируемого) значения до другого. Именно такие режимы работы характерны для электропривода антенны радиолокационной станции, функционирующей в режиме поиска цели (сканирования) [10].

### 5.6.1. Математическая модель динамики асинхронного электропривода.

#### Постановка задачи управления

Конструктивно простой асинхронный двигатель с точки зрения теории управления представляет собой достаточно сложный, многосвязный объект регулирования с нелинейными характеристиками. Для модели динамики АД характерны квадратичные нелинейности, например, произведение скорости ротора  $\omega$  на потокосцепление  $\psi$  магнитного поля машины, произведение электрического тока ротора  $i_r$  на  $\psi$ , отражающие физические законы, лежащие в принципе действия электрических машин. Так, например, описание АД во вращающейся системе координат, ориентированной по вектору потокосцепления ротора, имеет вид [7, 58] :

$$\begin{cases} \frac{di_{sd}}{dt} = \frac{1}{L_s^*} \cdot u_{sd} - \frac{1}{T_s^*} \cdot i_{sd} + p \cdot \omega \cdot i_{sq} + \frac{K_r}{L_s^* \cdot T_r} \cdot \psi_r + R_r \cdot K_r \cdot \frac{i_{sq}^2}{\psi_r}, \\ \frac{di_{sq}}{dt} = \frac{1}{L_s^*} \cdot u_{sq} - \frac{1}{T_s^*} \cdot i_{sq} - p \cdot \omega \cdot i_{sd} - \frac{K_r}{L_s^*} \cdot p \cdot \omega \cdot \psi_r - R_r \cdot K_r \cdot \frac{i_{sd} \cdot i_{sq}}{\psi_r}, \\ \frac{d\psi_r}{dt} = R_r \cdot K_r \cdot i_{sd} - \frac{1}{T_r} \cdot \psi_r, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot K_r \cdot p \cdot i_{sq} \cdot \psi_r - M_{\tilde{n}} \right), \end{cases} \quad (5.101)$$

В данных уравнениях приняты следующие обозначения:  $\psi_r$  – потокосцепление ротора АД;  $i_{sd}, i_{sq}$  – составляющие тока статора во вращающейся системе координат  $(d, q)$ ;  $R_s, R_r, L_s, L_r$  – соответственно активные сопротивления и индуктивности обмоток статора и ротора;  $L_m$  – максимальная взаимная индуктивность между любой обмоткой статора и любой обмоткой ротора;  $K_r = L_m/L_r$  – коэффициент электромагнитной связи ротора;  $R_s^* = R_s + R_r K_r^2$ ,  $L_s^* = L_s - L_m K_r$  – преобразованные индуктивность и сопротивление статора;  $T_r = L_r/R_r$ ,  $T_s^* = L_s^*/R_s^*$  – постоянные времени ротора и статора;  $J$  – момент инерции ротора двигателя;  $M_c$  – момент сопротивления на валу двигателя.

Уравнения динамики АД в пяти других основных системах координат, ориентированных по опорным векторам  $U_s, U_r, I_s, I_r, \psi_s$ , приводится в монографии [58]. Там же дается краткий анализ полученных моделей. Сопоставив данные модели привода, можно констатировать, что уравнения (5.101), записанные во вращающейся системе координат, связанной с вектором  $\psi_r$ , определяют наиболее простое описание динамики АД с точки зрения числа нелинейных составляющих, входящих в модель асинхронного двигателя.

Синтез высококачественных СУ электроприводом на основе указанных моделей и, в частности описания (5.101), встречает определенные трудности, и в известных работах [7, 58, 59] при решении задач управления АД используются упрощенные, как правило, линейные математические модели двигателя. При этом за счет компенсации нелинейных перекрестных связей [7, 58] или отнесения их к внешним возмущениям СУ [59], многосвязный объект управления подразделяется на два независимых канала, которые в соответствии с моделью (5.101) описываются уравнениями:

1) канал регулирования потокосцепления

$$\begin{cases} \frac{d\psi_r}{dt} = -\frac{1}{T_r} \cdot \psi_r + R_r \cdot K_r \cdot i_{sd}, \\ \frac{di_{sd}}{dt} = -\frac{1}{T_s^*} \cdot i_{sd} + \frac{K_r}{L_s^* \cdot T_r} \cdot \psi_r + \frac{1}{L_s^*} \cdot u_{sd}, \end{cases} \quad (5.102)$$

2) канал регулирования момента и скорости

$$\begin{cases} \frac{di_{sq}}{dt} = -\frac{1}{T_s^*} \cdot i_{sq} - \frac{K_r}{L_s^*} \cdot \psi_{r\hat{i}\hat{i}} p \cdot \omega + \frac{1}{L_s^*} \cdot u_{sq}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot \psi_{r\hat{i}\hat{i}} K_r \cdot p \cdot i_{sq} - M_{\tilde{n}} \right), \end{cases} \quad (5.103)$$

где  $\psi_{r\hat{i}\hat{i}}$  – номинальное значение потокосцепления ротора используемого АД.

Далее известными методами линейной теории управления для объектов второго порядка (5.102) и (5.103) конструируются регулятор потокосцепления двигателя и регулятор его скорости. Такой подход к построению системы регулирования известен как метод (принцип) векторного управления АД [7].

В технической литературе под векторным управлением понимается целенаправленное и взаимосвязанное изменение основных переменных асинхронного привода, представленных векторными величинами, осуществляемое путём формирования амплитуды, частоты и фазы подводимых к статору напряжений или токов по законам, обеспечивающим достижение цели управления. Векторное управление описывается законами изменения во времени амплитуды, пространственного положения и взаимной ориентации друг относительно друга основных векторов, описывающих состояние АД:

- напряжение статора  $U_s$ ,
- токи намагничивания  $I_m$ , статора  $I_s$ , ротора  $I_r$ ,
- потокосцепления воздушного зазора  $\Psi_m$ , статора  $\Psi_s$ , ротора  $\Psi_r$ .

Каждый из указанных векторов состояния  $G_n$  характеризуется амплитудой, фазой (угловым положением) и частотой (угловой скоростью вращения) относительно ориентирующего (опорного) вектора  $G_0$ . Соответственно, исходной информацией для построения системы векторного управления является информация о мгновенных значениях и пространственном положении вектора потокосцепления в воздушном зазоре, мгновенных значениях токов или напряжений статора и скорости ротора двигателя. При этом вращающаяся система координат принимается определённым образом ориентированной относительно элементов двигателя или опорных векторов. Система векторного управления с опорным вектором  $\Psi_r$  была предложена фирмой “Сименс” под названием “Трансвектор” [7]. В нашей стране аналогичные системы управления, именуемые системами регулируемых приводов с частотно-токовым управлением, получили также широкое применение [7, 8, 57].

Структурная схема асинхронного электропривода с векторным управлением, использующего в качестве опорного вектора  $\Psi_r$ , представлена на рисунке 5.3. Опишем кратко назначение и работу ее блоков.

Датчики мгновенных значений тока статора (ДТ), напряжения статора (ДН) и скорости вращения ротора (ДС) являются первичными источниками сигналов обратной связи. В качестве ДТ и ДН в данной конфигурации схемы используются резисторы, а в качестве ДС – тахогенератор.

Блоки ПК1, ПК2 реализуют так называемое преобразование Кларка, производя пересчёт трёхфазных токов и напряжений двигателя в координаты соответствующих векторов, связанных с неподвижной системой координат  $\alpha, \beta$  [5, 57]. Рис. 5.4 поясняет геометрический смысл преобразования Кларка, которое математически описывается следующим уравнением (для ПК1):

$$\begin{pmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix},$$

где  $i_{s\alpha}, i_{s\beta}$  – координаты результирующего вектора тока,  $i_0$  – ток нулевой последовательности,  $i_A, i_B, i_C$  – токи трёхфазного двигателя.

Ток  $i_0$  вводится здесь для того, чтобы в общем случае преобразования координат были математически взаимнооднозначными, так как трёхфазную систему координат можно преобразовать к двухфазной, а наоборот – нельзя (система уравнений преобразования получается переопределённой).

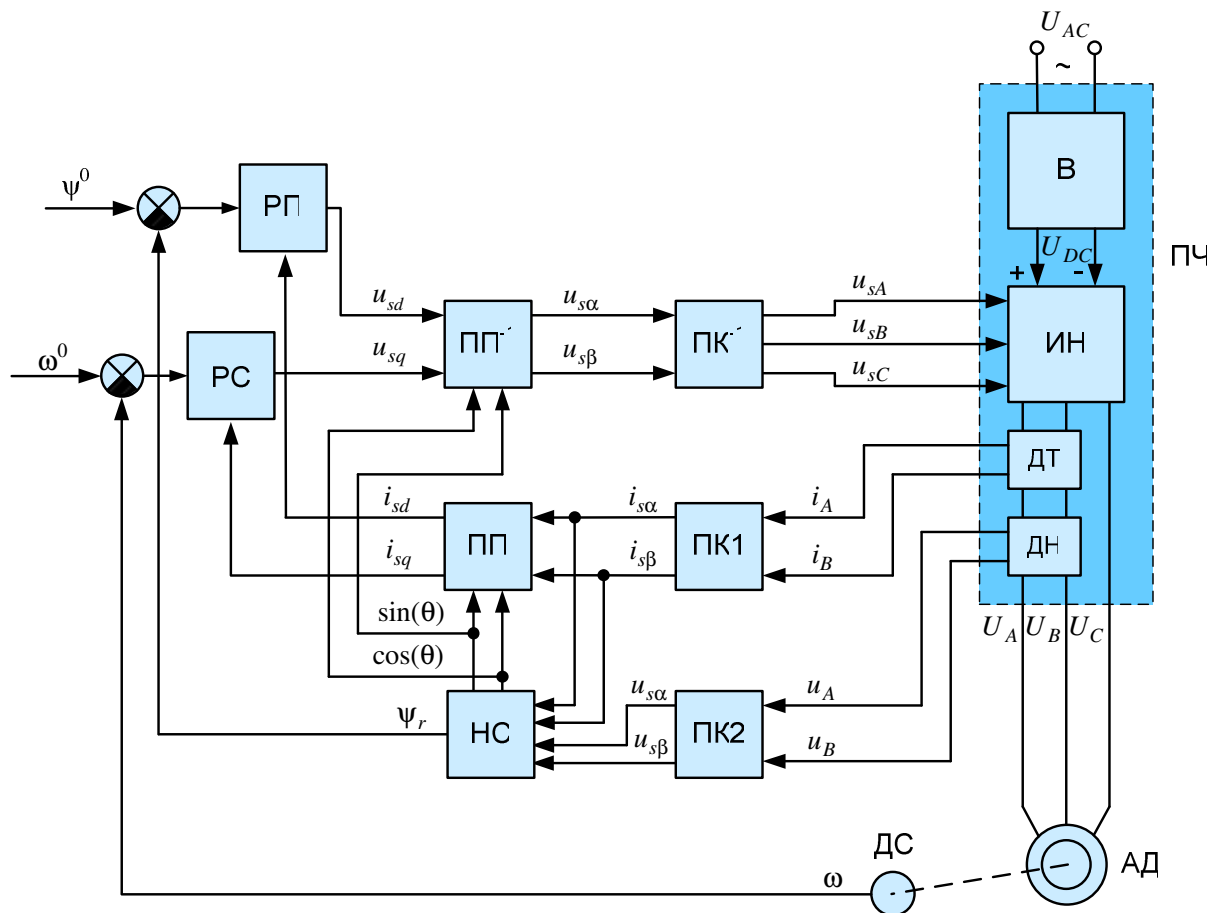


Рис. 5.3. Структурная схема системы векторного управления скоростью асинхронного двигателя

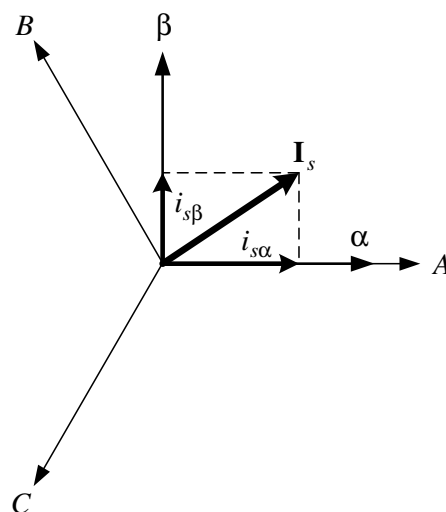


Рис. 5.4. Иллюстрация к преобразованию Кларка

Соответственно, для однозначного прямого и обратного преобразований вектора должны иметь одинаковую размерность, что и призван обеспечить ток  $i_0$ .

В разрабатываемой системе преобразователь частоты формирует симметричную систему трёхфазных электродвижущих сил и токов. Так как в этом случае для АД при соединении его обмоток звездой или треугольником всегда выполняется соотношение

$$i_A + i_B + i_C = 0 \Rightarrow i_A + i_B = -i_C, \quad (5.104)$$

то можно ток  $i_0$  не использовать, и соответственно упростить формулу преобразования Кларка:

$$\begin{pmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \end{pmatrix}. \quad (5.105)$$

Таким образом, из соотношений (5.104) и (5.105) получаем [57]: математическое описание блока ПК1

$$i_{s\alpha} = i_A, \quad i_{s\beta} = \frac{i_A + 2 \cdot i_B}{\sqrt{3}}, \quad (5.106)$$

математическое описание блока ПК2

$$u_{s\alpha} = u_A, \quad u_{s\beta} = \frac{u_A + 2 \cdot u_B}{\sqrt{3}}, \quad (5.107)$$

и математическое описание блока ПК<sup>-1</sup> (обратное преобразование Кларка)

$$u_{sA} = u_{s\alpha}, \quad u_{sB} = \frac{-u_{s\alpha} + \sqrt{3} \cdot u_{s\beta}}{2}, \quad u_{sC} = \frac{-u_{s\alpha} - \sqrt{3} \cdot u_{s\beta}}{2}. \quad (5.108)$$

Соответственно блок ПП реализует прямое преобразование Парка, осуществляя пересчёт составляющих вектора тока статора из неподвижной системы координатных осей  $\alpha, \beta$  в систему координатных осей  $d, q$ , вращающуюся со скоростью ротора (см. рис. 5.5) [5]. Обратное преобразование координат результирующего вектора напряжения из вращающейся в неподвижную систему координат выполняет блок обратного преобразования Парка (ПП<sup>-1</sup>). Соответственно, математически прямое преобразование Парка описывается уравнениями [5, 57]:

$$\begin{cases} i_{sd} = i_{s\alpha} \cdot \cos(\theta) + i_{s\beta} \cdot \sin(\theta), \\ i_{sq} = -i_{s\alpha} \cdot \sin(\theta) + i_{s\beta} \cdot \cos(\theta), \end{cases} \quad (5.109)$$

а обратное – уравнениями:

$$\begin{cases} u_{s\alpha} = u_{sd} \cdot \cos(\theta) - u_{sq} \cdot \sin(\theta), \\ u_{s\beta} = u_{sd} \cdot \sin(\theta) + u_{sq} \cdot \cos(\theta), \end{cases} \quad (5.110)$$

где  $\theta$  – угол поворота координатных осей  $d, q$  в неподвижной системе координат  $\alpha, \beta$  (см. рис. 5.5).

Для системы векторного управления требуется информация о текущем положении вектора потокосцепления ротора. Классические системы векторного управления [7, 8], называемые в иностранной литературе системами прямой ориентации по полю (direct field orientated control) выполняли непосредственное измерение потокосцепления с помощью датчиков Холла, размещённых в специальных пазах статора, либо дополнительных обмоток на статоре. Установка

указанных датчиков на стандартные трёхфазные двигатели требует внесения изменений в их конструкции, что значительно уменьшает привлекательность

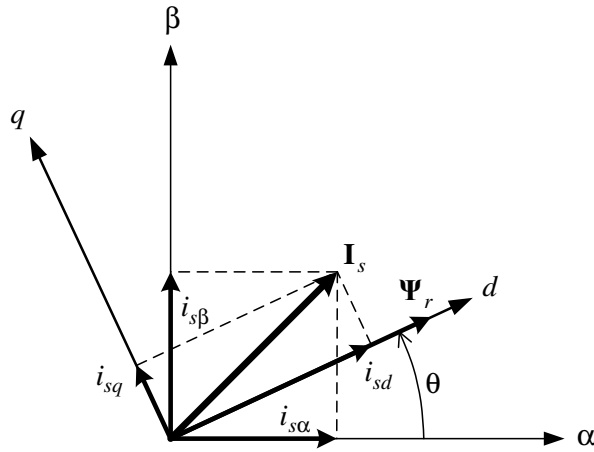


Рис. 5.5. Иллюстрация к преобразованию Парка

систем векторного управления. В современных системах векторного управления (indirect field orientated control – косвенная ориентация по полю) производится оценка текущего значения потокосцепления ротора по измерениям фазовых переменных асинхронного двигателя (токов и напряжений) с помощью наблюдателя состояния (НС). На основе измеряемых текущих значений координат векторов тока и напряжения статора в неподвижной системе  $\alpha, \beta$  наблюдатель состояния оценивает текущие координаты вектора потокосцепления ротора  $\Psi_{r\alpha}, \Psi_{r\beta}$ , на основе которых вычисляет модуль соответствующего вектора  $\Psi_r$ , а также синус и косинус его угла в неподвижной системе координат  $\alpha, \beta$ :

$$\Psi_r = \sqrt{\Psi_{r\alpha}^2 + \Psi_{r\beta}^2}, \quad \sin(\theta) = \frac{\Psi_{r\beta}}{\Psi_r}, \quad \cos(\theta) = \frac{\Psi_{r\alpha}}{\Psi_r}. \quad (5.111)$$

Предложенный в работе [60] наблюдатель состояния АД (блок НС), описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \Psi_{r\alpha}(t) = k_1 \cdot \int_0^t u_{s\alpha}(\tau) \cdot d\tau + k_2 \cdot \int_0^t i_{s\alpha}(\tau) \cdot d\tau + k_3 \cdot i_{s\alpha}(t), \\ \Psi_{r\beta}(t) = k_1 \cdot \int_0^t u_{s\beta}(\tau) \cdot d\tau + k_2 \cdot \int_0^t i_{s\beta}(\tau) \cdot d\tau + k_3 \cdot i_{s\beta}(t), \end{cases} \quad (5.112)$$

где

$$k_1 = \frac{X_r}{X_m} = \frac{L_r}{L_m}, \quad k_2 = -\frac{X_r \cdot R_s}{X_m} = -\frac{L_r \cdot R_s}{L_m}, \quad k_3 = \frac{X_m^2 - X_s \cdot X_r}{\omega \cdot X_m} = \frac{L_m^2 - L_s \cdot L_r}{L_m},$$

$X_s, X_r, X_m$  – индуктивные сопротивления обмоток статора, ротора и намагничивания.

Подчеркнем, что уравнения наблюдателя (5.112) являются фактически переписанной моделью АД. В работе [60] приведены результаты моделирования, показывающие относительно качественное функционирование данного наблюдающего устройства.

На основе значений заданий  $\psi_r^0$ ,  $\omega^0$  и фазовых координат привода  $\omega(t)$ ,  $i_{sd}(t)$ ,  $i_{sq}(t)$ ,  $\psi_r(t)$  во вращающейся системе координат  $(d, q)$  регуляторы потока РП и скорости РС вырабатывают управляющие воздействия  $u_{sd}(t)$ ,  $u_{sq}(t)$ . В качестве регуляторов РП, РС применяются стандартные ПИ, ПИД-регуляторы [7, 8] или оптимальные релейные регуляторы [59] с законами:

$$\begin{cases} u_{sd}(t) = U_m \operatorname{sign} \left( \psi_r^0 - \psi_r(t) - \frac{T_s^* T_r}{T_s^* + T_r} \cdot \frac{d\psi_r(t)}{dt} \right), \\ u_{sq}(t) = U_m \operatorname{sign} \left( \omega^0 - \omega(t) - T_s^* \frac{d\omega(t)}{dt} \right). \end{cases} \quad (5.113)$$

Перед тем как подать на АД сформированные регуляторами РП и РС сигналы управления, в последствии преобразуемые с помощью блоков  $\text{ПП}^{-1}$  и  $\text{ПК}^{-1}$ , их необходимо усилить. Для этой цели используется преобразователь частоты (ПЧ), составляющий вместе с АД силовую часть электропривода.

Наиболее универсальными и часто применяемыми являются преобразователи частоты с промежуточным звеном постоянного тока [57] (см. рис. 5.3). В преобразователях данного типа переменное напряжение питающей сети  $U_{AC}$  сначала при помощи выпрямителя (В) преобразуется в постоянное напряжение  $U_{DC}$ , которое затем подаётся на инвертор напряжения (ИН), формирующий трёхфазную систему синусоидальных напряжений  $U_A, U_B, U_C$ , амплитуды и частоты которых задаются соответствующими управляющими сигналами  $u_{sA}, u_{sB}, u_{sC}$ , поступающими на вход инвертора.

Простейшим способом формирования такой системы напряжений является широтно-импульсная модуляция (ШИМ). Если осуществляется ШИМ синусоидального сигнала, при которой частота переключения вентилях (транзисторов или тиристоров) инвертора (несущая частота) существенно выше выходной частоты инвертора (частоты модуляции), то в спектре выходного напряжения кроме основной гармоники присутствуют лишь гармоники весьма высоких порядков, которые легко отфильтровываются индуктивностями двигателя. Благодаря этому ток в АД практически синусоидален, что позволяет обеспечить большой диапазон регулирования скорости [57].

Подчеркнем еще раз, что принципиальной особенностью системы векторного управления рис. 5.3 является использование автономных регуляторов РП, РС, например, с законами обратной связи (5.113), осуществляющих раздельное регулирование потокосцепления ротора двигателя и его скорости. В работе [59] управляющее воздействие  $u_{sd}(t)$  получено решением для объекта (5.102) задачи оптимального управления по критерию

$$J_1 = \int_0^{\infty} q_{11} (\psi_r^0 - \psi_r(t))^2 dt. \quad (5.114)$$

Соответственно управление  $u_{sq}(t)$  найдено аналогичным образом для объекта (5.103) при использовании функционала качества

$$J_2 = \int_0^{\infty} q_{44} (\omega^0 - \omega(t))^2 dt . \quad (5.115)$$

Применение линеаризованных автономных подмоделей (5.102) и (5.103), а не полной модели динамики асинхронного двигателя (5.101), исключило при синтезе указанных регуляторов учет действия нелинейных перекрестных связей между фазовыми координатами асинхронного привода. Это, на взгляд авторов, является существенным упущением данного подхода построения системы векторного управления, так как указанные нелинейные взаимосвязи координат электропривода отражают принципиальные особенности функционирования асинхронного двигателя. С целью учета действия перекрестных связей, рассматривая АД как многосвязный нелинейный объект, сформулируем следующую задачу оптимального управления как обобщение указанных выше двух задач АКОР.

*Задача синтеза оптимального регулятора скорости:* в классе кусочно-непрерывных напряжений, удовлетворяющих ограничениям  $|u_{sd}(t)| \leq U_m$ ,  $|u_{sq}(t)| \leq U_m$ , найти управления  $u_{sd}(X)$ ,  $u_{sq}(X)$  в форме обратных связей, переводящие АД, описываемый уравнениями (5.101), из начального состояния в конечное, определяемое заданиями магнитного потока  $\psi_r^0$ , скорости  $\omega^0$  и соответствующими им напряжениями статорных обмоток  $u_{sd}^0$ ,  $u_{sq}^0$ , с минимальным значением квадратичного функционала обобщенной работы А.А. Красовского

$$J_3 = \int_0^{\infty} \left[ q_{11} (\psi_r^0 - \psi_r(t))^2 + q_{44} (\omega^0 - \omega(t))^2 + \right. \\ \left. + r[(u_{sd}^0 - u_{sd}(t))^2 + (u_{sq}^0 - u_{sq}(t))^2] + \right. \\ \left. + r[(u_{sd}^0 - u_{sd\,opt}(t))^2 + (u_{sq}^0 - u_{sq\,opt}(t))^2] \right] dt . \quad (5.116)$$

Значения весовых коэффициентов критерия  $q_{11}$ ,  $q_{44}$ ,  $r \geq 0$  в дальнейшем выбираются в процессе моделирования синтезированной системы управления из условия получения для нее требуемого характера переходных процессов.

Ниже приводятся приближенные решения сформулированной задачи АКОР, учитывающие характерные нелинейности управляемого объекта. Они в некоторой мере позволяют ответить на следующие актуальные для электропривода вопросы: 1) каковы свойства и возможности оптимальных систем управления нелинейным многосвязным объектом (5.101); 2) насколько близки переходные процессы, обеспечиваемые указанными автономными регуляторами потокосцепления и скорости АД, к оптимальным процессам?

### 5.6.2. Синтез квазиоптимального регулятора скорости для асинхронного электропривода

Метод матричных степенных рядов применим лишь к объектам управления с полиномиальными нелинейностями. Поэтому нелинейную систему уравнений (5.101) приведем к полиномиальному виду. С этой целью осуществим линейную аппроксимацию обратной функции



$$\frac{1}{\psi_r} \approx Y_0 + Y_1 \cdot \psi_r, \quad Y_0 = 3.3, \quad Y_1 = -2.4. \quad (5.117)$$

Графическим построением (см. рис. 5.6) можно убедиться, что на достаточно широком интервале  $0.35 \cdot \psi_r < \psi_r < 1.05 \cdot \psi_r$  изменения потокосцепления АД относительная погрешность аппроксимации (5.117) не превышает 17 %.

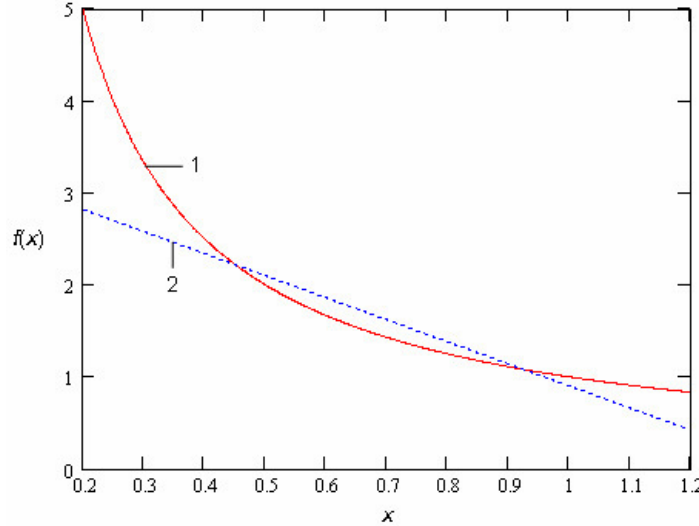


Рис. 5.6. Линейная аппроксимация функции  $f(x) = 1/x$

Подставив (5.117) в (5.101), получим полиномиальную модель динамики асинхронного двигателя:

$$\begin{cases} \frac{di_{sx}}{dt} = \frac{1}{L_s^*} \cdot u_{sx} - \frac{1}{T_s^*} \cdot i_{sx} + p \cdot \omega \cdot i_{sy} + \frac{K_r}{L_s^* \cdot T_r} \cdot \psi_r + R_r \cdot K_r \cdot Y_0 \cdot i_{sy}^2 + \\ + R_r \cdot K_r \cdot Y_1 \cdot i_{sy}^2 \cdot \psi_r, \\ \frac{di_{sy}}{dt} = \frac{1}{L_s^*} \cdot u_{sy} - \frac{1}{T_s^*} \cdot i_{sy} - p \cdot \omega \cdot i_{sx} - \frac{K_r}{L_s^*} \cdot p \cdot \omega \cdot \psi_r - R_r \cdot K_r \cdot Y_0 \cdot i_{sx} \cdot i_{sy} - \\ - R_r \cdot K_r \cdot Y_1 \cdot i_{sx} \cdot i_{sy} \cdot \psi_r, \\ \frac{d\psi_r}{dt} = R_r \cdot K_r \cdot i_{sx} - \frac{1}{T_r} \cdot \psi_r, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot K_r \cdot p \cdot i_{sy} \cdot \psi_r - M_c \right). \end{cases} \quad (5.118)$$

В пакете Mathcad 2001 было проведено моделирование процесса пуска двигателя АИР56В4 с параметрами [61]

$$\begin{aligned} P_{\text{ном}} &= 180 \text{ Вт}, \quad U_{\text{ном}} = 220/380 \text{ В } (\Delta/Y), \quad I_{\text{ном}} = 1.09/0.63 \text{ А } (\Delta/Y), \\ M_{\text{ном}} &= 1.27 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad M_{\text{пуск}}/M_{\text{ном}} = 2.2, \quad M_{\text{мах}}/M_{\text{ном}} = 2.3, \\ \omega_{\text{ном}} &= 141 \text{ рад/с}, \quad \eta = 0.64, \quad \cos(\varphi) = 0.68, \\ R_s &= 55 \text{ Ом}, \quad R_r = 29 \text{ Ом}, \\ L_m &= 1.2255 \text{ Гн}, \quad L_s = 1.4295 \text{ Гн}, \quad L_r = 1.2545 \text{ Гн}, \\ J &= 0.00079 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad p = 2, \end{aligned} \quad (5.119)$$

описываемого моделями (5.101) и (5.118), при номинальной нагрузке. Результаты показали, что применение аппроксимации (5.117) вносит небольшую погрешность, например, максимальная разница основных регулируемых переменных  $\psi_r(t)$  и  $\omega(t)$  (см. рис. 5.7) не превышает 7 %.

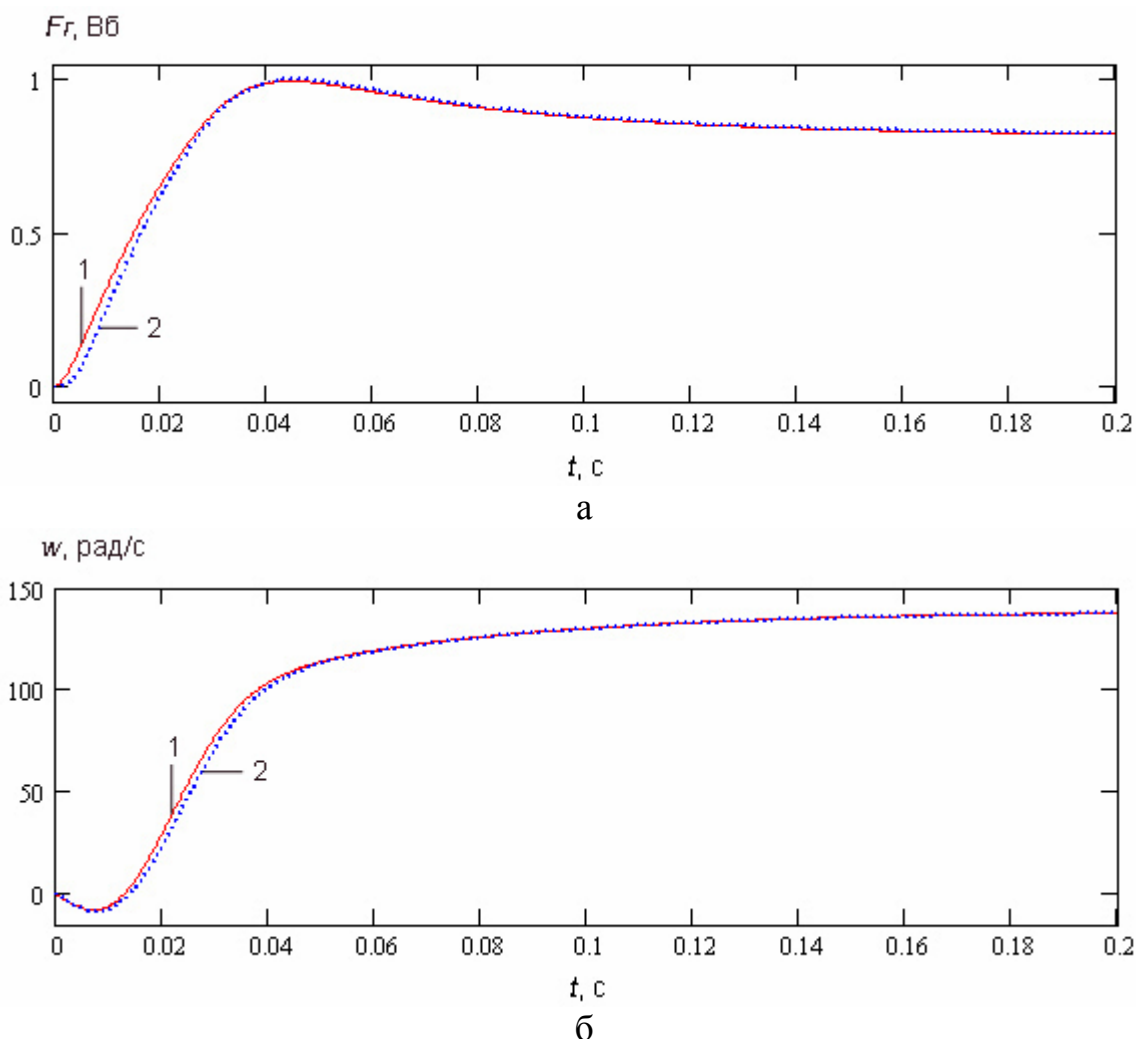


Рис. 5.7. Моделирование пуска двигателя с номинальной нагрузкой для определения влияния погрешности аппроксимации обратной функции: а – потокосцепление ротора; б – угловая скорость вращения двигателя

На рис. 5.7 приняты обозначения: 1 – координата по модели (5.101), 2 – координата по модели (5.118).

Так как в ходе решения задачи АКОР синтезируется управление, призванное парировать отклонения движения объекта от заданной траектории, модель динамики объекта также следует записать в отклонениях от заданного режима работы. В качестве такого режима выберем установившийся режим работы АД на холостом ходу с заданной угловой скоростью  $\omega^0$  и заданным потокосцеплением ротора  $\psi_r^0$ :

$$M_c = 0, \quad \omega = \omega^0, \quad \psi_r = \psi_r^0, \quad i_{sx} = i_{sx}^0, \quad i_{sy} = i_{sy}^0. \quad (5.120)$$

Из уравнений (5.118) при равенстве нулю производных вытекает взаимосвязь координат в установившемся режиме:

$$\begin{aligned}
i_{sd}^0 &= \frac{1}{R_r \cdot K_r \cdot T_r} \cdot \psi_r^0, & i_{sq}^0 &= 0, \\
u_{sd}^0 &= \left( \frac{L_s^*}{R_r \cdot K_r \cdot T_r \cdot T_s^*} - \frac{K_r}{T_r} \right) \cdot \psi_r^0, & u_{sq}^0 &= \left( \frac{p \cdot L_s^*}{R_r \cdot K_r \cdot T_r} + p \cdot K_r \right) \cdot \psi_r^0 \cdot \omega^0.
\end{aligned} \tag{5.121}$$

Относительно выбранного режима работы в отклонениях

$$\begin{aligned}
x_1 &= i_{sd} - i_{sd}^0, & x_3 &= \psi_r - \psi_r^0, & u_1 &= u_{sd} - u_{sd}^0, \\
x_2 &= i_{sq} - i_{sq}^0, & x_4 &= \omega - \omega^0, & u_2 &= u_{sq} - u_{sq}^0
\end{aligned} \tag{5.122}$$

модель АД запишется следующим образом (подставляем (5.120) – (5.122) в (5.118)):

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{L_s^*} \cdot u_1 - \frac{1}{T_s^*} \cdot x_1 + p \cdot \omega^0 \cdot x_2 + \frac{K_r}{L_s^* \cdot T_r} \cdot x_3 + R_r \cdot K_r \cdot (Y_0 + Y_1 \cdot \psi_r^0) \cdot x_2^2 + \\
&\quad + p \cdot x_2 \cdot x_4 + R_r \cdot K_r \cdot Y_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3, \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{L_s^*} \cdot u_2 - p \cdot \omega^0 \cdot x_1 - \left( \frac{1}{T_s^*} + \frac{Y_0}{T_r} \cdot \psi_r^0 + \frac{Y_1}{T_r} \cdot (\psi_r^0)^2 \right) \cdot x_2 - \frac{p \cdot K_r}{L_s^*} \cdot \omega^0 \cdot x_3 - \\
&\quad - \left( \frac{p}{R_r \cdot K_r \cdot T_r} + \frac{p \cdot K_r}{L_s^*} \right) \cdot \psi_r^0 \cdot x_4 - R_r \cdot K_r \cdot (Y_0 + Y_1 \cdot \psi_r^0) \cdot x_1 \cdot x_2 - \\
&\quad - p \cdot x_1 \cdot x_4 - \frac{Y_1}{T_r} \cdot \psi_r^0 \cdot x_2 \cdot x_3 - \frac{p \cdot K_r}{L_s^*} \cdot x_3 \cdot x_4 - R_r \cdot K_r \cdot Y_1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, \\
\frac{dx_3}{dt} &= R_r \cdot K_r \cdot x_1 - \frac{1}{T_r} \cdot x_3, \\
\frac{dx_4}{dt} &= \frac{1}{J} \cdot \frac{3}{2} \cdot p \cdot K_r \cdot \psi_r^0 \cdot x_2 + \frac{1}{J} \cdot \frac{3}{2} \cdot p \cdot K_r \cdot x_2 \cdot x_3.
\end{aligned} \right. \tag{5.123}$$

Так как ММСР применим к решению задачи АКОР не ко всем полиномиальным объектам, а лишь к выделенному классу этого множества – к квадратичным несимметричным объектам (5.6) и к кубическим симметричным объектам (5.7), то необходимо привести описание (5.123) к виду (5.6) или (5.7). Наиболее простым вариантом видится приведение полученной модели к виду (5.7) путём перевода всех квадратичных членов в кубические за счёт их умножения на некоторую координату  $x_5$ , имеющую во времени почти постоянное значение, равное единице. Описание (5.123) можно было бы привести и к виду (5.6), но для этого пришлось бы вводить не одну – а восемь дополнительных координат. Кроме того, приводя описание (5.123) к виду (5.7), сделаем матрицу  $A_1$  линейной части объекта диагональной за счёт умножения части линейных слагаемых на  $x_5^2$  и введения координаты  $x_4$  в последнее уравнение. Это позволит существенно уменьшить объем вычислений при обращении матриц, входящих в алгоритм синтеза (5.54). В результате получим следующую модель АД:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{T_s^*} \cdot x_1 + p \cdot \omega^0 \cdot x_2 \cdot x_5^2 + \frac{K_r}{L_s^* \cdot T_r} \cdot x_3 \cdot x_5^2 + R_r \cdot K_r \cdot (Y_0 + Y_1 \cdot \psi_r^0) \cdot x_2^2 \cdot x_5 + \\
&+ p \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 + R_r \cdot K_r \cdot Y_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 + \frac{1}{L_s^*} \cdot u_1, \\
\frac{dx_2}{dt} &= -p \cdot \omega^0 \cdot x_1 \cdot x_5^2 - \left( \frac{1}{T_s^*} + \frac{Y_0}{T_r} \cdot \psi_r^0 + \frac{Y_1}{T_r} \cdot (\psi_r^0)^2 \right) \cdot x_2 - \frac{p \cdot K_r}{L_s^*} \cdot \omega^0 \cdot x_3 \cdot x_5^2 - \\
&- \left( \frac{p}{R_r \cdot K_r \cdot T_r} + \frac{p \cdot K_r}{L_s^*} \right) \cdot \psi_r^0 \cdot x_4 \cdot x_5^2 - R_r \cdot K_r \cdot (Y_0 + Y_1 \cdot \psi_r^0) \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 - \\
&- p \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 - \frac{Y_1}{T_r} \cdot \psi_r^0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 - \frac{p \cdot K_r}{L_s^*} \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 - \\
&- R_r \cdot K_r \cdot Y_1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \frac{1}{L_s^*} \cdot u_2, \\
\frac{dx_3}{dt} &= R_r \cdot K_r \cdot x_1 \cdot x_5^2 - \frac{1}{T_r} \cdot x_3, \\
\frac{dx_4}{dt} &= \frac{1}{J} \cdot \frac{3}{2} \cdot p \cdot K_r \cdot \psi_r^0 \cdot x_2 \cdot x_5^2 + \frac{1}{J} \cdot \frac{3}{2} \cdot p \cdot K_r \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 - a_{44} \cdot x_4 + a_{44} \cdot x_4 \cdot x_5^2, \\
\frac{dx_5}{dt} &= -a_{55} \cdot x_5, \quad a_{55} \rightarrow 0, \quad x_{55}(t=0)=1.
\end{aligned} \right. \quad (5.124)$$

В данной системе уравнений коэффициенту  $a_{44}$  можно придать любое значение, так как он не изменяет математическую запись уравнений динамики двигателя, например,  $a_{44} = 5$ . Модель АД (5.124), записанная в отклонениях (5.122) от некоторого заданного (базового) режима работы (5.120), (5.121), отвечает описанию (5.7) с соответствующими матрицами  $A_I$  и  $A_3$ .

На основе математической модели (5.124) возмущённого движения АД осуществим синтез квазиоптимального по ФОР (5.116) регулятора скорости и потокосцепления для двигателя АИР56В4 с параметрами (5.119).

С этой целью, применяя метод равных вкладов максимальных отклонений (см. раздел 4.3), определяем параметры критерия обобщённой работы (5.116) (в последствии уточнённых в результате целенаправленного перебора):

$$Q = \begin{pmatrix} 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При указанных параметрах двигателя, критерия качества и фиксированном задающем воздействии по потокосцеплению  $\psi_r^0 = 0.8$  Вб находим с использованием программы приложения 1 закон квазиоптимального управления

$$U(X) = (u_1(X), u_2(X))^T, \quad (5.125)$$

$$u_1(X) = -5.55 \cdot 10^3 \cdot x_1 - 9.91 \cdot 10^{-6} \cdot \omega^0 \cdot x_4 + 3.04 \cdot 10^{-5} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 +$$

$$+ 3.07 \cdot 10^{-5} \cdot \omega^0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - 3.14 \cdot 10^{-4} \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 - 9.59 \cdot 10^{-6} \cdot (\omega^0)^2 \cdot x_3 -$$

$$- 9.25 \cdot 10^{-6} \cdot x_3 \cdot x_4^2 - 8.43 \cdot 10^{-7} \cdot x_1 \cdot x_4^2 - 8.60 \cdot 10^{-7} \cdot (\omega^0)^2 \cdot x_1 -$$

$$- 1.05 \cdot 10^{-4} \cdot x_1 \cdot x_2^2 - 6.96 \cdot 10^4 \cdot x_3 + 3.57 \cdot 10^{-1} \cdot x_2^2 \cdot x_3 -$$

$$- 3.01 \cdot 10^{-4} \cdot x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 - 1.70 \cdot 10^{-6} \cdot \omega^0 \cdot x_1 \cdot x_4 - 1.82 \cdot 10^{-5} \cdot \omega^0 \cdot x_1 \cdot x_2 +$$

$$+ 1.38 \cdot 10^{-4} \cdot \omega^0 \cdot x_2 \cdot x_3^2 + 3.55 \cdot 10^{-4} \cdot x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 - 9.75 \cdot 10^{-6} \cdot x_4^2 -$$

$$- 2.09 \cdot 10^{-1} \cdot x_2^2 - 1.88 \cdot 10^{-5} \cdot \omega^0 \cdot x_3 \cdot x_4 - 6.48 \cdot 10^{-5} \cdot \omega^0 \cdot x_2 \cdot x_3 +$$

$$+ 1.36 \cdot 10^{-4} \cdot x_2 \cdot x_3^2 \cdot x_4 - 1.80 \cdot 10^{-5} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + 7.58 \cdot 10^{-5} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 -$$

$$- 1.62 \cdot 10^{-2} \cdot x_2 \cdot x_4 - 1.63 \cdot 10^{-2} \cdot \omega^0 \cdot x_2,$$

$$u_2(X) = 7.14 \cdot 10^{-1} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - 3.01 \cdot 10^{-4} \cdot x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^2 - 1.62 \cdot 10^{-2} \cdot x_1 \cdot x_4 -$$

$$- 2.57 \cdot 10^3 \cdot x_2 - 5.00 \cdot 10^2 \cdot x_4 - 6.23 \cdot 10^{-2} \cdot x_2^3 \cdot x_3^2 - 9.08 \cdot 10^{-6} \cdot \omega^0 \cdot x_1^2 -$$

$$- 1.63 \cdot 10^{-2} \cdot \omega^0 \cdot x_1 - 1.04 \cdot 10^{-2} \cdot \omega^0 \cdot x_3 - 9.01 \cdot 10^{-6} \cdot x_1^2 \cdot x_4 -$$

$$- 8.60 \cdot 10^{-5} \cdot (\omega^0)^2 \cdot x_2 - 6.07 \cdot 10^3 \cdot x_2 \cdot x_3 - 3.58 \cdot 10^3 \cdot x_2 \cdot x_3^2 -$$

$$- 8.44 \cdot 10^{-5} \cdot x_2 \cdot x_4^2 - 4.19 \cdot 10^{-1} \cdot x_1 \cdot x_2 - 2.79 \cdot 10^{-3} \cdot \omega^0 \cdot x_2^2 -$$

$$- 2.77 \cdot 10^{-3} \cdot x_2^2 \cdot x_4 - 1.05 \cdot 10^{-4} \cdot x_1^2 \cdot x_2 + 7.35 \cdot 10^{-2} \cdot x_2^3 \cdot x_3 +$$

$$+ 1.81 \cdot 10^{-4} \cdot x_3^2 \cdot x_4 + 1.84 \cdot 10^{-4} \cdot \omega^0 \cdot x_3^2 + 3.55 \cdot 10^{-4} \cdot x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3 -$$

$$- 6.28 \cdot 10^{-4} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 - 1.70 \cdot 10^{-4} \cdot \omega^0 \cdot x_2 \cdot x_4 + 4.72 \cdot 10^{-3} \cdot \omega^0 \cdot x_2^2 \cdot x_3 +$$

$$+ 1.52 \cdot 10^{-5} \cdot x_1^2 \cdot x_3 \cdot x_4 + 1.38 \cdot 10^{-4} \cdot \omega^0 \cdot x_1 \cdot x_3^2 + 7.58 \cdot 10^{-5} \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 -$$

$$- 6.48 \cdot 10^{-5} \cdot \omega^0 \cdot x_1 \cdot x_3 + 1.36 \cdot 10^{-4} \cdot x_1 \cdot x_3^2 \cdot x_4 + 1.53 \cdot 10^{-5} \cdot \omega^0 \cdot x_1^2 \cdot x_3 +$$

$$+ 4.68 \cdot 10^{-3} \cdot x_2^2 \cdot x_3 \cdot x_4 - 2.17 \cdot 10^{-2} \cdot x_2^3 - 5.90 \cdot 10^2 \cdot x_3 \cdot x_4.$$

Полученный закон регулирования имеет достаточно много слагаемых и поэтому сложен для практической реализации. Упростим управление (5.125), оставив в нём лишь небольшое количество слагаемых, имеющих наибольшие по модулю значения коэффициентов:

$$\begin{cases} u_1(X) = -5.55 \cdot 10^3 \cdot x_1 - 6.96 \cdot 10^4 \cdot x_3, \\ u_2(X) = -2.57 \cdot 10^3 \cdot x_2 - 5.00 \cdot 10^2 \cdot x_4 - \\ - 6.07 \cdot 10^3 \cdot x_2 \cdot x_3 - 5.90 \cdot 10^2 \cdot x_3 \cdot x_4 - 3.58 \cdot 10^3 \cdot x_2 \cdot x_3^2. \end{cases} \quad (5.126)$$

Для сравнения законов регулирования (5.125) и (5.126) в системе Maple 9.5 при решении рассматриваемой задачи АКОР с различными началь-

ными условиях были вычислены величины ФОР (1.19) для (5.125) и (5.126). Результаты представлены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Сравнение полного и упрощённого законов управления

Начальные условия и задание по скорости	Величины ФОР	
	при использовании закона регулирования (5.125)	при использовании закона регулирования (5.126)
$\mathbf{X}_0 = (-0.1, -0.5, 0.1, 5, 1)^T$ , $\omega^0 = 10$ .	2412.152	2412.158
$\mathbf{X}_0 = (0.3, 0.2, -0.4, 30, 1)^T$ , $\omega^0 = 60$ .	59253	59268
$\mathbf{X}_0 = (0.4, -0.3, -0.5, 90, 1)^T$ , $\omega^0 = 100$ .	273740	277180
$\mathbf{X}_0 = (0.3, -0.2, -0.5, 140, 1)^T$ , $\omega^0 = 140$ .	697499	723230

Из таблицы видно, что наибольшая разница (3.6 %) в результатах применения полного (5.125) и упрощённого (5.126) законов регулирования наблюдается при работе АД в диапазоне скоростей близких к номинальной.

Для оценки качества управления, обеспечиваемого синтезированными законами (5.125) и (5.126) в пакете Simulink (в составе MATLAB 6.5) было проведено сравнительное моделирование системы векторного управления, описание которой представлено выражениями (5.106) – (5.112) (см. рис. 5.3), при использовании различных законов обратной связи:

I) закона регулирования (5.125), разработанного с использованием ММСР;

II) закона регулирования (5.126), полученного из (5.125) путём отбрасывания слагаемых с незначительным весом;

III) закона регулирования (5.113), предложенного А. В. Садовым [59];

IV) ПИД-закона регулирования [62]:

$$\begin{cases} u_1(t) = K_{п\psi} \cdot (\psi_r(t) - \psi_r^0) + \frac{1}{K_{и\psi}} \cdot \int_0^t (\psi_r(t) - \psi_r^0) dt + K_{д\psi} \cdot \frac{d}{dt} (\psi_r(t) - \psi_r^0), \\ u_2(t) = K_{п\omega} \cdot (\omega(t) - \omega^0) + \frac{1}{K_{и\omega}} \cdot \int_0^t (\omega(t) - \omega^0) dt + K_{д\omega} \cdot \frac{d}{dt} (\omega(t) - \omega^0), \end{cases} \quad (5.127)$$

где  $K_{п\psi} = 12000$ ,  $K_{и\psi} = 0.1$ ,  $K_{д\psi} = 13$ ,  $K_{п\omega} = 210$ ,  $K_{и\omega} = 0.67$ ,  $K_{д\omega} = 0.08$ .

При моделировании сигналы управлений на выходе каждого регулятора ограничивались величиной  $U_m = \sqrt{2} \cdot 200$  В путём применения управляющих сигналов в качестве аргумента функции

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} +U_m & \text{при } x > U_m, \\ x & \text{при } -U_m \leq x \leq U_m, \\ -U_m & \text{при } x < -U_m. \end{cases}$$

Будем рассматривать АД в составе силового электропривода антенны радиолокационной станции, работающей в режиме поиска цели (сканирования). Для данного режима характерны частые и резкие изменения задания по скорости при постоянном моменте нагрузки. Зачастую, вал двигателя бывает подвержен также действию различных случайных возмущений, например, от ветровой нагрузки на антенну. В связи с этим рассмотрим следующие режимы работы привода:

а) работа двигателя с постоянной нагрузкой на валу  $M_c = 0.8 \cdot M_{\text{ном}} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$  при скачкообразных изменениях задания по скорости в диапазоне от  $\omega^0 = 0.15 \cdot \omega_{\text{ном}} \approx 20 \text{ рад/с}$  до  $\omega^0 = 0.85 \cdot \omega_{\text{ном}} \approx 120 \text{ рад/с}$ ;

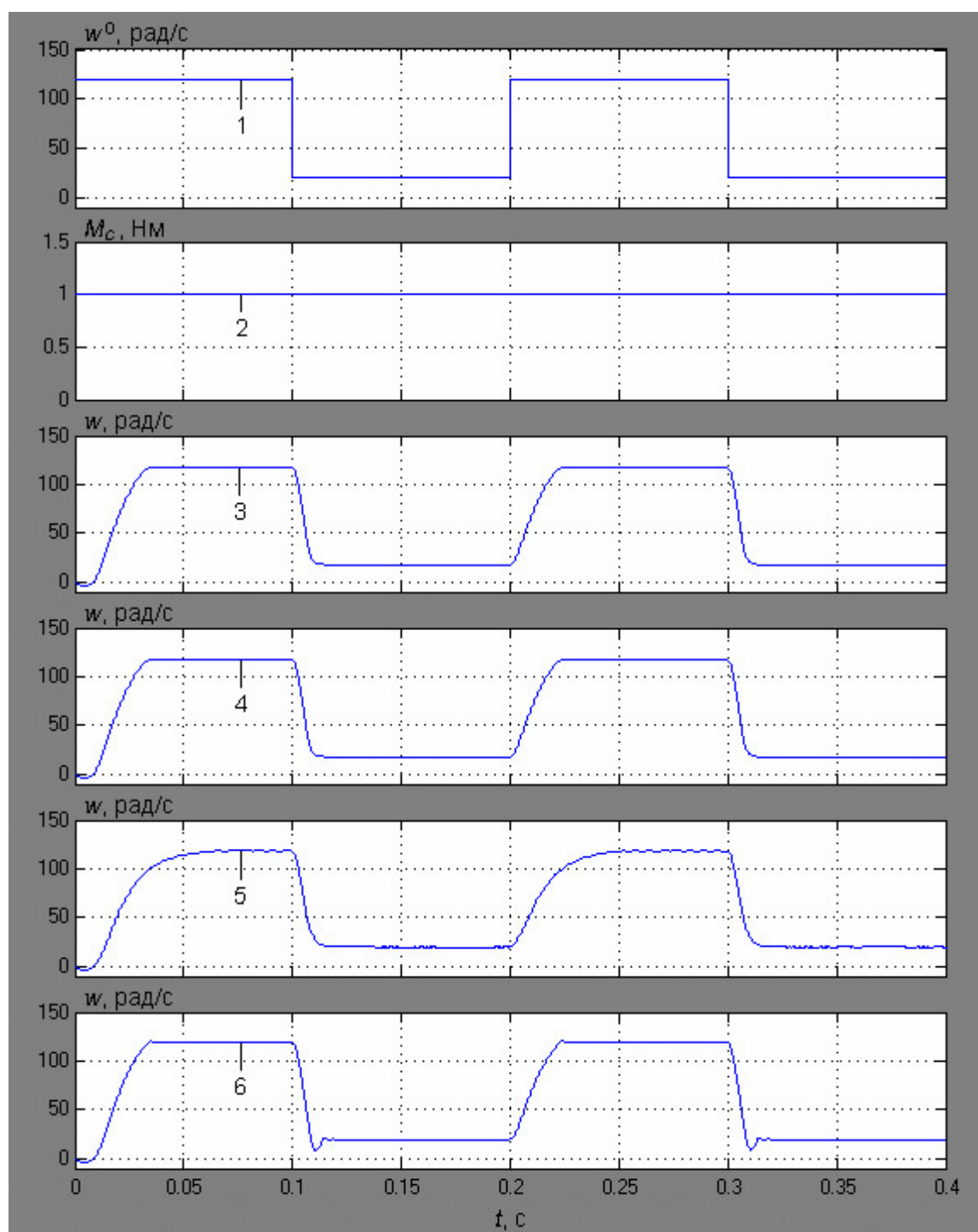
б) работа привода с постоянной нагрузкой на валу  $M_c = 0.8 \cdot M_{\text{ном}} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$  под действием возмущений, представленных дополнительным моментом нагрузки, величина которого изменяется случайным образом с частотой  $f_{\text{п}} = 20 \text{ Гц}$  и распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_{\text{п}} = 0.04$ , при скачкообразных изменениях задания по скорости в диапазоне от  $\omega^0 = 0.15 \cdot \omega_{\text{ном}} \approx 20 \text{ рад/с}$  до  $\omega^0 = 0.85 \cdot \omega_{\text{ном}} \approx 120 \text{ рад/с}$ .

Графические результаты моделирования электропривода представлены на рис. 5.8, на котором приняты обозначения:

- 1 – задание по скорости, 2 – момент нагрузки на валу двигателя,
- 3 – скорость двигателя под воздействием закона (5.125),
- 4 – скорость двигателя под воздействием закона (5.126),
- 5 – скорость двигателя под воздействием закона (5.113),
- 6 – скорость двигателя под воздействием закона (5.127).

Получаемое качество регулирования скорости оценим с помощью квадратичного функционала (5.115), определенного на интервале времени  $[t_1, t_2] = [0, 0.4]$ , и величины перерегулирования. Подчеркнем, что наличие перерегулирования в работе электропривода антенны радиолокационной станции недопустимо. В табл. 5.2 приведены величины функционала (5.115) и перерегулирования при работе АД, обеспечиваемые указанными законами регулирования в выделенных режимах работы.

Из приведённой таблицы видно, что синтезированный закон квазиоптимального управления (5.125) и его упрощённый вариант (5.126) позволяют достигать достаточно качественного регулирования скорости в режимах работы АД, характеризующихся резкими и частыми изменениями задания по скорости при постоянном моменте нагрузки на валу и при моменте нагрузки, искажённом помехами.



a



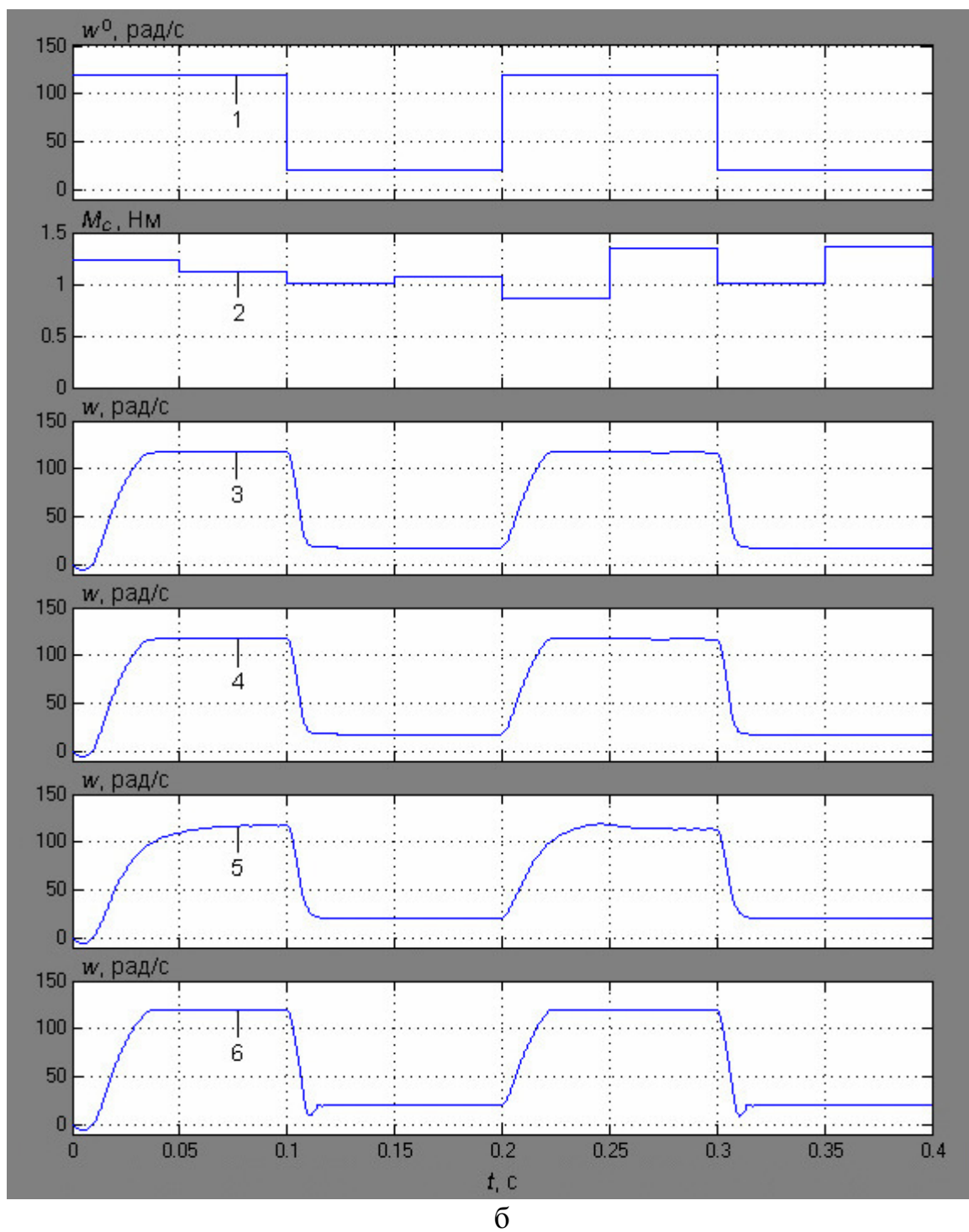


Рис. 5.8. Моделирование работы АД под воздействием различных законов регулирования в различных режимах:  
а – работа АД в режиме а; б – работа АД в режиме б

Таблица 5.2

## Показатели качества регулирования скорости асинхронного электропривода

Законы регулирования	Значения показателей качества в различных режимах работы					
	режим а			режим б		
	величина функционала (5.115)	перерегулирование		величина функционала (5.115)	перерегулирование	
		при увеличении скорости	при уменьшении скорости		при увеличении скорости	при уменьшении скорости
(5.125)	378.9674	–	–	388.7281	–	–
(5.126)	378.9679	–	–	388.7286	–	–
(5.113)	436.7916	–	–	443.2857	–	–
(5.127)	384.4257	0.3 %	9.3 %	395.1311	0.3 %	9.3 %

По результатам сравнений (см. рис. 5.8 и табл. 5.2) законы управления (5.125) и (5.126) обеспечивают более качественное регулирование скорости в сравнении с законами (5.113) и (5.127).

## Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение кронекеровского произведения матриц. По заданному вектору  $X$  запишите координаты вектора  $X^{[2]}$ .
2. Укажите основные свойства кронекеровского произведения матриц.
3. Запишите формулы дифференцирования скалярной и векторной функций по их векторному аргументу.
4. Запишите формулу дифференцирования кронекеровской степени  $X^{[k]}$  по вектору  $X$ .
5. Дайте определение нормы (метрики) вектора. Приведите примеры.
6. Сформулируйте определение нормы матрицы. Приведите примеры матричных норм.
7. Какие векторные и матричные нормы называются согласованными? Укажите такие нормы.
8. Сформулируйте основные положения метода матричных степенных рядов в решении задачи АКОР.
9. Укажите условие, при котором осуществима рекуррентная процедура расчета коэффициентов функции Ляпунова ММСР.
10. Запишите условия сходимости матричных степенных рядов, используемых в решении рассмотренных задач АКОР.
11. Укажите основные достоинства метода матричных степенных рядов решения задачи АКОР.
12. В чем состоят принципиальные различия обобщенного метода степенных рядов от стандартного метода?

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аверин С.И. Системы управления следящими приводами антенных установок/ С.И. Аверин, А.В. Садовой, Б.В. Сухинин. – М.: Высш. шк., 1989. – 256 с.
2. Садовой А.В. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами/ А.В. Садовой, Б.В. Сухинин, Ю.В. Сохина. – Киев: ИСИМО, 1996. – 298 с.
3. Крутько П.Д. Управление исполнительными системами роботов/ П.Д. Крутько. – М.: Наука, 1991. – 334 с.
4. Солодовников В.В. Расчет оптимальных систем автоматического управления при наличии помех/ В.В. Солодовников, П.С. Матвеев. – М.: Машиностроение, 1973. – 240 с.
5. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин/ И.П. Копылов. – М.: Высш. шк., 1994. – 318 с.
6. Мельников Г.И. Динамика нелинейных механических и электромеханических систем/ Г.И. Мельников. – Л.: Машиностроение, 1975. – 200 с.
7. Рудаков В.В. Асинхронные электроприводы с векторным управлением/ В.В. Рудаков, И.М. Столяров, В.А. Дартау. – Л.: Энергоатомиздат, 1987. – 134 с.
8. Башарин А.В. Управление электроприводами: учеб. пособие / А.В. Башарин, В.А. Новиков, Г.Г. Соколовский. – Л.: Энергия, 1982. – 392 с.
9. Современная прикладная теория управления: в 3 т./ А.А. Колесников [и др.]. – Москва-Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000.
10. Ловчаков В.И. Нелинейные системы управления электроприводами и их аналитическое конструирование/ В.И. Ловчаков, Б.В. Сухинин, В.В. Сурков. – Тула: ТулГУ, 1999. – 180 с.
11. Валеев К.Г. Построение функций Ляпунова / К.Г. Валеев, Г.С. Финин. – Киев: Наук. думка, 1981. – 412 с.
12. Колесников А.А. Последовательная оптимизация нелинейных агрегированных систем управления / А.А. Колесников. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 160 с.
13. Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления / Н.Д. Егупова [и др.]. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 748 с.
14. Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления/ Н.Д. Егупова [и др.]. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 736 с.
15. Методы современной теории систем автоматического управления/ Н.Д. Егупова [и др.]. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 748 с.
16. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели/ П.Д. Крутько. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
17. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели/ П.Д. Крутько. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
18. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. – М.: Наука, 1983. – 392 с.

19. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 232 с.
20. Сейдж Э.П. Оптимальное управление системами / Э.П. Сейдж, Ч.С. Уайт. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.
21. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение/ Д. Сю, А. Мейер. – М.: Машиностроение, 1972. – 760 с.
22. Зубов В.И. Лекции по теории управления/ В.И. Зубов. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
23. Летов А.М. Математическая теория процессов управления/ А.М. Летов. – М.: Наука, 1981. – 256 с.
24. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления/ В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М. Высш. шк., 1998. – 576 с.
25. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование / А.А. Красовский. – М.: Наука, 1973. – 558 с.
26. Гноенский А.С. Математические основы теории управляемых систем/ А.С. Гноенский, Г.А. Каменский, Л.Э. Эльсгольц – М.: Наука, 1969. – 512 с.
27. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы/ А.Г. Александров. – М.: Высш. шк., 1989. – 264 с.
28. Чураков Е.П. Оптимальные и адаптивные системы/ Е.П. Чураков. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 256 с.
29. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления/ Ю.П. Петров. – Л: Энергия, 1977. – 280 с.
30. Абдулаев Н.Д. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов/ Н.Д. Абдуллаев, Ю.П. Петров. – Л: Энергоатомиздат, 1985. – 240 с.
31. Квакернак Х. Линейные оптимальные системы управления/ Х. Квакернак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977. – 650 с.
32. Кузин Л.Т. Основы кибернетики/ Л.Т. Кузин. – М.: Энергия, 1973. – 504 с.
33. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
34. Карташов А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления/ А.П. Карташов, Б.Л. Рождественский. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
35. Кунцевич В.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова/ В.М. Кунцевич, М.М. Лычак. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
36. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова/ Е.А. Барбашин. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
37. Сухинин Б.В. Синтез и анализ оптимальных релейных регуляторов методами А.А. Красовского и динамического программирования/ Б.В. Сухинин, В.И. Ловчаков, В.В. Сурков // Управление электротехническими объектами. – Тула: ТулГУ, 1997. – С. 79-88.
38. Теория автоматического управления: в 2 т./ А.А. Воронов [и др.]. – М.: Высш. шк., 1986.
39. Понкратов В.В. Метод синтеза многосвязных автоматических систем с ограниченной нормой вектора управляющих воздействий и его применение в задачах электропривода/ В.В. Понкратов// Мехатроника. – 2000. – №5. – С. 32-41.

40. Дегтярев Г.Л. Синтез локально-оптимальных алгоритмов управления/ Г.Л., Дегтярев, И.С. Ризаев. – М.: Машиностроение, 1991. – 304 с.
41. Новая форма описания нелинейных объектов и задач оптимального управления/ В. И. Ловчаков [и др.] // Изв. ТулГУ, Серия Вычислительная техника, информационные технологии, системы управления. Вып. 3. Системы управления. Т.2. – 2006. – С. 12-15.
42. Ловчаков В. И. Метод матричных степенных рядов в решении нелинейных задач оптимального управления/ В. И. Ловчаков, Е.В. Ловчаков// Изв. ТулГУ. Сер. Вычислительная техника, информационные технологии, системы управления. Вып. 3. Системы управления. Т.2. – 2006. – С. 16-19.
43. Ланкастер П. Теория матриц/ П. Ланкастер. – М.: Наука, 1982. – 269 с.
44. Беллман Р. Введение в теорию матриц/ Р. Беллман. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
45. Аверина А.Д. Исследование нелинейных систем управления на основе применения дискретных моделей/ А.Д. Аверина, А.Д. Модяев // Дискретные нелинейные системы. – М.: Машиностроение, 1982. – С. 183 – 206.
46. Изерман Р. Цифровые системы управления/ Р. Изерман. – М.: Мир, 1984. – 541 с.
47. Воробьев Н.Н. Теория рядов/ Н.Н. Воробьев. – М.: Наука, 1975. – 368 с.
48. Асатурян В.И. Теория планирования эксперимента/ В.И. Асатурян. – М.: Радио и связь, 1983. – 248 с.
49. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров/ Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
50. Кафанов В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии/ В.В. Кафанов. – М.: Химия, 1976. – 463 с.
51. Олейников А.В. Оптимальное управление технологическими процессами в нефтяной и газовой промышленности/ А.В. Олейников. – Л.: Недра, 1982. – 216 с.
52. Заславский Б. Г. Управление экологическими системами/ Б. Г. Заславский, Р.А. Полуэктов. – М.: Наука, 1988. – 294 с.
53. Пупков К.А. Функциональные ряды в теории нелинейных систем / К.А. Пупков, В.И. Капалин, А.С. Ющенко. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
54. Пупков К.А. Статистические методы анализа, синтеза и идентификации нелинейных систем автоматического управления/ К.А. Пупков, Н.Д. Егупов, А.И. Трофимов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. – 562 с.
55. Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем/ Ю.С. Попков [и др.]. – М.: Энергия, 1976. – 440 с.
56. Данилов Л.В. Ряды Вольтерра-Пикара в теории нелинейных электрических цепей/ Л.В. Данилов. – М.: Радио и связь, 1987. – 224 с.
57. Электропривод переменного тока с частотным управлением. Бюттнер Ю. [и др.] / Под ред. Г. А. Щукина. – М.: Моск. энерг. ин-т, 1989. – 76 с.
58. Системы подчинённого регулирования электроприводов переменного тока с вентильными преобразователями / О. В. Слежановский [и др.] М.: Энергоатомиздат, 1983. – 256 с.

59. Садовой А. В. Синтез и исследование оптимальных по точности систем управления электроприводами с низкой чувствительностью к широкому спектру дестабилизирующих факторов: дис. ... д-ра техн. наук / А. В. Садовой. – Днепропетровск: ДГТУ, 1992. 501 с.
60. Дарьенков А. Б. Бездатчиковая система векторного управления с ориентацией по вектору потокосцепления ротора/ А. Б. Дарьенков, В. В. Марков, В. Г.Титов. – <http://masters.donntu.edu.ua/2005/eltf/bondarenko/library/article9.htm>.
61. Унифицированная серия асинхронных двигателей Интерэлектро / В. И. Радин [и др.]; под ред. В. И. Радиана. – М.: Энергоатомиздат 1990. – 416с.
62. Ключев А. С. Настройка средств автоматизации и автоматических систем регулирования / А.С. Ключев. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 368 с.

## Листинг программы ММСП в среде MATHCAD 2001

Метод матричных степенных рядов (ММСП) в задаче АКОР  
Красовского А.А. Контрольный пример.

1. Ввод исходных данных

ORIGIN := 1      n := 2

1.1. Матрицы объекта управления  $dX/dt = A1X + A2(X*X) + B1u(X)$

$$A1 := \begin{pmatrix} -0.1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.2. Матрицы Q, R квадратичного ФОР

$$Q2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R := \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Проверка устойчивости матрицы A1. P - вектор собственных значений.

P := eigenvals(A1)

$$P = \begin{pmatrix} -0.1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3. Расчет функции Ляпунова.

Кронекеровское произведение матриц A и B размерностей  
na·mb и nb·mb.

```
KRP(A, B, na, ma, nb, mb) :=
|
|   for ia ∈ 1, 2.. na
|   |   for ja ∈ 1, 2.. ma
|   |   |   for ib ∈ 1, 2.. nb
|   |   |   |   for jb ∈ 1, 2.. mb
|   |   |   |   |   ic ← nb·(ia - 1) + ib
|   |   |   |   |   jc ← mb·(ja - 1) + jb
|   |   |   |   |   Cic, jc ← Aia, ja·Bib, jb
|   |   |   |   C
|
```

### 3.1. Расчет квадратичных членов функции Ляпунова.

$$IM := \text{matrix}(n, n, \delta) \quad IM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$IA1 := \text{KRP}(IM, A1, n, n, n, n)$$

$$A1I := \text{KRP}(A1, IM, n, n, n, n)$$

$$IA1S := IA1 + A1I$$

$$IA1S = \begin{pmatrix} -0.2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3.1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$C2 := -Q2 \cdot IA1S^{-1}$$

$$C2 = (5 \quad 1.613 \quad 1.613 \quad 0.704)$$

Проверка - см. пример 4.4.

$$A11 := \frac{-Q2_{1,1}}{2 \cdot A1_{1,1}}$$

$$A11 = 5$$

$$A12 := -2 \cdot A1_{1,2} \cdot \frac{A11}{(A1_{1,1} + A1_{2,2})}$$

$$A12 = 3.226$$

$$A22 := \frac{-(Q2_{1,4} + A1_{1,2} \cdot A12)}{2 \cdot A1_{2,2}}$$

$$A22 = 0.704$$

### 3.2. Расчет кубических членов функции Ляпунова.

$$IA2 := \text{KRP}(IM, A2, n, n, n, n^2)$$

$$A2I := \text{KRP}(A2, IM, n, n^2, n, n)$$

$$IA2S := IA2 + A2I$$

$$IA2S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$I2 := \text{KRP}(IM, IM, n, n, n, n)$$

$$I2A1 := \text{KRP}(I2, A1, n^2, n^2, n, n)$$

$$A1I2 := \text{KRP}(A1, I2, n, n, n^2, n^2)$$

$$IA1I := \text{KRP}(IM, A1I, n, n, n^2, n^2)$$

$$I2A1S := I2A1 + IA1I + A1I2$$



$$C3 := -C2 \cdot IA2S \cdot I2A1S^{-1}$$

$$C3 = (0 \ 0 \ 0 \ -0.26441 \ 0 \ 0 \ -0.26441 \ -0.21527)$$

$$A112 := C3_{1,2} + C3_{1,3} + C3_{1,5}$$

$$A112 = 0$$

$$A122 := C3_{1,4} + C3_{1,6} + C3_{1,7}$$

$$A122 = -0.529$$

Проверка - см. пример 4.4.

$$A111 := 0$$

$$A112 := 0$$

$$A122 := A2_{2,4} \cdot \frac{-A12}{(A1_{1,1} + 2 \cdot A1_{2,2})}$$

$$A122 = -0.529$$

$$A222 := \frac{-(A1_{1,2} \cdot A122 + 2 \cdot A2_{2,4} \cdot A22)}{3 \cdot A1_{2,2}}$$

$$A222 = -0.215$$

3.3. Расчет членов функции Ляпунова четвертой степени.

$$I2A2 := KRP(I2, A2, n^2, n^2, n, n^2)$$

$$A2I2 := KRP(A2, I2, n, n^2, n^2, n^2)$$

$$A2I := KRP(A2, IM, n, n^2, n, n)$$

$$IA2I := KRP(IM, A2I, n, n, n^2, n^3)$$

$$I2A2S := I2A2 + IA2I + A2I2$$

$$I3 := KRP(I2, IM, n^2, n^2, n, n)$$

$$A1I3 := KRP(A1, I3, n, n, n^3, n^3)$$

$$IA1I2 := KRP(IA1, I2, n^2, n^2, n^2, n^2)$$

$$I2A1I := KRP(I2, A1I, n^2, n^2, n^2, n^2)$$

$$I3A1 := KRP(I3, A1, n^3, n^3, n, n)$$

$$I3A1S := A1I3 + IA1I2 + I2A1I + I3A1$$

$$C4 := -C3 \cdot I2A2S \cdot I3A1S^{-1}$$

$$C4 =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0	0.0581	0

4. Расчет закона управления

$$U(X) = -0.5R^{-1}B^T(X) \sum_{i=1}^{\infty} C_{i+1} \widetilde{(X^{[i]} \otimes I)}$$

$$\begin{aligned}
u(X) := & \left| \begin{aligned}
& X_I \leftarrow \text{KRP}(X, IM, n, 1, n, n) \\
& IX \leftarrow \text{KRP}(IM, X, n, n, n, 1) \\
& s_1 \leftarrow C_2 \cdot (X_I + IX) \\
& X_2 \leftarrow \text{KRP}(X, X, n, 1, n, 1) \\
& X_{2I} \leftarrow \text{KRP}(X_2, IM, n^2, 1, n, n) \\
& X_{IX} \leftarrow \text{KRP}(X_I, X, n^2, n, n, 1) \\
& IX_2 \leftarrow \text{KRP}(IM, X_2, n, n, n^2, 1) \\
& s_2 \leftarrow C_3 \cdot (X_{2I} + X_{IX} + IX_2) \\
& X_3 \leftarrow \text{KRP}(X_2, X, n^2, 1, n, 1) \\
& X_{3I} \leftarrow \text{KRP}(X_3, IM, n^3, 1, n, n) \\
& X_{2IX} \leftarrow \text{KRP}(X_2, IX, n^2, 1, n^2, n) \\
& IX_3 \leftarrow \text{KRP}(IM, X_3, n, n, n^3, 1) \\
& X_{IX2} \leftarrow \text{KRP}(X_I, X_2, n^2, n, n^2, 1) \\
& s_3 \leftarrow C_4 \cdot (X_{3I} + X_{2IX} + X_{IX2} + IX_3) \\
& s \leftarrow (s_1 + s_2 + s_3)^T \\
& u \leftarrow -0.5 \cdot R^{-1} \cdot B_1^T \cdot s
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$X := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u(X) = (-4.839)$$

5. Оценка радиуса области сходимости ряда.

$$i := 1..n \quad j := 1..n^2$$

$$VA_{2i} := \sum_{j=1}^{n^2} |A_{2i,j}| \quad VA_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{norma}(A_2) := \max(VA_2)$$

$$r := \frac{\text{normi}(A_1)}{\text{norma}(A_2)} \quad r = 3$$

$$\text{norma}(A_2) = 1$$

6. Моделирование системы управления.

6.1. Описание системы в форме Коши.

```

F(t, Y) := 
  X ← submatrix(Y, 1, n, 1, 1)
  F1 ← A1 · X + A2 · KRP(X, X, n, 1, n, 1) + B1 · u(X)
  f2 ← Q2 · KRP(X, X, n, 1, n, 1) + 2 · R · u(X)2
  stack(F1, f2)

```

6.2. Начальные условия интегрирования.

$$Y0 := \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

t0 := 0

tk := 3.0

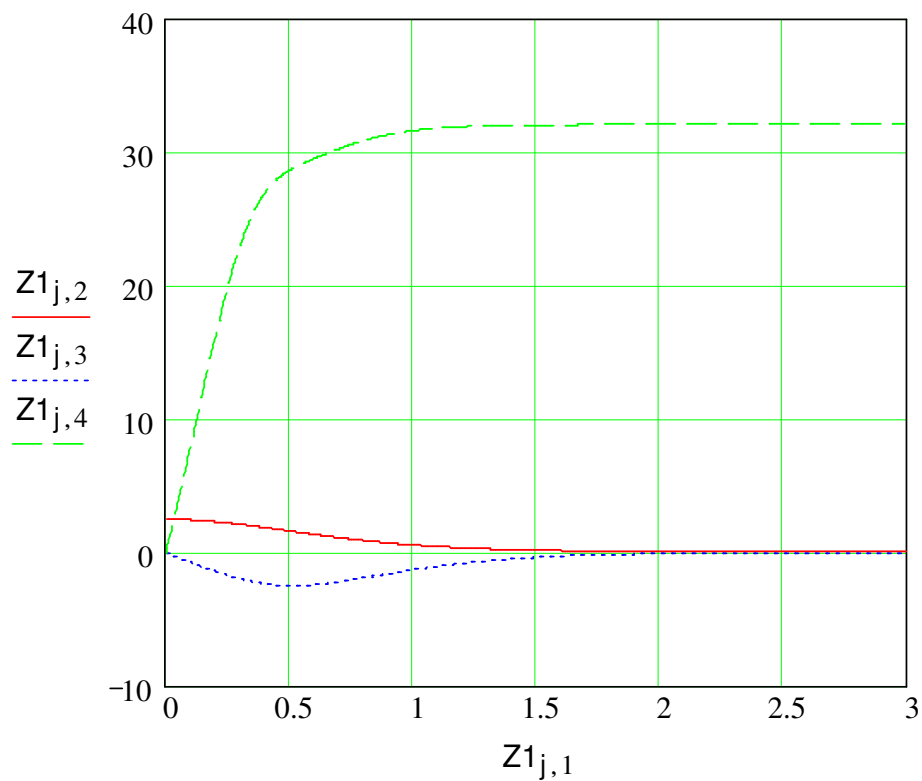
nn := 1000

j := 1.. 1000

6.3. Переходные процессы системы.

Z1 := Bulstoer(Y0, t0, tk, nn, F)

Z1 := Rkadapt(Y0, t0, tk, nn, F)



## 7. Проверка решения на основе определения функции Беллмана

$$C2 = (5 \quad 1.613 \quad 1.613 \quad 0.704)$$

$$C3 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad -0.264 \quad 0 \quad 0 \quad -0.264 \quad -0.215)$$

$$C4 =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0.058	0	0

$$X0 := \text{submatrix}(Y0, 1, n, 1, 1)$$

$$X0 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X2 := \text{KRP}(X0, X0, n, 1, n, 1)$$

$$X3 := \text{KRP}(X2, X0, n^2, 1, n, 1)$$

$$X4 := \text{KRP}(X3, X0, n^3, 1, n, 1)$$

$$S(X0) := C2 \cdot X2 + C3 \cdot X3 + C4 \cdot X4$$

$$J := Z1_{1000, 4}$$

$$S(X0) = (31.25)$$

$$J = 32.066$$

# Листинг программы ОМСР в среде MATHCAD 2001

Обобщенный метод степенных рядов (ОМСР) в задаче АКОР Красовского А.А.

Эта программа отличается от программы приложения 1 тем, что ее блок 3.3 заменяется следующим.

## 3.3. Расчет членов функции Ляпунова четвертой степени.

Формирование матриц уравнений (5.93)

```

I2A2 := KRP(I2, A2, n2, n2, n, n2)
A2I2 := KRP(A2, I2, n, n2, n2, n2)
A2I := KRP(A2, IM, n, n2, n, n)
IA2I := KRP(IM, A2I, n, n, n2, n3)
I2A2S := I2A2 + IA2I + A2I2
I3 := KRP(I2, IM, n2, n2, n, n)
A1I3 := KRP(A1, I3, n, n, n3, n3)
IA1I2 := KRP(IA1, I2, n2, n2, n2, n2)
I2A1I := KRP(I2, A1I, n2, n2, n2, n2)
I3A1 := KRP(I3, A1, n3, n3, n, n)
I3A1S := A1I3 + IA1I2 + I2A1I + I3A1
I3A2 := KRP(I3, A2, n3, n3, n, n2)
I2A2I := KRP(I2A2, IM, n3, n4, n, n)
IA2I2 := KRP(IA2I, IM, n3, n4, n, n)
A2I3 := KRP(A2, I3, n, n2, n3, n3)
I3A2S := A2I3 + IA2I2 + I2A2I + I3A2
    
```

Формирование нулевой матрицы

$i := 1 \quad j := 1..n^5 \quad M0_{i,j} := 0$

Формирование матриц уравнений МНК (5.95)

```

AA := augment(I3A1S, I3A2S)
D := C3·I2A2S   DD := augment(D, M0)
    
```

Решение по МНК

$C41 := DD \cdot AA^T \cdot (AA \cdot AA^T)^{-1}$

C41 =

	1	2	3	4	5	6
1	0.049	0.015	0.016	$5.984 \cdot 10^{-3}$	0.016	$6.28 \cdot 10^{-3}$

## О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ .....	3
Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИЛОВОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ.....	6
1.1. Структурная схема силового электропривода	6
1.2. Математическая модель объекта управления	8
1.3. Формализация критерия качества функционирования электропривода	18
Глава 2. ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	23
2.1. Функционалы, вариации и их свойства	23
2.2. Основные результаты классического вариационного исчисления	27
2.3. Принцип максимума Л.С. Понтрягина	40
2.4. Динамическое программирование	44
Глава 3. ЗАДАЧА СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРА. КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА. ....	51
3.1. Задача синтеза оптимального регулятора. . . .	51
3.2. Основные понятия и теоремы устойчивости А.М. Ляпунову	56
3.3. Нахождение функций Ляпунова. Решение уравнений Ляпунова	61
3.4. Применение функций Ляпунова в синтезе нелинейных систем Задача оптимального демпфирования переходных процессов	71
Глава 4. МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ.....	78
4.1. Решение задачи АКОР Летова-Калмана	78
4.2. Решение задачи АКОР по критерию обобщенной работы	86
4.3. Выбор весовых коэффициентов интегральных критериев качества	93
Глава 5. МЕТОД МАТРИЧНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ В РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ АКОР.....	99
5.1. Класс полиномиальных объектов управления и новая форма их описания	99
5.2. Сведения из теории матриц с кронекеровским произведением	105
5.3. Решение задачи АКОР	112
5.4. Метод синтеза оптимальных систем управления	120
5.5. Обобщенный метод степенных рядов	126
5.6. Аналитическое конструирование оптимального регулятора скорости для асинхронного привода	130
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	149
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Листинг программы ММСР в среде MATHCAD 2001	153
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Листинг программы ОМСР в среде MATHCAD 2001	159

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

ЛОВЧАКОВ Владимир Иванович  
СУХИНИН Борис Владимирович  
ФОМИЧЕВ Александр Александрович  
ФЕОФИЛОВ Евгений Иванович

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ  
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

*Редактор И.А. Есаян*  
*Подготовка оригинал-макета Т.В. Бекленищева*

Изд. лиц. ЛР № 020300 от 12.02.97. Подписано в печать 11.03.2006.

Формат бумаги 60х84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 8,8. Уч.-изд. л. 7,6.

Тираж 100 экз. Заказ .

Тульский государственный университет  
300600, г. Тула, просп. Ленина, 92.

Отпечатано в Издательстве ТулГУ  
300600, г. Тула, ул. Болдина, 151.

