Федеральное государственное образовательное учреждение
среднего профессионального образования
Московский колледж железнодорожного транспорта

26

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников образовательных учреждений
среднего профессионального образования
по группе специальностей:

1004	ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЕ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ
1706	ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭКСПЛУАТАЦИЯ ПОДЪЕМНО-ТРАНСПОРТНЫХ, СТРОИТЕЛЬНЫХ, ДОРОЖНЫХ МАШИН И ОБОРУДОВАНИЯ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ
1707	ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭКСПЛУАТАЦИЯ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ
2009	ЭКСПЛУАТАЦИЯ СРЕДСТВ СВЯЗИ
2103	АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ
2401	ОРГАНИЗАЦИЯ ПЕРЕВОЗОК И УПРАВЛЕНИЕ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ
2904	СТРОИТЕЛЬСТВО ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ, ПУТЬ И ПУТЕВОЕ ХОЗЯЙСТВО.

Москва 2005

ОДОБРЕНО
предметной
(цикловой) комиссией
математических и общих естественнонаучных дисциплин

Методические указания составлены в соответствии с примерной (рабочей) программой по дисциплине: "Математика" для всех технических специальностей ГОС СПО 2002 года.

Заместитель директора МКЖТ

Н.И. Воронова

Автор: **Семенова Н.А.** - преподаватель Московского колледжа железнодорожного транспорта

Редактор: **Берилло Г.М.**

Рецензент: **Багатурия М.В.** - преподаватель Московского колледжа железнодорожного транспорта

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время математика и ее методы широко используются при решении научно-технических проблем и народнохозяйственных задач. Происходит математизация всех наук, математика глубоко проникает во все отрасли народного хозяйства. Математические методы позволяют решать проблемы планирования производства и расшифровывать древние рукописи, проверять качество проектов и организовывать движение транспорта, прокладывать каналы и запускать космические корабли.

Математика является одной из таких наук, развитие которых служит необходимым условием ускорения научно-технического прогресса и повышения эффективности других наук.

Основная задача предмета «Математика» для средних специальных заведений состоит в том, чтобы вооружить студентов основами математических знаний, умений и навыков в объеме, необходимом для их повседневной практической деятельности, для усвоения общетехнических и специальных предметов, а также для дальнейшего повышения квалификации путем самообразования.

Учебным планом предусмотрена дисциплина «Математика» с объемом 40 часов аудиторных занятий при дневной форме обучения; при заочной форме обучения студент-заочник самостоятельно работает над этим программным учебным материалом и только 16 часов отводится на установочные и практические занятия под руководством преподавателя.

В результате изучения дисциплины студент

должен иметь представление:

- о роли и месте математики в современном мире, общности ее понятий и представлений;

должен знать:

- основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, теории вероятности и математической статистики;
- основные численные методы решения прикладных задач;

должен уметь:

- решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления;
- решать простейшие дифференциальные уравнения в частных производных;
- находить значения функций с помощью ряда Маклорена;
- решать простейшие задачи, используя элементы теории вероятности;
- находить функцию распределения случайной величины;
- использовать метод Эйлера для численного решения дифференциальных уравнений;
- находить аналитическое выражение производной по табличным данным;
- решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Данные методические указания ставят своей целью оказание помощи студентам-заочникам в организации их самостоятельной работы, содержат разъяснения некоторых теоретических положений для решения примеров и задач, способов их решения, вопросы для самопроверки, задания на контрольную работу.

Рекомендуется следующая последовательность изучения материала

1. Ознакомиться с содержанием программы.
2. Изучить материал по указанной в методических указаниях литературе.
3. Ответить на вопросы для самопроверки.
4. Закрепить усвоение материала путем разбора решенных задач в данных методических указаниях, на практических занятиях, в учебнике.
5. Приступить к решению задач контрольной работы, предварительно изучив материал, касающийся содержания задач.

В целях закрепления знаний и приобретения необходимых навыков программой предусмотрены практические занятия, конкретное число которых определяет цикловая комиссия колледжа. Ниже приведен перечень практических занятий (стр. 40).

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы

Контрольные работы следует выполнять самостоятельно и лишь после того, как проработан соответствующий теоретический материал и решен необходимый минимум задач. Так как каждой теме соответствует задача или упражнение, то контрольную работу следует выполнять постепенно по мере изучения материала.

При решении задач следует обосновать каждый шаг решения, исходя из теоретических основ курса. Не следует применять формулы, которые не входят в программу. Решение должно быть доведено до окончательного ответа.

1. Каждая работа выполняется в отдельной тетради школьного формата. Следует пронумеровать страницы и оставить на них поля не менее 3 см для замечаний преподавателя.
2. На обложке тетради должен быть приклеен титульный лист утвержденного образца или аккуратно записаны все данные титульного листа: шифр, специальность, если она не отражена в шифре, фамилия, имя, отчество учащегося, предмет и номер работы.
3. Работа должна быть выполнена чернилами одного цвета, аккуратно и разборчиво.
4. Каждую задачу надо начинать с новой страницы.
5. Решение задач желательно располагать в порядке номеров, указанных в задании. Номера задач следует указывать перед условием.
6. Условия задач должны быть обязательно переписаны полностью в контрольную тетрадь; к геометрическим задачам, кроме того, дается установленная краткая запись условия.
7. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять общие требования к культуре их ведения.
8. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями, используемые формулы нужно выписывать.
9. Чертежи следует выполнять карандашом с использованием чертежных инструментов, соблюдая масштаб.

10. В конце работы следует указать литературу, которой вы пользовались, проставить дату выполнения работы и подпись.
11. Если в работе допущены недочеты и ошибки, то учащийся должен выполнить все указания преподавателя, сделанные в рецензии.
12. Контрольные работы должны быть выполнены в срок (в соответствии с учебным планом-графиком). В период сессии работы на проверку не принимаются.
13. Работа, выполненная не по своему варианту, не учитывается и возвращается учащемуся без оценки.
14. Учащиеся, не имеющие зачета по контрольной работе, к экзамену не допускаются.
15. Во время экзамена зачтенные контрольные работы представляются преподавателю вместе с данными методическими указаниями.
16. Каждая контрольная работа имеет 50 вариантов. Вариант работы выбирается по двум последним цифрам шифра (номера личного дела). Например, учащиеся, имеющие шифры 23, 117, 300, 207, получат вариант 23, 17, 00, 07. Учащиеся, у которых шифры от 1 до 9 должны добавить впереди цифру «0», т.е. они получат варианты 01, 02, 03, …, 09.

В процессе изучения дисциплины студент-заочник должен выполнить одну контрольную работу.

После выполнения контрольной работы и практических занятий в сроки, предусмотренные учебным графиком, для проверки знаний студентов проводится экзамен по дисциплине «Математика».

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Введение

История возникновения, развития и становления математики как основополагающей дисциплины, необходимой для изучения профессиональных дисциплин. Цели, задачи математики. Связь математики с общепрофессиональными и специальными дисциплинами.

Студент должен иметь представление:

- о роли математики при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин в профессиональной деятельности.

Раздел 1 Математический анализ

Тема 1.1 Дифференциальное и интегральное исчисление

Функции одной независимой переменной. Пределы. Непрерывность функций. Производная, геометрический смысл. Исследование функций. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Замена переменной. Определенный интеграл. Вычисление определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла. Функции нескольких переменных. Приложение интеграла к решению прикладных задач. Частные производные.

Студент должен знать:

- первый и второй замечательные пределы;
- определение производной, ее геометрический смысл;
- таблицу производных;
- формулы производных суммы, произведения, частного;
- основные методы интегрирования;
- таблицу простейших интегралов;
- формулу Ньютона-Лейбница;
- определение частной производной;
- свойства определенного и неопределенного интегралов.

Студент должен уметь:

- вычислять производные функции при данном значении аргумента;
- исследовать функции с помощью производной и строить графики;
- интегрировать простейшие определенные интегралы;
- вычислять площади плоских фигур;
- находить частные производные различных порядков.

<u>Тема 1.2</u> Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Общие и частные решения. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Студент должен знать:

- типы задач, приводящие к дифференциальным уравнениям;
- определение дифференциального уравнения;
- определение общего и частного решений дифференциальных уравнений, их геометрической интерпретации;
- об интегральных кривых – решениях дифференциального уравнения;
- методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, дифференциальных уравнений первого порядка, дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Студент должен уметь:

- составлять дифференциальные уравнения на простейших задачах;
- решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными;
- решать однородные дифференциальные уравнения первого порядка;

- решать однородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Тема 1.3 Дифференциальные уравнения в частных производных

Простейшие дифференциальные уравнения в частных производных. Дифференциальные уравнения линейные относительно частных производных.

Студент должен знать:

- методы решения простейших дифференциальных уравнений с частными производными;
- методы решения дифференциальных уравнений первого порядка линейных относительно частных производных.

Студент должен уметь:

- решать простейшие дифференциальные уравнения в частных производных;
- решать дифференциальные уравнения первого порядка, линейные относительно частных производных.

Тема 1.4 Ряды

Числовые ряды. Сходимость и расходимость числовых рядов. Признак сходимости Даламбера. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость рядов. Функциональные ряды. Разложение функций в ряд Маклорена.

Студент должен знать:

- определение числовых и функциональных рядов;
- необходимый и достаточный признаки сходимости рядов, признак Даламбера;
- признаки знакопеременных рядов, признак Лейбница;
- метод представления функций в степенные ряды с помощью ряда Маклорена.

Студент должен уметь:

- определять сходимость числовых и функциональных рядов по признаку Даламбера;
- применять признак Лейбница для знакопеременных рядов;
- разлагать элементарные функции в ряд Маклорена.

<u>Раздел 2</u> Основы дискретной математики

<u>Тема 2.1</u> Множества и отношения. Свойства отношений. Операции над множествами

Элементы и множества. Задание множеств. Операции над множествами. Свойства операций над множествами. Отношения. Свойства отношений.

Студент должен иметь представление:
- о способах задания множеств;
- о диаграммах Эйлера.

Студент должен знать:
- определения: множества, отношения;
- операции и свойства операций над множествами;
- свойства отношений.

<u>Тема 2.2</u> Основные понятия теории графов

Графы. Основные определения. Элементы графов. Виды графов и операции над ними.

Студент должен иметь представление:
- о связи понятия графов и понятия отношения.

Студент должен знать:
- определение графов и его элементов;
- виды графов и операции над ними.

<u>Раздел 3</u> Основы теории вероятностей и математической статистики

<u>Тема 3.1</u> Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Понятие события и вероятности события. Достоверные и невозможные события. Классическое определение вероятностей. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей.

Студент должен знать:

- понятия: событие, частота и вероятность появления события, совместные и несовместные события, полная вероятность;
- теорему сложения вероятностей;
- теорему умножения вероятностей.

Студент должен уметь:

- находить вероятность в простейших задачах, используя классическое определение вероятностей;
- решать задачи с применением теоремы сложения вероятностей для несовместных событий.

Тема 3.2 Случайная величина, ее функции распределения

Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайные величины. Закон распределения случайной величины.

Студент должен знать:

- способы задания случайной величины;
- определение непрерывной и дискретной случайных величин;
- закон распределения случайной величины.

Студент должен уметь:

- строить ряд распределения случайной величины;
- находить функцию распределения случайной величины.

Тема 3.3 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

Математическое ожидание дискретной случайной величины. Дисперсия случайной величины. Среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Студент должен знать:

- определение математического ожидания, дисперсии дискретной случайной величины;
- среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Студент должен уметь:

- находить математическое ожидание и дисперсию случайной величины по заданному закону ее распределения;
- находить среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Раздел 4 Основные численные методы

Тема 4.1 Численное интегрирование

Формулы прямоугольников. Формула трапеций. Формула Симпсона. Абсолютная погрешность при численном интегрировании.

Студент должен знать:

- способы представления функции в виде прямоугольников и трапеций;
- формулу Симпсона;
- выражения для определения абсолютных погрешностей.

Студент должен уметь:

- вычислять интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона.

Тема 4.2 Численное дифференцирование

Численное дифференцирование. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона. Погрешность в определении производной.

Студент должен знать:

- интерполяционные формулы Ньютона;
- таблицу конечных разностей.

Студент должен уметь:

- по табличным данным находить аналитическое выражение производной.

Тема 4.3 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Построение интегральной кривой. Метод Эйлера.

Студент должен знать:

- метод Эйлера для решения задачи Коши.

Студент должен уметь:

- находить значение функции, определяемое заданным дифференциальным уравнением и начальными условиями с использованием метода Эйлера.

ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

Все задания на домашние контрольные работы составлены в 50 вариантах. Вариант контрольной работы определяется двумя последними цифрами шифра студента по таблице вариантов контрольной работы.

Таблица 1

Таблица вариантов контрольной работы

Две последние цифры шифра	№ варианта	Номера задач	Две последние цифры шифра	№ варианта	Номера задач
01 51	1	1,11,21,31,41	26 76	26	1,16,28,32,47
02 52	2	2,12,22,32,42	27 77	27	2,17,29,33,48
03 53	3	3,13,23,33,43	28 78	28	3,18,30,34,49
04 54	4	4,14,24,34,44	29 79	29	4,19,21,35,50
05 55	5	5,15,25,35,45	30 80	30	5,20,22,36,41
06 56	6	6,16,26,36,46	31 81	31	3,19,28,35,47
07 57	7	7,17,27,37,47	32 82	32	4,20,29,36,48
08 58	8	8,18,28,37,48	33 83	33	5,11,30,37,49
09 59	9	9,19,29,39,49	34 84	34	6,12,21,38,50
10 60	10	10,20,30,40,50	35 85	35	7,13,22,39,41
11 61	11	2,19,28,33,45	36 86	36	8,14,23,40,42
12 62	12	3,20,29,34,46	37 87	37	9,15,24,31,43
13 63	13	4,11,30,35,47	38 88	38	10,16,25,32,44
14 64	14	5,12,21,36,48	39 89	39	1,17,26,33,45
15 65	15	6,13,22,37,49	40 90	40	2,18,27,34,46
16 66	16	7,14,23,38,50	41 91	41	7,19,28,36,43
17 67	17	8,15,24,39,41	42 92	42	8,20,29,37,44
18 68	18	9,16,25,40,42	43 93	43	9,11,30,38,45
19 69	19	10,17,26,31,43	44 94	44	10,12,21,39,46
20 70	20	1,18,27,32,44	45 95	45	1,13,22,40,47
21 71	21	6,11,23,37,42	46 96	46	2,14,23,31,48
22 72	22	7,12,24,38,43	47 97	47	3,15,24,32,49
23 73	23	8,13,25,39,44	48 98	48	4,16,25,33,50
24 74	24	9,14,26,40,45	49 99	49	5,17,26,34,41
25 75	25	10,15,27,31,46	50 00	50	6,18,27,35,42

Задачи №№ 1-10

Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$

2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^3-x+1}$

НГМ 5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+1}{3x^2+x+3}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x+2}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{x^2+x+3}$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+4}{2x^3+5x-1}$

Задачи №№ 11-20

В задачах №№ 11-20 исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики. При исследовании функции следует найти ее интервалы возрастания и убывания и точки экстремума, интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции.

11. $y = x^2 \cdot (x-2)^2$

12. $y = (x^2 - 4) \cdot (x+3)$

13. $y = 3x^2 - 2 - x^3$

14. $y = 2x^3 - 3x^2 - 5$

15. $y = 4x - x^3$

16. $y = (1-x) \cdot (x^2 - 9)$

17. $y = (2x - 3) \cdot (x^2 + 1)$

18. $y = (9 - x^2) \cdot (x - 2)$

19. $y = 2 - 3x^2 - x^3$

20. $y = 24x - 6x^3$

Задачи №№ 21-30

В задачах №№ 21-30 вычислить неопределенные интегралы и результаты интегрирования проверить дифференцированием.

21. а) $\int (2x - \frac{5}{x} + \sqrt[3]{x})dx;$

б) $\int \frac{x^2 dx}{3x^3 + 4};$

в) $\int x \cdot \sin 2x \, dx$.

22. а) $\int (4x^3 + \frac{3}{x^4} - \sqrt{x})dx;$

б) $\int \frac{x\,dx}{x^2 + 4};$

в) $\int \ln x \, dx$.

23. а) $\int (5x^4 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + e^x)dx$;

б) $\int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx$;

в) $\int x \cdot e^x \, dx$.

24. а) $\int (x^3 - \frac{5}{x^3} + \sqrt[4]{x})dx$;

б) $\int \frac{dx}{\cos^2(3x-1)}$;

в) $\int x \cdot \ln x \, dx$.

25. а) $\int (6x^5 + \frac{2}{x^3} - \sqrt[3]{x})dx$;

б) $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x}$;

в) $\int x \cdot e^{3x} \, dx$.

26. а) $\int (6x^2 - \frac{5}{x} + \sqrt[4]{x^3})dx$;

б) $\int x \cdot e^{x^2+3} dx$;

в) $\int x \cdot \cos x \, dx$.

27. а) $\int (10x^4 + \frac{4}{x^2} - \sqrt[3]{x^2})dx$;

б) $\int \mathrm{tg} 3x \, dx$;

в) $\int \ln 5x \, dx$.

28. а) $\int (4x - \frac{5}{x^3} + \sqrt[4]{x})dx$;

б) $\int \mathrm{ctg} 2x \, dx$;

в) $\int x \cdot \sin 3x \, dx$.

29. а) $\int (7x^6 - \frac{6}{x^7} - e^x) dx$;

б) $\int \frac{x^2 dx}{2x^3 + 1}$;

в) $\int x \cdot \cos 4x \, dx$.

30. а) $\int (3x^2 + \frac{6}{x^7} + \frac{1}{\cos^2 x}) dx$;

АГМ

б) $\int \cos^3 x \cdot \sin x \, dx$;

в) $\int x \cdot e^{4x} dx$.

Задачи №№ 31-40

В задачах №№ 31-40 вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж.

31. $y = x^2 - 4x + 3$, $y = x - 1$
32. $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$
33. $y = x^2 + 4x + 3$, $y = x + 3$
34. $y = x^2 - 6x + 10$, $y = x$
35. $y = x^2 - 2x - 1$, $y = x - 1$ АГМ
36. $y = x^2 + 6x + 8$, $y = x + 4$
37. $y = x^2 - 6x + 13$, $y = x + 3$
38. $y = x^2 + 8x + 15$, $y = x + 5$
39. $y = x^2$, $y = x + 2$
40. $y = x^2 - 1$, $y = x + 1$

Задачи №№ 41-50

Задан закон распределения дискретной случайной величины. Вычислить: 1) математическое ожидание; 2) дисперсию; 3) среднеквадратическое отклонение.

41.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,4	0,2

42.

X	-1	1	2	3	4	5	6
p	0,4	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

43.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
p	0,1	0,1	0,2	0,1	0,4	0,3	0,2

44.

X	1	2	3	4	5	6	7
p	0,3	0,4	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

45.

X	2	4	6	8	10	12	14
p	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2	0,3	0,2

46.

X	-4	-2	0	2	4	6	8
p	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,3

АБМ 47.

X	1	3	5	7	9	11	13
p	0,3	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

48.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0,15	0,1	0,1	0,15	0,2	0,1	0,3

49.

X	-2	0	2	4	6	8	10
p	0,3	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1

50.

X	1	2	3	4	5	6	7
p	0,3	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению задач контрольной работы

Дифференциальное и интегральное исчисление

По данной теме сначала изучите гл. 6-10 [1]. Затем ознакомьтесь с методическими указаниями по этой теме и внимательно разберите решение примеров из данного пособия.

Функции и пределы

Повторите понятия функции, области определения и области значений функции. Разберите все способы задания функции, особенно аналитический и графический.

При нахождении области определения функции нужно обратить внимание на радикалы четной степени и знаменатели дробных выражений.

Постоянная величина A называется пределом функции f(x) при x стремящимся к x_0 ($x \to x_0$), если для всех x, сколь угодно мало отличающихся от x_0, соответствующие значения функции f(x) сколь угодно мало отличаются от A. Т.е., если при $x \to x_0 \, f(x) \to A$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Замечания:

1) x может стремиться не только к конечному числу x_0, но и к бесконечности ($x \to \infty$);
2) Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то f(x) называется бесконечно большой функцией при $x \to x_0$;
3) Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, то f(x) называется бесконечно малой функцией при $x \to x_0$;
4) Если f(x) – бесконечно малая (бесконечно большая) при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно большая (бесконечно малая) при $x \to x_0$.

При вычислении пределов используются следующие теоремы:

1) если функция f(x) имеет предел при $x \to a$, то этот предел единственный;
2) предел постоянной величины равен этой же постоянной: $\lim C = C$, где $C = \mathrm{const}$;
3) предел алгебраической суммы конечного числа функций, имеющих конечные пределы, равен алгебраической сумме пределов всех слагаемых:
$$\lim_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)) =$$
$$=\lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x)+\dots+\lim_{x\to a} f_n(x);$$
4) предел произведения конечного числа функций, имеющих конечные пределы, равен произведению пределов сомножителей:
$$\lim_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\dots\cdot f_n(x)) =$$
$$=\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x)\cdot\dots\cdot\lim_{x\to a} f_n(x);$$
5) предел частного двух функций, имеющих пределы, равен отношению пределов числителя и знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\quad \text{если}\quad \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0;$$
6) постоянный множитель можно выносить за знак предела:
$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot\lim_{x\to a} f(x),\quad \text{где}\quad c=\mathrm{const};$$
7) функция, заключенная между двумя функциями, имеющими одинаковые пределы, имеет тот же предел:
$$\text{если } \varphi(x) < f(x) < \psi(x) \quad \text{и}$$
$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\psi(x)=B,\quad \text{то}\quad \lim_{x\to a} f(x)=B.$$
8) два важных предела:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}718...$$

Задача 1

Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+5}{x+4}$;   б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-4x+3}{x^2-16}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x+2}{2x^2+x-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2x}-x$;   е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

Решение

а) При вычислении пределов удобно пользоваться следующим правилом: если функция $y = f(x)$ непрерывна при $x = a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Под знаком предела имеем элементарную функцию, непрерывную при $x = 3$. Поэтому для вычисления предела достаточно вместо x подставить его предельное значение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+5}{x+4}=\frac{3^2-4\cdot 3+5}{3+4}=\frac{2}{7}.$$

б) При $x = 4$ числитель дроби равен 3, а ее знаменатель равен нулю. При $x \to 4$ числитель является ограниченной функцией, а знаменатель есть функция бесконечно малая. Поэтому дробь является бесконечно большой и ее предел обозначают символом ∞ (бесконечность), то есть

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x+3}{x^2-16}=\infty.$$

в) Подстановка предельного значения аргумента $x = 2$ приводит к неопределенному выражению вида $\frac{0}{0}$. Для устранения этой неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на линейные множители и сократим дробь на $(x - 2)$. Такое сокращение здесь возможно, так как множитель $(x - 2)$ отличен от нуля при $x \to 2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{3\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot(x-2)}{2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-1}{2x-1}=\frac{5}{3}$$

г) При $x\to\infty$ имеем неопределенное выражение. вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Для устранения этой неопределенности разделим числитель и знаменатель дроби на x^2 (наивысшую степень стоящих в числителе и знаменателе дроби многочленов) и применим основные теоремы о пределах:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x+2}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}=\frac{4}{2}=2.$$

д) При $x\to\infty$ выражение $\sqrt{x^2-2x}-x$ дает неопределенность вида ∞ - ∞. Для ее устранения умножим и разделим это выражением на ($\sqrt{x^2-2x}+x$):

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-2x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x}=-2\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-2x}+x}=$$

$$=-2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}+1}=-2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}=-2\cdot\frac{1}{1+1}=-1.$$

Для устранения получившейся здесь неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ разделим числитель и знаменатель последней дроби на x.

е) Известно, что предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге равен единице, то есть

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Эта формула называется *формулой первого замечательного предела.* Из нее вытекает следующее следствие

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{k\cdot x}=1,$$

где k - отличное от нуля число.

Преобразуем стоящее под знаком предела выражение, воспользуемся свойствами пределов и следствием из формулы первого замечательного предела. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\frac{3}{5}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{5}.$$

Производная и ее приложения

Производной функции y = f (x) в точке x называется предел отношения функции Δy к приращению аргумента Δx, если Δx стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)=y'.$$

Физический (механический) смысл производной - скорость изменения функции в данный момент времени.

Геометрический смысл производной - угловой коэффициент касательной к графику функции y = f (x) в точке касания x, то есть тангенс угла наклона касательной к оси Ox.

Функция может иметь производную в точке $x = x_0$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и в самой точке.

Необходимым условием существования производной в данной точке является непрерывность функции в этой точке. Действие нахождения производной функции называется дифференцированием функции.

При решении задач используются правила и таблица формул дифференцирования, которые нужно твердо знать.

Наряду с понятием производной широко используется понятие *дифференциала* функции:

$$dy = f'(x)dx .$$

Причем:

$\Delta y \approx dy$; $\Delta x = dx$, откуда следует:

$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ или

$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$ - эту формулу используют для приближенных вычислений значений функции при *небольших изменениях* аргумента.

Существует связь между знаком производной функции на интервале с ее возрастанием и ее убыванием на этом интервале: если на некотором интервале $f'(x) > 0$, то функция возрастает на этом интервале: если же $f'(x) < 0$, то функция убывает на этом интервале. С этим связано нахождение экстремумов функции (точек максимума и минимума). Точка $x = x_0$ является точкой экстремума функции $y = f(x)$, если $f'(x) = 0$ или не существует (необходимое условие экстремума). Достаточное условие экстремума функции в точке $x = x_0$ - изменение знака ее первой производной при переходе через эту точку.

Производная от первой производной называется *второй производной*. Ее *механический* смысл - ускорение в данный момент времени, а *геометрический* - выпуклость или вогнутость графика функции $y = f(x)$ в данной точке x.

Основные правила и формулы дифференцирования функций

1. $y = u + v, \quad y' = u' + v'$.
2. $y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
3. $y = \dfrac{u}{v}, \quad y' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.
4. $y = c, \quad y' = 0$ (здесь c – постоянная величина).
5. $y = x^n, \quad y' = n \cdot x^{n-1}$.
6. $y = a^x, \quad y' = a^x \cdot \ln a$.

7. $y = e^x$, $y' = e^x$.

8. $y = \log_a x$, $y' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.

9. $y = \ln x$ $y' = \dfrac{1}{x}$.

10. $y = \sin x$, $y' = \cos x$.

11. $y = \cos x$, $y' = -\sin x$.

12. $y = \mathrm{tg}x$, $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

13. $y = \mathrm{ctg}x$, $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

14. $y = \arcsin x$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. $y = \arccos x$, $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

16. $y = \mathrm{arctg}x$, $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

17. $y = \mathrm{arcctg}x$, $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Задача 2

Исследовать функцию $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$ и построить ее график.

Решение

При исследовании функции методами дифференциального исчисления необходимо: а) найти область определения функции; б) исследовать функцию на непрерывность; в) найти точки пересечения графика функции с осями координат; г) определить интервалы возрастания и убывания функции и точки ее экстремума; д) найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции.

а) Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел.

б) Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на своей области определения, то есть на интервале $(-\infty; \infty)$.

в) Для нахождения точки пересечения графика функции с осью Oy подставим в уравнение функции $x = 0$. Тогда $y = 5$. Значит, график функции пересечет ось Oy в точке A $(0; 5)$.

Для определения точки пересечения исследуемой кривой с осью Ox следует решить уравнение $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5 = 0$. Из-за отсутствия целочисленных корней этого уравнения его решение громоздко (оно может быть найдено, например, по формулам Кардано) и не приводится здесь.

г) Для нахождения интервалов возрастания и убывания функции воспользуемся следующими *достаточными* признаками: если производная дифференцируемой функции положительна (отрицательна) на некотором интервале, то функция возрастает (убывает) на этом интервале.

Продифференцируем данную функцию:

$$y' = x^2 - 2x - 3\,.$$

Корнями производной являются $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ (критические точки первого рода).

Определим промежутки знакопостоянства производной y', используя метод интервалов. На числовой оси отметим в порядке возрастания критические значения $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ аргумента x (в этих точках производная данной функции обращается в нуль) (рис. 1).

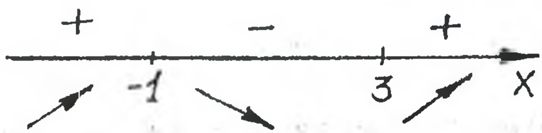

Рис. 1 Промежутки знакопостоянства производной

Данная функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(3; \infty)$ (здесь производная y' положительна) и убывает на интервале $(-1; 3)$ (здесь $y' < 0$).

Для исследования критических точек $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ на экстремум воспользуемся *первым достаточным признаком* экстремума функции: если функция f(x) дифференцируема в точке x_0 и ее окрестности и ее производная $f'(x)$ слева от этой точки положительна (отрицательна), а справа - отрицательна (положительна), то в точке x_0 функция f(x) имеет максимум (минимум).

При переходе через точку $x_1 = -1$ производная y' меняет свой знак с плюса на минус, поэтому в этой точке функция имеет максимум

$$y_{max} = y(-1) = 6\frac{2}{3}.$$

Значит, $B\left(-1; 6\frac{2}{3}\right)$ - точка максимума.

Так как при переходе через точку $x_2 = 3$ производная y' меняет свой знак с минуса на плюс, то C (3; -4) - точка минимума.

д) Для определения интервалов *выпуклости* и *вогнутости* и точек перегиба графика функции используем следующие *достаточные признаки:* если вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции f(x) положительна (отрицательна) в каждой точке интервала (a; b), то на этом интервале график функции f(x) является вогнутым (выпуклым); если $x_0 \in (a, b)$ и $f''(x_0) = 0$ либо $f''(x_0)$ не существует и при переходе через точку x_0 вторая производная меняет свой знак, то M $(x_0; f(x_0))$ - точка перегиба кривой $y = f(x)$.

Найдем вторую производную данной функции:

$$y'' = 2x - 2.$$

$y'' = 0$ при $x = 1$ (критическая точка второго рода). На интервале $(-\infty; 1)$ вторая производная отрицательна, поэтому график функции на этом интервале является выпуклой кривой; $y'' > 0$

при $x \in (1;\infty)$, поэтому график функции вогнут на этом интервале. Так как при переходе через точку x = 1 вторая производная меняет свой знак, то x = 1 вторая производная меняет свой знак, то x = 1 есть абсцисса точки D $\left(1;1\frac{1}{3}\right)$ перегиба кривой.

Результаты исследований приведены в табл. 2.

Таблица 2

x	(- ∞; -1)	-1	(-1; 1)	1	(1; 3)	3	(3; ∞)
y	возрастает выпукла	max	убывает выпукла	перегиб	убывает вогнута	min	возрастает вогнута
y′	+	0	-	-	-	0	+
y″	-	-	-	0	+	+	+

График исследуемой функции приведен на рис. 2

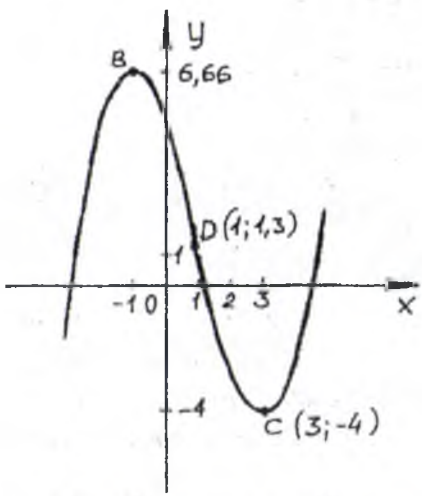

Рис. 2 График исследуемой функции

Интеграл и его приложения
Неопределенный интеграл

Введем понятие *первообразной* данной функции. Функция F (x) называется первообразной данной функции f (x) на заданном промежутке, если $F'(x) = f(x)$ в любой точке этого промежутка.

Любые две первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ данной функции $f(x)$ отличаются друг от друга на произвольную постоянную величину: $F_1(x) - F_2(x) = C = \text{const}$.

Совокупность первообразных данной функции f(x) называется ее *неопределенным интегралом* и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Таким образом, интегрирование - это отыскание совокупности первообразных функций по заданной ее производной.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\int [f(x \pm \varphi(x))]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$;
2. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \quad \text{где } A = \text{const}$;
3. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
4. $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
5. $\int dF(x) = F(x) + C$;
6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$

Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором отрезке $a \le x \le b$. *Определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $a \le x \le b$ называется предел интегральной суммы.

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k \to 1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx,$$

где n - число разбиений отрезка [a; b] на частичные отрезки Δx_k, ξ_k - произвольные точки в каждом частичном отрезке.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке [a; b] служит *формула Ньютона-Лейбница*, связывающая определенный интеграл с неопределенным через первообразную.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Для нахождения интегралов необходимо твердое знание основных формул интегрирования (табличных интегралов).

Приложения определенного интеграла

Определенный интеграл широко применяется при вычислениях различных геометрических и физических величин, например, площади фигур, объема тел вращения, пути, пройденного точкой и ее скорости.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
4. $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.
10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$.
11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

Разберите решение задач 3, 4, 5, 6.

Задача 3

Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \left(3x^5 - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + e^x\right)dx$;

б) $\int \cos(4x-3)dx$;

в) $\int \frac{x^2 dx}{1-x^3}$;

г) $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$;

д) $\int tg2x \cdot dx$.

Решение

а) Преобразуем подынтегральную функцию, применим свойства I и II неопределенного интеграла и формулы 1 и 4.

$$\int \left(3x^5 - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + e^x\right)dx = \int \left(3x^5 - x^{-\frac{1}{4}} + e^x\right)dx =$$

$$= 3\int x^5 dx - \int x^{-\frac{1}{4}} dx + \int e^x dx = 3\frac{x^6}{6} - \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + e^x + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^6 - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + e^x + C.$$

б) Рассматриваемый интеграл (как и последующие) вычислим методом замены переменной (методом подстановки), состоящим в следующем. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Положим $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ дифференцируемая на отрезке $[\alpha; \beta]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда имеет место следующая формула:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (*)$$

После вычисления неопределенного интеграла, стоящего в правой части формулы (*), в полученном выражении следует перейти от переменной t к переменной x.

Пусть $4x - 3 = t$. Найдем дифференциалы обеих частей последнего равенства: $4dx = dt$. Отсюда $dx = \frac{1}{4}dt$. Тогда

$$\int \cos(4x-3)dx = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin(4x-3) + C$$

в) Данный интеграл сводится к табличному (2) подстановкой $1 - x^3 = t$. Отсюда $-3x^2dx = dt$, $x^2dx = -\frac{1}{3}dt$ и

$$\int \frac{x^2dx}{1-x^3} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}\ln|t| + C = -\frac{1}{3}\ln\left|1-x^3\right| + C.$$

г) Обозначим $\sin x = t$, тогда $\cos x dx = dt$ и

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\cdot \sin^4 x + C.$$

д) Интеграл сводится к табличному (2) подстановкой $\cos 2x = t$, откуда $-2\cdot \sin 2x\, dx = dt$, $\sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}dt$.

$$\int \mathrm{tg}\, 2x\, dx = \int \frac{\sin 2x\, dx}{\cos 2x} = -\frac{1}{2}\cdot \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$$

Задача 4

Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int x \cdot e^{2\cdot x} dx$;

б) $\int x^2 \cdot \ln x\, dx$;

в) $\int x \cdot \sin 3x \, dx$.

Решение

Данные интегралы вычисляются по *формуле интегрирования по частям*

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du . \qquad (**)$$

Представление подынтегрального выражения в виде множителей u и dv сводит к интегралу $\int v \cdot du$, который должен быть "проще" исходного или табличным интегралом. При этом удобно пользоваться следующими рекомендациями.

1. Если подынтегральная функция содержит произведение многочлена на показательную или тригонометрическую функцию, то множителем u следует принять многочлен.
2. Если подынтегральная функция содержит произведение многочлена на логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию, то множителем u следует принять логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию.

$\int x e^{2x} dx$

а) Исходя из рекомендации 1, положим $u = x$, $dv = e^{2 \cdot x} dx$.

Тогда $du = dx$, $v = \int e^{2 \cdot x} dx = \frac{1}{2} \int e^{2 \cdot x} d(2x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot x}$.

По формуле интегрирования по частям имеем

$$\int x \cdot e^{2 \cdot x} dx = \frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{2 \cdot x} - \frac{1}{2} \cdot \int e^{2 \cdot x} dx = \frac{1}{2} x \cdot e^{2 \cdot x} - \frac{1}{4} \cdot \int e^{2 \cdot x} d(2 \cdot x) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{2 \cdot x} - \frac{1}{4} \cdot e^{2 \cdot x} + C$$

б) пусть $u = \ln x$ и $dv = x^2 dx$ (рекомендация 2). Тогда

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$$

По формуле (**) имеем:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{9} \cdot x^3 + C .$$

в) Положим $u = x$, $dv = \sin 3x dx$. Тогда $du = dx$,

$$v = \int \sin 3x\, dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x\, d(3\cdot x) = -\frac{1}{3}\cdot\cos 3x.$$

По формуле (**) получим:

$$\int x\cdot\sin 3x\, dx = -\frac{1}{3}x\cdot\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x\cdot\cos 3x + \frac{1}{9}\cdot\sin 3x + C$$

Задача 5

Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_2^3 (x - e^x)dx$;

б) $\int_0^4 x\cdot\sqrt{x^2+9}dx$;

в) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$.

Решение

Для вычисления определенных интегралов применяют *формулу* Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где F (x) – первообразная для функции f (x).

а) $\int_2^3 (x - e^x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - e^x\right]_2^3 = \left(\frac{3^2}{2} - e^3\right) - \left(\frac{2^2}{2} - e^2\right) = 2{,}5 + e^2 - e^3$

б) Интеграл вычислим методом подстановки. Пусть $x^2 + 9 =$ t, откуда $x^2 + 9 = t^2$, $2x\, dx = 2tdt$, $xdx = tdt$. Найдем пределы интегрирования по переменной t. При $x = 0$ переменная $t = 3$ (нижний предел $t_н$), при $x = 4$ переменная $t = 5$ (верхний предел $t_в$).

Тогда

$$\int_0^4 x\cdot\sqrt{x^2+9}dx = \int_3^5 t\cdot tdt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_3^5 = \frac{1}{3}\cdot\left(5^3 - 3^3\right) = 32\frac{2}{3}.$$

в) Введем подстановку $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2 \cdot \cos t \cdot dt$. Если $x = 0$, то $0 = 2 \cdot \sin t$ и $t_н = 0$. Если $x = 2$, то $2 = 2 \cdot \sin t$ и $t_в = \frac{\pi}{2}$.

Тогда

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4 \cdot \sin^2 t} \cdot 2 \cdot \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \cos^2 t dt =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 2 \cdot \left[t + \frac{1}{2} \cdot \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Задача 6

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2 \cdot x - 1$ и прямой $y = -x - 1$.

Решение

Площадь S фигуры, ограниченной снизу кривой $y = f_1(x)$, сверху – кривой $y = f_2(x)$, слева и справа соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \qquad (1)$$

Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \cdot x - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$ откуда имеем:

$x_1 = -3$, $x_2 = 0$
$y_1 = 2$, $y_2 = -1$.

Значит, парабола и прямая пересекаются в точках А (-3; 2) и В (0; -1) (рис. 3).

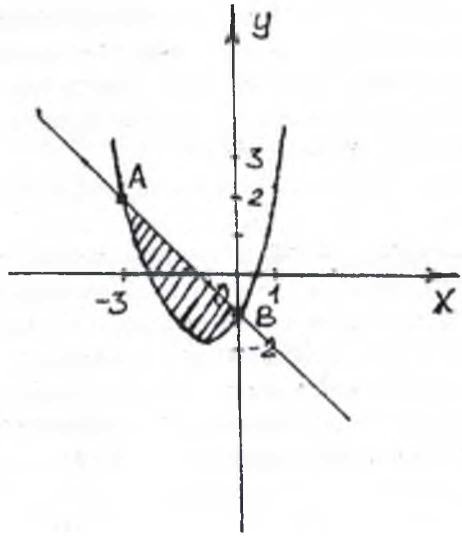

Рис. 3 Чертеж к задаче 6

Подставив в формулу (1) $f_1(x) = x^2 + 2 \cdot x - 1$, $f_2(x) = -x - 1$, a = -3, b = 0, получим:

$$S = \int_{-3}^{0} \left[(-x-1) - \left(x^2 + 2x - 1\right)\right] dx = \int_{-3}^{0} \left(-x^2 - 3x\right) dx =$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{0} = \frac{(-3)^3}{3} + \frac{3 \cdot (-3)^2}{2} = 4{,}5 \text{ (кв.ед.)}$$

Основы теории вероятностей и математической статистики

По данной теме сначала изучите гл. 4, 8 [2]. Затем ознакомьтесь с методическими указаниями по этой теме и разберите решение задачи 7 из данного пособия.

К числу основных понятий теории вероятностей относятся: событие, вероятность события и относительная частота появления события при испытаниях.

$-\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right) = \left(\frac{-3^3}{3} + \frac{3\cdot(-3)^2}{2}\right)$ $-\left(\frac{27}{3} + \frac{27}{2}\right)$ $-\left(\frac{-54}{6} + \frac{81}{6}\right)$ $-\left(\frac{27}{6}\right)$

Математическая статистика – это раздел математики, который изучает методы сбора, систематизации, обработки и использования статистических данных для принятия решений. Сущность математической статистики заключается в установлении закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления.

С каждым опытом можно связать множество всех взаимно исключающих друг друга исходов.

Это множество называется пространством элементарных исходов (ПЭИ).

101 Числовая функция, определенная на пространстве элементарных исходов, называется *случайной величиной*. Функция, ставящая в соответствие каждому значению x случайной величины X вероятность P(X) = x, с которой она принимает это значение, называется *законом распределения* случайной величины. 103

105 Сумма произведений значений случайной величины на соответствующие вероятности называется математическим ожиданием или средним значением случайной величины X и обозначается MX:

$$MX = X_1P_1 + \ldots + X_nP_n.$$

106 Свойства математического ожидания:

1) $M(X + Y) = MX + MY$;
2) если $C = const$, то $MC = C$; $M(CX) = CMX$;
3) $M(X \cdot Y) = MX \cdot MY$.

Далее необходимо усвоить определения числовых характеристик случайных величин, уяснить их смысл (математическое ожидание характеризует среднее значение возможных значений случайной величины, а дисперсия и среднее квадратическое отклонение – рассеяние возможных значений вокруг математического ожидания) и научиться уверенно их вычислять.

Задача 7

Задан закон распределения дискретной случайной величины:

X	3	8	13	18	23
P	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

Вычислить: 1) математическое ожидание; 2) дисперсию; 3) среднее квадратическое отклонение.

Решение

1) Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i .$$

Подставляя данные задачи в эту формулу, получим

$$M(X)=3\cdot 0{,}3+8\cdot 0{,}3+13\cdot 0{,}2+18\cdot 0{,}1+23\cdot 0{,}1=$$

$$=0{,}9+2{,}4+2{,}6+1{,}8+2{,}3=10$$

2) Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(X)\right)^2\cdot p_i .$$

Подставляя значения x_i и p_i, получим

$$D(X)=(3-10)^2\cdot 0{,}3+(8-10)^2\cdot 0{,}3+(13-10)^2\cdot 0{,}2+$$

$$+(18-10)^2\cdot 0{,}1+(23-10)^2\cdot 0{,}1=$$

$$=14{,}7+1{,}2+1{,}8+6{,}4+16{,}9=41$$

3) Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{41}\approx 6{,}4$$

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

В целях закрепления знаний и приобретения необходимых навыков программой предусмотрены практические занятия. Учебное заведение вправе выбрать количество и тему практических занятий в соответствии с тематическим планом учебного заведения.

Тема 1.1

Вычисление пределов функций с использованием первого и второго замечательного пределов. Исследование функций на непрерывность. Нахождение производных по алгоритму. Вычисление производной сложных функций. Интегрирование простейших функций. Вычисление простейших определенных интегралов. Решение прикладных задач. Нахождение частных производных.

Тема 1.2

Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными; однородных дифференциальных уравнений первого порядка; линейных дифференциальных уравнений первого порядка; линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение прикладных задач.

Тема 1.3

Решение простейших дифференциальных уравнений линейных относительно частных производных.

Тема 1.4

Определение сходимости рядов по признаку Даламбера. Определение сходимости знакопеременных рядов. Разложение функций в ряд Маклорена.

Тема 3.1

Решение простейших задач на определение вероятности с использованием теоремы сложения вероятностей.

Тема 3.2

По заданному условию построить закон распределения дискретной случайной величины.

Тема 3.3

Нахождение математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины заданной законом распределения.

Тема 4.1

Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешности.

Тема 4.2

Нахождение производных функций в точке x по заданной таблично функции y = f(x) методом численного дифференцирования.

Тема 4.3

Нахождение значения функции с использованием метода Эйлера.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЭКЗАМЕНУ

1. Какие величины называются постоянными? Переменными?
2. Сформулируйте определение функции.
3. Что называется областью определения функции? Областью изменения функции?
4. Назовите способы задания функциональной зависимости.
5. Перечислите основные элементарные функции.
6. Что называется числовой последовательностью?
7. Что называется пределом числовой последовательности?
8. Что называется пределом функции?
9. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций.
10. Какие величины называются бесконечно малыми? Бесконечно большими?
11. Перечислите свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин.
12. Напишите формулы первого и второго замечательного пределов.
13. Сформулируйте понятия односторонних пределов функции в точке.
14. Какая функция называется непрерывной в точке? На отрезке?
15. Приведите классификацию точек разрыва функции.
16. Назовите свойства непрерывных на отрезке функций.
17. Что называется производной функции?
18. Каков геометрический смысл производной? Ее физический смысл?
19. Напишите правила и формулы дифференцирования основных элементарных функций.
20. Как найти производную сложной функции?
21. Что называется дифференциалом функции?
22. Каков геометрический смысл дифференциала функции?
23. Перечислите свойства дифференциала функции.

24. Напишите формулу, позволяющую находить приближенное значение функции при помощи ее дифференциала.
25. Как найти производную второго, третьего, n-го порядков?
26. Как найти дифференциал второго порядка от данной функции?
27. Какая функция называется возрастающей? Убывающей?
28. Сформулируйте достаточные признаки возрастания и убывания функции.
29. Какие точки называют критическими точками функции?
30. Назовите достаточные признаки экстремума функции.
31. Какая кривая называется выпуклой? Вогнутой?
32. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой?
33. Что называется точкой перегиба кривой?
34. Сформулируйте достаточный признак существования точки перегиба кривой.
35. Назовите схему исследования функции и построения ее графика.
36. Сформулируйте определение функции двух независимых переменных.
37. Что называется областью определения функции двух независимых переменных? Каково геометрическое изображение функции двух переменных?
38. Как найти частные и полное приращение функции двух переменных?
39. Сформулируйте определение предела функции двух переменных.
40. Какая функция называется непрерывной в точке? В области?
41. Что называется частными производными первого порядка функции двух переменных? Каков их геометрический смысл?
42. Что называется полным дифференциалом функции двух переменных? Как его вычислить?
43. Как найти частные производные второго порядка функции двух переменных?

44. Что является необходимым условием экстремума функции двух переменных?
45. Сформулируйте достаточный признак экстремума функции двух переменных.
46. Какая функция называется первообразной для данной функции?
47. Что называется неопределенным интегралом от данной функции?
48. Назовите свойства неопределенного интеграла.
49. Напишите табличные формулы неопределенных интегралов.
50. В чем сущность метода подстановки в неопределенном интеграле?
51. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.
52. Что называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$?
53. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
54. Назовите свойства определенного интеграла.
55. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.
56. Напишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
57. Какое уравнение называется дифференциальным?
58. Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка.
59. Дайте определение общего решения и общего интеграла дифференциального уравнения первого порядка.
60. Дайте определение частного решения и частного интеграла дифференциального уравнения первого порядка.
61. Дайте определение числового ряда.
62. Сформулируйте свойства рядов.
63. Что называется остатком ряда?
64. Сформулируйте признаки сравнения положительных рядов.
65. Сформулируйте признаки Даламбера и Коши сходимости рядов.
66. Дайте определение знакочередующегося ряда.

67. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.
68. Дайте определение функционального ряда.
69. Дайте определение степенного ряда.
70. Что понимают под множеством?
71. Как называются предметы, составляющие данное множество?
72. Как задать множество?
73. Какие множества называют равными?
74. Какие множества называют эквивалентными?
75. Что называется пустым множеством?
76. Что означают записи: $A \subset B$; $\overline{A}$; $A \cap B$; $A \supset B$; $A \setminus B$? Дайте определение каждой из указанных операций и поясните его на диаграмме.
77. Перечислите основные свойства операций над множествами и поясните их на диаграммах.
78. Как называется взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и счетным множеством чисел? Какие другие примеры взаимно однозначного соответствия между множествами Вы знаете?
79. Какое множество называется счетным? Приведите примеры счетных множеств, сформулируйте их свойства.
80. Определение графов и их элементов.
81. Виды графов и операции над ними.
82. Что называется событием? Приведите примеры событий.
83. Какие события называются достоверными, невозможными, случайными? Приведите примеры этих событий.
84. Какие события называются несовместными, совместными? Приведите примеры.
85. Какие события называются элементарными или случаями?
86. Сформулируйте классическое определение вероятности события. Укажите возможные границы вероятности.
87. Что такое относительная частота появления события?
88. В чем состоит различие между вероятностью и относительной частотой?

89. В чем состоит свойство устойчивости относительной частоты?
90. Приведите статистическое определение вероятности события.
91. Что понимается под суммой двух событий? Приведите примеры.
92. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для несовместных событий.
93. Что понимается под полной группой событий? Чему равна сумма вероятностей событий, составляющих полную группу?
94. Какие события называются противоположными? Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
95. Какие события называются независимыми, зависимыми? Приведите примеры.
96. Что называется условной вероятностью события?
97. Что понимается под произведением двух событий? Приведите примеры.
98. Сформулируйте теорему умножения вероятностей для независимых и зависимых событий.
99. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для совместных событий.
100. Приведите формулу полной вероятности.
101. Сформулируйте определение случайной величины.
102. Какие случайные величины называются дискретными? Непрерывными? Приведите примеры.
103. Что называется законом распределения случайной величины?
104. Как задается закон распределения дискретной случайной величины? аналитической, графической, табличной
105. Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины.
106. Перечислите основные свойства математического ожидания.
107. Какое свойство случайной величины характеризует математическое ожидание?

108. Дайте определение дисперсии и среднего квадратического отклонения дискретной случайной величины. Какое свойство случайной величины характеризуют они?
109. Перечислите свойства дисперсии.
110. Дайте определение интегральной функции распределения. Перечислите ее свойства.
111. Дайте определение дифференциальной функции распределение. Перечислите ее свойства.
112. Что называется математическим ожидание непрерывной случайной величины? Как оно вычисляется?
113. Как определяется дисперсия непрерывной случайной величины и как она вычисляется?

Практическая работа №9.
Тема: «Математическая статистика»

Задание: Задан закон распределения дискретной случайной величины. Вычислить: 1)математическое ожидание; 2)дисперсию; 3)среднеквадратическое отклонение.

1.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1

2.

X	-1	1	2	3	4	5	6
p	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1

3.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
p	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1	0,2	0,1

4.

X	1	2	3	4	5	6	7
p	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1

5.

X	2	4	6	8	10	12	14
p	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1

6.

X	-4	-2	0	2	4	6	8
p	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3	0,2	0,1

7.

X	1	3	5	7	9	11	13
p	0,2	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1

8.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
p	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1	0,2

9.

X	-2	0	2	4	6	8	10
p	0,3	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1

10.

X	1	2	3	4	5	6	7
p	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. Под ред. Г.Н. Яковлева, ч. I, М.: Наука, 1987.
2. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. Под. ред. Г.Н. Яковлева, ч. II, М.: Наука, 1988.
3. Калинина В.Н., Панкин В.Ф. Математическая статистика. М.: Высшая школа, 2001.
4. Пехлецкий И.Д. Математика. М.: Мастерство, 2001.
5. Афанасьева О.Н., Бродский Я.С., Павлов А.Л. Математика для техникумов. М.: Наука, 1991.

Дополнительная литература

6. Афанасьев О.Н., Бродский Я.С., Гуткин И.И., Павлов А.Л. Сборник задач по математике для техникумов на базе средней школы. М.: Наука, 1992.
7. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. М.: Высшая школа, 1990.
8. Валуцэ И.И., Дилигул Т.Д. Математика для техникумов на базе средней школы. М.: Наука, 1989.
9. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика. М.: Вузовская книга, 2001.
10. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.:Росткнига, 2001.

Лисичкин
Дадаян – Математика
Алимова – Алгебра и начало анализа

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА стр.3

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ................стр.7

ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ стр.14

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению контрольной работы стр.20

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ стр.40

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ
ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЭКЗАМЕНУ...............................стр.42

ЛИТЕРАТУРА стр.48

Компьютерный набор Заболуева И.В.

Компьютерный набор Заболуева И.В.

тип. зак. 408 Тираж 500
Подписано в печать 17.11.05 г. Офсет.
Печ. л. 3,1 Формат $60x90^1/_{16}$

Отпечатано в типографии МКЖТ
107078, г. Москва, Басманный пер., д.6

[illegible]