# Расчет плоских ферм

## Пример

Для стальной плоской статически определимой фермы

1. определить нормальные усилия в стержнях и подобрать из сортамента ГОСТ 8509-72 номер равнобокого уголка по площади сечения наиболее нагруженного стержня по допускаемому напряжению с коэффициентом запаса прочности $k\_{з}$ = 2
2. Стержни, в которых возникают сжимающие усилия, проверить на устойчивость по формуле $N\_{i}=P\_{кр}=\frac{π^{2}EI}{l\_{i}^{2}}$, где $I$ -минимальный момент инерции равнобокого уголка, значение которого берётся из сортамента; $l\_{i}, N\_{i} $-длина и усилие i-гo сжимаемого стержня.
3. Построить эпюры нормальных усилий.
4. Вычислить вертикальное перемещение узла С фермы. Площади сечений стержней считать одинаковыми.

Решение

Схема фермы - Рис. 3.1. $P\_{1}=20кН, P\_{2}=40кН, P\_{3}=60кН, P\_{4}=-20кН, α=60°. $

**P1**

**P3**

**P2**

**P4**

**A**

**B**

**a**

**α**

**α**

Рис. ..

1. Определить нормальные усилия в стержнях и подобрать из сортамента номер двутавра по площади сечения наиболее нагруженного стержня по допускаемому напряжению с коэффициентом запаса прочности $k\_{з}$ = 2

Определим реакции опор. Для этого отсекаем опоры и заменяем их действие силами $R\_{А}, S\_{А}, R\_{B}. $($ REF \\_Ref445203338 \h $Рис. 3.2.)

**P1**

**P3**

**P2**

**P4**

**A**

**B**

**a**

**α**

**α**

**RA**

**RB**

Рис. ..

Уравнения равновесия фермы

|  |  |
| --- | --- |
| $$S\_{А}=0$$ | (.) |
| $$R\_{А}-P\_{1}-P\_{2}-P\_{4}-P\_{3}+R\_{B}=0$$ | (.) |
| $$\sum\_{}^{}M\_{B}=0: R\_{А}2^{\frac{a}{2}}/\_{\tan(α)}-P\_{1}2^{\frac{a}{2}}/\_{\tan(α)}-P\_{2}^{\frac{a}{2}}/\_{\tan(α)}-P\_{4}^{\frac{a}{2}}/\_{\tan(α)}-0+0=0$$ | (.) |

Из (3.3)

$$R\_{А}=P\_{1}+\frac{1}{2}P\_{2}+\frac{1}{2}P\_{4}=20+20-10=30кН$$

Из (3.2)

$$R\_{B}=P\_{1}+P\_{2}+P\_{3}+P\_{4}-R\_{А}=20+40+60-20-30=70кН$$

Для определенности пронумеруем узлы и стержни фермы (Рис. 3.3.

1

2

3

4

5

6

P1

P2

P3

P4

RA

RB

Рис. ..

Нормальные усилия в стержнях определяем, вырезая по очереди узлы фермы, заменяя действия стержней на узлы их внутренними усилиями и записывая условия равновесия. Положительными считаем внутренние растягивающие усилия. Начинаем с тех узлов, в которых сходится меньше усилий.

Узел 1.

1

P1

N2

N1

|  |  |
| --- | --- |
| $$-P\_{1}-N\_{1}-N\_{2}\sin(α=0)$$ | $$N\_{1}=-P\_{1}-N\_{2}\sin(α=)-20-0=-20$$ |
| $$-N\_{2}\cos(α=0)$$ | $$N\_{2}=0$$ |

Узел 2.

2

RA

N3

N1

N4

|  |  |
| --- | --- |
| $$R\_{А}+N\_{1}+N\_{3}\sin(α)=0$$ | $$N\_{3} =-{\left(R\_{А}+N\_{1}\right)}/{\sin(α)=-}{\left(30-20\right)}/{\sin(60°)=-}{10}/{0.86=}-11.63$$ |
| $$N\_{4}+N\_{3}\cos(α=0)$$ | $$N\_{4}=-N\_{3}\cos(α=11.63∙0.5=5.82)$$ |

Узел 5.

5

P3

N9

N6

|  |  |
| --- | --- |
| $$-P\_{3}-N\_{9}-N\_{6}\sin(α=0)$$ | $$N\_{9}=-P\_{3}-N\_{6}\sin(α=-60)$$ |
| $$-N\_{6}\cos(α=0)$$ | $$N\_{6}=0$$ |

Узел 6.

6

RB

N9

N7

N8

|  |  |
| --- | --- |
| $$N\_{9}+R\_{B}+N\_{7}\sin(α=0)$$ | $$N\_{7}={-\left(R\_{B}+N\_{9}\right)}/{\sin(α)={-\left(70-60\right)}/{0.86=-11.63}}$$ |
| $$-N\_{8}-N\_{7}\cos(α=0)$$ | $$N\_{8}=-N\_{7}\cos(α=11.63∙0.5)=5.81$$ |

Узел 4.

4

P4

N5

N8

N4

|  |  |
| --- | --- |
| $$-P\_{4}+N\_{5}=0$$ | $$N\_{5}=P\_{4}=-20$$ |
| $$-N\_{4}+N\_{8}=0$$ | $$N\_{4}=N\_{8}=5.81$$ |

Итак, из условий равновесия 6 узлов из 7 мы получили значения внутренних усилий: $N\_{1}=-20,N\_{2}=0,N\_{3} =-11.63,N\_{4}=5.81,N\_{5}=-20,N\_{6}=0,N\_{7}=-11.63, N\_{8}=5.81, N\_{9}=-60.$

Равновесие оставшегося узла 3 используем для проверки

Узел 3.

3

P2

N6

N2

N3

N5

N7

|  |  |
| --- | --- |
| $$-P\_{2}+N\_{2}\sin(α)+N\_{6}\sin(α-N\_{3}\sin(α)-N\_{7}\sin(α)-N\_{5}=0)$$ | $$-40+\sin(α)\left(0+0+11.63+11.63\right)+20=0, 0=0$$ |
| $$-N\_{2}\cos(α+N\_{6}\cos(α-N\_{3}\cos(α+N\_{7}\cos(α=0))))$$ | $$\cos(α\left(-0+0+11.63-11.63\right)=0, 0=0)$$ |

Равновесие узла 3 соблюдается.

Самое большое по модулю внутреннее усилие 60 кН наблюдается в стержне № 9. По нему определяется необходимая площадь и, соответственно, номер сортамента сечения стержня.

$$\frac{N\_{max}}{A}\leq \frac{\left[σ\right]}{k\_{з}} или A\geq \frac{N\_{max}k\_{з}}{\left[σ\right]}=\frac{60∙10^{3}Н∙2}{400∙10^{6}Па}=3∙10^{-4}м^{2}=3см^{2}$$

В нашем случае по таблице сортамента ГОСТ 8509-72 выбираем ближайший больший по площади № 4 равнобокого уголка с площадью сечения $3.08см^{2}$, высотой 40 мм и толщиной 4 мм.

1. Стержни, в которых возникают сжимающие усилия, проверить на устойчивость по формуле $N\_{i}\leq P\_{кр}=\frac{π^{2}EI}{l\_{i}^{2}}$, где $I$ -минимальный момент инерции равнобокого уголка № 4, значение которого берётся из сортамента; $l\_{i}, N\_{i} $-длина и усилие i-гo сжимаемого стержня.

Сжимающие усилия возникают в стержнях № 1, 3, 5, 7, 9. Главные моменты инерции равнобокого уголка № 4 равны 7.26 и 1.90 $см^{4}$. Минимальный момент инерции равен 1.90 $см^{4}$. Значения критической силы вычислены в таблице

Таблица 3.

Как видим, действующее усилие больше критической силы в сжатых стержнях № 1, 9. Для них произойдет потеря устойчивости.

1. *Построить эпюры нормальных усилий.*

Эпюры внутренних усилий показаны на Рис. 3.4.

20

11,6

5,8

20

11,6

5,8

60

Рис. ..

1. Вычислить вертикальное перемещение узла С фермы. Площади сечений стержней считать одинаковыми.

Узел С – это узел № 3. Его перемещение $δ$ будем рассчитывать по методу Мора, согласно которому

$$δ=\sum\_{j=1}^{9}\frac{N\_{j}\overbar{N}\_{j}}{A\_{j}E\_{j}}l\_{j}$$

Где $\overbar{N}\_{j} $- внутренние усилия в стержнях фермы при единичной внешней нагрузке в направлении искомого перемещения.

Найдем $\overbar{N}\_{j}$.

Рассмотрим равновесие узлов фермы при действии вертикальной силы P=1 в узле 3 (Рис. 3.5).

1

2

3

4

5

6

P=**1**

R’B

R’A

Рис. .

Реакции опор из-за симметрии одинаковы $R\_{A}^{'}=R\_{В}^{'}=\frac{1}{2}$*.* Рассмотрим равновесие узлов.

Узел 1. $\overbar{N}\_{1}=0, \overbar{N}\_{2}=0$.

Узел 5. $\overbar{N}\_{6}=0, \overbar{N}\_{9}=0$.

Узел 2.

2

$$R\_{A}^{'}$$

$$\overbar{N}\_{3}$$

$$\overbar{N}\_{1}$$

$$\overbar{N}\_{4}$$

|  |  |
| --- | --- |
| $$R\_{A}^{'}+\overbar{N}\_{1}+\overbar{N}\_{3}\sin(α)=0$$ | $$\overbar{N}\_{3} =-{\left(R\_{A}^{'}+\overbar{N}\_{1}\right)}/{\sin(α)=-}{\left(0.5+0\right)}/{\sin(60°)=-}0.58$$ |
| $$\overbar{N}\_{4}+\overbar{N}\_{3}\cos(α=0)$$ | $$\overbar{N}\_{4}=-\overbar{N}\_{3}\cos(α=0.58∙0.5=0.29)$$ |

Узел 6.

6

$$R\_{B}^{'}$$

$$\overbar{N}\_{9}$$

$$\overbar{N}\_{7}$$

$$\overbar{N}\_{8}$$

|  |  |
| --- | --- |
| $$\overbar{N}\_{9}+R\_{B}^{'}+\overbar{N}\_{7}\sin(α=0)$$ | $$\overbar{N}\_{7}={-\left(R\_{B}^{'}+\overbar{N}\_{9}\right)}/{\sin(α)={-\left(0.5-0\right)}/{0.86=-0.58}}$$ |
| $$-\overbar{N}\_{8}-\overbar{N}\_{7}\cos(α=0)$$ | $$\overbar{N}\_{8}=-\overbar{N}\_{7}\cos(α=0.58∙0.5)=0.29$$ |

Узел 4.

4

$$\overbar{N}\_{5}$$

$$\overbar{N}\_{8}$$

$$\overbar{N}\_{4}$$

$$\overbar{N}\_{5}=0$$

Равновесие узла 3 используем для проверки.

Итак $\overbar{N}\_{1}=0, \overbar{N}\_{2}=0, \overbar{N}\_{3}=-0.58,\overbar{N}\_{4}=0.29,\overbar{N}\_{5}=0,\overbar{N}\_{6}=0,\overbar{N}\_{7}=-0.58,\overbar{N}\_{8}=0.29,\overbar{N}\_{9}=0. $

Искомое перемещение

$$δ=\sum\_{j=1}^{9}\frac{N\_{j}\overbar{N}\_{j}}{A\_{j}E\_{j}}l\_{j}= $$

$${\left(\begin{array}{c}0+0+11.63∙0.58∙1.16+5.81∙0.29∙\frac{1}{1.73}+0+0+11.63∙0.58∙1.16\\+5.81∙0.29∙\frac{1}{1.73}+0\end{array}\right)}/{\left(AE\right)}={\left(7.825+0.974+7.825+0.974\right)кН∙1∙м}/{\left(3.08∙10^{-4}м^{2}∙200∙10^{9}Па\right)}=0.028∙10^{-2}м=0.28мм$$

## Варианты заданий

Вариант задания определяется 3-мя числами *k.l.m*, где *k* –номертопология фермы наРис. 3.6*, l* -номер строки нагрузки в табл 1, m -- номер *угла* $α$ в табл.2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № вар | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Вариант | 1.1.3 | 2.2.3 | 3.3.3 | 4.4.3 | 5.5.3 | 6.6.3 | 7.7.3 | 8.8.3 | 9.9.3 | 10.10.3 |
| № вар | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| Вариант | 11.2.1 | 12.3.1 | 13.4.1 | 14.5.1 | 15.6.1 | 16.7.1 | 17.8.1 | 18.9.1 | 9.10.1 | 10.1.1 |

Величина внешней нагрузки Значение угла $α$

Табл #1 Табл # 2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| п/п | $P\_{1}$,кН | $P\_{2}$,кН | $P\_{3}$,кН | $P\_{4}$,кH | №п/п | $$α,°$$ |
| 1 | 50 | 70 | 80 | 100 | 1 | 30 |
| 2 | 10 | 40 | 20 | 30 | 2 | 45 |
| 3 | 20 | 10 | 50 | 60 | 3 | 60 |
| 4 | 30 | 50 | 10 | 70 |  |  |
| 5 | 10 | 20 | 30 | 10 |  |  |
| 6 | 40 | 60 | 50 | 10 |  |  |
| 7 | 10 | 10 | 10 | 50 |  |  |
| 8 | 10 | 20 | 10 | 40 |  |  |
| 9 | 10 | 10 | 50 | 80 |  |  |
| 10 | 20 | 40 | 60 | 20 |  |  |

Высота фермы $a =2м.$ Допускаемое напряжение $\left[σ\right]$=400МПа. Модуль упругости $E=200ГПа.$









Рис. .. Плоская ферма

Промежуточные контрольные значения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № вар | Реакция левой опоры, Н | Усилие в левом нижнем стержне при P, Н | Усилие в левом нижнем стержне при C=1 |
|  | -30000 | -46188 | -0,57735 |
|  | -63508,5 | -23094 | -0,57735 |
|  | 50000 | 17320,5 | 0,288675 |
|  | 60000 | 0 | 0 |
|  | -20000 | -17320,5 | -0,57735 |
|  | -10000 | 0 | 0 |
|  | 46666,67 | 26943,0 | 0,19245 |
|  | 20000 | 11547,0 | -0,28868 |
|  | 20000 | 11547,0 | -0,28868 |
|  | 60000 | -23094 | 0 |
|  | 40000 | 51961,5 | 0,866025 |
|  | -30000 | 86602,5 | -1,73 |
|  | 121243,6 | -140000 | -2 |
|  | 25000 | 0 | 0 |
|  | 75000 | 60621,8 | 0,866025 |
|  | 40000 | 51961,5 | 0,866025 |