3. Аналитическая геометрия. Контрольные задания

Задача 1

Даны координаты точек А,В,С. Найти:

1. уравнение стороны АС треугольника АВС;
2. уравнение высоты ВН треугольника АВС, ее длину;
3. уравнения медиан СС1 и АА1 Δ АВС;
4. точку пересечения медиан СС1 и АА1 ;
5. угол А в Δ АВС;
6. уравнения сторон AD, CD параллелограмма ABCD;
7. координаты вершины D параллелограмма ABCD.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. А(-1;0) В(0;4) С(4;2) | 2. А(-2;0) В(0;3) С(3;-1) |
| 3. А(0;4) В(4;2) С(-1;0) | 4. А(2;3) В(-5;-4) С(6;1) |
| 5. А(2;-1) В(4;1) С(5;-5) | 6. А(2;0) В(0;3) С(-2;-8) |
| 7. А(3;4) В(0;-3) С(-2;0) | 8. А(5;2) В(2;5) С(1;-2) |
| 9. А(3;1) В(-4;0) С(1;-5) | 10. А(1;-3) В(2;) С(-1;2) |
| 11. А(2;-1) В(1;4) С(-3;1) | 12. А(5;1) В(-7;3) С(-1;-3) |
| 13. А(3;3) В(2;-4) С(-3;7) | 14. А(-5;-4) В(6;3) С(1;4) |
| 15. А(4;0) В(-2;1) С(1;7) | 16. А(2;2) В(4;0) С(-2;-4) |
| 17. А(-2;1) В(4;0) С(3;7) | 18. А(1;3) В(3;2) С(-2;-1) |
| 19. А(10;5) В(-2;10) С(-2;-4) | 20. А(3;1) В(1;5) С(-2;-5) |
| 21. А(1;3) В(-3;2) С(3;-4) | 22. А(3;-1) В(1;4) С(-3;-4) |
| 23. А(2;1) В(4;2) С(-2;5) | 24. А(1;1) В(3;4) С(-4;5) |
| 25. А(3;2) В(1;5) С(-4;-7) | 26. А(4;2) В(3;0) С(-5;1) |
| 27. А(1;-3) В(-3;2) С(3;4) | 28. А(4;2) В(3;0) С(0;4) |
| 29. А(4;1) В(3;2) С(-2;-3) | 30. А(3;1) В(-4;8) С(3;7) |

Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид

, (1)

где А, В – координаты нормального (перпендикулярного) вектора прямой.

Уравнение прямой, проходящей через точку , перпендикулярно вектору  :

. (2)

Уравнение прямой, проходящей через точку , параллельно вектору , имеет вид

. (3)

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки  и :

 (4)

Уравнение прямой, проходящей через данную точку  в данной направлении, имеет вид

 (5)

где  - угловой коэффициент прямой, - угол, образованный прямой с положительным направлением на оси ОХ.

у



х

0

Если прямая проходит через начало координат, то ее уравнение имеет вид

. (6)

Уравнение  (7)

называется уравнением прямой с угловым коэффициентом, где b – величина отрезка, отсекаемого прямой от оси ОУ.

0

у

b 

х

Пусть две прямые заданы общими уравнениями

.

Если , то .

Если , то .

Если , то .

Пусть две прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом

.

Если , то .

Если , то .

Если , то .

Расстояние  от точки  до прямой  вычисляется по формуле

 (8)

**Пример.**

Даны координаты вершин треугольника .

1) Вычислить длину стороны .

2) Составить уравнение линии .

3) Составить уравнение высоты, проведенной из вершины А, и найти ее длину.

4) Найти точку пересечения медиан.

5) Найти косинус внутреннего угла при вершине В.

6) Найти координаты точки М, расположенной симметрично точке А, относительно прямой ВС.

А

К

N

О

В С

М

Решение

1. Длина стороны ВС равна модулю вектора .

 ; .

2. Уравнение прямой ВС: ; ; .

3. Уравнение высоты АК запишем как уравнение прямой, проходящей через точку  перпендикулярно вектору : 

. Длину высоты АК можно найти как расстояние от точки А до прямой ВС: .

4. Найдем координаты точки N – середины стороны ВС:

; ; .

Точка пересечения медиан О делит каждую медиану на отрезки в отношении .

Используем формулы деления отрезка в данном отношении :

 .

5. Косинус угла при вершине В найдем как косинус угла между векторами  и ; 

.

6. Точка М, симметричная точке А относительно прямой ВС, расположена на прямой АК, перпендикулярной к прямой ВС, на таком же расстоянии от прямой, как и точка А. Координаты точки К найдем как решения системы  Систему решим по формулам Крамера: 

 .

Точка К является серединой отрезка АМ.

 .

# ЗАДАЧА 2

Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев.

1. Центр окружности находится в точке С(2;-3), R=7.
2. Окружность проходит через начало координат, центр окружности находится в точке С(6,8).
3. Окружность проходит через точку А(-1;2) и ее центр находится в точке

С(-1;2).

1. Окружность проходит через точки А(3;1) и В(-1;3), а ее центр лежит на прямой .

Определить полуоси, эксцентриситет и построить следующие эллипсы:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 5. |  | 6. |  |
| 7. |  | 8. |  |

Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно точки О, если

1. точка М1(2;-2) лежит на эллипсе и а = 4;

10) точка  лежит на эллипсе и ;

11) расстояние между фокусами 2с = 6 см, ;

12) малая полуось b = 10см, а .

Найти точки пересечения прямой и эллипса.

13.  14. 

Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены симметрично относительно точки О на оси ординат, зная, что:

15. Расстояние между фокусами 2с = 10 см, .

16. Уравнения асимптот  и расстояние между вершинами равно 48 м.

17. Дана гипербола . Найти: 1) каноническое уравнение;

2) полуоси; 3) фокусы; 4) эксцентриситет; 5) уравнения асимптот; 6) уравнения директрис.

Найти точки пересечения прямой и гиперболы:

1.  19. 

Определить полуоси a и b, эксцентриситет, асимптоты следующих гипербол:

20.  21. 

22.  23. 

Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, если:

24) парабола симметрична относительно ОХ и проходит через точку А(9; 6);

25) парабола симметрична относительно OY и проходит через точку D(4; -8);

26) парабола симметрична относительно OY и проходит через точку С(1; 1).

Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу. Найти координаты ее вершины О1 , величину параметра **p** и построить параболы:

27.  28. 

29.  30. 

**Кривые второго порядка**

Канонические уравнения кривых второго порядка имеют вид

1)  - эллипс с фокусами , где , и эксцентриситетом . Если , то уравнение  описывает окружность, в этом случае ;

2)  - гипербола с фокусами , где , и эксцентриситетом . Прямые  являются асимптотами гиперболы;

3)  - парабола, симметричная оси Ох, с фокусом  и директрисой , - парабола, симметричная относительно Оу, с фокусом  и директрисой .

**Пример**

Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее директриса параллельна оси Оу и проходит через левый фокус гиперболы:

.

Определим координаты левого фокуса гиперболы: , . Так как директриса параболы параллельна оси Оу и проходит через точку , то она имеет уравнение . Определим значение параметра р параболы: . Каноническое уравнение параболы имеет вид , т. е. .

## **ЗАДАЧА 3**

Привести к каноническому виду, установить, является ли линия центральной. Найти, если является, координаты центра, полуоси, эксцентриситет для централь-ной кривой, вершину, параметр **p** и уравнение директрисы для параболы:

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | 2. |
| 3. | 4. |
| 5. | 6. |
| 7. | 8. |
| 9. | 10. |
| 11. | 12. |
| 13. | 14. |
| 15. | 16. |
| 17. | 18. |
| 19. | 20. |
| 21. | 22. |
| 23. | 24. |
| 25. | 26. |
| 27. | 28. |
| 29. | 30. |

**Кривые второго порядка**

Линия, которая в декартовой системе координат определяется уравнением второй степени, называется линией второго порядка.

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

.

Центром линии 2-го порядка называется такая точка плоскости, по отношению к которой точки этой линии расположены симметрично, парами. Линии 2-го порядка, обладающие единственным центром, называются центральными.

Составим определитель вида



Если то отсюда следует, что линия 2-го порядка является центральной, и координаты центра  могут быть найдены по формулам

,  .

Определитель  будет использоваться и в дальнейшем при проведении кривой 2-го порядка к каноническому виду.

**Приведение к каноническому виду линии 2-го порядка**

Рассмотрим вначале частный случай линии 2-го порядка, при В = 0, то есть от-сутствует произведение :



В этом случае преобразование к каноническому виду сводится к выделению полных квадратов по **х** и **y** и переносу в правую часть свободного члена. Разделив обе части полученного уравнения на свободный член, получим каноническое уравнение соответствующей кривой.

В общем случае для приведения к каноническому виду нужно для матрицы, соответствующей , т. е. , найти собственные значения и собственные векторы, которые и определят новую систему координат, в которой кривая имеет канонический вид.

Этот алгоритм будет рассмотрен подробно на примере.

**Классификация линий 2-го порядка. Окружность**

Окружность – геометрическое место точек, равноудаленных от одной точки, называемой центром.

Пусть , тогда каноническое уравнение окружности имеет вид (рис. 4)

, где R – радиус окружности.

Если центр совпадает с началом координат, уравнение принимает вид: (рис.5).

Y Y

y0 R

C R

x0 x O x

Рис. 4 Рис. 5

# Эллипс

Эллипс – геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Если центр эллипса совпадает с началом координат, то каноническое уравнение имеет вид .

Если a > b, то эллипс вытянут вдоль оси ОХ, фокусы расположены также на ОХ симметрично относительно начала координат, а фокусное расстояние и эксцентриситет определяются по формулам:  (рис. 6).

Если b > a, то эллипс вытянут вдоль оси OY, фокусы располагаются на оси OY, симметрично относительно начала координат, а фокусное расстояние и эксцентриситет определяются по следующей формуле:   (рис. 7).

Y Y

F2

b

b a

F1 O F2 x O x

F1

Рис. 6 Рис. 7

# Гипербола

Гипербола – геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Если центр гиперболы совпадает с началом координат, то ее уравнение имеет канонический вид:

.

Это уравнение распадается на два уравнения гипербол, которые называются сопряженными:  (рис. 8) и  (рис. 9).

## Y

Y

F2

B

F1 A b B F2

a O x O x

A

F1

Рис. 8 Рис. 9

Точки A и B (рис. 8) – вершины гиперболы. Диагонали основного прямоугольника, являющиеся асимптотами гиперболы имеют уравнения: . Уравнения директрис: 

Уравнения асимптот гиперболы (рис. 9): . Уравнения директрис: .

# Парабола

Парабола – геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой прямой, называемой директрисой.

Парабола не является центральной кривой; она имеет одну ось симметрии, с которой она пересекается в единственной точке, называемой ее вершиной.

Если координатная система выбрана так, что вершина находится в начале координат, то канонические уравнения параболы будут иметь вид  (рис. 10) и  (рис. 11), где .

|  |  |
| --- | --- |
| Y O x       Рис. 10 | Y      O x        Рис. 11 |

Осью симметрии парабол (рис. 10) является ось ОХ, уравнения директрис имеют вид:  и .

Осью симметрии парабол (рис. 11) является ось OY, уравнения директрис имеют вид:  и .

**Задача 2.** Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что 2с=6,.

**Решение.** Каноническое уравнение такой гиперболы имеет вид

.

Из условия . Составим систему

 . Из системы находим ; .

Каноническое уравнение будет иметь вид .

### **Ответ:** Каноническое уравнение гиперболы .

**Задача.** Определить точки пересечения прямой  и параболы .

**Решение.** Выразим **y** в уравнении прямой через **х** и подставим в уравнение параболы:

,

.

По теореме Виета , откуда Находим ординаты

 Точки пересечения имеют координаты 

.

**Ответ:** Точки пересечения прямой и параболы .

**Задача.** Установить, является ли линия 2-го порядка  центральной и найти координаты ее центра.

**Решение.** Вычислим определитель матрицы квадратичной формы:

 Так как , линия является центральной. Найдем координаты центра .

,

.

**Ответ:** Кривая второго порядка является центральной, центр С(3, -2).

**Задача.** Установить, приведением к каноническому виду какую кривую 2-го порядка определяет следующее уравнение: ****. Найти координаты центра (вершины), полуоси, эксцентриситет.

**Решение.** Выделим полные квадраты по **х** и **у**, так как член **ху** отсутствует в уравнении:

,

.

Делим обе части на свободный член:

.

Получим каноническое уравнение эллипса:



Центр С(3,-1), полуоси .

**Ответ**: Кривая центральная С(3,-1), .

# ЗАДАЧА 4

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М параллельно плоскости

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. M(1; 0; 1) | 4x+6y+4z=0 |  |  |
| 2. M(-1; 0; -1) | 2x+6y-2z+11=0 |  |  |
| 3. M(0; 2; 1) | 2x+4y-3=0 |  |  |
| 4. M(2; 1; 0) | y+z+2=0 |  |  |
| 5. M(-1; 2; 0) | 4x-5y-z-7=0 |  |  |
| 6. M(2; -1; 1) | x-y+2z=0 |  |  |
| 7. M(1; 1; 1) | x+4y+3z+5=0 |  |  |
| 8. M(1; 2; 3) | 2x+10y+10z-1=0 |  |  |
| 9. M(0; -3; -2) | 2x+10y+10z-1=0 |  |  |
| 10. M(1; 0; -1) | 2y+4z-1=0 |  |  |
| 11. M(3; -3; -1) | 2x-4y-4z-13=0 |  |  |
| 12. M(-2; -3; 0) | x+5y+4=0 |  |  |
| 13. M(2; -2; -3) | y+z+2=0 |  |  |
| 14. M(-1; 0; 1) | 2x+4y-3=0 |  |  |
| 15. M(3; 3; 3) | 8x+6y+8z-25=0 |  |  |
| 16. M(-2; 0; 3) | 2x-2y+10z+1=0 |  |  |
| 17. M(-3; 4; -7) | 2x-y+5z-16=0 |  |  |
| 18. M(1; 5; -4) | x-3y+z-1=0 |  |  |
| 19. M(-5; -2; 0) | 4x-5y+3z-1=0 |  |  |
| 20. M(-12; 7; 1) | x-4y-z+9=0 |  |  |
| 21. M(-1; 2; -3) | 3x-y+2z+15=0 |  |  |
| 22. M(4; -1; 0) | 5x+9y-3z-1=0 |  |  |
| 23. M(2; 1; -2) | 6x+2y-4z+17=0 |  |  |
| 24. M(1; -6; -5) | 9x+3y-6z-4=0 |  |  |
| 25. M(-3; -1; 1) | x-3y+5=0 |  |  |
| 26. M(-9; 1; -2) | 6x+3y-2z=0 |  |  |
| 27. M(3; -5; 4) | x+2y+6z-12=0 |  |  |
| 28. M(-7; 0; -1) | x+2y+2z-3=0 |  |  |
| 29. M(1; -1; 1) | 16x+12y-15z-1=0 |  |  |
| 30. M(-2; 0; 3) | 2x-y+5z+16=0 |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**ПЛОСКОСТЬ**

Рассмотрим в пространстве плоскость Q. Всякий ненулевой вектор , перпендикулярный этой плоскости назовем вектором нормали. Пусть вектор N имеет координаты  и точка  - некоторая фиксированная точка плоскости.

Рассмотрим вектор , соединяющий точку  и произвольную точку плоскости  (рис. 13): .



Так как векторы  и  взаимно перпенди-кулярны, их скалярное произведение равно ну-лю =0. В координатной форме

. (10)

M

M1

Полученное уравнение является уравнением

плоскости, проходящей через точку

Рис. 13

 перпендикулярно вектору нормали . Его можно записать как , (11)

где . Следовательно, всякая плоскость определяется уравнением первой степени относительно текущих координат. Справедливо и обратное: всякое уравнение (11) первой степени определяет некоторую плоскость в пространстве.

Уравнение (11) называют общим уравнением плоскости. Преобразуем его следующим образом: перенесем свободный член D в правую часть: . Разделим полученное равенство на минус D:

. Обозначим . Получим

 (12)

уравнение плоскости в отрезках, где а – отрезок, отсекаемый плоскостью на оси Ох, b – отрезок, отсекаемый на оси Oy, с – отрезок, отсекаемый на оси Oz (рис. 14).

z

c

b y

a

x

Рис. 14

Пусть даны точка  и плоскость Q с уравнением  . Расстояние d между ними, т. е. длина перпендикуляра, опущенного из точки  на плоскость Q, определяется формулой

. (13)

Плоскость Q будет определена, если задать три ее точки, не лежащие на одной прямой: ; ; . Точка  – произволь-ная точка плоскости. Тогда векторы , ,  компланарны. В координатной форме условие компланарности имеет вид

. (14)

M1 M2

Рис. 15

M M3

Уравнение (14) – уравнение плоскости, проходящей через три точки: М1, М2, М3.

Рассмотрим плоскости Q1 и Q2, заданные соответственно уравнениями

 и .

Угол  между плоскостями можно рассматривать как угол между векторами нормали N1 и N2. Поэтому

. (15)

Отметим, что две плоскости Q1 и Q2 параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны и векторы нормали :

 . (16)

# И две плоскости Q1 и Q2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы перпендикулярны:

. (17)

**Задача.** Составить уравнение плоскости , проходящей через точку

М(3; -1; -2) параллельно плоскости .

**Решение.** Если две плоскости параллельны, то параллельны их векторы нормали (15) . Поэтому в качестве нормали к искомой плоскости  можно взять нормаль к данной плоскости . Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору (10):

 или .

**Ответ:** Уравнение плоскости .

ЗАДАЧА 5

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М1 и М2 перпендику-лярно данной плоскости.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. M1(1; 3; 6) | M2(2; 2; 1) | x+2y+3z-14=0 |
| 2. M1(-1; 0; 1) | M2(-4; 6; -3) | x+2y-5z+20=0 |
| 3. M1(-4; 2; 6) | M2(2; -3; 0) | x-3y+7z-24=0 |
| 4. M1(-10; 5; 8) | M2(-5; 2; 4) | 2x-y+4z=0 |
| 5. M1(7; 2; 4) | M2(7; -1; -2) | 3x+y-5z-12=0 |
| 6. M1(3; 3; 1) | M2(-4; 2; 1) | x+3y-5z+9=0 |
| 7. M1(2; 1; 4) | M2(-1; 5; -2) | x-2y+5z+17=0 |
| 8. M1(-7; -3; 2) | M2(-6; -3; 6) | x-2y+4z-19=0 |
| 9. M1(-1; -5; 2) | M2(-6; 0; -3) | 2x-y+3z+23=0 |
| 10. M1(3; 6; -3) | M2(10; 6; -7) | 2x-3y-5z-7=0 |
| 11. M1(0; -1; -1) | M2(-2; 3; 5) | 4x+2y-z-11=0 |
| 12. M1(1; -5; -9) | M2(-1; -6; 3) | 3x-2y-4z-8=0 |
| 13. M1(5; 2; 0) | M2(2; 5; 0) | x+2y-z-2=0 |
| 14. M1(1; 2; 4) | M2(-1; 1; 1) | 5x-y+4z+3=0 |
| 15. M1(2; -1; -2) | M2(1; 2; 1) | x+3y+5z-42=0 |
| 16. M1(5; 0; -6) | M2(10; 9; -7) | x+y+4z-47=0 |
| 17. M1(-2; 0; -4) | M2(-1; 7; 1) | 2x+3y+z-52=0 |
| 18. M1(4; -8; -4) | M2(1; -4; -6) | 3x+4y+2z-16=0 |
| 19. M1(1; 4; 5) | M2(-5; 3; 2) | 2x-y+3z+24=0 |
| 20. M1(-2; 6; -3) | M2(-2; 2; -1) | x-2y-3z+18=0 |
| 21. M1(1; 2; 0) | M2(3; 0; -3) | x+7y+3z+11=0 |
| 22. M1(5; 2; 6) | M2(8; 4; 9) | 3x+7y-5z-11=0 |
| 23. M1(2; -1; 2) | M2(1; 2; -1) | 4x+y-6z-5=0 |
| 24. M1(3; 2; 1) | M2(-4; 2; 5) | 5x+9y+4z-25=0 |
| 25. M1(1; 1; 2) | M2(-1; 1; 3) | x+4y+13z-23=0 |
| 26. M1(2; -2; 4) | M2(-1; 0; -2) | 3x-2y+5z-3=0 |
| 27. M1(2; 3; 1) | M2(4; 1; -2) | 3x-y+4z=0 |
| 28. M1(6; 3; 7) | M2(7; 5; 3) | x+2y-5z+16=0 |
| 29. M1(1; 1; -1) | M2(2; 3; 1) | 3x-7y-2z+7=0 |
| 30. M1(3; 2; 1) | M2(5; 2; -8) | 5x+y+9z-32=0 |

**Задача.** Составить уравнение плоскости α , которая проходит через точки М1(1; -1; -2) и М2(3; 1; 1) перпендикулярно плоскости  (рис.17).

**Решение.** Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку (например, точку М1) перпендикулярно вектору (10). В качестве вектора нормали плоскости α можно взять векторное произведение  и вектора нормали данной плоскости . Так как  параллелен α и , вектор нормали  будет перпендикулярен искомой плоскости α.



,





М1 

α М2

Рис. 17

**Ответ:** Уравнение плоскости α: .

ЗАДАЧА 6

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М и прямую.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. | M(0; -3; -2) |  | 2. | M(2; -1; 1) |  |
| 3. | M(1; 1; 1) |  | 4. | M(1; 2; 3) |  |
| 5. | M(0; 0; -1) |  | 6. | M(2; 1; 0) |  |
| 7. | M(-2; -3; 0) |  | 8. | M(-1; 0; -1) |  |
| 9. | M(0; 2; 1) |  | 10. | M(3; -3; -1) |  |
| 11. | M(3; 3; 3) |  | 12. | M(-1; 2; 0) |  |
| 13. | M(2; -2; -3) |  | 14. | M(1; 5; -7) |  |
| 15. | M(-3; 6; 3) |  | 16. | M(-2; -7; 3) |  |
| 17. | M(-3; 4; -7) |  | 18. | M(1; 5; -4) |  |
| 19. | M(-5; -2; 0) |  | 20. | M(2; 5; 4) |  |
| 21. | M(-1; 2; -3) |  | 22. | M(4; -1; 0) |  |
| 23. | M(2; 1; -2) |  | 24. | M(3; 4; 5) |  |
| 25. | M(4; -1; 3) |  | 26. | M(-2; 1; 0) |  |
| 27. | M(0; -5; 1) |  | 28. | M(3; 2; -6) |  |
| 29. | M(1; -1; 1) |  | 30. | M(-2; 0; 3) |  |

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим в пространстве прямую . Точка  – некоторая точка этой прямой. Всякий ненулевой вектор , параллельный или лежащий на прямой, назовем направляющим вектором. Пусть вектор  имеет координаты . Рассмотрим вектор , где точка  – произвольная точка плоскости (рис. 18): .

Так как вектор **** коллинеарен вектору **,** то их координаты пропорциональны и

. (18)

Полученное уравнение называется каноничес-ким уравнением прямой.



М

М1

Рис. 18

Заметим, что рис. 18 отражает параллельность прямой  вектору **,** поэтому, например, уравнение  говорит о том, что прямая, определя-емая этим уравнением, перпендикулярна оси OY и лежит в плоскости .

Прямая  будет определена, если задать две ее различные точки:  и . Вектор  в этом случае служит направляющим вектором прямой (рис. 19). Следовательно,  и поэтому

из уравнения (17) следует

. (19)

****

М2

М1

Рис. 19

Уравнение (19) называется уравнением прямой, проходящей через две точки.

Иногда удобно пользоваться параметрическими уравнениями прямой, которые получим из (18), введя параметр t:

.

Перепишем это равенство в виде  (20)

Эти уравнения называют параметрическими уравнениями прямой.

Прямая  может быть задана как линия пересечения двух плоскостей Q1 и Q2 (рис. 20).

 . (21)

Эти уравнения называются общими урав-нениями прямой. Переход от общих урав-нений к каноническому можно выполнить следующим образом: координаты точки М1, принадлежащих прямой, можно найти как одно из частных решений системы (21). Направляющий вектор (рис. 20), поэтому в качестве направляющего может





Q1





Q2

Рис. 20

быть принят вектор  ( – нормальные векторы плоскостей Q1 и Q2).

Рассмотрим в пространстве две прямые , заданные соответственно уравнениями

 и 

За угол между прямыми принимают угол  между направляющими векторами  данных прямых. По известной формуле косинуса угла между векторами получим

. (22)

Условие параллельности двух прямых равносильно условию коллинеарности их направляющих векторов .

 (23)

Условие перпендикулярности двух прямых равносильно условию перпендику-лярности их направляющих векторов :

. (24)

**Взаимное расположение прямой и плоскости**

**в пространстве**

Углом α между прямой  и плоскостью Q называется острый угол между этой прямой и ее проекцией  на плоскость Q (рис.21). Пусть прямая  и плоскость Q заданы уравнениями

 .

Векторы  и  образуют угол , значит,



 



  

Q

Рис. 21

Очевидно, что прямая  и плоскость Q перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда направляющий вектор  прямой и вектор нормали  плоскости коллинеарны: . (26)

Прямая и плоскость параллельны друг другу, когда векторы перпенди-кулярны: . (27)

Точку пересечения прямой  и плоскости Q можно найти, решив совместно систему:



Проще всего это сделать с помощью параметрических уравнений прямой (20).

Каждому значению параметра t соответствует точка плоскости. Нужно выбрать такое t, при котором точка прямой будет лежать в плоскости. Подставляя x, y, z из соотношений (20) в уравнение плоскости, получим уравнение, из которого найдем значение параметра t.



или

,

.

**Задача.** Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку

М(1; 0; -2) и прямую с уравнением .

**Решение.** Известна точка, принадлежащая прямой Р(3; -2; 1). Так как вектор

нормали плоскости α перпендикулярен

вектору  и вектору , его можно найти как векторное произведение . Координаты .

,

.

 М



α Р

##### Воспользуемся уравнением плоскости по точке и вектору нормали:

 или  или .

ЗАДАЧА 7

Привести общие уравнения прямой к каноническому виду.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. | 2x-3y-2z+6=0, | x-3y+z+3=0 |  |  |
| 2. | 6x-5y+3z+8=0, | 6x+5y-4z+4=0 |  |  |
| 3. | 3x+3y+z-1=0, | 2x-3y-2z+6=0 |  |  |
| 4. | 3x+4y+3z+1=0, | 2x-4y-2z+4=0 |  |  |
| 5. | 2х+3y-2z+6=0, | x-3y+z+3=0 |  |  |
| 6. | x-3y+z+2=0, | x+3y+2z+14=0 |  |  |
| 7. | x+5y+2z-5=0, | 2x-5y-z+5=0 |  |  |
| 8. | 6x-7y-z-2=0, | x+7y-4z-5=0 |  |  |
| 9. | x-y+z-2=0, | x-2y-z+4=0 |  |  |
| 10. | x+5y-z+11=0, | x-y+2z-1=0 |  |  |
| 11. | x+y-2z-2=0, | x-y+z+2=0 |  |  |
| 12. | 2x+y-3z-2=0, | 2x-y+z+6=0 |  |  |
| 13. | 4x+y+z+2=0, | 2x-y-3z-8=0 |  |  |
| 14. | 5x+y+2z+4=0, | x-y-3z+2=0 |  |  |
| 15. | 2x-3y+z+6=0, | x-3y-2z+3=0 |  |  |
| 16. | x+5y-z-5=0, | 2x-5y+2z+5=0 |  |  |
| 17. | 6x-5y-4z+8=0, | 6x+5y+3z+4=0 |  |  |
| 18. | 8x-y-3z-1=0, | x+y+z+10=0 |  |  |
| 19. | 6x-7y-4z-2=0, | x+7y-z-5=0 |  |  |
| 20. | 3x+3y-2z-1=0, | 2x-3y+z+6=0 |  |  |
| 21. | 4x+y-3z+2=0, | 2x-y+z-8=0 |  |  |
| 22. | x-y-z-2=0, | x-2y+z+4=0 |  |  |
| 23. | 5x+y-3z+4=0, | x-y+2z+2=0 |  |  |
| 24. | 3x+4y-2z+1=0, | 2x-4y+3z+4=0 |  |  |
| 25. | x+5y+2z+11=0, | x-y-z-1=0 |  |  |
| 26. | 3x+y-z-6=0, | 3x-y+2z=0 |  |  |
| 27. | 2x+3y+z+6=0, | x-3y-2z+3=0 |  |  |
| 28. | x+y+z-2=0, | x-y-2z+2=0 |  |  |
| 29. | x-2y+z-4=0, | 2x+2y-z-8=0 |  |  |
| 30. | x-3y+2z+2=0, | x+3y+z+14=0 |  |  |

**Задача**. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой



**Решение**. Канонические уравнения прямой имеют вид (формула 17)

,

где  - точка, принадлежащая прямой, а вектор  - направляющий вектор прямой. Точку М1 выберем произвольно на прямой, т. е. найдем одно из бесчисленного множества решений системы уравнений

.

Примем х=0, тогда система примет вид:



Второе уравнение умножаем на (-3) и складываем оба уравнения. Получим ; координаты точки М1(0; -1; 2).

Направляющий вектор  можно найти как векторное произведение нормалей к плоскостям, при пересечении которых образуется данная прямая:  и

.

Тогда , .

Канонические уравнения прямой: .

**Ответ**: .