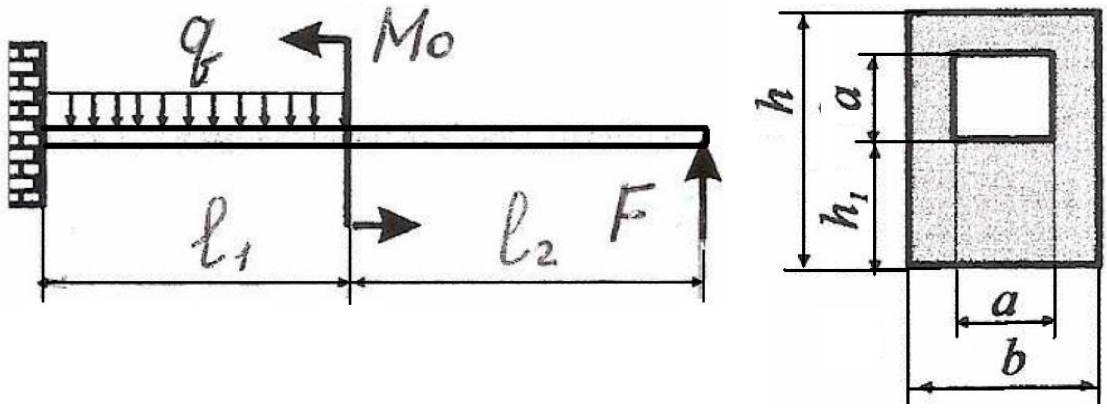
Задача 1.
Расчет консольной балки

Для заданной балки:

1. Определить реакции закрепления.
2. Построить эпюры Q и M.
3. Подобрать из условия прочности размеры круглого и прямоугольного поперечного сечения, приняв $[\sigma]$ = 100 МПа (при заданном соотношении h/b).
4. Построить эпюры распределения нормальных и касательных напряжений в опасном сечении по высоте подобранных в п. 3 сечений.
5. Там же вычислить нормальные и касательные напряжения для балки прямоугольного сечения на расстоянии $h/3$ от верхнего края.
6. Подобрать размеры сложного сечения заданного профиля из условия прочности, изобразить сечение в масштабе, указав характерные размеры, использованные при расчете, построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении.



$l_1 = 2{,}6$ м;
$l_2 = 2{,}4$ м

$F = 80$ кН
$M_0 = 50$ кН·м
$q = 20$ кН/м

$h : h_1 : b : a = 7 : 3 : 4 : 1$
$d = a$

Решение

1. Опорные реакции определяем из уравнений равновесия:

$$\sum F_x = 0$$

$$H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0;$$

$$-R_A - ql_1 + F = 0$$

$$R_A = F - ql_1$$

$$R_A = 80 - 20 \cdot 2,6 = 28 \text{ кН}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_0 - M_A - ql_1 \cdot l_1 / 2 + F \cdot (l_1 + l_2) = 0$$

$$M_A = M_0 - ql_1 \cdot \frac{l_1}{2} + F \cdot (l_1 + l_2).$$

$$M_A = 50 - 20 \cdot 2,6 \cdot \frac{2,6}{2} + 80 \cdot (2,6 + 2,4) = 382,4 \text{ кН·м}$$

Проверка:

$$\sum M_B = 0$$

$$M_0 - M_A + R_A l_1 + ql_1 \cdot \frac{l_1}{2} + Fl_2 = 0;$$

$$50 - 382,4 + 28 \cdot 2,6 + 20 \cdot 2,6 \cdot \frac{2,6}{2} + 80 \cdot 2,4 = 0 \text{ (верно)}$$

2. Перерезывающие силы в поперечных сечениях балки

$$Q_I = -F = -80 \text{ кН}$$

$$Q_{II} = Q_I = -80 \text{ кН}$$

$$Q_{III} = -F + ql_1 = -80 + 20 \cdot 2,6 = -28 \text{ кН}$$

3. Изгибающие моменты силы в поперечных сечениях балки

$$M_I = 0$$

$$M_{II} = Fl_2 = 80 \cdot 2,4 = 192 \text{ кН·м}$$

$$M_{II}^{/} = M_{II} + M_0 = 192 + 50 = 242 \text{ кН·м}$$

$$M_{III} = F(l_1 + l_2) + M_0 - ql_1 \cdot \frac{l_1}{2} =$$

$$= 80 \cdot (2,6 + 2,4) + 50 - 20 \cdot 2,6 \cdot \frac{2,6}{2} = 382,4 \text{ кН·м}$$

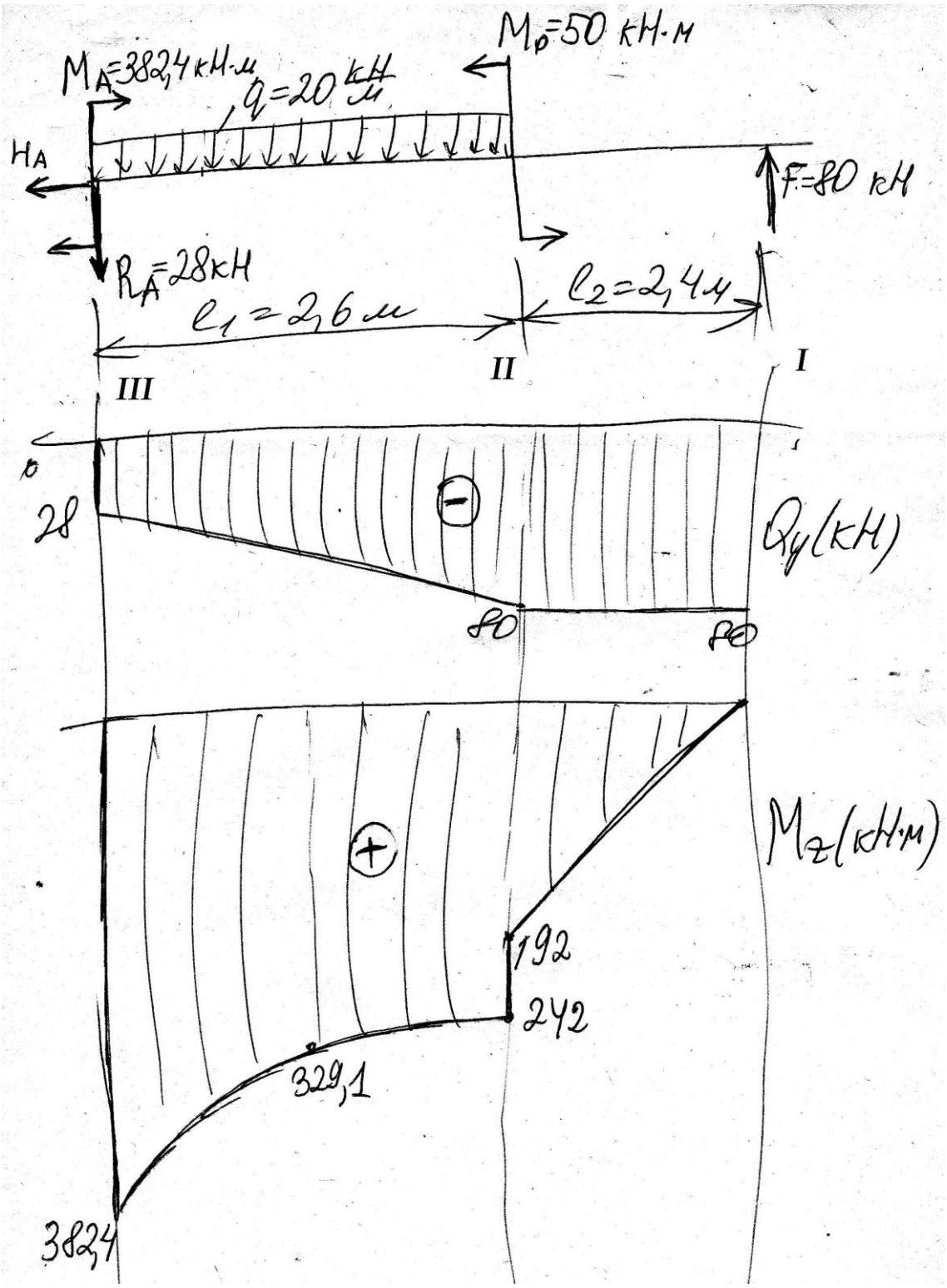


Рисунок 1 – Эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов

4. Подбор размеров поперечного сечения из условия прочности

По эпюре M_z находим опасное сечение, то есть сечение, в котором изгибающий момент принимает наибольшее по модулю значение.

$$|M_z|_{\max} = 382,4 \text{ кН·м.}$$

Требуемый момент сопротивления сечения находим из условия прочности при изгибе:

$$\sigma_{max} \geq \frac{|M_z|_{max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Момент сопротивления сечения балки должен быть не менее

$$W_z = \frac{|M_z|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{382,4 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 3,824 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

Осевой момент сопротивления ***круглого*** поперечного сечения вычисляется по формуле:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32},$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_z}{\pi}}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3,824 \cdot 10^{-3}}{\pi}} = 0,339 \text{ м} \qquad (339 \text{ мм})$$

Принимаем d = 340 мм

При d = 340 мм

$$W_z = \frac{\pi \cdot 0,340^3}{32} = 3,859 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{382,4 \cdot 10^3}{3,859 \cdot 10^{-3}} = 99 \cdot 10^6 \text{ Па} \qquad (99 \text{ МПа})$$

Эпюра распределения σ_x по высоте сечения приведена на рис.2. Нижние волокна балки в опасном сечении растянуты ($\sigma_x > 0$), а верхние волокна сжаты ($\sigma_x < 0$).

Для **прямоугольного** сечения с соотношением сторон $\frac{h}{b} = \frac{7}{4}$ осевой момент сопротивления равен:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{49}{96} b^3.$$

Размеры сечения находятся из неравенства:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{96 \cdot |M_z|_{\max}}{49 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{96 \cdot 382,4 \cdot 10^3}{49 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 0,196 \text{ м.}$$

Принимаем $b = 0,2$ м, при этом $h = 0,35$ м. Тогда

$$|\sigma_x|_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} = \frac{382,4 \cdot 10^3}{\frac{0,2 \cdot 0,35^2}{6}} = 93,65 \cdot 10^6 \text{ Па} \quad (93,65 \text{ МПа}).$$

Эпюра распределения σ_x по высоте сечения приведена на рис. 3.

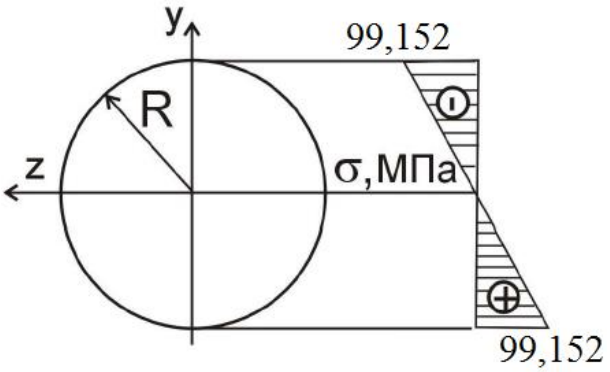


Рисунок 2

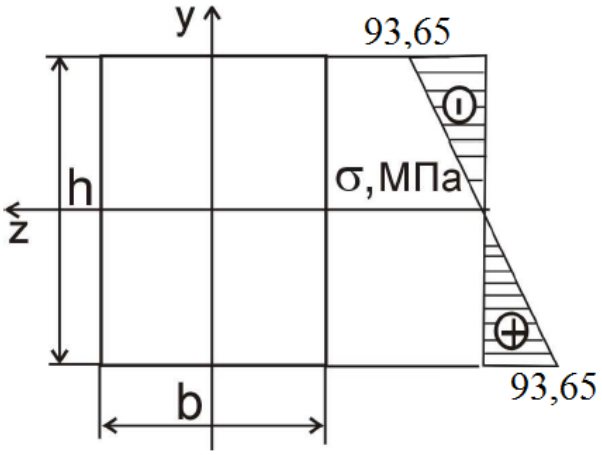


Рисунок 3

5) Касательные напряжения в опасном сечении

Построим в круглом и прямоугольном сечениях, подобранных в п. 4, эпюру распределения касательных напряжений по высоте сечения в том сечении, где действует максимальная поперечная сила $|Q_y|_{\max} = 80$ кН.

Максимальные касательные напряжения в круглом сечении (рис. 4):

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{|Q_y|_{\max}}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{80 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,17^2} = 1,18 \cdot 10^6 \text{ Па} \quad (1,18 \text{ МПа}).$$

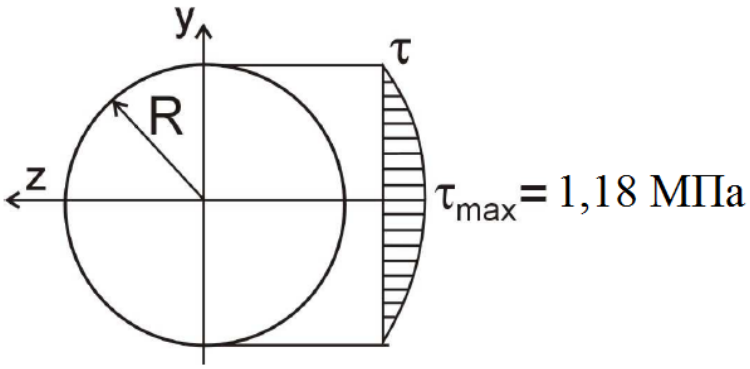


Рисунок 4

Максимальные касательные напряжения в прямоугольном сечении (рис. 5):

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{|Q_y|_{\max}}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{80 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 0,35} = 1,71 \cdot 10^6 \text{ Па} \quad (1,71 \text{ МПа}).$$

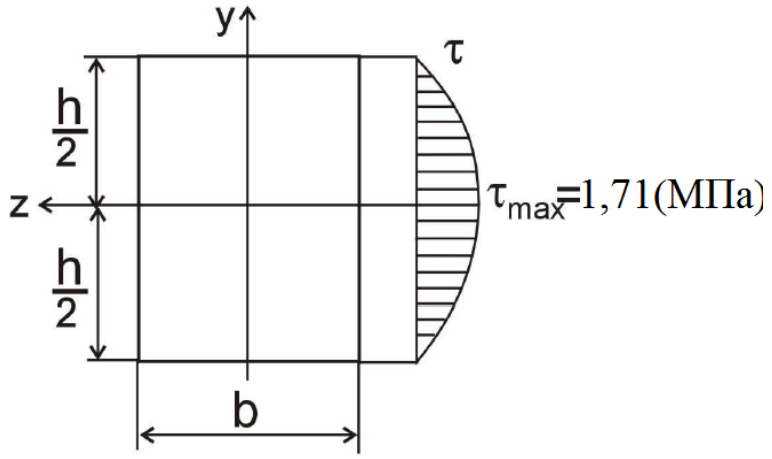


Рисунок 5

6. В сечении заделки (где действует максимальный изгибающий момент) нормальное напряжение для балки прямоугольного сечения на расстоянии $h/3$ от верхнего края (см. рисунок 6)

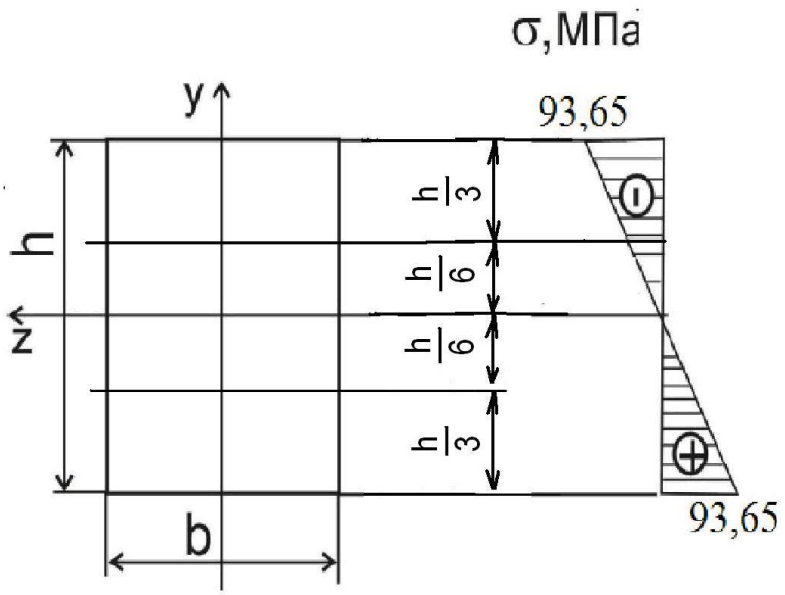


Рисунок 6

$$\sigma_z = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

момент инерции сечения $I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,2 \cdot 0,35^3}{12} = 7,146 \cdot 10^{-4}\ м^4$

расстояние от оси

$$y = \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{3h - 2h}{6} = \frac{h}{6} = \frac{0,35}{6} = 0,058\ м$$

$$\sigma_z = \frac{382,4 \cdot 10^3}{7,146 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,058 = 31,04 \cdot 10^6\ Па$$

$$\sigma_z = 31,04\ МПа$$

Касательное напряжение определяем по формуле

$$\tau = \frac{QS}{bI_z},$$

где Q – поперечная сила в рассматриваемом сечении;
S – статический момент относительно нейтральной оси z части площади сечения, лежащей по одну сторону от уровня y, на котором определяется напряжение
b – ширина сечения
I_z – момент инерции площади сечения относительно оси z.

Для прямоугольного сечения статический момент

$$S = \frac{b}{2}\cdot\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right),$$

где y – расстояние от нейтральной оси $\left(y = \frac{h}{6}\right)$.

Тогда

$$\tau = \frac{QS}{bI_z} = \frac{Q\cdot\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{b\cdot\frac{bh^3}{12}} = \frac{6Q\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{bh^3}$$

При $y = \frac{h}{6}$

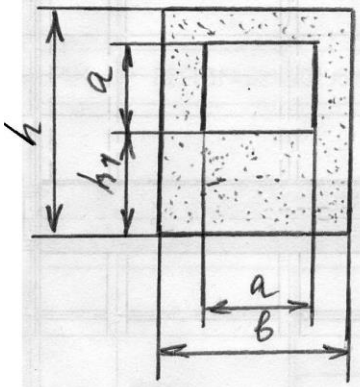
$$\tau = \frac{6Q\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{36}\right)}{bh^3} = \frac{6Q\cdot\frac{9h^2 - h^2}{36}}{bh^3} = \frac{Q\cdot\frac{8h^2}{6}}{bh^3} =$$

$$= \frac{Q\cdot 4h^2}{3bh^3} = \frac{4Q}{3bh}$$

При $Q = 80$ кН

$$\tau = \frac{4\cdot 80\cdot 10^3}{3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}35} = 1{,}52\cdot 10^6 \text{ Па} \quad (1{,}52 \text{ МПа})$$

7. Подбираем размеры сложного сечения заданного профиля из условия прочности.



$$h : h_1 : b : a = 7 : 3 : 4 : 1$$

$$\frac{h}{b} = \frac{7}{4} \Rightarrow h = \frac{7b}{4}$$

$$\frac{h_1}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow h_1 = \frac{3b}{4}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{1} \Rightarrow a = \frac{b}{4}$$

Определяем положение центра тяжести сечения.

$$y_c = \frac{bh \cdot \frac{h}{2} - a^2 \cdot \left(h_1 + \frac{a}{2}\right)}{bh - a^2} = \frac{\frac{1}{2} b \cdot \left(\frac{7b}{4}\right)^2 - \left(\frac{b}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3b}{4} + \frac{b}{8}\right)}{b \cdot \frac{7b}{4} - \frac{b^2}{16}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{49b^2}{16} - \frac{b^2}{16} \cdot \frac{6b + b}{8}}{\frac{7}{4} b^2 - \frac{1}{16} b^2} = \frac{\frac{49}{32} b^3 - \frac{b^2}{16} \cdot \frac{7b}{8}}{\frac{28-1}{16} b^2} =$$

$$= \frac{\frac{49}{32} b^3 - \frac{7}{128} b^3}{\frac{27}{16} b^2} = \frac{4 \cdot 49 - 7}{128} \cdot \frac{16}{27} b = \frac{189}{128} \cdot \frac{16}{27} b =$$

$$= \frac{7 \cdot 27 \cdot 16}{8 \cdot 16 \cdot 27} b = \frac{7}{8} b$$

Момент инерции составных частей сечения относительно центральной оси $z_c - z_c$:

$$I_{1_c} = I_1 + \left(\frac{h}{2} - y_c\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2} - y_c\right)^2 bh =$$

$$= \frac{b \cdot \left(\frac{7}{4} b\right)^3}{12} + \left(\frac{h}{2} - \frac{7}{8} b\right)^2 \cdot b \cdot \frac{7b}{4} =$$

$$= \frac{b \cdot 343 b^3}{12 \cdot 64} + \left(\frac{7b}{8} - \frac{7}{8} b\right)^2 \cdot b \cdot \frac{7b}{4} = \frac{343 b^4}{768}$$

Как видно из вычислений, при заданном соотношении сторон сечение симметричное.

$$I_z = \frac{343b^4}{768} - \frac{a\cdot a^3}{12} = \frac{343b^4}{768} - \frac{\left(\frac{b}{4}\right)^4}{12} = \frac{343b^4}{768} - \frac{b^4}{12\cdot 256} =$$

$$= \left(\frac{343}{768} - \frac{1}{3072}\right)b^4 \approx \frac{343}{768}b^4$$

Момент сопротивления поперечного сечения

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{343}{768}\frac{b^4}{\frac{h}{2}} = \frac{343}{768}\cdot\frac{b^4}{\frac{7b}{4\cdot 2}} =$$

$$= \frac{343}{768}\cdot\frac{b^3}{\frac{7}{8}} = \frac{343\cdot 8}{768\cdot 7}b^3 = \frac{7\cdot 49\cdot 8}{8\cdot 96\cdot 7}b^3 = \frac{49}{96}b^3$$

По условию прочности момент сопротивления должен быть не менее

$$W_z = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = 3{,}824\cdot 10^{-3}\ м^3$$ (определено выше)

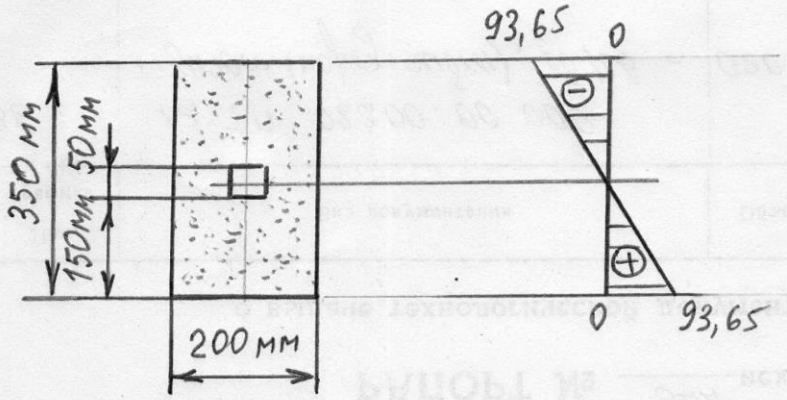
Тогда $\frac{49}{96}b^3 = 3{,}824\cdot 10^{-3}$, откуда $b = \sqrt[3]{\frac{3{,}824\cdot 10^{-3}\cdot 96}{49}} = 0{,}196\ м$

Принимаем $b = 200$ мм, при этом

$$h = \frac{7\cdot b}{4} = \frac{7\cdot 200}{4} = 350\ мм$$

$$h_1 = \frac{3b}{4} = \frac{3\cdot 200}{4} = 150\ мм$$

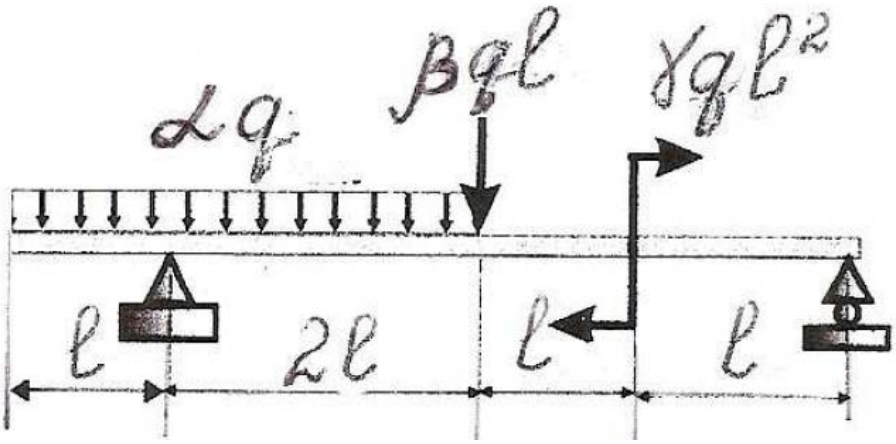
$$a = \frac{b}{4} = \frac{200}{4} = 50\ мм$$

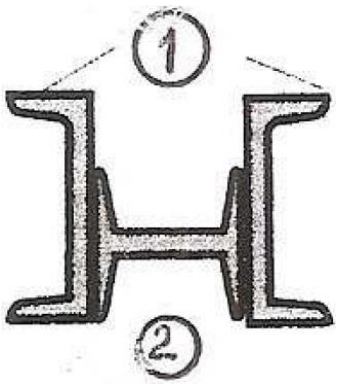


Задача 2.
Расчет балки на двух опорах

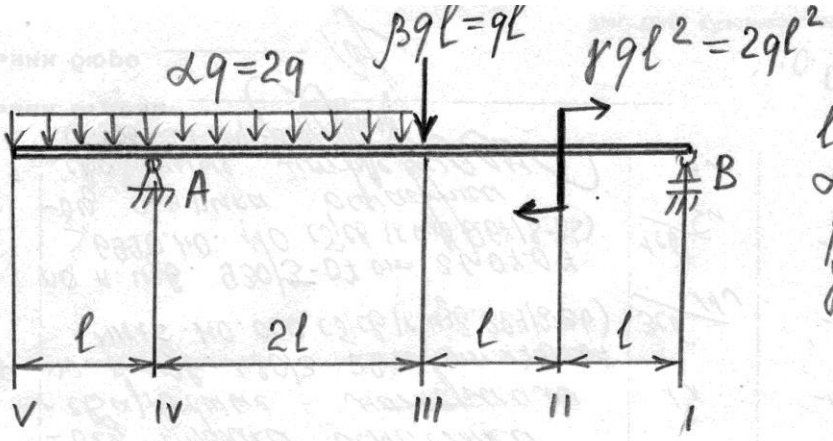
Для заданной схемы балки (все нагрузки выражаются через интенсивность распределенной нагрузки q):

1. Определить реакции закрепления (выразить через q).
2. Построить эпюры Q и M (ординаты эпюр выразить через q), определить опасное сечение, в котором изгибающий момент достигает максимального значения M_{max}.
3. Определить геометрические характеристики осесимметричного сечения, составленного из прокатных профилей. Сделать чертеж сложного сечения в масштабе на миллиметровой бумаге, указав характерные размеры, использованные в расчете.
4. Определить грузоподъемность q из условия прочности, используя выражение изгибающего момента в опасном сечении ($[\sigma]$ = 160 МПа).
5. Построить эпюру нормальных напряжений по высоте сечения.
6. Используя найденное значение q, вычислить M_{max} и подобрать двутавровое сечение из условия прочности.
7. В сечении, где Q и M принимают достаточно большие значения, сделать полную проверку прочности двутавра (в том случае, если в опасном сечении $Q = 0$, следует взять для проверки другое сечение).
8. Записав дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, вычислить максимальные прогибы на консольных участках и в пролете, проверить условие жесткости, используя геометрические характеристики двутаврового сечения. Если какое-либо условие жесткости не выполняется, подобрать новое двутавровое сечение.
9. Вычислить характерные прогибы и построить изогнутую ось в масштабе (на миллиметровой бумаге).





1 – швеллер №16
2 – двутавр №18



$l = 3$ м
$\alpha = 2$
$\beta = 1$
$\gamma = 2$

Решение

Опорные реакции определяем из уравнений равновесия:

$\sum M_A = 0$ $\quad 2ql \cdot \frac{l}{2} - 2q \cdot 2l \cdot l - ql \cdot 2l - 2ql^2 + R_B \cdot 4l = 0$

$ql^2 - 4ql^2 - 2ql^2 - 2ql^2 + R_B \cdot 4l = 0$

$-7ql^2 + 4R_B l = 0$

$4R_B l = 7ql^2, \quad 4R_B = 7ql, \quad R_B = \frac{7}{4} ql$

$\sum M_B = 0$ $\quad 2q \cdot 3l \cdot \left(2l + \frac{3l}{2}\right) - R_A \cdot 4l + ql \cdot 2l - 2ql^2 = 0$

$6ql \cdot \frac{4+3}{2} l - R_A \cdot 4l + 2ql^2 - 2ql^2 = 0$

$3ql^2 \cdot 7 - R_A \cdot 4l = 0$

$R_A \cdot 4l = 21ql^2, \quad 4R_A = 21ql, \quad R_A = \frac{21}{4} ql$

$\sum F_x = 0$ $\quad H_A = 0$

Проверка:

$\sum F_y = 0$ $\quad -2q \cdot 3l - ql + R_A + R_B =$

$= -6ql - ql + \frac{21}{4} ql + \frac{7}{4} ql = -7ql + \frac{28}{4} ql =$

$= -7ql + 7ql = 0$ (опорные реакции определены верно)

Перерезывающие силы в характерных поперечных сечениях балки:

$Q_I = -R_B = -\frac{7}{4}ql$

$Q_{II} = Q_I = -\frac{7}{4}ql$

$Q_{III} = Q_{II} = -\frac{7}{4}ql$

$Q_{III}' = Q_{III} + ql = -\frac{7}{4}ql + \frac{4}{4}ql = -\frac{3}{4}ql$

$Q_{IV} = Q_{III}' + 2q\cdot 2l = -\frac{3}{4}ql + 4ql = -\frac{3}{4}ql + \frac{16}{4}ql = \frac{13}{4}ql$

$Q_{IV}' = Q_{IV} - R_A = \frac{13}{4}ql - \frac{21}{4}ql = -\frac{8}{4}ql = -2ql$

$Q_V = Q_{IV}' + 2ql = -2ql + 2ql = 0$

Изгибающие моменты в характерных поперечных сечениях балки:

$M_I = 0$

$M_{II} = R_B l = \frac{7}{4}ql\cdot l = \frac{7}{4}ql^2$

$M_{II}' = M_{II} - 2ql^2 = \frac{7}{4}ql^2 - 2ql^2 = \frac{7}{4}ql^2 - \frac{8}{4}ql^2 = -\frac{1}{4}ql^2$

$M_{III} = R_B\cdot 2l - 2ql^2 = \frac{7}{4}ql\cdot 2l - 2ql^2 = \frac{7}{2}ql^2 - \frac{4}{2}ql^2 = \frac{3}{2}ql^2$

$M_{IV} = R_B\cdot 4l - 2ql^2 - ql\cdot 2l - 2q\cdot 2l\cdot l =$

$= \frac{7}{4}ql\cdot 4l - 2ql^2 - 2ql^2 - 4ql^2 = 7ql^2 - 8ql^2 = -ql^2$

$M_{IV} = -2q\cdot l\cdot \frac{l}{2} = -ql^2$ (проверка)

ПЛОСКИЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ С ОДНОЙ ОСЬЮ СИММЕТРИИ

Задача 1. Расчет консольной балки

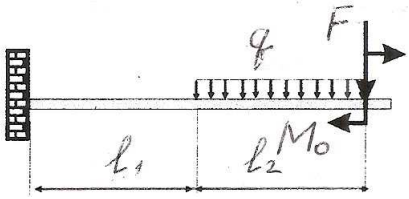
1. Нарисовать схему балки (выбирается по второй цифре шифра **B** из таблицы 2), указав размеры и величины нагрузок в соответствии с исходными данными, взятыми в соответствии с шифром из таблицы 1.
2. Определить реакции закрепления.
3. Построить эпюры Q и M.
4. Подобрать из условия прочности размеры круглого и прямоугольного поперечного сечения, приняв [σ] = 100 МПа (соотношение $h:b$ взять из таблицы 1 в соответствии с шифром).
5. Построить эпюры распределения нормальных и касательных напряжений в опасном сечении по высоте подобранных в п.4 сечений.
6. Там же вычислить нормальные и касательные напряжения для балки прямоугольного сечения на расстоянии $\frac{h}{3}$ от верхнего края.
7. Подобрать размеры сложного сечения из условия прочности (схема сечения выбирается по третьей цифре шифра **C** из таблицы 3), изобразить сечение в масштабе, указав характерные размеры, использованные при расчете, построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении.

Таблица 1

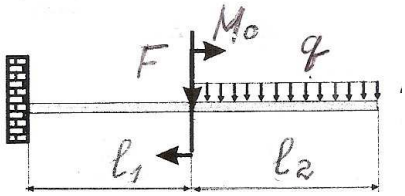
B	l_1, *м*	l_2, *м*	**C**	***F*, *кН***	M_0, *кН*м*	**D**	$h:h_1:b:a$ $(d=a)$	***q*, *кН/м***
0	1	2	**0**	100	20	**0**	6:2:3:1	5
1	1,5	2,5	**1**	30	40	**1**	7:4:3:1	10
2	1,8	2,2	**2**	150	30	**2**	5:2:2:1	6
3	1,4	2,6	**3**	50	45	**3**	4:2:3:1	8
4	1,6	2,4	**4**	80	50	**4**	4:2:5:1	4
5	2,5	1,5	**5**	110	25	**5**	5:1:3:1	15
6	1,2	1,8	**6**	120	35	**6**	3:1:5:1	12
7	2,6	2,4	**7**	40	60	**7**	7:2:3:1	14
8	1,9	2,1	**8**	90	70	**8**	7:3:4:1	20
9	1,7	2,3	**9**	60	80	**9**	4:1:5:1	7

Таблица 2 (**В**)

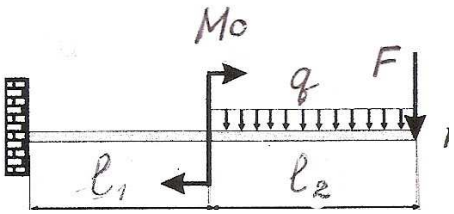
0



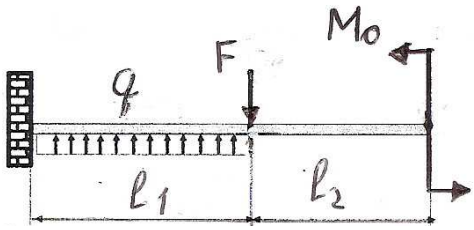
1



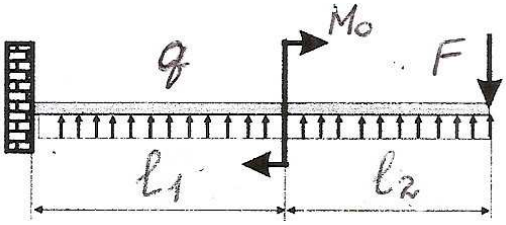
2



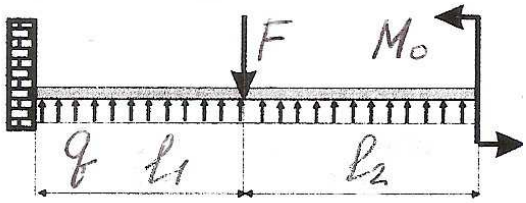
3



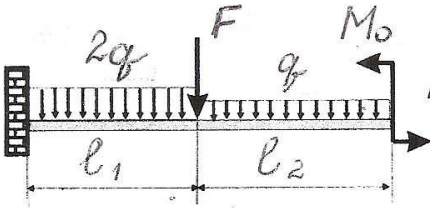
4



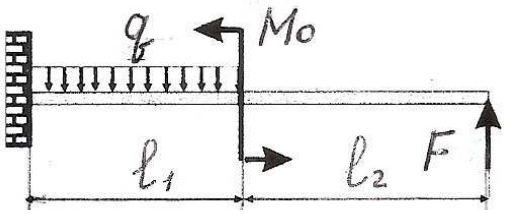
5



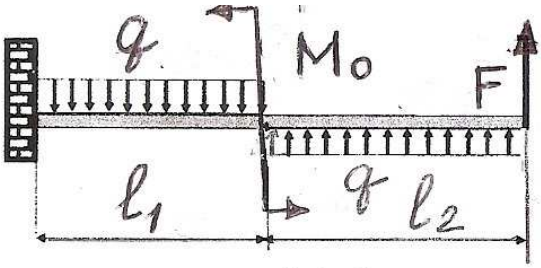
6



7



8



9

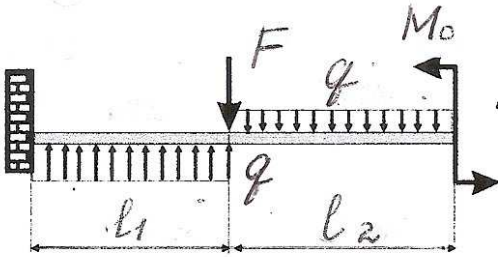
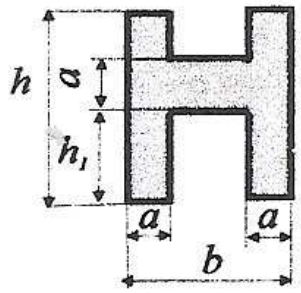
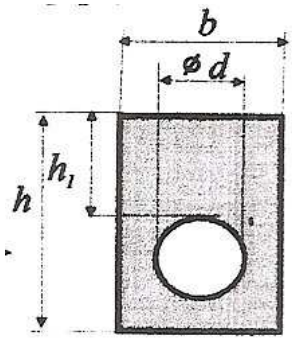


Таблица 3 (**С**)

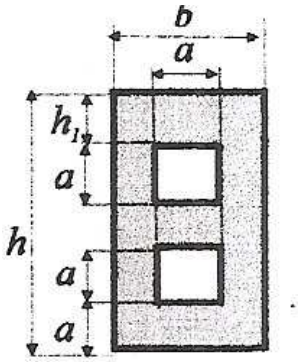
0



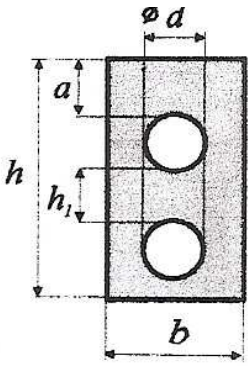
1



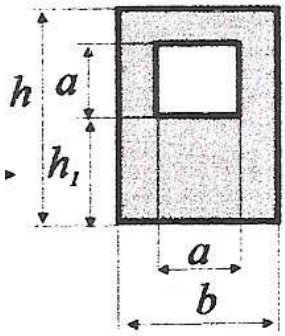
2



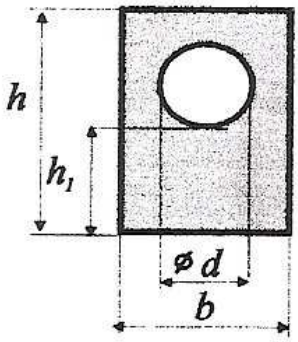
3



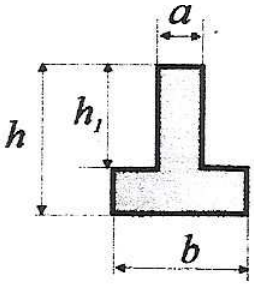
4



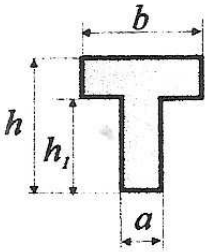
5



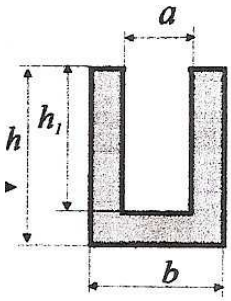
6



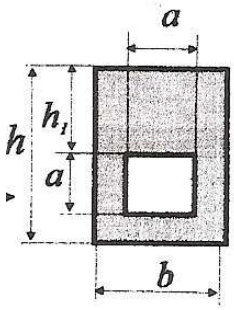
7



8



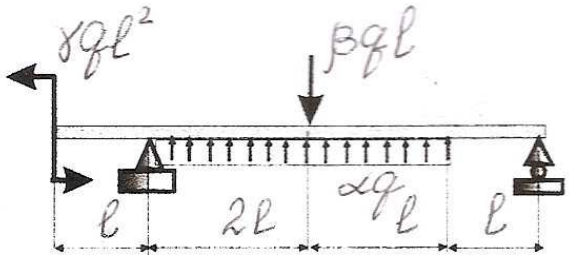
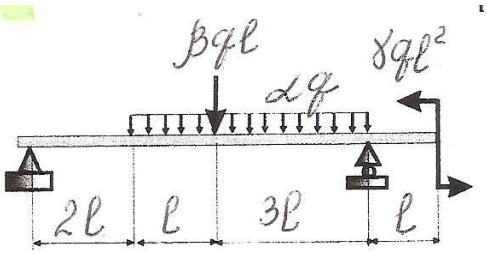
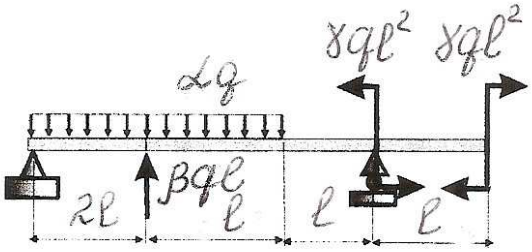
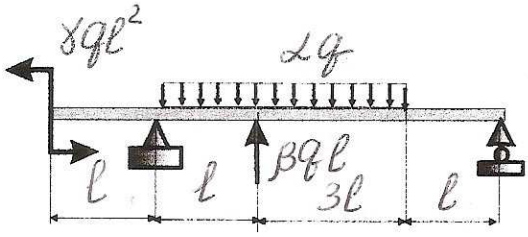
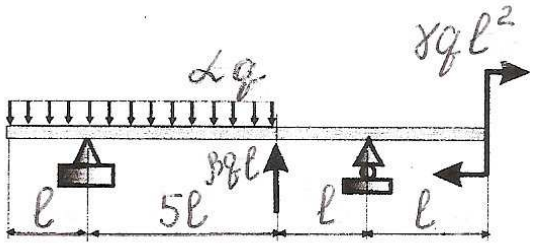
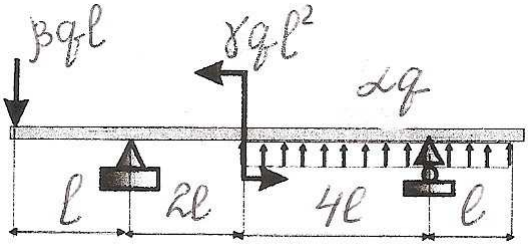
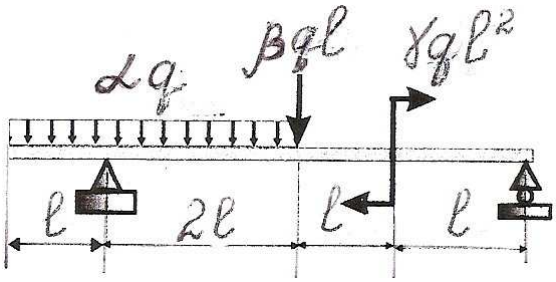
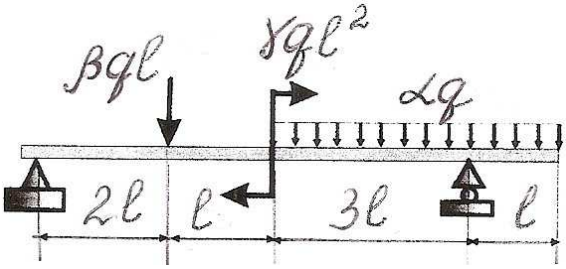
9



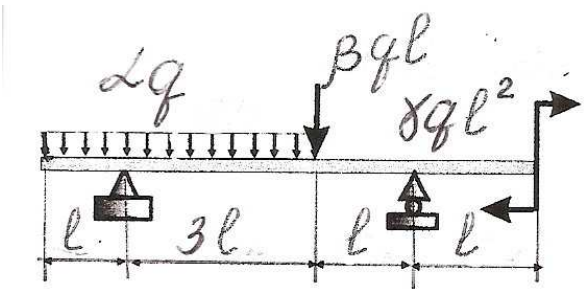
Задача 2. Расчет балки на двух опорах

1. Нарисовать схему балки (выбирается по первым двум цифрам шифра **АВ** из таблицы 4), указав размеры и величины нагрузок в соответствии с исходными данными, взятыми в соответствии с шифром из таблицы 6 (все нагрузки выражаются через интенсивность распределенной нагрузки q).
2. Определить реакции закрепления (выразить через q).
3. Построить эпюры Q и M (ординаты эпюр выразить через q), определить опасное сечение, в котором изгибающий момент достигает максимального значения $M_{\max}$.
4. Определить геометрические характеристики осесиметричного сечения, составленного из прокатных профилей (сечение выбирается из таблицы 5 по третьей цифре шифра **С**, номера профилей – из таблицы 6). Сделать чертеж сложного сечения в масштабе на миллиметровой бумаге, указав характерные размеры, использованные в расчете.
5. Определить грузоподъемность q из условия прочности, используя выражение изгибающего момента в опасном сечении ([σ] = 160 МПа).
6. Построить эпюру нормальных напряжений по высоте сечения.
7. Используя найденное значение q, вычислить $M_{\max}$ и подобрать двутавровое сечение из условия прочности.
8. В сечении, где Q и M принимают достаточно большие значения, сделать полную проверку прочности двутавра (в том случае, если в опасном сечении $Q = 0$, следует взять для проверки другое сечение).
9. Записав дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, вычислить максимальные прогибы на консольных участках и в пролете, проверить условие жесткости, используя геометрические характеристики двутаврового сечения. Если какое-либо условие жесткости не выполняется, подобрать новое двутавровое сечение.
10. Вычислить характерные прогибы и построить изогнутую ось в масштабе (на миллиметровой бумаге).

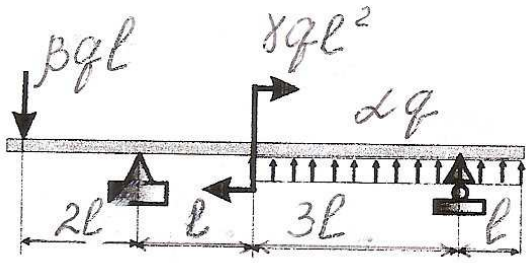
Таблица 4

01 	**02** 
03 	**04** 
05 	**06** 
07 	**08** 

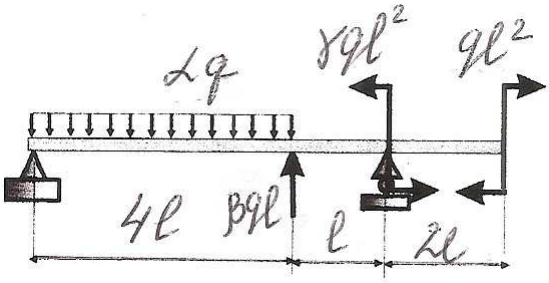
09



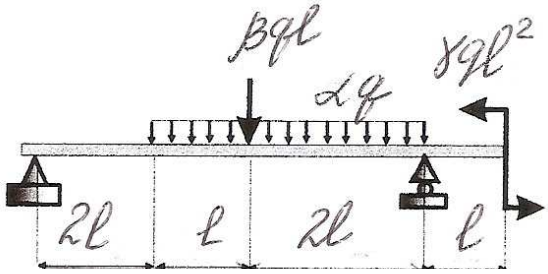
10



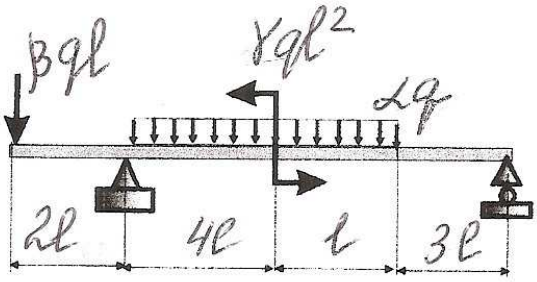
11



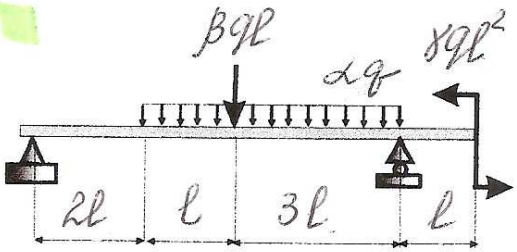
12



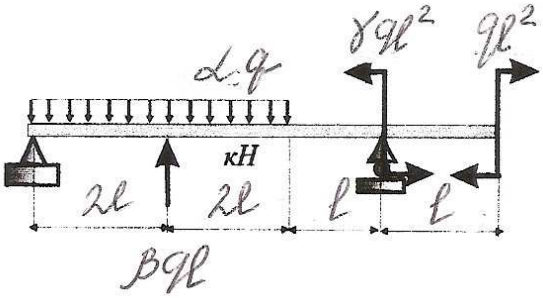
13



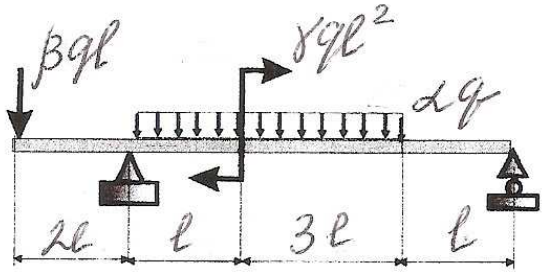
14



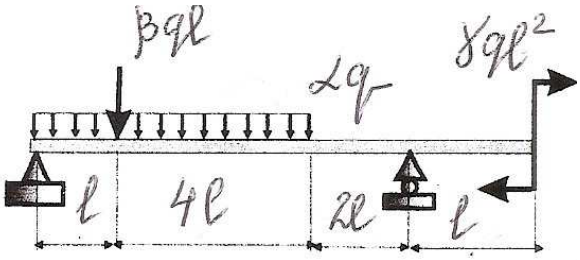
15



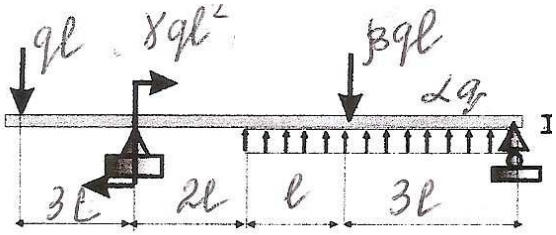
16



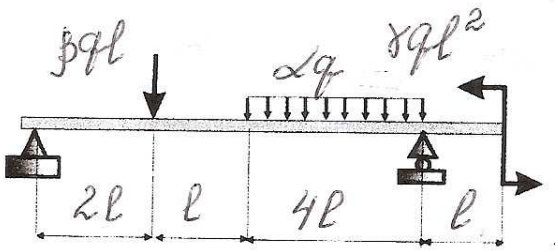
17



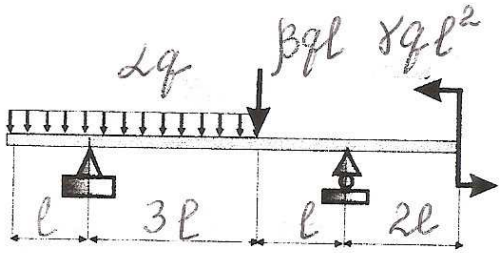
18



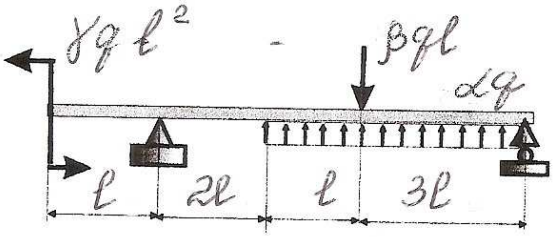
19



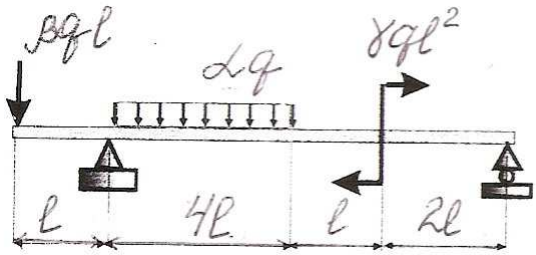
20



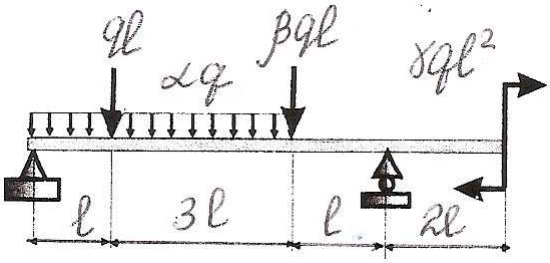
21



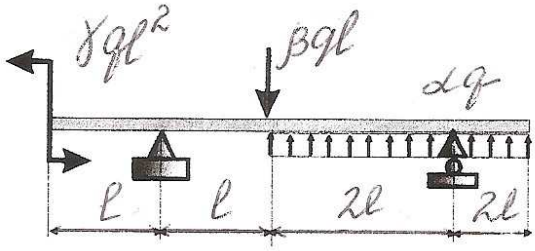
22



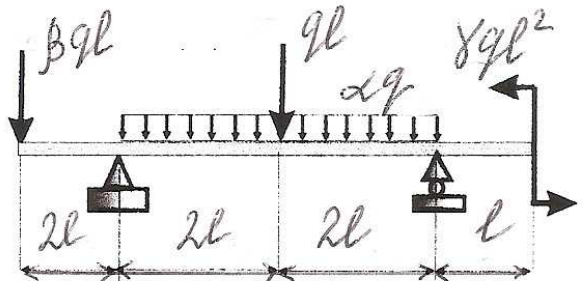
23



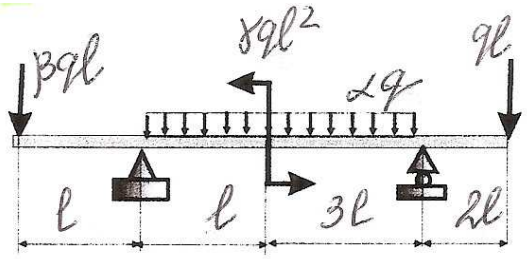
24



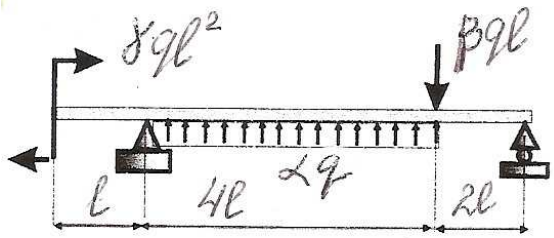
25



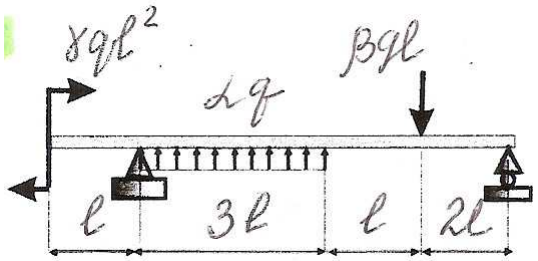
26



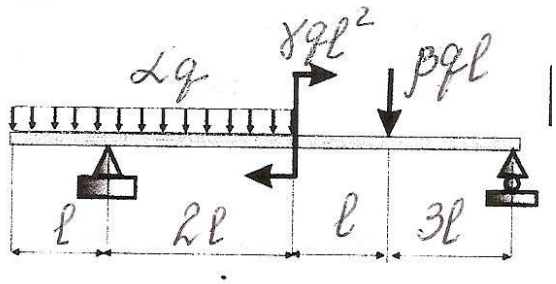
27



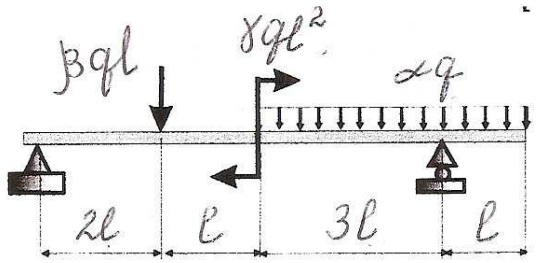
28



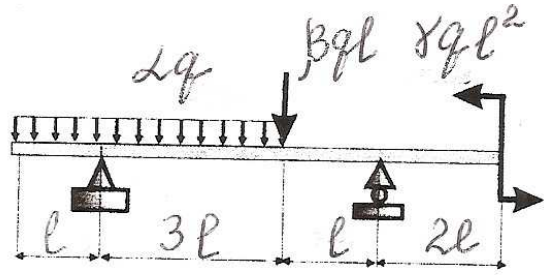
29



30



31



32

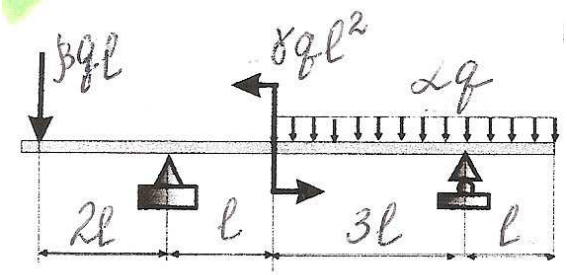


Таблица 5 (**С**)

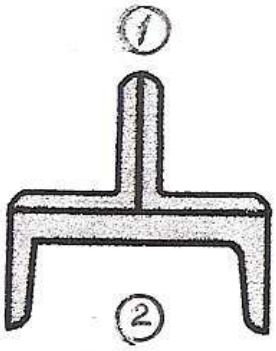
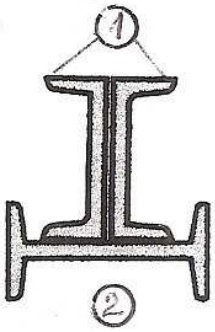
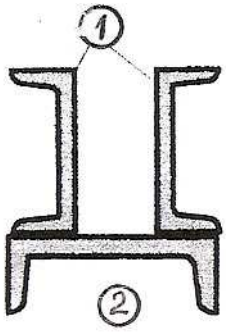
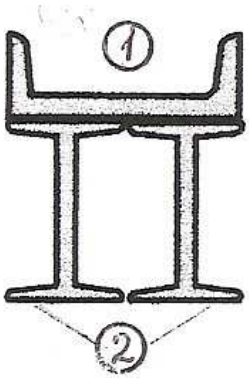
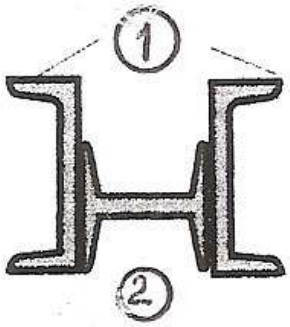
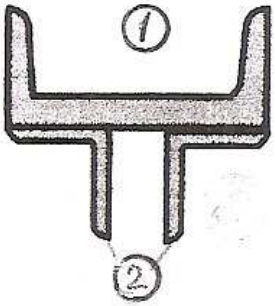
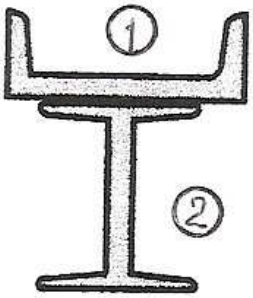
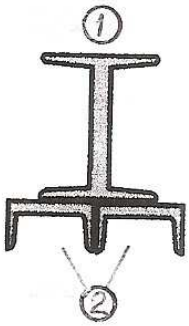
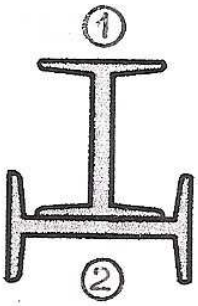
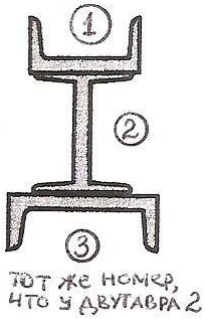
0 	**1** 	**2** 
3 	**4** 	**5** 
6 	**7** 	**8** 	**9** 

Таблица 6

B	l, ***м***	α	**C**	β	γ	**D**	Номера профилей	
							1	**2**
0	1	1	**0**	1	2	**0**	12	16
1	1	2	**1**	2	1	**1**	14	18
2	2	3	**2**	3	2	**2**	16	20
3	2	1	**3**	4	1	**3**	18	16
4	2	2	**4**	1	2	**4**	20	22
5	1	3	**5**	2	1	**5**	22	18
6	3	1	**6**	3	2	**6**	18	20
7	3	2	**7**	4	1	**7**	10	14
8	3	3	**8**	1	2	**8**	16	18
9	4	1	**9**	2	1	**9**	14	16