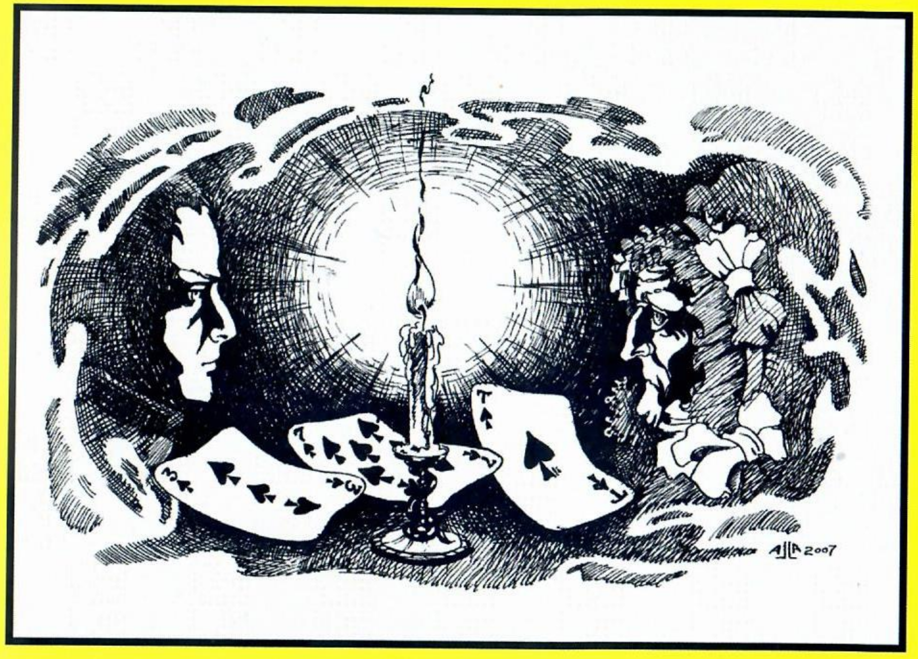
П.Г. ДАНИЛАЕВ,
С.И. ДОРОФЕЕВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА



П. Г. ДАНИЛАЕВ, С. И. ДОРОФЕЕВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебное пособие

Под редакцией К.Г. Гараева

Допущено Региональным (Республика Татарстан) отделением
Научно-методического совета по математике
Министерства образования и науки РФ
в качестве учебного пособия для бакалавров
технических и экономических специальностей
вузов очной и заочной форм обучения

Казань–2015

УДК 517.8
ББК 22.171:22.172я73
Д 17

Рецензенты:
В.А. Чугунов – доктор физико-математических наук, профессор, директор института математики и механики им. Н.Г. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета, заслуженный работник высшей школы РФ, заслуженный деятель науки РТ;

Н.К. Нуриев – доктор педагогических наук, кандидат технических наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика и информатика» Казанского национального исследовательского технологического университета, лауреат премии Правительства РФ в области образования;

Данилаев П. Г., Дорофеева С. И.

Д 17 Теория вероятностей и математическая статистика. Основные теоретические сведения, индивидуальные задания, тесты: учебное пособие. / Под редакцией К.Г.Гараева. – Казань: Редакционно-издательский центр «Школа», 2015. – 130 с.: илл. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
ISBN 978–5–9907141–9–9

Учебное пособие содержит методические рекомендации по самостоятельному изучению математики, типовые задания двух расчетно-теоретических работ, образцы их выполнения, контрольные тесты по разделу «Теория вероятностей» и контрольные вопросы по разделу «Математическая статистика». Приведены справочные материалы.

Соответствует Государственным образовательным стандартам подготовки по математике бакалавров технических и экономических специальностей.

УДК 517.8

ISBN 978–5–9907141–9–9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Имеется значительное количество учебников и учебных пособий по математике для бакалавров технических и экономических специальностей, посвященных изучению теории, например [1–2]. В то же время недостаточно литературы для проведения практических занятий, соответствующих программе, контрольных заданий для бакалавров как заочной, так и очной форм обучения. Данное учебное пособие призвано, в определенной мере, заполнить этот пробел.

Пособие отвечает современному уровню школьной математической подготовки бакалавров и содержит материал, который закрепляется в процессе самостоятельного изучения. Тематика расчетно-теоретических работ (РТР) соответствует учебному плану дисциплины. Приведенные тесты можно считать типовыми. При составлении учебного пособия использована литература [3–16].

Работа продолжает серию пособий по математике [17–25]. Авторы будут признательны за критические замечания и предложения по ее улучшению. Книга является Лауреатом Первого Всероссийского конкурса Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки РФ «Лучшее учебное издание по математике» в номинации: Математика в технических вузах, а также удостоена диплома Первого Сибирского регионального конкурса на лучшую вузовскую книгу «Университетская книга – 2009» за организацию дидактического аппарата.

Авторы благодарны научному редактору декану физико-математического факультета Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева, профессору К.Г. Гараеву.

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМИ-ЗАОЧНИКАМИ

Основная форма обучения студента-заочника – самостоятельная работа над учебным материалом. Она состоит из чтения учебника, решения задач, выполнения контрольных заданий. Завершающий этап – сдача экзамена.

Чтение учебника. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после усвоения предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления, рисуя графики. Особое внимание надо обратить на определение основных понятий, подробно разобрав примеры, поясняющие такие определения. При изучении учебника полезно вести конспект, в который выписываются определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.д. На полях конспекта отмечаются вопросы, выделенные для консультации с преподавателем. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы они выделялись и лучше запоминались. Многим студентам помогает составление листа, содержащего важнейшие и наиболее употребляемые формулы курса. Каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Полезно составлять схемы доказательства сложных теорем.

Решение задач. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения. Решение задач и примеров надо записывать подробно, располагать вычисления в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно. Решение каждой задачи надо доводить до окончательного ответа, по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляются числовые значения входящих в

нее величин. Важно письменное оформление контрольной работы, типового расчета. Хорошее оформление позволяет избежать многочисленных ошибок, возникающих из-за небрежности.

Самопроверка. После изучения конкретной темы рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя по учебнику. Иногда недостаточность усвоения вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить нужный раздел. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Но будет ошибкой считать благополучное решение задач признаком усвоения теории. Часто правильное решение задач получается в результате применения механически заученных формул.

Контрольные работы. Контрольные работы дают учащемуся возможность судить об усвоении им определенного раздела курса, выявить имеющиеся пробелы. К выполнению контрольного задания можно приступить после того, как решено достаточное количество задач по соответствующей теме. Контрольное задание должно быть выполнено студентом самостоятельно. Если это условие нарушено, то он не приобретает необходимых знаний и оказывается не подготовленным к экзамену и зачету.

Лекции и практические занятия. Во время экзаменационной сессии для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия. Их цель – обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела курса, подчеркнуть важнейшие факты. На этих занятиях могут быть разобраны более подробно отдельные вопросы курса, которые недостаточно освещены в рекомендованных пособиях.

Зачеты и экзамены. На экзаменах и зачетах выясняется усвоение всех теоретических и прикладных вопросов программы и умение применять знания к решению прикладных задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно, с пониманием существа дела, задачи в простейших случаях нужно решать без ошибок и уверенно. Только в этом случае знания оцениваются положительно.

Раздел 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Образец выполнения расчетно-теоретической работы

Задача 1

Задача 1.1. На столе лежат 10 различных книг: 4 – научная фантастика, остальные – учебники по математике. Сколькими способами можно выбрать 1 учебник и 2 тома научной фантастики?

Р е ш е н и е . Если объект A можно выбрать a способами, а объект B – b способами (независимо от выбора объекта A), то пары объектов A и B можно выбрать $N = a \cdot b$ способами: $N = C_n^m \cdot C_l^k$, где n=4, m=1, l=6, k=2. Число сочетаний различных элементов

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} \qquad N = C_4^1 \cdot C_6^2 = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60.$$

<u>Ответ</u>: число способов $N = 60$.

Задача 1.2. В одной коробке – красные карандаши, во второй – желтые, в третьей – зеленые. Сколько существует вариантов выбора семи карандашей? (Предполагаем, что в каждой коробке больше 7 карандашей).

Р е ш е н и е . Предполагается, что каждый набор из 7 карандашей отличается числом входящих в него карандашей различного цвета. Пусть n – число видов элементов, m – объем выборки. Выборка с повторениями. Число вариантов выборки найдем по формуле:

$$\tilde{C}_{m+n-1}^m = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)! \cdot m!}; \quad \tilde{C}_{7+3-1}^7 = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 7!} = 36.$$

<u>Ответ</u>: число вариантов 36.

Задача 1.3. Имеется шесть карточек с цифрами 0, 1, 2, 3, 7, 9. Сколько трехзначных чисел можно составить из этих шести карточек? Сколько трехзначных чисел можно напечатать, используя клавиши с этими цифрами?

Р е ш е н и е . Размещения – это комбинации, отличающиеся составом и порядком элементов. Число размещений находим по формулам:

$$A_n^m = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}_{m \text{ сомножителей}} \text{ – для различных элементов;}$$

$\tilde{A}_n^m = n^m$ – для повторяющихся элементов, т.е. используются клавиши с указанными цифрами неоднократно (выборка с повторениями).

Из карточек можно составить $A_6^3 - A_5^2$ комбинаций. Здесь A_6^3 – из шести карточек берем 3, A_5^2 – на месте первой цифры должна быть цифра, отличная от нуля, так как такое число не будет трехзначным.

$$A_6^3 - A_5^2 = 6 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 120 - 20 = 100.$$

<u>Ответ</u>: 100.

Задача 2

В коробке 5 красных, 7 зеленых и 8 желтых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров окажется по 2 шара каждого цвета.

Р е ш е н и е . Найдем число возможных способов вынуть по два шара каждого цвета: $C_5^2 \cdot C_7^2 \cdot C_8^2$. Всего существует C_{20}^6 способов вынуть 6 шаров из 20. Искомая вероятность равна:

$$P = \frac{C_5^2 \cdot C_7^2 \cdot C_8^2}{C_{20}^6} = \frac{\dfrac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \dfrac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot \dfrac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}}{\dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7}{20 \cdot 19 \cdot 6 \cdot 17} = \frac{49}{323}.$$

<u>Ответ</u>: $P = \frac{49}{323}$.

Задача 3

Задача 3.1. Прибор состоит из трех элементов, которые за время T отказывают с вероятностью 0,1 ; 0,2 и 0,25 соответственно. Найти вероятность отказа двух элементов за время T.

Р е ш е н и е . Элементы отказывают независимо. Пусть события A_1, A_2, A_3 – отказ первого, второго и третьего элементов соответственно. Тогда вероятность отказа двух элементов равна

$$P(A_1\cdot A_2\cdot \overline{A}_3 + A_1\cdot \overline{A}_2\cdot A_3 + \overline{A}_1\cdot A_2\cdot A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3) +$$
$$+P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}75 + 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}25 +$$
$$+0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}25 = 0{,}08.$$

<u>Ответ</u>: $P = 0{,}08$.

Задача 3.2. Вероятность $P(A)$ наступления события A хотя бы один раз в трех испытаниях 0,936. Найти вероятность p появления события A в одном испытании.

Р е ш е н и е . Противоположное событие состоит в том, что событие A не произойдет ни разу в трех испытаниях, тогда $P(\overline{A}) = (1-p)^3$;

$$P(A) = 1-(1-p)^3 = 0{,}936;\ (1-p)^3 = 1-0{,}936 = 0{,}064;\ 1-p = 0{,}4;\ p = 0{,}6.$$

<u>Ответ</u>: $p = 0{,}6$.

Задача 3.3. Случайно встреченное лицо может быть с вероятностью $p_1 = 0{,}2$ брюнетом, $p_2 = 0{,}3$ – блондином, $p_3 = 0{,}4$ – шатеном и $p_4 = 0{,}1$ – рыжим. Какова вероятность того, что из трех случайно встреченных лиц:
1) не менее двух брюнетов (событие A), 2) один блондин и два шатена (собы-тие B), 3) хотя бы один рыжий (событие C).

Р е ш е н и е .

1) $P(a) = P_{2,3} + P_{3,3} = C_3^2(0{,}2)^2\cdot 0{,}8 + (0{,}2)^3 = 3\cdot 0{,}04\cdot 0{,}8 + 0{,}008 =$
$= 0{,}096 + 0{,}008 = 0{,}104$;

2) $P(B) = \left(C_3^1 p_2(1-p_2)^2\right)\cdot\left(C_3^2 p_3^2(1-p_3)\right) = \left(3\cdot 0{,}3\cdot(0{,}7)^2\right)\cdot\left(3\cdot(0{,}4)^2\cdot 0{,}6\right) =$
$= 0{,}127$;

3) $P(C) = 1-(1-p_4)^3 = 1-0{,}9^3 = 0{,}271$.

<u>Ответ</u>: 1) $P(A) = 0{,}104$; 2) $P(B) = 0{,}127$; 3) $P(C) = 0{,}271$.

Задача 4

Задача 4.1. В первой урне находятся 3 белых и 4 черных шара, во второй – 5 белых и 2 черных. Из выбранной наугад урны достали 2 шара. Найти вероятность того, что они оба белые. Какова вероятность, что шары извлекли из второй урны, если они оба белые?

Р е ш е н и е . Пусть события (гипотезы) H_1 и H_2 означают, что выбрана первая или вторая урна, событие B – извлечено два белых шара. Тогда

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2};\ P(B\mid H_1) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3\cdot 2}{7\cdot 6} = \frac{1}{7};\ P(B\mid H_2) = \frac{C_5^2}{C_7^2} = \frac{5\cdot 4}{7\cdot 6} = \frac{10}{21}.$$

По формуле полной вероятности находим

$$P(B) = P(H_1)P(B\mid H_1) + P(H_2)P(B\mid H_2) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{7}+\frac{10}{21}\right) = \frac{13}{21}.$$

Формула Байеса позволяет ответить на второй вопрос. Она как бы перераспределяет априорные (известные до опыта) вероятности гипотез после того, как событие произошло

$$P(H_2\mid B) = \frac{P(H_2)P(B\mid H_2)}{P(H_1)P(B\mid H_1) + P(H_2)P(B\mid H_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{21}}{\frac{13}{42}} = \frac{10}{13}.$$

Для проверки вычислим $P(H_1\mid B) = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}}{\frac{13}{42}} = \dfrac{3}{13}$. Сумма вероятностей

$$P(H_1\mid B) + P(H_2\mid B) = 1.$$

<u>Ответ</u>: 1) $P(B) = \frac{13}{42}$; 2) $P(H_2\mid B) = \frac{10}{13}$.

Задача 4.2. До остановки A можно добраться маршрутным такси, автобусом или трамваем. Вероятность того, что подойдет маршрутное такси, равна 0,4 , но вероятность того, что оно посадит пассажиров, равна 0,5. Вероятности того, что подойдет трамвай или автобус, – 0,3, они "возьмут" пассажиров с вероятностью 0,9. Какова вероятность доехать до остановки A ?

Р е ш е н и е . Рассмотрим гипотезы H_1 – уехать на маршрутном такси,
H_2 – уехать на автобусе, H_3 – уехать на трамвае; $P(H_1) = 0{,}4$; $P(H_2) = 0{,}3$;
$P(H_3) = 0{,}3$. Пусть событие D – доехать до остановки А ,

$$P(D\mid H_1) = 0{,}5;\ P(D\mid H_2) + P(D\mid H_3) = 0{,}9.$$

По формуле полной вероятности находим

$$P(D) = P(H_1)P(D \mid H_1) + P(H_2)P(D \mid H_2) + P(H_3)P(D \mid H_3) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}74\,.$$

<u>Ответ</u>: $P = 0{,}74$.

Задача 4.3. Для нормальной работы на данном маршруте должно быть не менее 8 автобусов. Автопарк имеет 10 автобусов. Вероятность выхода автобуса на линию $p = 0{,}9$. Найти вероятность нормальной работы в ближайший день.

Р е ш е н и е . Пусть Q – вероятность нормальной работы в ближайший день, т.е. на данном маршруте находится не менее 8 автобусов.

$$Q = P_{10,10} + P_{10,9} + P_{10,8} = 0{,}9^{10} + C_{10}^{9}p^9q + C_{10}^{8}p^8q^2 =$$
$$= \left(\frac{9}{10}\right)^{10} + 10\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{9}\cdot\frac{1}{10} + 45\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{8}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{2} \approx 0{,}93.$$

<u>Ответ</u>: $Q = 0{,}93$.

Задача 4.4. В тесте 10 вопросов, ответы на них даются в форме "да" – "нет". Какова вероятность того, что просто угадывая ответ, тестируемый даст 80% правильных ответов ?

Р е ш е н и е . Событие A – 80% правильных ответов.

Воспользуемся формулой Бернулли: $P(A) = C_{10}^{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{8}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2} \approx 0{,}055.$

<u>Ответ</u>: $P = 0{,}055$.

Задача 5

Среди 10 деталей имеется 4 бракованные. Случайным образом извлекают без возвращений детали до тех пор, пока не вынут доброкачественную деталь. Пусть X – число вынутых деталей и число $k > 3$. Найти закон распределения, математическое ожидание, дисперсию случайной величины X , построить график функции распределения, найти вероятность события $X \le k$ при $k = 3$.

Р е ш е н и е . Вычислим вероятности событий

$$P(X=1) = \frac{6}{10} = 0{,}6;$$
$$P(X=2) = \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9} = 0{,}26667;$$
$$P(X=3) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8} = 0{,}1;$$
$$P(X=4) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{7} = 0{,}02857;$$
$$P(X=5) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7} = 0{,}004761\,.$$

Составим ряд распределения:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,6	0,26667	0,1	0,02857	0,004761

Вероятность $P(X \le 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0{,}96667$.

Математическое ожидание $\mathrm{M}[X] = \sum_{i=1}^{5} x_i P(X = x_i) = 1{,}571.$

Дисперсия $D[X] = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot P(X = x_i) - \mathrm{M}^2[X] = 0{,}331.$

Построим график функции распределения (рис.1):

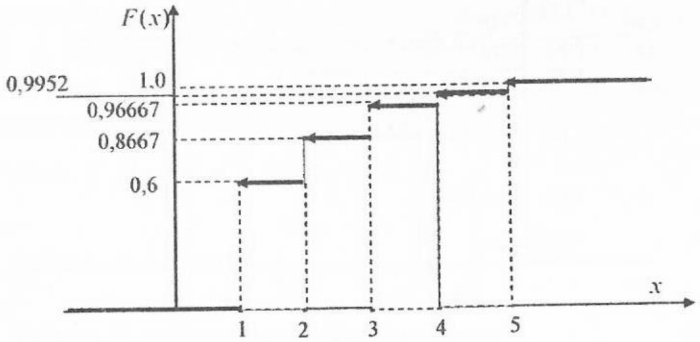


Рис.1

Задача 6

Рассматривается серия из n независимых испытаний с двумя исходами в каждом: "успех" или "неудача". Вероятность "успеха" равна p, вероятность "неудачи" равна $q = 1 - p$. Пусть X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется: 1) для случая *а* $(n = 6,\ p = 0{,}4)$ построить ряд распределения, функцию распределения случайной величины X, найти математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$, дисперсию $D[X]$ и вероятность события $P(X \le 2)$; 2) для случая *б* $(n = 100,\ p = 0{,}003)$ найти вероятность события $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона; 3) для случая *в* $(n = 192,\ p = 0{,}25,\ k_1 = 45,\ \ k_2 = 60)$ найти вероятность события $P(k_1 \le X \le k_2)$ приближенно с помощью теоремы Муавра–Лапласа.

Р е ш е н и е. Случай *а*: $n = 6,\ p = 0{,}4$. Составим ряд распределения

$x=0$	$p = 1 \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^6 = 0{,}046$
$x=1$	$p=0{,}1866$
$x=2$	$p=0{,}3110$
$x=3$	$p=0{,}2765$
$x=4$	$p=0{,}1382$
$x=5$	$p=0{,}0368$
$x=6$	$p=0{,}004$

Функция распределения (рис.2)

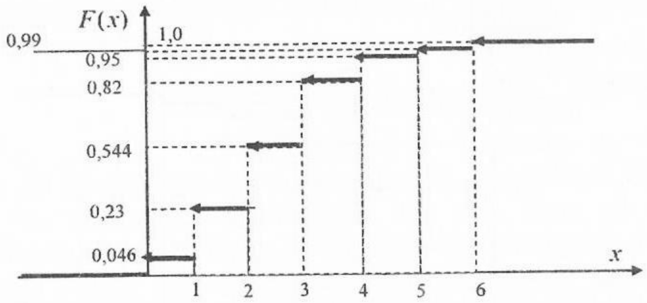


Рис.2

Если случайная величина распределена по биномиальному закону, т.е. $P(X = x_i) = C_n^i p^i q^{n-i}$, то $M[X] = np,\ D[X] = npq$.

Математическое ожидание $\mathrm{M}[X] = \sum_{i=1}^{6} p_i x_i = np = 2{,}4$; дисперсия $D[X] = np(1-p) = 1{,}44$; вероятность $P(X \le 2) = P(0) + P(1) + P(2) = 0{,}5443$.

Случай *б*: $n = 100,\ p = 0{,}003$, $\ P_n(X = m) = \dfrac{(np)^m}{m!} \cdot e^{-np}$. Следуя этой формуле, находим: $P_n(0) = e^{-np} - 0{,}7408$, $\ P_n(1) = 0{,}222$, $\ P_n(2) = 0{,}0333$;

$$P(X \le 2) = P(0) + P(1) + P(2) = 0{,}996.$$

Случай *в*: $n = 192,\ p = 0{,}25,\ np = 48,\ k_1 = 45,\ k_2 = 60$. По теореме Муавра–Лапласа

$$P(k_1 \le X \le k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{12}{6}\right) + \Phi\left(\frac{3}{6}\right) = \Phi(2) + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}4772 + 0{,}1915 = 0{,}6687.$$

Значения функции $\Phi(z)$ приведены в приложении (табл. П1).

Задача 7

Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на отрезке $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a;b)$ $\ f(x) = 0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности функции распределения; 3) найти математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания более заданного ε.

Дано: $f(x) = Ax^2 + \dfrac{3}{2}$; $(a;b) = (0;1)$; $\varepsilon = \dfrac{1}{8}$.

Р е ш е н и е. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ Ax^2 + \dfrac{3}{2}, & 0 < x < 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

1) Воспользуемся условием нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 \left(Ax^2 + \frac{3}{2}\right) dx = \left(\frac{Ax^3}{3} + \frac{3}{2}x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{A}{3} + \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow A = -\frac{3}{2}$$

2) Функция распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ -\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x, & 0<x<1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

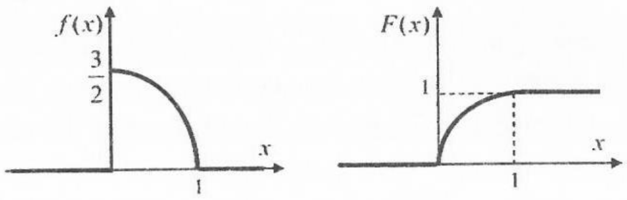


Рис.3

3) $\quad \mathrm{M}[X]=\int\limits_0^1 xf(x)dx=\int\limits_0^1\left(-\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{2}x\right)dx=-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{3}{4}x^2=\frac{3}{8};$

$$D[X]=\mathrm{M}[X^2]-\mathrm{M}^2[X]=\int\limits_0^1\left(-\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{2}x\right)dx-\frac{9}{64}=\left(-\frac{3}{10}x^5+\frac{1}{2}x^3\right)\Bigg|_0^1-\frac{9}{64}=$$

$$=0{,}059375\,;$$

$$\sigma[X]=\sqrt{D}=0{,}24367\,.$$

4) $\quad P(m-\varepsilon<X<m+\varepsilon)=\int\limits_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon}f(x)dx=\int\limits_{1/4}^{1/2}\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx=$

$$=\left(-\frac{x^3}{2}+\frac{3x}{2}\right)\Bigg|_{1/4}^{1/2}=-\frac{1}{16}+\frac{3}{4}+\frac{1}{128}-\frac{3}{8}\approx 0{,}445.$$

Задача 8

Напомним некоторые теоретические сведения. Плотность нормального закона распределения случайной величины

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Графиком функции $f(x)$ (кривая распределения) является кривая Гаусса (рис.4).

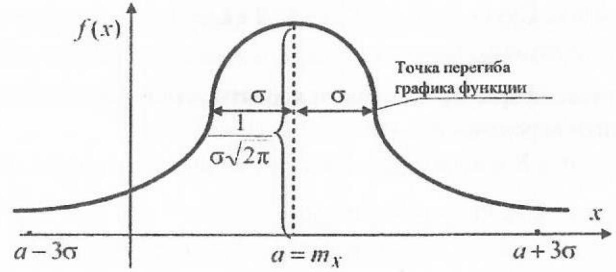


Рис.4

Вероятность попадания случайной величины в интервал $(\alpha;\,\beta)$ находится по формуле

$$P\{\alpha\le X\le\beta\}=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right),\qquad (1)$$

где $\Phi(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, значения функции $\Phi(z)$ задаются таблично (приложение 1, табл. П1). По формуле (1), пользуясь табл. П1 приложения, нетрудно сосчитать

$$P\{X=a\}=0,$$

$$P\{a<X<a+\sigma\}=\Phi(1)-\Phi(0)\approx 0{,}3413;$$

$$P\{a+\sigma<X<a+2\sigma\}=\Phi(2)-\Phi(1)\approx 0{,}4772-0{,}3413=0{,}1359;$$

$$P\{a+2\sigma<X<a+3\sigma\}=\Phi(3)-\Phi(2)\approx 0{,}4987-0{,}4772=0{,}0215;$$

$$P\{a+3\sigma<X<+\infty\}=\Phi(+\infty)-\Phi(3)=0{,}5-\Phi(3)\approx 0{,}5-0{,}4987=0{,}0013\,.$$

В силу симметричности кривой распределения $f(x)$ относительно прямой $x=a$,

$$P\{a-\sigma<X<a\}=P\{a<X<a+\sigma\};$$

$$P\{a-2\sigma<X<a-\sigma\}=P\{a+\sigma<X<a+2\sigma\};$$

$$P\{a-3\sigma<X<a-2\sigma\}=P\{a+2\sigma<X<a+3\sigma\};$$

$$P\{-\infty<X<a-3\sigma\}=P\{a+3\sigma<X<+\infty\}.$$

]

Задача 8.1. Пусть $a=2$, $\sigma=5$, $\alpha=0$, $\beta=8{,}75$, $n=2$, $P=0{,}99$, $\varepsilon=5{,}45$. Ответить на следующие вопросы.

1). Записать формулу плотности вероятности нормального распределения. Найти вероятность

$P(X=a)$, $P(a-\sigma<X<a+\sigma)$, $P(a-2\sigma<X<a-\sigma)$,

$P(a-3\sigma<X<a-2\sigma)$, $P(-\infty<X<a-3\sigma)$.

Решение. $f(x)=\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{50}}\approx 0{,}08\cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{50}}$.

$$P\{X=2\}=0;$$

$$P(a-\sigma<X<a+\sigma)=P\{-3<X<7\}=\Phi\left(\frac{7-2}{5}\right)-\Phi\left(\frac{-3-2}{5}\right)=2\Phi(1)=0{,}6826;$$

$$P(a-2\sigma<X<a-\sigma)=P\{-8<X<-3\}=P(a+\sigma<X<a+2\sigma)=P\{7<X<12\}=$$

$$=\Phi(2)-\Phi(1)=\Phi\left(\frac{12-2}{5}\right)-\Phi\left(\frac{7-2}{5}\right)==0.4772-0{,}3413=0{,}1359;$$

$$P(a-3\sigma<X<a-2\sigma)=P\{-13<X<-8\}=P(a+2\sigma<X<a+3\sigma)=$$

$$=P\{12<X<17\}=\Phi\left(\frac{17-2}{5}\right)-\Phi\left(\frac{12-2}{5}\right)=\Phi(3)-\Phi(2)=$$

$$=0{,}4986-0{,}4772=0{,}0215;$$

$$P(-\infty<X<a-3\sigma)=P\{-\infty<X<2-15\}=P(a+3\sigma<X<+\infty)=$$

$$=P\{2+15<X<+\infty\}=\Phi\left(\frac{+\infty-2}{5}\right)-\Phi\left(\frac{17-2}{5}\right)=$$

$$=\Phi(\infty)-\Phi(3)=0{,}5-0{,}4987=0{,}0013.$$

2). Найти вероятность того, что при выборе наудачу $n=2$ изделий отклонение каждой от математического ожидания попадает в интервал

$$(\alpha;\beta)=(0;8{,}75).$$

Решение. Попадание одной детали в заданный интервал

$$P\{\alpha<X<\beta\}=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{8{,}75-2}{5}\right)-\Phi\left(\frac{0-2}{5}\right)=$$

$$=\Phi(1{,}35)+\Phi(0{,}4)=(\text{по табл.П1})=0{,}4115+0{,}1554=0{,}5669.$$

Вероятность попадания двух деталей в этот интервал

$$P_2=0{,}5669^2\approx 0{,}3214.$$

Ответ: $P_2=0{,}3214$.

3). Определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем $p=0{,}99$, хотя бы одна деталь была годной, то есть попадала в интервал

$$[a-\varepsilon;a+\varepsilon]=[2-5{,}45\ ;\ 2+5{,}45].$$

Решение. Вероятность P попадания одной детали в заданный интервал

$$P\{|X-2|\le 5{,}45\}=2\Phi\left(\frac{5{,}45}{5}\right)=2\Phi(1{,}09)=2\cdot 0{,}3626=0{,}7252;$$

Известно, что $n\ge\dfrac{\ln(1-p)}{\ln(1-P)}$, тогда

$$n\ge\frac{\ln(1-0{,}99)}{\ln(1-0{,}7252)}=\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}2748}\approx 3{,}565;\quad n=4.$$

Ответ: $n=4$.

Задача 8.2. Вероятность того, что пассажир опоздает на поезд, $p=0{,}02$. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 625 пассажиров и его вероятность.

Решение. Наивероятнейшее число m_0 наступления события A (опоздание пассажира) в n опытах (n=625):

$$np-q\le m_0\le np+p;\ 625\cdot 0{,}02-0{,}98\le m_0\le 625\cdot 0{,}02+0{,}02;\quad m_0=12.$$

Найдем теперь вероятность появления наиболее вероятного числа $m_0=12$ опоздавших пассажиров. Для этого воспользуемся формулой, которая в данном случае имеет вид

$$P_{m_0,n}\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\quad x=\frac{m_0-np}{\sqrt{npq}},\tag{2}$$

где $\varphi(x)$ – функция Гаусса. Формула (2) следует из теоремы Муавра–Лапласа. Функция Гаусса является четной: $\varphi(x)=\varphi(-x)$.

$$P_{12,625}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{m_0-np}{\sqrt{npq}}\right)=\frac{1}{\sqrt{625\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98}}\varphi\left(\frac{12-12{,}5}{\sqrt{625\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3{,}5}\varphi(-0{,}1428)=\frac{1}{3{,}5}\cdot 0{,}395\approx 0{,}113.$$

Значения функции Гаусса приведены в приложении (табл. П2).

Ответ: $m=12$, $P_{12,625}=0{,}113$.

Варианты индивидуального задания

Вариант 1

1. Шесть призов разыгрываются между 5 участниками конкурса. Сколькими способами могут распределиться призы?

2. На пяти карточках написаны числа 1, 2, 3, 4, 5. Одну за другой берут две карточки. Найти вероятность, что полученное двузначное число – четное.

3. Три стрелка выстрелили по мишени. Вероятность попадания для них равна 0,5; 0,7 и 0,9 соответственно. Найти вероятность того, что мишень поражена не менее двух раз.

4. В семи урнах содержится по 2 белых и 2 черных шара, а в трех урнах по 7 белых и 3 черных шара. Какова вероятность, что из урны, взятой наудачу, будет извлечен белый шар? Шар оказался белым. Найти вероятность того, что он извлечен из урны с 7 белыми и 3 черными шарами.

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. Ведется стрельба до первого попадания, но не свыше 5 выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. X – число произведенных выстрелов, $K = 3$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q=1-p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая a (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти $M[X]$, $D[X]$ и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью формулы Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) $n=5$, $p=0{,}2$; *б*) $n=100$, $p=0{,}002$; *в*) $n=100$, $p=0{,}2$, $k_1=16$, $k_2=40$.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x)=0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x) = Ax + 1/3$, $(a;b)=(0;1)$, $\varepsilon=0{,}5$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a - k\sigma \le X \le a + k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a = 2$, $\sigma = 2$; $\alpha = -1{,}29$; $\beta = 2{,}25$; $n = 3$; $P = 0{,}95$; $\varepsilon = 2{,}564$.

Вариант 2

1. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 1 белый и 2 черных коня? Одноцветные фигуры неразличимы, кони могут стоять на любых клетках.

2. В лифт шестиэтажного дома на первом этаже вошло 4 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Какова вероятность того, что трое выйдут на одном этаже?

3. Для контроля за работой линии установлены три независимо работающих устройства, которые срабатывают при аварии с вероятностью 0,8; 0,9 и 0,95 соответственно. Найти вероятность того, что при аварии сработают два устройства.

4. Станок 30% времени обрабатывает деталь A и 70% – деталь B. При обработке детали A он простаивает 10% времени, а детали B – 15%. Какова вероятность застать станок простаивающим? Найти вероятность того, что станок, который застали простаивающим, обрабатывает деталь B.

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. Партия из 20 деталей содержит 4 бракованные. Произвольным образом выбрали 5 деталей. X – число доброкачественных деталей среди отобранных, K=2.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q=1-p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти M[X], D[X] и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) n=5, p=0,4; *б*) n=50, p=0,004; *в*) n=150, p=0,4, k_1=12, k_2=56.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x)=0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание M[X], дисперсию D[X] и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x)=2x+A$, $(a;b)$=(0;1), $\varepsilon=1/3$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$.

Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a-k\sigma \le X \le a+k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a=3$, $\sigma=1$; $\alpha=1{,}718$; $\beta=3{,}524$; $n=2$; $P=0{,}99$; $\varepsilon=1{,}645$.

Вариант 3

1. Пятнадцать занумерованных биллиардных шаров раскладывают по 6 лузам. Сколькими способами это можно сделать?

2. В коробке 10 красных, 6 зеленых и 8 синих карандашей. Три из них вынимают наугад. Найти вероятность того, что все карандаши разных цветов.

3. Из трех орудий производят залп по цели. Вероятность попадания при одном выстреле для первого орудия равна 0,9, а для второго и третьего соответственно 0,8 и 0,6. Найти вероятность того, что только одно орудие попадает в цель.

4. Сборщик получает 45% деталей завода №1, 30% – завода №2, остальные – с завода №3. Вероятность того, что деталь завода №1 отличного качества 0,7; для деталей заводов №2 и 3 эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что наудачу взятая сборщиком деталь окажется отличного качества. Какова вероятность, что взятая наудачу деталь, оказавшаяся отличного качества, изготовлена заводом №1?

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. У стрелка, вероятность попадания которого в мишень равна 0,65 при каждом выстреле, имеется 5 патронов. Стрельба прекращается при первом же попадании. X – число оставшихся патронов, $K=3$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех".

Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q=1-p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти $M[X]$, $D[X]$ и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) n=5, p=0,9; *б*) n=50, p=0,002; *в*) n=192, p=0,25, k_1=40, k_2=56.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x)=0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x)=Ax^2$, $(a;b)$=(0;1), $\varepsilon=1/2$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a-k\sigma \le X \le a+k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a=-1$, $\sigma=5$; $\alpha=-6{,}185$; $\beta=-0{,}375$; $n=4$; $P=0{,}99$; $\varepsilon=5{,}185$.

Вариант 4

1. Из урны, содержащей 8 шаров с номерами 1, 2, … , 8, шары извлекают один за другим без возвращения и записывают их номера. Сколько различных записей можно получить?

2. Наудачу выбирается шестизначное число. Какова вероятность того, что число одинаково читается как слева направо, так и справа налево (например, 123321)?

3. В урне 2 белых, 3 черных и 5 красных шаров. Наугад извлекают 3 шара. Найти вероятность того, что они одного цвета.

4. Деталь проходит одну из трех операций обработки с вероятностью 0,25; 0,35; 0,40 соответственно. Вероятность получения брака на первой операции равна 0,02, на второй – 0,04, а на третьей – 0,05. Найти вероятность получения брака после обработки. Какова вероятность того, что деталь прошла третью операцию обработки, если получен брак?

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. Прибор содержит три элемента, вероятности отказов которых за определенное время независимы и равны соответственно 0,15; 0,20 и 0,25. X – число отказавших элементов, $K=2$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q=1-p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти $M[X]$, $D[X]$ и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) n=5, p=0,5; *б*) n=20, p=0,01; *в*) n=100, p=0,1, k_1=5, k_2=15.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x)=0$. Требуется: 1) найти

параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание M[X], дисперсию D[X] и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x) = A(2x+1)$, $(a;b)$=(0;2), $\varepsilon = 1/3$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a - k\sigma \le X \le a + k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a = 0$, $\sigma = 3$; $\alpha = -2{,}526$; $\beta = 0{,}771$; $n = 3$; $P = 0{,}992$; $\varepsilon = 3{,}846$.

Вариант 5

1. Сколькими способами из 25 студентов группы можно: *а*) выбрать актив в составе: староста, культорг, профорг; *б*) выбрать трех дежурных?

2. Бросаются одновременно три игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков кратна 5.

3. Электрическая цепь составлена по схеме (рис.5). Элементы цепи выходят из строя независимо друг от друга с вероятностью 0,2; 0,1; 0,3 соответственно. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

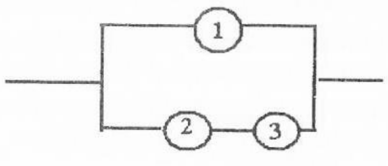


Рис.5

4. По цели производятся три выстрела с вероятностью попадания 0,2 при каждом. Вероятность уничтожения цели при одном попадании

равна 0,3; при двух попаданиях – 0,6; при трех – 0,9. Найти вероятность уничтожения цели. Какова вероятность, что было одно попадание, если цель уничтожена?

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. В урне 4 белых и 3 черных шара. Наудачу один за другим извлекаем шары из урны до появления белого шара. X – число извлеченных черных шаров, $K = 2$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" q=1– p в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти M[X], D[X] и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) n=4, p=0,15; *б*) n=20, p=0,015; *в*) n=400, p=0,2, k_1=75, k_2 =100.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x) = 0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание M[X], дисперсию D[X] и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x) = A(x+2)$, $(a;b)$=(0;2), $\varepsilon = 1$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины

в интервал $\{a - k\sigma \le X \le a + k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a = -2,\ \sigma = 0{,}2;\ \alpha = -2{,}135;\ \beta = -1{,}923;\ n = 2;\ P = 0{,}95;\ \varepsilon = 0{,}2074$.

Вариант 6

1. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляются всевозможные пятизначные числа, не содержащие одинаковых цифр. Каково максимальное число таких чисел?

2. Из полного комплекта домино извлекается наудачу одна кость. Чему равна вероятность того, что сумма очков на обеих половинках этой кости окажется равной 7?

3. Электрическая цепь составлена по схеме (рис.6). Элементы цепи выходят из строя с вероятностью 0,1; 0,4; 0,5; 0,2 соответственно. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

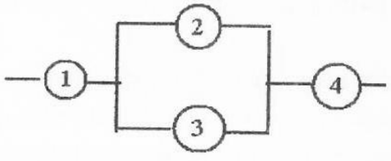


Рис. 6

4. В первой урне 4 белых и 6 черных шаров, во второй – 5 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар, после чего из второй урны извлекают один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый. Какова вероятность того, что из первой во вторую урну был переложен черный шар, если извлеченный из второй урны шар оказался белым?

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. На пути автомашины 4 независимых друг от друга светофора, каждый из которых с вероятностью 0,4 запрещает движение. X – число пройденных до первой остановки светофоров, $K = 2$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q = 1 - p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти $M[X]$, $D[X]$ и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а)* $n=5$, $p=1/3$; *б)* $n=20$, $p=0{,}02$; *в)* $n=600$, $p=0{,}4$, $k_1=250$, $k_2=330$.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x) = 0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x) = A(1 - x^2)$, $(a;b)=(0;1)$, $\varepsilon = 1/8$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a - \varepsilon; a + \varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a - k\sigma \le X \le a + k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое

наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a = 1$, $\sigma = 0{,}5$; $\alpha = 0{,}738$; $\beta = 1{,}421$; $n = 3$; $P = 0{,}95$; $\varepsilon = 0{,}641$.

Вариант 7

1. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются пятизначные числа, не кратные пяти и не содержащие одинаковых цифр. Сколько существует таких чисел?

2. Ребенок, играя с карточками, на которых написаны буквы латинского алфавита (26 карточек), случайным образом выбирает 6 карточек. Найти вероятность того, что из букв, написанных на них, можно составить слово "BEGIN".

3. Из пяти ключей к замку подходит один. Ими пытаются открыть дверь, откладывая не подошедшие ключи в сторону. Найти вероятность того, что для открытия двери потребуется не более трех попыток.

4. В цехе имеется три станка. Вероятность изготовления стандартной детали на первом станке составляет 0,78, на втором – 0,92, на третьем – 0,86. Ввиду различного местоположения рабочий выбирает первый станок с вероятностью 0,5; второй – 0,2; третий – 0,3. Найти вероятность того, что изготовленная им на выбранном станке деталь окажется нестандартной. Какова вероятность того, что деталь изготавливалась на третьем станке, если она оказалась нестандартной?

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. По мишени одновременно стреляют 3 стрелка, вероятности попаданий которых равны соответственно 0,65; 0,7 и 0,8. X – число попаданий, $K = 1$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q = 1 - p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти $M[X]$, $D[X]$ и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) n=6, p=0,1; *б*) n=600, p=0,0025; *в*) n=768, p=0,25, k_1=190, k_2=220.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x) = 0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x) = 2 - Ax$, $(a;b)$=(0;1), ε=1/3.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a - k\sigma \le X \le a + k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a = -1$, $\sigma = 2$; $\alpha = -1{,}77$; $\beta = 0{,}35$; $n = 4$; $P = 0{,}999$; $\varepsilon = 3{,}29$.

Вариант 8

1. Среди 12 учебников 3 по теории вероятностей. Сколькими способами книги на полке можно расставить так, чтобы учебники по теории вероятностей стояли рядом?

2. Найти вероятность того, что 7 случайно выбранных человек родились в разные дни недели.

3. Два стрелка стреляют по очереди, но не более трех раз каждый. Победителем считается тот, что первым попадет в мишень. При одном выстреле они попадают в мишень с вероятностью 0,9 и 0,8. Найти вероятность того, что победит более меткий стрелок, если он начал стрелять первым.

4. По команде "огонь" одно из трех орудий стреляет по мишени. Вероятность попадания для орудий равна соответственно 0,8; 0,8; 0,6. Команда "огонь" подается в 2 раза чаще первому орудию, чем второму и третьему по отдельности. Найти вероятность того, что мишень окажется пораженной. Какова вероятность того, что мишень была поражена выстрелом из третьего орудия?

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. В темной комнате 7 красных кубиков и 8 синих, не отличимых друг от друга на ощупь. Мальчик вынес 3 кубика. X – число красных кубиков среди вынесенных, $K = 2$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q=1-p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая a (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти M[X], D[X] и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *a*) n=4, p=0,4; *b*) n=50, p=0,004; *c*) n=100, p=0,9, k_1=85, k_2=92.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x)=0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание M[X], дисперсию D[X] и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x) = A(2x^2+1)$, $(a;b)$=(0;1), ε=0,1.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a-k\sigma \le X \le a+k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a = 0$, $\sigma = 1$; $\alpha = -0{,}257$; $\beta = 1{,}282$; $n = 2$; $P = 0{,}91$; $\varepsilon = 1{,}037$.

Вариант 9

1. Среди 10 книг 7 книг различных авторов и три книги одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

2. Выполняя заказ на изготовление 50 золотых медалей, ювелир заменил 2 медали на фальшивые. Для контроля заказчик случайным образом выбирает три медали. Какова вероятность разоблачения ювелира?

3. В урне 6 белых и 8 черных шаров. Взято подряд без возвращения
2 шара. Найти вероятность, что они одного цвета.

4. В первой урне 3 белых и 2 черных шара; во второй – 3 белых и 5 черных. Из первой во вторую перекладывают, не глядя, 2 шара, затем

из второй урны извлекают шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены белый и черный шары, если из второй урны извлечен белый шар?

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. Производится набрасывание колец на колышек до первого успеха, при этом число всех колец, имеющихся в распоряжении, равно 5. X – число использованных колец, вероятность набрасывания равна 0,25; $K = 2$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна *p*, "неуспеха" $q=1-p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти M[X], D[X] и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) $n=4$, $p=1/3$; *б*) $n=400$, $p=0{,}0025$; *в*) $n=100$, $p=0{,}8$, $k_1=75$, $k_2=84$.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x)=0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание M[X], дисперсию D[X] и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x) = A(4+3x)$, $(a;b)=(0;1)$, $\varepsilon=1$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$.

Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a-k\sigma \le X \le a+k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a=1$, $\sigma=3$; $\alpha=0{,}625$; $\beta=4{,}111$; $n=2$; $P=0{,}99$; $\varepsilon=4{,}935$.

Вариант 10

1. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 4 карты так, чтобы все они были одной масти?

2. Наудачу выбирается семизначное число. Найти вероятность того, что число одинаково читается как слева направо, так и справа налево (например, 4321234).

3. Какова вероятность того, что в течение часа зазвонит телефон у двух из трех студентов, если вероятности звонка у первого студента – 0,9; у второго – 0,8; у третьего – 0,85.

4. На сборку поступили транзисторы с двух заводов-изготовителей, причем первый завод поставил 30%, остальные – второй. Вероятность отказа для транзистора первого завода 0,1, а второго – 0,15. В блок поставлено два наудачу взятых транзистора. Найти вероятность, что блок неисправен. Какова вероятность того, что оба транзистора изготовлены вторым заводом, если блок неисправен? Блок не работает, если дефект имеет хоть один транзистор.

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. Производится выстрел из трех орудий одновременно по цели с вероятностями попадания 0,5; 0,6 и 0,7 для каждого орудия. X – число попаданий, $K=1$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна *p*, "неуспеха" $q=1-p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого *n*) построить ряд распределения, функцию распределения *X*, найти M[*X*], D[*X*] и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого *n* и малого *p*) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого *n*) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) *n*=5, *p*=0,7; *б*) *n*=100, *p*=0,007; *в*) *n*=150, *p*=0,6, k_1=86, k_2=96.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x)=0$. Требуется: 1) найти параметр *A*; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание M[*X*], дисперсию D[*X*] и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность *P* того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x)=A\left(x^2+1\right)$, $(a;b)$=(0;2), ε=1.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a-k\sigma \le X \le a+k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания *n* случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем *P*, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a=-2$, $\sigma=1$; $\alpha=-2$; $\beta=-0{,}718$; $n=4$; $P=0{,}97$; $\varepsilon=1{,}645$.

Вариант 11

1. Тридцать человек разбиты на три группы по десять человек в каждой. Сколько может быть различных составов групп?

2. Рассеянная студентка написала письма 5 подругам, запечатала в конверты и обнаружила, что забыла написать адреса получателей.

Какова вероятность того, что "свои" письма получат в точности три подруги, если адреса на конвертах будут написаны наудачу?

3. В урне 2 белых и 3 черных шара. Два игрока вынимают из урны поочередно шары, не возвращая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше извлечет белый шар. Найти вероятность того, что выиграет начинающий.

4. Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся студент может ответить только на 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета. Какова вероятность того, что студент сдал экзамен, ответив на вопросы из одного билета?

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. В урне 4 белых и 5 черных шаров. Наудачу один за другим из урны извлекаются шары до появления первого черного. X – число оставшихся в урне белых шаров, $K=2$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из *n* независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна *p*, "неуспеха" $q=1-p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в *n* испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого *n*) построить ряд распределения, функцию распределения *X*, найти M[*X*], D[*X*] и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого *n* и малого *p*) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого *n*) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) *n*=5, *p*=0,8; *б*) *n*=50, *p*=0,002; *в*) *n*=192, *p*=0,75, k_1=230, k_2 =150.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x)=0$. Требуется: 1) найти параметр *A*; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание M[*X*], дисперсию D[*X*] и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность *P* того, что

отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x) = A(4x^2 + 1)$, $(a;b)$=(0;1), $\varepsilon = 1/7$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a - k\sigma \le X \le a + k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a = -2$, $\sigma = 2$; $\alpha = -3{,}684$; $\beta = 2{,}514$; $n = 3$; $P = 0{,}992$; $\varepsilon = 2{,}564$.

Вариант 12

1. Из 12 разных книг 4 имеют переплет. Сколькими способами можно выбрать 5 книг так, что среди них 2 были в переплете?

2. На столе экзаменатора 25 занумерованных экзаменационных билетов. Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что меньший номер у выбранных билетов будет 7.

3. Рабочий обслуживает 4 независимо работающих станка, которые в течение часа требуют его внимания с вероятностью 0,1; 0,1; 0,2 и 0,3 соответственно. Какова вероятность того, что в течение часа не более одного станка потребуют его внимания?

4. На общий конвейер поступают узлы, изготовленные двумя рабочими. Производительность второго рабочего вдвое больше, чем первого. Вероятность допустить брак для первого рабочего 0,075, а для второго 0,09. Найти вероятность того, что поступивший на общий конвейер узел будет иметь брак. Какова вероятность того, что узел, оказавшийся бракованным, изготовлен вторым рабочим?

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих

условиях. Некто забыл последнюю цифру шифра кодового замка. Зная, что это одна из цифр 5, 6, 7, 8, 9, он случайным образом их перебирает. X – число попыток, $K = 2$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q=1-p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти M[X], D[X] и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) n=4, p=0,1; *б*) n=40, p=0,001; *в*) n=100, p=0,1, k_1=8, k_2=20.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x) = 0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание M[X], дисперсию D[X] и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x) = A(2 + 3x)$, $(a;b)$=(0;1), $\varepsilon = 1/2$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a - k\sigma \le X \le a + k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a=-1$, $\sigma=3$; $\alpha=-1{,}375$; $\beta=2{,}111$; $n=2$; $P=0{,}99$; $\varepsilon=4{,}935$.

Вариант 13

1. Тренер по фигурному катанию принял в секцию 6 мальчиков и 6 девочек. Сколькими способами он может сформировать смешанные пары?

2. Ребенок, играя с карточками, на которых написаны буквы латинского алфавита (26 букв), случайным образом выбирает 4 карточки. Какова вероятность того, что из написанных букв можно составить слово "READ"?

3. Три стрелка выстрелили по мишени по одному разу. Вероятность попадания для них 0,9; 0,8 и 0,7 соответственно. Найти вероятность того, что мишень поражена не более одного раза.

4. Покупатель приобрел электролампочку. Известно, что в момент покупки партия лампочек содержала 60% продукции местного предприятия и 40% – иногороднего. 500 часов работают безотказно каждые 90 из 100 лампочек местного завода и 80 из 100 иногороднего. Найти вероятность того, что купленная лампочка проработает 500 часов. Какова вероятность того, что лампочка, проработавшая 500 часов безотказно, местного производства?

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. Вероятность попадания в цель из орудия при первом выстреле равна 0,3; при втором – 0,4; при третьем – 0,5; при четвертом – 0,9. Стрельба ведется до первого попадания, но не больше 4 выстрелов. X – число произведенных выстрелов, $K=3$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q=1-p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти M[X], D[X] и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) $n=5$, $p=0{,}3$; *б*) $n=500$, $p=0{,}003$; *в*) $n=400$, $p=0{,}8$, $k_1=300$, $k_2=330$.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x)=0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание M[X], дисперсию D[X] и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x)=Ax^2+3/4$, $(a;b)=(0;1)$, $\varepsilon=1/2$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a-k\sigma \le X \le a+k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a=0$, $\sigma=4$; $\alpha=-6{,}58$; $\beta=0{,}5$; $n=3$; $P=0{,}95$; $\varepsilon=5{,}128$.

Вариант 14

1. Лифт отправился с четырьмя пассажирами и останавливается далее на восьми этажах. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта?

2. Каждый из 5 шаров случайным образом кладут в один из 6 ящиков. Какова вероятность того, что все шары попадут в разные ящики?

3. Стрелок имеет 6 патронов. При одном выстреле он попадает в мишень с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что для поражения мишени ему потребуется не более половины патронов.

4. Узлы поступают на общий конвейер с двух участков. Вероятность брака узла с первого участка составляет 0,05, со второго – 0,10. Второй участок имеет производительность в 1,5 раза больше, чем первый. Найти вероятность того, что взятый с конвейера узел окажется годным. Какова вероятность того, что годный узел изготовлен на первом участке?

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. В партии из 10 деталей содержится 7 деталей первого сорта. Случайным образом одну за другой без возвращений извлекаем детали до появления детали первого сорта. X – число попыток, $K=2$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q=1-p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти $M[X]$, $D[X]$ и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) $n=5$, $p=0{,}08$; *б*) $n=500$, $p=0{,}004$; *в*) $n=600$, $p=0{,}6$, $k_1=340$, $k_2=380$.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x)=0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x) = A(1+6x)$, $(a;b)=(0;1)$, $\varepsilon=1/8$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a-k\sigma \le X \le a+k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a=-1$, $\sigma=0{,}4$; $\alpha=-1{,}154$; $\beta=1{,}7$; $n=4$; $P=0{,}999$; $\varepsilon=0{,}658$.

Вариант 15

1. Пять групп занимаются в пяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы №1 и №2 находились бы в соседних аудиториях?

2. В группе из 20 студентов учатся 15 юношей и 5 девушек. Найти вероятность того, что из 10 случайно отобранных студентов окажется 6 юношей.

3. Прибор состоит из трех элементов. Отказы элементов за некоторое время T независимы, а их вероятности равны соответственно 0,1; 0,2 и 0,25. Найти вероятность того, что за время T откажут два элемента.

4. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложено 2 шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Вычислить, с какой вероятностью будет вынут белый шар из второй урны. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую урну было переложено 2 черных шара, если извлеченный наудачу шар из второй урны оказался белым?

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. По мишени ведется стрельба до первого попадания, но не

более 4 раз. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,9. X – число выстрелов, $K=2$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q=1-p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти M[X], D[X] и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) n=6, p=0,3; *б*) n=60, p=0,01; *в*) n=768, p=0,75, k_1=580, k_2 =610.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x)=0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание M[X], дисперсию D[X] и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x) = A\left(1+3x^2\right)$, $(a;b)$=(0;1), $\varepsilon=1/4$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a-k\sigma \le X \le a+k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a=3$, $\sigma=2$; $\alpha=0{,}926$; $\beta=3{,}25$; $n=4$; $P=0{,}99$; $\varepsilon=2{,}074$.

Вариант 16

1. На грядке растет 9 белых и 6 красных роз. Сколькими способами из них можно выбрать для букета 3 белые и 2 красные розы?

2. 10 человек входят в комнату, где есть всего 8 стульев, и рассаживаются случайным образом, но так, что все стулья оказываются занятыми. Какова вероятность того, что два определенных человека останутся без места?

3. В урне 5 белых и 4 черных шара. Из урны наугад один за другим без возвращения извлекают шары. Найти вероятность того, что второй по порядку шар будет белым.

4. Первое орудие батареи из четырех орудий пристреляно так, что вероятность попадания равна 0,4. Остальные три орудия попадают с вероятностью 0,2. Для поражения цели достаточно одного попадания. Два орудия произвели по одному выстрелу. Найти вероятность поражения цели. Какова вероятность того, что первое орудие стреляло, если цель оказалась пораженной?

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. Вероятность попадания в цель из орудия при первом выстреле равна 0,1; при втором 0,3; при третьем 0,5; при четвертом 0,8. Производится четыре выстрела. X – число попаданий в цель, $K=1$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q=1-p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти M[X], D[X] и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) n=5, p=0,1; *б*) n=60, p=0,02; *в*) n=400, p=0,1, k_1=35, k_2 =50.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x)=0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание M[X], дисперсию D[X] и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x) = Ax^2 + 1/4$, $(a;b)$=(0;2), $\varepsilon = 1/2$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ . Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a - k\sigma \le X \le a + k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a = 1$, $\sigma = 4$; $\alpha = -0{,}028$; $\beta = 6{,}028$; $n = 2$; $P = 0{,}91$; $\varepsilon = 4{,}148$.

Вариант 17

1. В поход на неделю собираются 8 человек. Сколькими способами они могут составить расписание дежурств, если каждый будет дежурить не более одного дня и дежурство длится полный день?

2. Среди кандидатов в сборную команду института 3 первокурсника, 4 второкурсника и 7 третьекурсников. Для участия в соревнованиях формируется сборная из 5 человек. Какова вероятность того, что в сборной не окажется второкурсников, если отбор в сборную производится случайным образом?

3. Электрическая цепь составлена по схеме (рис.7) . Элементы цепи выходят из строя с вероятностью 0,1; 0,3; 0,1; 0,2 соответственно. Найти вероятность того, что цепь работает.

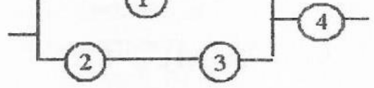


Рис. 7

4. Для сигнализации о неполадке в работе автоматической линии используется один индикатор, принадлежащий с вероятностями 0,2; 0,3 и 0,5 к одному из трех типов, для которых вероятности срабатывания при нарушении нормальной работы линии равны соответственно 0,99; 0,75 и 0,40. Найти вероятность того, что индикатор срабатывает при неполадке в работе линии. Какова вероятность, что для контроля используется индикатор 1-го типа, если он подал сигнал о произошедшей в работе линии неполадке?

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. Одновременно бросаются 4 монеты. X – число выпавших "орлов", K =3.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q=1-p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая a (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти M[X], D[X] и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) n=5, p=0,6; *б*) n=50, p=0,01; *в*) n=400, p=0,9, k_1=350, k_2 =365.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x)=0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание M[X], дисперсию D[X] и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что

отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x) = Ax^2 + 1/3$, $(a;b)$=(0;1), $\varepsilon = 1/3$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a - k\sigma \le X \le a + k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a = 5$, $\sigma = 12$; $\alpha = -3{,}1$; $\beta = 9{,}62$; $n = 2$; $P = 0{,}95$; $\varepsilon = 12{,}444$.

Вариант 18

1. Сколькими способами из колоды, имеющей 36 карт, можно выбрать 4 карты так, что среди них окажется один туз?

2. В лифт 7-этажного дома на первом этаже вошли 6 пассажиров. Какова вероятность того, что четверо выйдут на одном этаже, если каждый из пассажиров с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго?

3. Из пяти деталей выбирают одну годную, проверяя их последовательно. Каждая из деталей имеет дефект с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что годная деталь нашлась раньше, чем проверили все детали.

4. Транзистор принадлежит к одной из трех партий с вероятностями 0,25; 0,5 и 0,25. Вероятность того, что транзистор проработает заданное число часов, для этих партий равна соответственно 0,8; 0,8 и 0,6. Определить вероятность того, что транзистор проработает заданное число часов. Какова вероятность того, что проработавший заданное число часов транзистор принадлежит второй партии?

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. В партии из 15 деталей 10 деталей первого сорта, остальные второго. Отобраны случайным образом 4 детали. X – число деталей второго сорта среди отобранных, $K = 3$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q = 1 - p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти M[X], D[X] и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) n=4, p=0,5; *б*) n=200, p=0,0085; *в*) n=900, p=0,2, k_1=170, k_2=200.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x) = 0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание M[X], дисперсию D[X] и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x) = A(3x^2 + 2)$, $(a;b)$=(0;1), $\varepsilon = 1/4$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a - k\sigma \le X \le a + k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое

наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a=-1$, $\sigma=1$; $\alpha=-2{,}282$; $\beta=-0{,}476$; $n=2$; $P=0{,}99$; $\varepsilon=1{,}645$

Вариант 19

1. Из 10 теннисисток и 6 теннисистов составляются 4 смешанные пары. Сколькими способами это можно сделать?

2. В лотерее разыгрывается 6 ценных подарков. Найти вероятность того, что среди 4 наудачу взятых билетов окажется 2 "счастливых", если всего было выпущено 50 билетов.

3. Три стрелка производят по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка 0,5; для второго – 0,8; для третьего – 0,3. Найти вероятность, что в мишени будет две пробоины.

4. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый автомат дает 80%, остальные – второй. Первый автомат дает 1% брака, второй – 4%. Найти вероятность того, что две проверенные детали окажутся бракованными. Определить вероятность того, что обе проверенные детали, оказавшиеся бракованными, изготовлены первым автоматом.

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. Трасса движения слаломиста состоит из четырех участков, каждый из которых он проходит с вероятностью 0,8. В случае непрохождения одного из них спортсмен снимается с трассы. X – число пройденных участков, $K=2$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q=1-p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти $\mathrm{M}[X]$, $\mathrm{D}[X]$ и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) $n=6$, $p=0{,}25$; *б*) $n=150$, $p=0{,}005$; *в*) $n=1350$, $p=0{,}4$, $k_1=500$, $k_2=550$.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x)=0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$, дисперсию $\mathrm{D}[X]$ и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x)=(3/8)x^2+A$, $(a;b)=(0;2)$, $\varepsilon=1$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a-k\sigma \le X \le a+k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a=1$, $\sigma=2$; $\alpha=1$; $\beta=3{,}564$; $n=4$; $P=0{,}97$; $\varepsilon=3{,}29$

Вариант 20

1. Сколькими способами можно распределить 30 различных предметов между тремя людьми так, чтобы каждый получил 10 предметов?

2. 8 вариантов контрольной работы, написанных каждый на отдельной карточке, перемешиваются и распределяются случайным образом среди 6 студентов, сидящих за круглым столом, причем каждый получает по

одному варианту. Найти вероятность того, что варианты 1 и 2 достанутся рядом сидящим.

3. Из колоды в 36 карт последовательно извлекают одну за другой 3 карты без возвращения. Найти вероятность того, что извлечено не более одного туза.

4. Из 20 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 8 – с вероятностью 0,7; 4 – с вероятностью 0,6 и 3 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел. Какова вероятность того, что он промахнется? Найти вероятность того, что выбран стрелок из группы пяти метких, если он промахнулся.

5. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события $X \le K$ при следующих условиях. Бросаются 5 монет одновременно. X – число выпавших "орлов", $K = 3$.

6. В случаях *а, б, в* рассматривается серия из n независимых опытов с двумя исходами в каждом – "успех" или "неуспех". Вероятность "успеха" равна p, "неуспеха" $q = 1 - p$ в каждом испытании. X – число "успехов" в n испытаниях. Требуется:

1) для случая *а* (малого n) построить ряд распределения, функцию распределения X, найти M[X], D[X] и $P(X \le 2)$;

2) для случая *б* (большого n и малого p) найти $P(X \le 2)$ приближенно с помощью распределения Пуассона;

3) для случая *в* (большого n) найти вероятность $P(k_1 \le K \le k_2)$ приближенно с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

Дано: *а*) n=6, p=0,75; *б*) n=60, p=0,015; *в*) n=900, p=0,1, k_1=75, k_2=100.

7. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X на $(a;b)$ задана в условии задачи, а при $x \notin (a,b)$ $f(x) = 0$. Требуется: 1) найти параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) найти математическое ожидание M[X], дисперсию D[X] и среднее квадратическое отклонение σ; 4) вычислить вероятность P того, что отклонение случайной величины от математического ожидания не более заданного числа ε.

Дано: $f(x) = 3x^2 + A$, $(a;b)$=(0;1), $\varepsilon = 1/2$.

8. Случайное отклонение размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Годными считаются детали, для которых отклонение от номинала лежит в интервале $[a - \varepsilon; a + \varepsilon]$. Требуется: 1) записать формулу плотности распределения и построить график плотности; 2) найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\{a - k\sigma \le X \le a + k\sigma\}$; 3) найти вероятность попадания n случайно выбранных деталей в интервал $[\alpha;\beta]$; 4) определить, какое наименьшее число деталей необходимо изготовить, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей, чем P, хотя бы одна деталь была годной.

Замечание. В пп. 3, 4 пользоваться линейной интерполяцией при отсутствии нужного значения в таблице.

Дано: $a = 0$, $\sigma = 1{,}5$; $\alpha = -0{,}786$; $\beta = 1{,}263$; $n = 3$; $P = 0{,}95$; $\varepsilon = 1{,}923$

Раздел 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Задание

Для данной случайной выборки объемом $n = 100$:

- составить вариационный ряд;
- составить статистический ряд;
- построить гистограмму частот;
- вычислить статистическое среднее и статистическую дисперсию;
- составить статистическую функцию распределения $F(x)$;
- построить группированную выборку и с ее помощью:

  а) вычислить статистическое среднее и статистическую дисперсию;

  б) составить статистическую функцию распределения $F^*(x)$ и построить ее график;
- найти доверительный интервал для математического ожидания и дисперсии;
- с помощью критерия Пирсона χ^2 проверить гипотезу о нормальном законе распределения данной выборки;
- составить уравнение линии регрессии (кривой, «сглаживающей» гистограмму частот) и построить ее график.

Образец выполнения расчетно-теоретической работы

Дана случайная выборка $n = 100$:

0,669	0,035	–2,077	1,077	0,525
0,392	0,106	–1,430	–0,204	–0,326
–0,327	0,199	–0,160	0,625	–0,891
0,369	–1,990	–2,190	0,666	–1,614
–1,694	0,710	–0,655	–0,546	1,654
0,985	0,340	0,276	0,911	–0,170
–1,063	–0,594	–1,536	–0,787	0,873
0,033	–1,527	1,422	0,308	0,845
0,597	0,363	–3,760	1,159	0,874
–1,601	–0,570	0,133	–0,660	1,485
–0,154	–1,036	0,015	–0,220	–0,304
0,825	–0,432	–0,094	–1,566	0,082
–1,464	–0,318	1,297	0,932	0,679
0,082	0,933	–0,139	–0,833	–0,032
0,134	0,466	0,033	–0,039	0,091
–0,051	1,000	–0,838	0,275	0,838
–0,405	–1,324	0,162	–0,163	–2,716
0,151	0,741	0,064	1,212	0,823
–0,794	–0,915	1,215	1,627	–1,348
0,682	–0,898	0,686	0,958	0,346

Р е ш е н и е.

1. Из данной выборки определяем максимальную $x_{\max}$ и минимальную варианту $x_{\min}$: $x_{\max} = 1,654$; $x_{\min} = -3,760$.

Расположив варианты в порядке возрастания, начиная с $x_{\min}$, получим вариационный ряд:

$\underline{-3,760}$	–0,860	–0,160	0,276	0,833
$\underline{-2,716}$	–0,793	–0,154	0,308	0,845
–2,077	–0,787	–0,151	0,340	0,873
$\underline{-1,990}$	–0,669	–0,139	0,346	0,874
–1,694	–0,660	–0,094	0,362	$\underline{0,882}$
–1,614	–0,655	–0,039	0,369	0,911
–1,601	–0,594	–0,032	0,406	0,921
–1,527	–0,570	–0,015	0,525	0,922
–1,526	–0,551	0,033	0,597	0,932
–1,464	$\underline{-0,546}$	0,035	0,625	0,985

−1,430	−0,432	0,039	0,638	1,000
−1,324	−0,405	0,064	0,685	1,077
−1,248	−0,337	0,082	0,666	1,159
−1,190	−0,326	0,091	0,679	1,212
−1,063	−0,318	0,106	0,682	1,215
−1,036	−0,304	0,133	0,686	1,297
−0,915	−0,220	0,134	0,710	1,422
−0,898	−0,204	0,162	0,741	1,485
−0,891	−0,170	0,199	0,843	1,654
−0,838	−0,163	0,275	0,825	1,672

2. Для построения статистического ряда разобьем вариационный ряд на конечное число интервалов (зарядов). Длину интервала определим по формуле Стэрджеса:

$$\Delta = \left(x_{\max} - x_{\min}\right)/\left(1 + 3{,}32\lg n\right),$$

где n – объем данной случайной выборки, Δ – длина интервала;

$$\Delta = (1{,}654 + 3{,}760)/(1 + 3{,}32\lg 100) = 0{,}697.$$

Примем $\Delta = 0{,}7$. От $x_{\min}$ отступим влево на 0,24 (примерно $\Delta/2$). Величину 0,24 выбрали так, чтобы округлить значение левого конца интервала. Откладываем вправо интервалы длиной $\Delta = 0{,}7$ до тех пор, пока не покроется вся выборка, и считаем число вариант, попавших на каждый интервал. В вариационном ряду удобно отделить варианты одного разряда от вариант другого разряда чертой. По результатам разбиения составим табл.1.

Таблица 1

Интервалы I, (a_i, a_{i+1})	Число вариант m_i	Частоты m_i/n	Интервалы I, (a_i, a_{i+1})	Число вариант m_i	Частоты m_i/n
$(-4{,}0;-3{,}3)$	1	0,01	$(-0{,}5;0{,}2)$	29	0,29
$(-3{,}3;-2{,}6)$	1	0,01	$(0{,}2;0{,}9)$	26	0,26
$(-2{,}6;-1{,}9)$	2	0,02	$(0{,}9;1{,}6)$	13	0,13
$(-1{,}9;-1{,}2)$	9	0,09	$(1{,}6;2{,}3)$	2	0,02
$(-1{,}2;-0{,}5)$	17	0,17			

Эта таблица называется статистическим рядом. В табл.1 m_i – это число вариант, попавших в i-й интервал; a_i, a_{i+1} – соответственно начало и конец i-го интервала.

3. Для построения графического изображения статистического ряда (гистограммы) отложим на оси Ox (рис.8) интервалы из табл.1 , и на каждом i-м интервале построим прямоугольник с высотой y_i: $y_i = \dfrac{m_i}{\Delta n}$, тогда

$y_1 = y_2 = 0{,}014$; $y_3 = 0{,}028$; $y_4 = 0{,}128$; $y_5 = 0{,}240$;

$y_6 = 0{,}415$; $y_7 = 0{,}370$; $y_8 = 0{,}190$; $y_9 = 0{,}028$.

На рис.8 представлено графическое изображение статистического ряда (гистограмма). Для удобства обозначения гистограммы ее основание должно быть в 1,5 - 2 раза больше высоты.

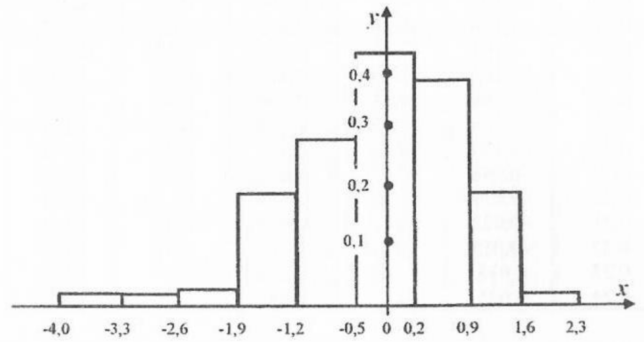


Рис. 8

4. Найдем статистическое среднее $\bar{x}$ и статистическую дисперсию $\bar{S}^2$:

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i = 0{,}01\sum_{i=1}^{100} x_i = -0{,}09;$$

$$S^2 = \left(\frac{1}{n-1}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 0{,}0101\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + 0{,}09\right)^2 = 0{,}958.$$

$\bar{S}^2 = \dfrac{n}{n-1} S^2$ – исправленная статистическая дисперсия; $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_1 - \bar{x}\right)^2$ – выборочная дисперсия.

5. Составим статистическую функцию распределения. Ее значения, составленные по данной случайной выборке, занесены в табл.2.

Таблица 2

x_1	$F(x_1)$	x_1	$F(x_1)$	x_1	$F(x_1)$	x_1	$F(x_1)$
–3,760	0	–0,655	0,25	0,039	0,50	0,686	0,75
–2,716	0,01	–0,594	0,26	0,064	0,51	0,710	0,76
–2,077	0,02	–0,570	0,27	0,082	0,52	0,741	0,77
–1,990	0,03	–0,551	0,28	0,091	0,53	0,825	0,78
–1,694	0,04	–0,546	0,29	0,106	0,54	0,833	0,79
–1,614	0,05	–0,432	0,30	0,133	0,55	0,843	0,80
–1,601	0,06	–0,405	0,31	0,134	0,56	0,845	0,81
–1,527	0,07	–0,337	0,32	0,162	0,57	0,873	0,82
–1,526	0,08	–0,326	0,33	0,199	0,58	0,874	0,83
–1,464	0,09	–0,318	0,34	0,275	0,59	0,882	0,84
–1,430	0,10	–0,304	0,35	0,276	0,60	0,911	0,85
–1,324	0,11	–0,220	0,36	0,308	0,61	0,21	0,86
–1,248	0,12	–0,204	0,37	0,340	0,62	0,922	0,87
–1,190	0,13	–0,170	0,38	0,346	0,63	0,932	0,88
–1,063	0,14	–0,163	0,39	0,362	0,64	0,985	0,89
–1,036	0,15	–0,160	0,40	0,369	0,65	1,000	0,90
–0,915	0,16	–0,154	0,41	0,406	0,66	1,077	0,91
–0,898	0,17	–0,151	0,42	0,525	0,67	1,159	0,92
–0,891	0,18	–0,139	0,43	0,597	0,68	1,212	0,93
–0,838	0,19	–0,094	0,44	0,625	0,69	1,215	0,94
–0,833	0,20	–0,039	0,45	0,638	0,70	1,297	0,95
–0,794	0,21	–0,032	0,46	0,666	0,71	1,422	0,96
–0,787	0,22	–0,015	0,47	0,679	0,72	1,485	0,97
–0,669	0,23	0,033	0,48	0,682	0,73	1,654	0,98
–0,660	0,24	0,035	0,49	0,685	0,74	1,672	0,99

6. Группированная выборка. Так как объем данной случайной выборки велик ($n=100$), то удобнее пользоваться группированной выборкой. Для ее построения в статистическом ряде (табл.1) заменим каждый i-й интервал его представителем – серединой интервала x_i^* (табл.3).

Таблица 3

x_i^*	Число вариант m_i	Частота m_i / n
–3,65	1	0,01
–2,95	1	0,01
–2,25	2	0,02
–1,55	9	0,09
–0,85	17	0,17
–0,15	29	0,29
0,55	26	0,26
1,25	13	0,13
1,95	2	0,02

1) Вычислим статистическое среднее $\bar{x}^*$ и статистическую дисперсию $\bar{\sigma}^{2*}$ по группированной выборке:

$$\bar{x}^* = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} x_i^* m_i = 0,01\sum_{i=1}^{9} x_i^* m_i = -0,093;$$

$$\bar{S}^{2*} = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^* - \bar{x}^*\right)^2 m_i = 0,01\sum_{i=1}^{9}\left(x_i^* + 0,093\right)^2 m_i = 0,964.$$

Здесь k – число интервалов, на которые разбита выборка. С учетом поправок Шеппарда $\bar{\sigma}^{2*} = \bar{s}^{2*} - \dfrac{\Delta^2}{12} = 0,923$, статистическое среднее $\bar{x}^* = -0,093$, статистическая дисперсия $\bar{\sigma}^{2*} = 0,923$.

2) Составим статистическую функцию распределения $F^*(x)$:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -3,65; \\ 0,01 & \text{при} \quad -3,65 < x \le -2,95; \\ 0,02 & \text{при} \quad -2,95 < x \le -2,25; \\ 0,07 & \text{при} \quad -2,25 < x \le -1,55; \\ 0,19 & \text{при} \quad -1,55 < x \le -0,85; \\ 0,43 & \text{при} \quad -0,85 < x \le 0,15; \\ 0,51 & \text{при} \quad 0,15 < x \le 0,55; \\ 0,95 & \text{при} \quad 0,55 < x \le 1,25; \\ 0,98 & \text{при} \quad 1,25 < x \le 1,95; \\ 1,00 & \text{при} \quad x > 1,95. \end{cases}$$

На рис.9 представлен график статистической функции распределения $F^*(x)$, составленной по группированной выборке.

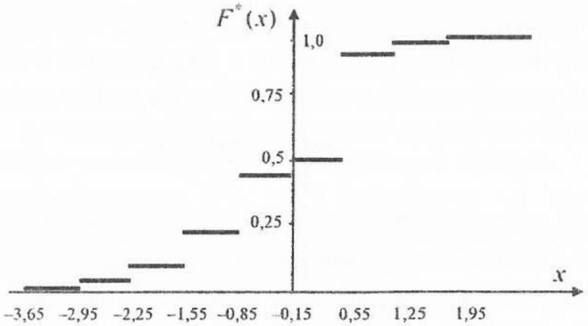


Рис. 9

7. Найдем доверительные интервалы для среднего и дисперсии. Объем выборки – число $n=100$ – велико, а распределение генеральной совокупности неизвестно. Поэтому для нахождения доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии воспользуемся формулами

для среднего
$$\left(\bar{x}-\frac{z_\gamma S}{\sqrt{n}};\ \bar{x}+\frac{z_\gamma S}{\sqrt{n}}\right); \tag{3}$$

для дисперсии
$$\left(\frac{S^2}{1+z_\gamma\sqrt{\frac{2}{n}}};\ \frac{S^2}{1-z_\gamma\sqrt{\frac{2}{n}}}\right). \tag{4}$$

Здесь z_γ – статистика, распределенная асимптотически по нормальному закону. При $n\geq 100$ можно считать, что $\sigma\approx S$. Значения статистики z_γ определяем из условия $P\left(\left|z_i\right|<z_\gamma\right)=2\Phi\left(z_\gamma\right)=\gamma$, полагая, что доверительная вероятность $\gamma=0{,}95$. Пользуясь табл.П1, по доверительной вероятности $\gamma=0{,}95$ находим

$$\Phi\left(z_\gamma\right)=\frac{\gamma}{2}=0{,}475;\quad z_\gamma=1{,}96.$$

Значения статистического среднего $\bar{x}$ и статистической дисперсии $\bar{\sigma}^2$ вычислены по случайной выборке $\bar{x}=-0{,}09$; $S^2=0{,}958$. Используя их, найдем доверительный интервал для среднего $(-0{,}266;\ 0{,}086)$ и для дисперсии $(0{,}751;1{,}323)$.

8. Проверим гипотезу о нормальном законе распределения данной случайной выборки. Предположим, что данная случайная выборка распределена по нормальному закону с параметрами $a=0$; $\sigma=1$ или $N(0;1)$. Проверим эту гипотезу с помощью критерия Пирсона:

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(m_i-np_i\right)^2}{np_i},$$

где k – число интервалов выборки, m_i – число вариант, попавших в i-й интервал, n – объем данной выборки, p_i – теоретическая вероятность попадания случайной величины в i-й интервал, вычисленная согласно выдвинутой гипотезе. Вычисление опытного значения критерия Пирсона $\chi^2_{\text{оп}}$ сведено в табл.4.

Таблица 4

Название строки	Содержание строки						
Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7
Интервал	–4,0; –1,9	–1,9; –1,2	–1,2; –0,5	–0,5; 0,2	0,2; 0,9	0,9; 1,6	1,6; 2,3
z_i	$-\infty$	–1,881	–1,152	–0,423	0,305	1,034	1,762
z_{i+1}	–1,881	–1,152	–0,423	0,305	1,034	1,762	$+\infty$
$\Phi(z_i)$	0,500	–0,4699	–0,3749	–0,1628	0,1179	0,3485	0,4608
$\Phi(z_{i+1})$	–0,4699	–0,3749	–0,1628	0,1179	0,3485	0,4608	0,500
p_i	0,0301	0,095	0,2121	0,2807	0,2306	0,1123	0,0392
np_i	3,01	9,50	21,21	28,07	23,06	11,23	3,92
m_i	4	9	17	29	26	13	2
m_i-np_i	0,99	–0,50	–4,21	0,93	2,94	1,77	–1,92
$(m_i-np_i)^2$	0,9801	0,25	17,7241	0,8649	8,6436	3,1329	3,6864
$\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$	0,3256	0,0263	0,8356	0,0308	0,3748	0,2789	0,9404

Сложив числа последней строки, получим опытное значение критерия Пирсона: $\chi^2_{\text{оп}}=2{,}8124$.

Если среди интервалов, на которые разбита данная случайная выборка, есть малочисленные (интервалы, в которые попало небольшое количество вариант), то эти интервалы следует объединить. При составлении табл.4 были объединены интервалы 1, 2 и 3 в силу их малочисленности (сравните с табл.3) и использованы формулы:

$$z_i=\frac{a_i-x^*}{\bar{\sigma}^*};\qquad z_{i+1}=\frac{a_{i+1}-x^*}{\bar{\sigma}^*},$$

где x^* и $\bar{\sigma}^{2*}$ – соответственно статистическое среднее и статистическая дисперсия, которые вычислены по группированной выборке.

Вероятности попадания с.в. на i-й интервал p_i вычислялись согласно принятой гипотезе о нормальном законе распределения данной с.в. с помощью приведенной функции Лапласа:

$$p_i=P\left(a_i<x<a_{i+1}\right)=\Phi\left(z_{i+1}\right)-\Phi\left(z_i\right).$$

Значения приведенной функции Лапласа $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ можно взять из табл.П1.

Найдем пороговое значение критерия Пирсона χ^2_n. Для этого вычислим число степеней свободы q: $q = r - s - 1$, где $r = 7$ – число интервалов после объединения; $s = 2$ – число неизвестных параметров, оцениваемых по данной случайной выборке. Здесь $s = 2$, так как в нормальном распределении два параметра считаются по выборке. Тогда $q = 7 - 2 - 1 = 4$.

По найденному числу степеней свободы и заданному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ (α – экспертная оценка, задается в каждом конкретном случае) по табл.П3 находим пороговое значение критерия Пирсона $\chi^2_{\text{п}} = 9{,}5$. Так как $\chi^2_{\text{оп}} = 2{,}8124 < \chi^2_{\text{п}} = 9{,}5$, то гипотеза о нормальном законе распределения данной случайной выборки принимается.

Степень согласия принятой гипотезы с опытными данными определяется вероятностью $p(\chi^2_{\text{п}} > \chi^2_{\text{оп}}) = \alpha$. Если $\alpha = 0{,}3 - 0{,}5$, то говорят о хорошем согласии. Вероятность α находим по табл.П3 по числу степеней свободы $q = 4$ и опытному значению критерия Пирсона $\chi^2_{\text{оп}} = 2{,}8124$. В данном примере $\alpha = 0{,}693$. Можно сказать, что выборка является недоброкачественной и содержит систематическую ошибку. Говорить о хорошем согласии принятой гипотезы о нормальном законе распределения данной выборки с опытными данными нельзя.

9. Составим уравнение линии регрессии, то есть уравнение кривой, «сглаживающей» гистограмму частот. Это уравнение будем искать в виде:

$$y = A\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{b^2}\right). \tag{5}$$

Числа A, a и b находятся проще, если уравнение (5) привести к уравнению параболической регрессии вида:

$$z = a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \tag{6}$$

Для этого прологарифмируем обе части равенства (5) по основанию e:

$$\ln y = \ln A - (x-a)^2 / b^2.$$

Обозначим: $\ln y = z$; $\ln A - a^2/b^2 = a_0$; $2a/b^2 = a_1$; $-1/b^2 = a_2$. В этих обозначениях уравнение линии регрессии (5) примет вид (6). Так как объем выборки велик, для нахождения коэффициентов a_0, a_1 и a_2 воспользуемся группированной выборкой (табл.3), дополнив ее значениями $y_i = \frac{m_i}{\Delta n}$ и $z_i = \ln y_i$ (табл.5). Коэффициенты a_2, a_1 и a_0 уравнения (6) находим, решая следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_2 \sum_{i=1}^{k} x_i^{*4} + a_1 \sum_{i=1}^{k} x_i^{*3} + a_0 \sum_{i=1}^{k} x_i^{*2} = \sum_{i=1}^{k} x_i^{*2} z_i; \\ a_2 \sum_{i=1}^{k} x_i^{*3} + a_1 \sum_{i=1}^{k} x_i^{*2} + a_0 \sum_{i=1}^{k} x_i^{*} = \sum_{i=1}^{k} x_i^{*} z_i; \\ a_2 \sum_{i=1}^{k} x_i^{*2} + a_1 \sum_{i=1}^{k} x_i^{*} + a_0 k = \sum_{i=1}^{k} z_i. \end{cases} \tag{7}$$

Таблица 5

x_i^*	Число вариант m_i	Частота $\frac{m_i}{n}$	$y_i = \frac{m_i}{\Delta n}$	$z_i = \ln y_i$
–3,65	1	0,01	0,015	–6,907
–2,95	1	0,01	0,015	–6,907
–2,25	2	0,02	0,003	–6,212
–1,55	9	0,09	0,130	–2,040
–0,85	17	0,17	0,240	–1,427
–0,15	19	0,19	0,415	–0,829
0,55	26	0,26	0,370	–0,995
1,25	13	0,13	0,190	–1,661
1,95	2	0,02	0,003	–6,215

Для удобства вычислений составим вспомогательную табл.6:

Таблица 6

x_i^*	z_i	$x_i^* z_i$	x_i^{*2}	$x_i^{*2} z_i$	x_i^{*3}	x_i^{*4}
–3,65	–6,908	25,214	13,322	–92,04	–48,63	176,89
–2,95	–6,908	20,376	8,702	–60,12	–25,67	75,69
–2,25	–6,215	13,984	5,062	–31,45	–11,39	26,01
–1,55	–2,040	3,162	2,402	–4,90	–3,72	5,76
–0,85	–1.427	1,213	0,723	–1,03	–0,61	0,52
–0,15	–0,829	0,134	0,022	–0,02	–0,03	0,00
0,55	–0,994	–0,547	0,302	–2,93	0,16	0,09
1,25	–1,660	–2,075	1,563	–2,59	1,95	2,43
1,95	–0,215	–0,419	3,802	–0,73	7,41	14,44

Сложив числа, входящие в столбцы, получим коэффициенты системы уравнений (7):

$$\sum_{i=1}^{9} x_i^* = -7,65;\quad \sum z_i = -27,259;\quad \sum_{i=1}^{9} x_i^* z_i = 61,044;\quad \sum_{i=1}^{9} x_i^{2*} z_i = 195,89;$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i^{*2} = 35,9;\quad \sum_{i=1}^{9} x_i^{*2} z_i = -195,89;\quad \sum_{i=1}^{9} x_i^{*3} = -80,53;\quad \sum_{i=1}^{9} x_i^{*4} = 301,83.$$

В результате система (7) принимает вид

$$\begin{cases} 301,83\, a_2 - 80,53\, a_1 + 35,9\, a_0 = -195,89; \\ -80,53\, a_2 + 35,90\, a_1 - 7,65\, a_0 = 61,004; \\ 35,90\, a_2 - 7,65\, a_1 + 9\, a_0 = -27,259. \end{cases} \qquad (8)$$

Решив ее, находим $a_2 = -0,72$; $a_1 = 0,78$; $a_0 = -1,18$. В результате находим вид уравнения параболической регрессии (6)

$$z = -0,72x^2 + 0,78x - 1,18. \qquad (9)$$

Чтобы вернуться к уравнению линии регрессии в виде (5), вычислим коэффициенты A, a и b, решая систему

$$\begin{cases} -1/b^2 = -0,72; \\ 2a/b^2 = 0,78; \\ \ln A - a^2/b^2 = -1,18. \end{cases} \qquad (10)$$

В результате получаем $A = 0,463$; $a = 0,54$; $b^2 = 14$. Искомое уравнение линии регрессии имеет вид

$$y = 0,463\exp\left(-(x-0,54)^2/1,4\right). \qquad (11)$$

График функции (11) строим по точкам. Для этого составим вспомогательную таблицу. В ней x_i – произвольные значения с.в. X из интервала $(-3,65; 1,95)$; y_i – соответствующие значения переменной Y, рассчитанные по формуле (11) (табл.7).

Таблица 7

x_i	–3,0	–2,5	–2	–1,5	–1,0	–0,5	0,0	0,54
y_i	0,00005	0,0005	0,004	0,023	0,183	0,212	0,376	0,463

x_i	1,0	1,5	2,0	2,5
y_i	0,398	0,240	0,101	0,03

На рис.10 представлен график линии регрессии.

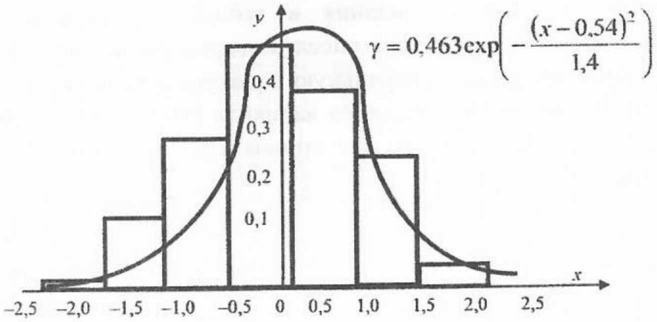


Рис. 10

Варианты типового задания

Для каждого варианта задания в табл.8 приведены номера соответствующих ему двух строк чисел, которые надо взять из табл.9. Табл.9 представляет собой генеральную совокупность чисел, разбитую на строки по 50 чисел. Для каждого варианта (табл.8) из генеральной совокупности (табл.9) выбираем две строки. Они образуют случайную выборку объемом $n = 100$.

Таблица 8

Номер		Номер		Номер	
варианта	строк	варианта	строк	варианта	строк
1	I и II	11	II и IV	21	III и VII
2	I и III	12	II и V	22	III и VIII
3	I и IV	13	II и VI	23	III и IX
4	I и V	14	II и VII	24	III и X
5	I и VI	15	II и VIII	25	IV и V
6	I и VII	16	II и IX	26	IV и VI
7	I и VIII	17	II и X	27	IV и VII
8	I и IX	18	III и IV	28	IV и VIII
9	I и X	19	III и V	29	IV и IX
10	II и III	20	III и VI	30	IV и X

Таблица 9

Номер строки	Случайные числа, распределенные по нормальному закону									
I	–1,752	–0,329	–1,256	0,318	1,531	0,349	–0,958	–0,059	0,415	–1,084
	–0,291	0,085	1,701	–1,087	–0,433	–0,292	0,248	–0,539	–1,382	0,318
	–0,093	0,130	0,634	0,899	1,409	–0,883	–0,095	0,229	0,129	0,367
	–0,450	–0,244	0,072	1,028	1,730	–0,056	–1,488	–0,078	–2,361	–0,992
	0,512	–0,882	0,490	–1,304	–0,266	0,757	–0,361	0,194	–1,078	0,529
II	–0,702	0,472	0,429	–0,664	–0,592	1,443	–1,515	–1,209	–1,043	0,278
	0,284	0,039	0,518	1,351	1,473	0,889	0,300	0,338	–0,206	1,392
	–0,509	1,420	–0,782	–0,429	–1,266	0,627	–1,165	0,818	–0,261	0,409
	–1,776	–1,033	1,977	0,014	0,702	–0,435	–0,816	1,131	0,656	0,060
	–0,044	1,807	0,342	–2,510	1,071	–1,220	–0,060	–0,764	0,079	–0,964
III	0,263	–0,578	1,612	–0,148	–0,383	–1,007	–0,414	0,638	–0,186	0,507
	0,986	0,439	–0,192	–0,132	0,167	0,883	–0,400	–1,440	–0,385	–1,414
	–0,441	–0,852	–1,446	–0,605	–0,348	1,018	0,963	–0,004	2,504	–0,847
	–0,866	0,489	0,097	0,379	0,192	–0,842	0,065	1,420	0,426	1,191
	–1,215	0,675	1,621	0,394	–1,447	2,199	–0,321	–0,540	–0,037	0,185

Продолжение табл.9

Номер строки	Случайные числа, распределенные по нормальному закону								
	–0,475	–1,210	0,183	0,526	0,495	1,297	–0,452	1,241	–1,016	–0,090
	1,200	0,131	2,502	0,344	–1,060	–0,909	0,388	–0,666	–0,838	–0,866
IV	–0,498	–1,202	–0,057	–1,354	–1,441	–1,590	–0,409	0,441	0,637	–1,116
	–0,743	0,894	–0,028	1,119	–0,598	0,279	1,276	0,830	0,267	–0,156
	0,779	–0,780	–0,954	0,705	–0,361	–0,743	0,985	1,297	–0,142	–1,387
	–0,206	–0,195	1,017	–1,167	–0,079	–0,803	–1,613	–1,068	–0,394	–0,406
	0,092	–0,927	–0,439	0,256	0,503	0,835	–1,695	–0,456	–0,118	–0,454
V	–1,222	–1,582	1,786	–0,517	–1,080	–1,161	0,987	–1,890	0,248	0,575
	0,068	0,075	–1,383	–0,084	0,159	–0,218	1,241	0,186	–0,973	–0,266
	0,183	1,600	–0,335	1,553	0,089	0,013	1,365	0,461	0,486	1,246
	–0,811	2,904	0,618	0,588	0,533	–0,154	0,058	0,690	0,820	0,557
	–1,019	0,149	1,033	0,336	1,306	0,825	1,611	0,296	–0,426	0,004
VI	1,453	1,210	–0,043	0,220	0,256	–1,463	–0,474	–0,046	0,243	1,082
	0,759	–0,838	–0,877	–0,177	1,183	0,082	1,141	–0,963	–0,822	–1,114
	0,287	0,278	–0,454	0,897	–0,122	0,134	–0,035	0,931	0,236	–0,586

Продолжение табл.9

Номер строки	Случайные числа, распределенные по нормальному закону								
	–0,669	0,035	–2,077	1,077	0,525	–0,551	–1,036	0,015	0,220	0,882
	0,392	0,106	–1,430	–0,204	–0,326	–0,405	–0,432	–0,094	–1,566	0,679
VII	–0,337	0,199	–0,160	0,625	–0,891	–0,151	–0,318	1,297	0,932	–0,032
	0,369	–1,990	–1,190	0,666	–1,614	–0,794	0,922	–0,139	–0,833	0,091
	–0,694	0,710	–0,655	–0,546	1,654	0,682	0,466	0,033	–0,039	0,838
	–0,985	0,340	0,267	0,911	–0,170	1,079	–0,696	–0,838	0,275	–0,304
	–0,063	–0,594	–1,526	–0,787	0,873	1,531	1,523	0,162	–0,163	0,823
VIII	0,033	–1,527	1,422	0,308	0,845	0,207	–2,050	0,064	1,212	–2,716
	0,597	0,362	–3,760	1,159	0,874	–1,346	–3,154	1,215	1,267	–1,248
	–0,601	–0,570	0,133	–0,660	1,485	0,295	0,346	0,686	0,657	0,346
	–0,266	–1,309	0,597	0,989	0,934	–0,656	0,128	–0,999	–0,036	–0,536
	0,901	1,531	–0,889	–1,019	0,084	–0,144	–0,961	–1,920	0,678	–0,402
IX	–0,433	–1,008	–0,990	0,090	0,940	–0,645	–0,112	0,638	1,469	1,214
	0,327	0,763	1,724	–0,709	–1,180	–0,946	1,298	–0,175	0,533	–1,264
	–0,248	0,788	0,577	0,122	–0,536	1,207	–0,805	–2,243	1,642	1,353

Окончание табл. 9

Номер строки	Случайные числа, распределенные по нормальному закону									
X	−0,401	−0,679	0,921	0,476	1,121	−0,865	1,000	−0,551	−0,872	1,511
	0,344	−0,824	0,686	−1,487	−0,126	0,808	−1,324	0,183	−0,358	−0,184
	0,441	−0,372	−1,336	0,062	1,506	−0,315	0,741	−0,452	1,594	−0,264
	0,824	0,049	−1,734	0,251	0,063	−0,379	−0,915	−0,125	0,104	−0,529
	1,385	1,320	−0,509	−0,381	−1,671	−0,524	−0,896	1,348	0,676	0,799

Раздел 3. ТЕСТЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Тест 1

1. В офисе продаж работают 6 мужчин и 4 женщины. Для проведения рекламной акции отобрали трех человек. Вероятность того, что среди отобранных будет хотя бы 1 мужчина равна: 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{30}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{7}{10}$; 5) $\frac{29}{30}$.

2. В партии из 15 деталей имеются 10 стандартных. Наудачу выбрали 5 деталей. Вероятность того, что среди взятых деталей ровно 3 стандартных, равна: 1) $\frac{400}{1001}$; 2) $\frac{8}{27}$; 3) $\frac{2}{243}$; 4) $\frac{1}{243}$; 5) $\frac{20}{1001}$.

3. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения бракованных деталей на первом автомате – 0,03, на втором – 0,06. Производительность второго автомата вдвое больше производительности первого. Вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь без брака, равна: 1) 0,97; 2) 0,91; 3) 0,88; 4) 0,95; 5) 0,85.

4. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна: 1) 0,3; 2) 0,5; 3) 0,8; 4) 0,9; 5) 0,6.

5. Задан ряд распределения:

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
p_i	0,3	p_2	0,2	0,15	0,25