

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.С. КУЧЕР, Д.А. КОТИН

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие
для студентов II курса бакалаврской программы подготовки
направления 13.03.02 – «Электроэнергетика и электротехника»

НОВОСИБИРСК
2017

УДК 51(075.8)
К 959

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор *З.С. Темлякова*
канд. техн. наук, доцент *В.Т. Сысенко*

Работа подготовлена на кафедре ЭиАПУ и утверждена
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

Кучер Е.С.

К 959 Специальные главы высшей математики: учебно-методическое пособие / Е.С. Кучер, Д.А. Котин. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. – 100 с.

ISBN 978-5-7782-3154-2

В пособии изложен основной теоретический материал некоторых глав высшей математики и линейной алгебры, знание которых позволит иметь представление о базовых теоретических и практических сведениях в области решения технических задач предметной области, с получением и использованием математического описания моделей элементарных объектов управления. Представлены задания расчетно-графической и лабораторных работ, контролирующий материал, необходимые для приобретения навыков решения инженерно-научных задач, проведения необходимых расчетов и исследований построенной математической модели с использованием программного обеспечения в рамках учебного процесса.

Предназначено для студентов II курса бакалаврской программы подготовки направления 13.03.02 – «Электроэнергетика и электротехника», дисциплина – «Специальные главы высшей математики».

УДК 51(075.8)

ISBN 978-5-7782-3154-2

© Кучер Е.С., Котин Д.А., 2017
© Новосибирский государственный
технический университет, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Часть 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ	7
1.1. Элементы матричного исчисления и линейной алгебры	7
1.1.1. Определители и их свойства	7
1.1.2. Ранг матрицы. Обратная матрица и ее свойства	9
1.1.3. Понятие о функциональных матрицах	10
1.1.4. Блочные матрицы	10
1.1.5. Системы линейных уравнений	11
1.2. Линейные преобразования линейных пространств	12
1.3. Евклидовы и унитарные пространства	14
1.3.1. Норма матрицы и экспоненциальная матрица	14
1.3.2. Симметричные и ортогональные преобразования	15
1.4. Квадратичные формы	16
1.4.1. Основные свойства квадратичной формы	16
1.4.2. Канонический вид квадратичной формы	16
1.4.3. Положительно определенные квадратичные формы	17
1.5. Линейные системы дифференциальных уравнений	18
1.5.1. Нормальная система дифференциальных уравнений	18
1.5.2. Теорема существования и единственности	19
1.5.3. Нормальная линейная система дифференциальных уравнений	20
1.5.4. Общее решение линейной однородной системы	21
1.5.5. Линейная неоднородная система	22
1.5.6. Линейное уравнение n -го порядка	23
1.5.7. Понижение порядка линейной однородной системы дифференциальных уравнений	25
1.6. Функции комплексной переменной	27
1.7. Разностные уравнения	29
1.7.1. Решетчатые функции	29
1.7.2. Конечные разности решетчатых функций	30
1.7.3. Суммирование решетчатых функций	32
1.7.4. Разностные уравнения	33
1.7.5. Линейные разностные уравнения Однородные уравнения	34

1.7.6. Системы разностных уравнений.....	35
1.7.7. Однородные системы линейных разностных уравнений	37
1.7.8. Неоднородные системы линейных разностных уравнений.....	37
1.8. Элементы теории вероятностей.....	38
1.8.1. Основные сведения	38
1.8.2. Алгебра событий	39
1.8.3. Вероятность события	41
1.8.4. Формула полной вероятности. Формула Байеса	42
1.8.5. Зависимые и независимые события.....	43
1.8.6. Случайные величины	44
1.8.7. Функция распределения вероятностей.....	45
1.8.8. Плотность распределения вероятностей	46
1.8.9. Числовые характеристики случайных величин.....	47
Часть 2. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ.....	50
Лабораторная работа № 1. Знакомство со средой и элементами программного пакета MathCAD	50
Лабораторная работа № 2. Действия над матрицами в MathCAD.....	56
Лабораторная работа № 3. Численное решение алгебраических линейных уравнений.....	60
Лабораторная работа № 4. Исследование и решение систем линейных уравнений	63
Лабораторная работа № 5. Нахождение собственных векторов и собственных значений.....	69
Лабораторная работа № 6. Решение дифференциальных уравнений	72
Контрольные вопросы	78
Библиографический список	80
Приложения.....	81
Приложение 1. Задание для расчетно-графической работы	81
Приложение 2. Используемые встроенные функции и операторы MathCAD	83
Приложение 3. Нахождение решений различных математических задач в MathCAD.....	86

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основы высшей математики и линейной алгебры являются одной из составляющих фундамента многих технических дисциплин, например теории автоматического управления. Данная дисциплина является профильной для студентов направления подготовки 13.03.02 – «Электроэнергетика и электротехника».

Актуальность и необходимость изучения представленных теоретических основ дисциплины «Специальные главы высшей математики» подтверждаются тем, что изучаемый математический аппарат необходим для последующего освоения курса «Теория автоматического управления».

В пособии рассмотрены теоретические основы матричного исчисления, знание которых позволит произвести упрощение и наглядность решения различных уравнений, а также осуществление исследований объектов управления; знание основ дифференциальных уравнений дает возможность получить математическое описание систем автоматического управления; теория функций комплексного переменного необходима для изучения студентами частотных методов анализа и синтеза систем автоматического управления и т. д.

Работа подготовлена сотрудниками кафедры электропривода и автоматизации промышленных установок Новосибирского государственного технического университета и структурно состоит из двух частей, в которых отражены основы перечисленных выше специальных разделов высшей математики.

В первой части пособия изложены основы работы с матрицами, принципы формирования и преобразований матриц различной размерности, вводятся понятия функциональных и блочных матриц, а также рассмотрено получение векторно-матричной формы записи системы линейных уравнений. Кроме того, приведена теория линейного преобразования пространства с использованием операторов, представлен обзор и свойства таких элементов математики, как евклидово простран-

ство, норма вектора и матрицы, эрмитова и экспоненциальная матрицы, а также симметричные и ортогональные преобразования.

Вводится понятие квадратичной формы и приводятся ее основные свойства, а также представлено описание нахождения положительно определенной квадратичной формы. Приведен критерий Сильвестра, который позволяет произвести исследования заданной квадратичной формы.

Рассмотрены линейные системы дифференциальных уравнений и приведение их к векторно-матричной форме записи, в том числе условие Липшица как для одного уравнения, так и для системы линейных дифференциальных уравнений. Также приведена формула Коши для решения однородной и неоднородной системы дифференциальных уравнений, рассмотрена методика понижения порядка линейной однородной системы дифференциальных уравнений.

Изложена основная теория однозначной, многозначной и непрерывной функции комплексного переменного, рассмотрены решетчатая функция, ее свойства и графическое представление, а также уделено внимание конечным разностям решетчатой функции с приведением примеров. Далее представлена основная теория однородных и неоднородных систем разностных уравнений.

Приведены основные сведения теории вероятностей и алгебра случайных событий, дано определение полной вероятности события и рассмотрены основные числовые характеристики случайных величин.

Во второй части пособия представлены задания к лабораторным работам, выполнение которых будет осуществляться в рамках учебного процесса, по всем основным разделам первой части пособия.

Приведены список вопросов для самоконтроля и рекомендуемая литература, в приложениях представлено задание расчетно-графической работы, также рассмотрены примеры решения различных математических задач в MathCAD, необходимые для приобретения навыков решения инженерно-научных задач, проведения необходимых расчетов и исследований построенной математической модели с использованием программного обеспечения в рамках учебного процесса.

Теоретические сведения, представленные в настоящем пособии, основаны на материалах учебника Б.К. Чемоданова [1].

Предлагаемое вниманию читателя настоящее пособие, по мнению авторов, может содержать некоторые недостатки. Замечания и предложения по содержанию настоящего издания направлять авторам по адресу 630073, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса 20.

Часть 1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

1.1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1.1. Определители и их свойства

Рассмотрим квадратную матрицу A , размерность которой зададим следующим образом: $\dim(A) = (n \times n)$, тогда вычисление определителя данной матрицы A возможно обозначить двумя способами:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix},$$

где оператор \det (англ. *determination* – определение) – обозначение вычисления определителя или детерминанта матрицы.

Пусть дана квадратная матрица $\dim(A) = (n \times n)$, $n = 3$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

тогда вычислим детерминант матрицы A с помощью формулы разложения определителя по i -й строке, в которой используются алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad (1.1)$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение; M_{ij} – минор, индекс « i » – номер строки, индекс « j » – номер столбца.

Обычно выбирают строку, по которой ведется разложение детерминанта, например:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23},$$

где $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{21} .

Минором элемента a_{ij} называют определитель матрицы, получаемый путем вычеркивания i -й строки и j -го столбца.

Выражение для вычисления детерминанта заданной матрицы A будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \det(A) = & a_{21}(-1)^{2+1} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + \\ & + a_{23}(-1)^{2+3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Данный метод нахождения определителя (детерминанта) является универсальным для матриц высших порядков (выше третьего порядка).

Свойства определителей:

1) определители квадратной матрицы и соответствующей ей транспонированной матрицы равны, т. е. $\det(A) = \det(A^T)$;

2) если у матрицы поменять местами две строки (два столбца), то определитель такой матрицы изменит знак на противоположный;

3) если одна из строк нулевая, то определитель равен 0;

- 4) определитель равен 0, если у него две строки одинаковые;
- 5) общий множитель элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя;
- 6) определитель, у которого две строки пропорциональны, равен 0;
- 7) если к какой-либо строке прибавить другую строку определителя, умноженную на некоторое число, то значение определителя не изменится.

1.1.2. Ранг матрицы. Обратная матрица и ее свойства

Обозначение – $\text{rang}(A) = r$.

Ранг матрицы – это число r , если минор порядка r не равен нулю, а все остальные миноры, начиная с минора порядка $(r + 1)$, равны нулю.

Теорема. Если в матрице A существует минор r -порядка не равный нулю, а все остальные $(r + 1)$ -го порядка, окаймляющие этот минор, равны нулю, то ранг матрицы A равен r .

Также с помощью элементарных преобразований приводим матрицу к ступенчатому виду, тогда ранг матрицы равен количеству ненулевых строк.

Обратной матрицей по отношению к квадратной матрице A ($\dim(A) = (n \times n)$) называют матрицу A^{-1} того же размера, для которой справедливо

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Методика нахождения обратной матрицы:

- 1) $\det(A) \neq 0$;
- 2) находим матрицу алгебраических дополнений $\tilde{A} = [A_{ij}]$;
- 3) определяем вид присоединенной матрицы $A^* = (\tilde{A})^T$;
- 4) используя выражение $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$, находим обратную матрицу.

1.1.3. Понятие о функциональных матрицах

Рассмотрим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{cases}$$

Для упрощения работы и решения системы введем векторы:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Функциональная матрица $A(t)$ – это матрица, элементами которой являются функции независимого переменного t .

Учитывая вышеизложенное, получим следующее выражение:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + F(t).$$

1.1.4. Блочные матрицы

Блочными матрицами, или *клеточными*, называют матрицы, элементами которых являются тоже матрицы.

Пусть даны следующие матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, \quad C = [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13}],$$

составим матрицу D из указанных выше матриц A , B и C , которая будет иметь следующий вид:

$$D = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ A & \vdots & B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & C & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix}.$$

Квазидиагональная матрица – блочная матрица, по главной диагонали расположены квадратные матрицы, а все остальные нули.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}(A_{11} : A_{12} : \dots : A_{nn}).$$

Математические операции с использованием матриц, рассмотренные ранее, распространяются на функциональные и блочные матрицы.

1.1.5. Системы линейных уравнений

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Представим данную систему уравнений в векторно-матричной форме:

$$AX = B,$$

где $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ – собственная матрица системы;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ – вектор-столбец неизвестных;}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ – вектор-столбец свободных составляющих;}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \text{ – вектор-столбец решения системы.}$$

Система является *совместной*, если она имеет решение. Если система не имеет ни одного решения, то она является *несовместной*.

Совместная система линейных уравнений является *определенной*, если она имеет только одно решение, в противном случае она является *неопределенной*.

1.2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим n -мерное пространство (V_n) .

Оператором или преобразованием пространства V_n называют правило, при котором каждому произвольному вектору $x \in V_n$ ставится в соответствие единственный вектор y , тогда x является *прообразом*, y – *образом* вектора x .

Обозначим \mathfrak{R} – преобразование (оператор).

Линейное преобразование (оператор) – это преобразование, при котором выполняются следующие условия:

- 1) аддитивности – $\mathfrak{R}(x + y) = \mathfrak{R}x + \mathfrak{R}y$;
- 2) однородности – $\mathfrak{R}(\lambda x) = \lambda(\mathfrak{R}x)$, $\lambda = \text{const}$.

Таким образом, линейное преобразование переводит сумму векторов в сумму образов, а произведение на число – в произведение образа этого вектора на это же число.

Введем обозначения:

e_1, e_2, \dots, e_n – базис n -мерного векторного пространства (V_n);

\mathfrak{R} – линейное преобразование;

e'_1, e'_2, \dots, e'_n – образы базисных векторов, тогда

$$\begin{cases} \mathfrak{R}e_1 = e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ \mathfrak{R}e_2 = e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n, \\ \vdots \\ \mathfrak{R}e_n = e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n. \end{cases}$$

На основе системы уравнений составим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \text{матрица линейного оператора } \mathfrak{R}.$$

Операции над операторами:

1) произведение двух операторов \mathfrak{R} и \mathfrak{T} $(\mathfrak{R} + \mathfrak{T})x = \mathfrak{R}x + \mathfrak{T}x$ – представляет собой последовательное преобразование вектора x сначала одним оператором \mathfrak{R} , а затем \mathfrak{T} ;

2) $\lambda(\mathfrak{R}x) = x(\mathfrak{R}\lambda)$, где $\lambda = \text{const}$;

3) $(\mathfrak{R}\mathfrak{T})x = \mathfrak{R}(\mathfrak{T}x)$.

Свойства операторов (линейных преобразований):

$$1) \mathfrak{R} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\mathfrak{R}x_i);$$

2) $\mathfrak{R}0 = 0$, 0 – нулевой вектор;

3) $\mathfrak{R}(-x) = -\mathfrak{R}x$, $(-x)$ – противоположный вектор.

1.3. ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим линейное пространство V_n , где x, y – векторы этого пространства.

Евклидово пространство – это вещественное линейное унитарное пространство, если в нем каждой паре векторов x и y поставлено в соответствие число (x, y) , называемое *скалярным произведением векторов* x и y , для каждого выполняются следующие условия:

$$1) (x, y) = \overline{(y, x)}, \text{ где черта сверху означает комплексно-сопряженное число;}$$

$$2) (\lambda \cdot x, y) = \lambda(x, y), \text{ где } \lambda - \text{произвольное комплексное число;}$$

$$3) (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y);$$

$$4) (x, x) > 0, \quad x \neq 0.$$

Скалярный квадрат вектора – это скалярное произведение (x, x) вектора на самого себя.

1.3.1. Норма матрицы и экспоненциальная матрица

Норма вектора – это длина вектора x , заданная в некотором ортогональном базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} - \text{евклидова норма вектора.}$$

Норма матрицы A ($\dim A = m \times n$) – это сумма модулей ее элементов.

$$\|A\| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Норма матрицы обладает следующими свойствами:

$$1) \|cA\| = |c| \|A\|,$$

$$2) \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

$$3) \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Сумма ряда (S) – это матрица, элементы которой являются суммами рядов, составленных из элементов матрицы A_k :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A_k .$$

Экспоненциальная матрица (e^A) для квадратной матрица A ($\dim A = n \times n$) будет определяться следующим образом:

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} - \text{сумма рядов.}$$

Также справедливо:

$$e^A e^B = e^{(A+B)} , \quad e^A e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^k B^l}{k! l!} .$$

1.3.2. Симметричные и ортогональные преобразования

Эрмитова матрица – это квадратная матрица $A = [a_{ij}]$

($\dim A = n \times n$), если ее элементы подчиняются условию $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, т. е. это такая матрица, которая не изменится, если ее транспонировать и заменить ее элементы комплексно-сопряженными числами.

Эрмитова матрица с действительными элементами называется симметричной.

Для симметричной матрицы справедливо $A^T = A$.

Симметричное преобразование (\Re) – линейное преобразование пространства, задаваемое при некотором ортонормированном базисе (образует ортонормированную систему векторов) эрмитовой матрицей

$$(\Re x, y) = (x, \Re y) ,$$

где x, y – произвольные векторы пространства V_n .

Теорема. Все характеристические числа эрмитовой матрицы действительны.

Ортогональная матрица – это матрица, у которой транспонированная матрица равна обратной, т. е.

$$B^T = B^{-1}.$$

Ортогональное преобразование – это линейное преобразование \mathfrak{Z} евклидова пространства V_n , которое при ортонормированном базисе e_1, e_2, \dots, e_n задается ортогональной матрицей.

Справедливо также следующее равенство:

$$(x, y) = (\mathfrak{Z}x, \mathfrak{Z}y).$$

1.4. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

1.4.1. Основные свойства квадратичной формы

Квадратичной формой $f(x, x)$ называют функцию вектора x , которая представляет собой однородный многочлен второй степени относительно координат этого вектора, т. е.

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j, \quad (1.2)$$

где ξ_i, ξ_j – координаты вектора x в некотором базисе.

Матрица квадратичной формы – матрица, составленная из коэффициентов квадратичной формы.

Рангом квадратичной формы называют ранг ее матрицы.

Если матрица A невырожденная ($\det A \neq 0$), то ранг квадратичной формы равен n и такая квадратичная форма является *невырожденной*.

1.4.2. Канонический вид квадратичной формы

Квадратичная форма вида (1.2) с помощью линейного преобразования с ортогональной матрицей C может быть приведена к каноническому виду

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta_i^2, \quad (1.3)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы квадратичной формы.

Если матрица квадратичной формы имеет диагональный вид

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

то ей соответствует квадратичная форма, приведенная к каноническому виду (1.3).

1.4.3. Положительно определенные квадратичные формы

Положительно определенная квадратичная форма – это квадратичная форма n переменных (координат), которой принадлежит строго положительное значение при всякой ненулевой системе действительных значений переменных.

Если же эта квадратичная форма принимает строго отрицательные значения при любой ненулевой системе действительных значений переменных, то она называется *отрицательно определенной*.

В остальных случаях квадратичную форму называют *неопределенной*.

Диагональный минор матрицы A – это минор, диагональные элементы которого являются диагональными элементами матрицы A .

Главный диагональный минор матрицы A порядка k – это минор, составленный из первых « k » строк и « k » столбцов матрицы A .

Теорема (критерий Сильвестра). Квадратичная форма (1.2) положительно определена тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры ее матрицы A строго положительны.

Данный критерий позволяет исследовать устойчивость системы автоматического управления, т. е. исследовать, является ли заданная квадратичная форма положительно определенной.

Пример:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ – матрица квадратичной формы.}$$

Необходимо исследовать данную форму критерием Сильвестра:

$$\Delta_1 = 1 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0, \text{ поэтому в соответствии с критерием Сильвестра}$$

квадратичная форма не является положительно определенной.

1.5. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.5.1. Нормальная система дифференциальных уравнений

Если в дифференциальные уравнения вида

$$F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$$

входит n неизвестных (x_1, x_2, \dots, x_n) , тогда будем иметь систему дифференциальных уравнений.

Каноническая система дифференциальных уравнений – это система, которую можно разрешить относительно старших производных $x_1^{(m_1)}, x_2^{(m_2)}, \dots, x_n^{(m_n)}$.

Нормальная система дифференциальных уравнений – это система, из n -штук уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1.4)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Систему (1.4) представим в векторной форме:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \end{bmatrix}, \quad F(t, x) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_i(t, x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$

тогда получим

$$\frac{dX}{dt} = F(t, x). \quad (1.5)$$

Решением системы (1.4) на интервале Δ называют совокупность n -штук функций $x_i = \varphi_i(t)$, определенных на интервале, и таких, что подстановка их в систему (1.4) обращает каждое уравнение системы в тождество на всем интервале Δ .

Если вектор-функция F явно не зависит от времени t , т. е. система дифференциальных уравнений (1.5) примет вид

$$\frac{dX}{dt} = F(x),$$

то такая система уравнений называют *автономной (стационарной)*.

Задача Коши

Найти решение ($x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$) системы дифференциальных уравнений (1.4), определенное на некотором интервале Δ , содержащее точку t_0 и удовлетворяющее условиям

$$\varphi_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.6)$$

где t_0, x_{i0} — это заранее известные начальные значения, условие (1.6) является *начальным условием*.

Если ввести в рассмотрение $(n + 1)$ -мерное пространство, то задача Коши заключается в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку в $(n + 1)$ -мерном пространстве.

1.5.2. Теорема существования и единственности

Условие Липшица для одного уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(t, x)$.

Функция $f(t, x)$ будет удовлетворять условию Липшица по x в замкнутой области G , если для любой пары точек $(t, x_1), (t, x_2) \in G$ справедливо

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

где $L = \text{const}$ — постоянная Липшица.

Теорема. Пусть функция $f(t, x)$ задана на замкнутой области G , непрерывна в ней по t и удовлетворяет условию Липшица по x . Тогда можно указать такой интервал Δ на оси t , содержащий точку t_0 , на

которой существует, и притом единственное решение $x = \varphi(t)$ уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений (1.4).

Общим решением системы в области G называют совокупность n -функций

$$x_i = \varphi_i(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

из которого путем выбора произвольных постоянных (C_1, C_2, \dots, C_n) можно получить любое решение, принадлежащее области G .

Условие Липшица для системы дифференциальных уравнений:

функция $f(t, x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяет условию Липшица в области G по переменным (x_1, \dots, x_n) , если существует такое число $L > 0$, что для любой пары точек (t, x_1, \dots, x_n) , $(t, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in G$ выполняется неравенство

$$|f(t, x_1, \dots, x_n) - f(t, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)| \leq L \sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i|.$$

Теорема. Пусть задана нормальная система уравнений (1.4), причем функция $f(t, x_1, \dots, x_n)$ непрерывна по t и удовлетворяет условию Липшица по (x_1, \dots, x_n) в некоторой области G . Тогда существует и притом единственное решение системы уравнений, удовлетворяющее начальным условиям, определенное на некотором интервале Δ , содержащем точку t_0 .

1.5.3. Нормальная линейная система дифференциальных уравнений

Линейной системой дифференциальных уравнений называют систему уравнений, в которую неизвестные функции и их производные могут входить только в первой степени.

Нормальная линейная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k + f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.7)$$

Приведем систему (1.7) к векторно-матричной форме записи:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_i(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

тогда получим

$$\frac{dX}{dt} = AX + F(t). \quad (1.8)$$

1.5.4. Общее решение линейной однородной системы

Систему (1.7) называют *однородной*, если $f_i(t) = 0$, и она имеет следующий вид:

$$\frac{dX}{dt} = AX. \quad (1.9)$$

Теорема. Совокупность всех решений $\{\varphi(t)\}$ системы (1.9) образует линейное пространство размерности n .

Решение $\varphi(t)$ может быть представлено единственным образом:

$$\varphi(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \dots + C_n\varphi_n(t), \quad (1.10)$$

где C_i – это произвольная постоянная, определяющая начальные условия, любое решение может быть задано в виде (1.10) и будет называться *общим решением системы*.

Запишем решение в развернутом виде:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = C_1\varphi_{11}(t) + C_2\varphi_{21}(t) + \dots + C_n\varphi_{n1}(t), \\ \varphi_2(t) = C_1\varphi_{12}(t) + C_2\varphi_{22}(t) + \dots + C_n\varphi_{n2}(t), \\ \vdots \\ \varphi_n(t) = C_1\varphi_{1n}(t) + C_2\varphi_{2n}(t) + \dots + C_n\varphi_{nn}(t). \end{cases} \quad (1.11)$$

Любую систему, состоящую из n линейно независимых решений, образующую базис пространства, называют *фундаментальной системой решений*.

1.5.5. Линейная неоднородная система

Рассмотрим линейную неоднородную систему уравнений (1.8) и соответствующую ей однородную систему (1.9).

Общее решение системы будет иметь следующий вид:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(t) + \xi(t),$$

где C_i – это произвольная постоянная, определяющая начальные условия; $\varphi_i(t)$ – фундаментальная система решений системы (1.8); $\xi(t)$ – произвольное решение системы (1.9).

Формула Коши:

при помощи формулы Коши можно выразить решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений через некоторую фундаментальную систему решений, соответствующую однородной линейной системе.

Составим матрицу, используя фундаментальную систему решений системы (1.9):

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{1n} & \varphi_{1n} & \cdots & \varphi_{nn} \end{bmatrix}.$$

Получим следующую матрицу

$$X(t, t_0) = X(t)X_1^{-1}(t_0),$$

где $X(t, t_0)$ – фундаментальная матрица системы; $X(t, t_0) = X(t)X_1^{-1}(t_0) = E$.

Тогда получим

$$X(t) = X(t, t_0)X_0 + \int_0^t X(t, \tau)F(\tau)d\tau. \quad (1.12)$$

Выражение (1.12) представляет собой *формулу Коши* и позволяет найти решение $X(t)$ неоднородной системы уравнений (1.8), удовлетворяющее заданным начальным условиям $X(t_0) = X_0$, если известна фундаментальная матрица $X(t, t_0)$ однородной системы (1.9).

1.5.6. Линейное уравнение n -го порядка

Линейное уравнение n -го порядка имеет следующий вид:

$$a_0(t)x^n + a_1(t)x^{n-1} + \dots + a_n(t)x = f(t), \quad (1.13)$$

где $a_0(t) \neq 0$, $a_0(t), \dots, a_n(t)$ – непрерывные функции.

Однородное уравнение имеет вид

$$a_0(t)x^n + a_1(t)x^{n-1} + \dots + a_n(t)x = 0. \quad (1.14)$$

Уравнения (1.13) и (1.14) путем введения вспомогательных переменных $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, ..., $x_n = x^{n-1}$ можно свести к системам уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= -\frac{a_n}{a_0}x_1 - \dots - \frac{a_1}{a_0}x_n + f(t); \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= -\frac{a_n}{a_0}x_1 - \dots - \frac{a_1}{a_0}x_n, \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

или в векторной форме записи

$$\frac{dX}{dt} = AX + F(t) \quad \text{и} \quad \frac{dX}{dt} = AX,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & \dots & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{f(t)}{a_0} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим систему (1.16), задав начальные условия. Тогда система будет иметь решение согласно теореме единственности:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix}.$$

Неоднородное линейное уравнение (1.13) сводится к линейной системе (1.15), поэтому общее решение примет вид

$$x_i(t) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(t) + \xi(t),$$

где $\varphi_i(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (1.14); C_i – произвольные постоянные; $\xi(t)$ – частное решение уравнения (1.13) ($i = 1, \dots, n$).

Для уравнения (1.13) справедлива формула Коши.

Составим решение $x = x_1(t, \tau)$ уравнения (1.14), которое удовлетворяло начальным условиям:

$$x_1(t, \tau) = \sum_{i=1}^n C_i(\tau) \varphi_i(t).$$

Тогда решение уравнения (1.13), удовлетворяющее начальным условиям, задается формулой Коши

$$x(t) = \xi(t) + \int_{t_0}^t x_1(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

1.5.7. Понижение порядка линейной однородной системы дифференциальных уравнений

Однородная линейная система дифференциальных уравнений выглядит следующим образом:

$$\frac{dX}{dt} = AX. \quad (1.17)$$

Если известны r линейно независимых решений $\varphi_1(t), \dots, \varphi_r(t)$ системы (1.17) ($r < n$), то порядок может быть понижен на r .

Пусть $r = 1$, тогда

$$X = \varphi_1(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) \\ \varphi_{1n}(t) \end{bmatrix} - \text{решение системы (1.17)}.$$

Решение системы (1.17) будем искать в виде

$$X = U\varphi_1(t) + Y, \quad (1.18)$$

где U — неизвестная функция; $Y = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ — неизвестная вектор-функция.

Подставим выражение (1.18) в (1.17):

$$\frac{dU}{dt}\varphi_1(t) + U\frac{d\varphi_1(t)}{dt} + \frac{dY}{dt} = A(U\varphi_1(t) + Y).$$

Так как $\varphi_1(t)$ — решение системы (1.17), тогда получим

$$\frac{dU}{dt}\varphi_1(t) + U\frac{d\varphi_1(t)}{dt} + \frac{dY}{dt} = AY. \quad (1.19)$$

Запишем уравнение (1.19) по координатам, выделив первое уравнение

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{dt}\varphi_{11}(t) &= \sum_{k=2}^n a_{1k}y_k, \\ \frac{dy_i}{dt} &= \sum_{k=2}^n a_{ik}y_k - \frac{dU}{dt}\varphi_{1i}, \quad (i=2, 3, \dots, n). \end{aligned} \right\}$$

Выразим $\frac{dU}{dt}$ и подставим его в последнее уравнение системы:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=2}^n b_{ik}y_k, \quad (1.20)$$

где $b_{ik} = a_{ik} - \frac{\varphi_{1i}(t)}{\varphi_{11}(t)}a_{1k}$.

Система решений уравнений (1.20) имеет порядок $(n - r) = (n - 1)$, таким образом, если известно хотя бы одно решение системы, то порядок такой системы понижается на единицу.

1.6. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

На множестве E комплексной плоскости задана функция комплексной переменной ω , если задано правило, по которому каждому значению ω множества E ставится в соответствие одно или несколько комплексных чисел z .

Представим функцию в символической форме записи:

$$z = f(\omega).$$

Множество E называется *множеством определения функции* $f(\omega)$.

Рассмотрим случаи, когда:

- 1) каждая точка множества E является внутренней точкой;
- 2) любые две точки множества E можно соединить ломаной, состоящей из точек множества.

Функция $f(\omega)$ называется *однозначной*, если каждому значению $\omega \in E$ соответствует только одно комплексное число z .

Если каждому значению ω соответствует несколько значений z , то $f(\omega)$ называют *многозначной*.

Зададим:

$z = a + jb$ – комплексное число;

$\omega = x + jy$ – комплексная переменная; j – мнимая единица.

Задание функции $f(\omega)$ равносильно заданию функций a и b действительных переменных x и y , т. е.

$$f(\omega) = z(\omega) = a(x, y) + jb(x, y),$$

где $a(x, y)$ – действительная часть функции; $b(x, y)$ – мнимая часть функции, которая определена в области G .

Рассмотрим некоторую последовательность чисел $\{z_n\}$, сходящуюся в точке z_0 , и соответствующую ей последовательность $\{f(z_n)\}$ значений $f(z)$.

Сходимость последовательности $\{z_n\}$ определяется *критерием Коши*.

Для сходимости последовательности $\{z_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $m > 0$ существовал такой номер $N(m)$, чтобы $|z_n - z_{n+c}| < m$ для $n > N(m)$ и любого числа $c \geq 0$.

Функция $z = f(\omega)$ имеет предел ω_0 в точке z_0 , если для любого числа $m > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$ (зависящее от m и z_0), что из неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует $|f(z) - \omega_0| < m$ или, иными словами, образы точек, лежащих в δ -окрестности точки z_0 , расположены в m -окрестности точки ω_0 .

Функция $z = f(\omega)$ называется *непрерывной* в точке z_0 , если для любого $m > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$ (зависящее от m и z_0), что при выполнении $|z - z_0| < \delta$ должно выполняться неравенство $|f(z) - f(z_0)| < m$.

Функция $z = f(\omega)$ называется *непрерывной* в точке z_0 , если для любой последовательности $\{z_n\}$, сходящейся в точке z_0 , соответствующая последовательность значений функции $\{f(z_n)\}$ сходится в точке z_0 .

Функция $z = f(\omega)$ называется *непрерывной* в области G , если она непрерывна в каждой точке этой области.

Если $f(\omega) = a(x, y) + jb(x, y)$, то следует, что если $a(x, y)$ и $b(x, y)$ являются непрерывными функциями, то функция $z = f(\omega)$ также непрерывна.

Свойства непрерывной функции комплексной переменной:

- 1) сумма непрерывных функций есть непрерывная функция;
- 2) произведение двух непрерывных функций есть функция непрерывная;
- 3) модуль непрерывной функции достигает в замкнутой ограниченной области своего наибольшего и наименьшего значения;
- 4) функция, непрерывная в замкнутой области, равномерно непрерывна в этой области.

1.7. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.7.1. Решетчатые функции

Решетчатая функция – это функция, которая определена только в некоторых точках $t_1, t_2 \dots$

Будем рассматривать функции, определенные только в *равностоящих точках*

$$t = nT,$$

где n – любое целое число; T – постоянная, называемая *периодом дискретности*.

Обозначают решетчатую функцию как $f[nT]$ (рис. 1.1).

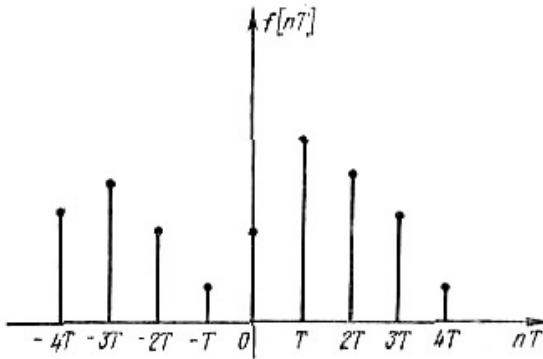


Рис. 1.1. Графическое изображение решетчатой функции

Любой непрерывной функции $f(t)$ можно поставить в соответствие некоторое множество решетчатых функций, если t представить в виде $t = nT + \varepsilon T$ ($0 \leq \varepsilon \leq 1$).

При каждом фиксированном значении ε $f[nT + \varepsilon T]$ можно рассматривать как решетчатую функцию, определенную в точках $\varepsilon T, (\varepsilon + 1)T, (\varepsilon + 2)T \dots$, такие функции называются *смещенными решетчатыми функциями* (рис. 1.2).

Обозначают смещенную решетчатую функцию как $f[nT + \varepsilon T] = f[nT, \varepsilon T]$.

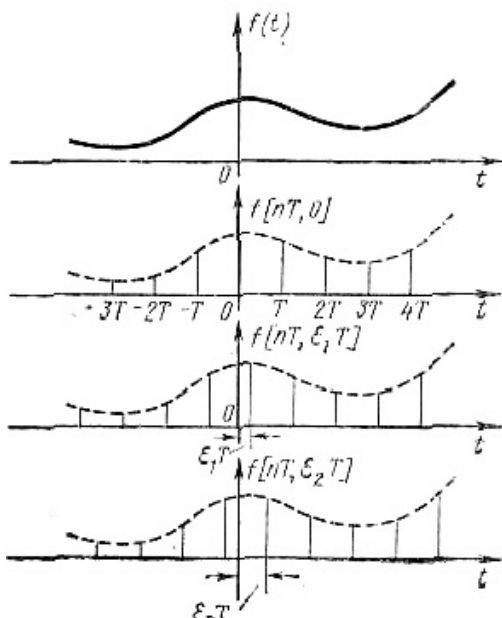


Рис. 1.2. Графическое изображение смещенных решетчатых функций

Изменяя переменную ε от 0 до 1, можно получить множество смещенных решетчатых функций $f[nT, \varepsilon T]$, соответствующих данной непрерывной функции.

1.7.2. Конечные разности решетчатых функций

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n]. \quad (1.21)$$

Выражение (1.21) называется *конечной разностью 1-го порядка* решетчатой функции $f[n]$.

Первая разность от решетчатой функции $\Delta f[n]$ называется *разностью 2-го порядка*, или *второй разностью*.

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n]. \quad (1.22)$$

Разность k -го порядка решетчатой функции $f[n]$ определяется следующим выражением:

$$\Delta^k f[n] = \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n]. \quad (1.23)$$

Разность любого порядка можно выразить через значения решетчатой функции $f[n]$:

$$\Delta^k f[n] = \sum_{v=0}^n (-1)^v \begin{bmatrix} k \\ v \end{bmatrix} f[n+k-v], \quad (1.24)$$

где $\begin{bmatrix} k \\ v \end{bmatrix} = \frac{k!}{v!(k-v)!}$.

Саму решетчатую функцию возможно выразить через ее разности различных порядков.

Из уравнения (1.21) получим

$$f[n+1] = f[n] + \Delta f[n],$$

из (1.22) получим

$$f[n+2] = f[n] + 2\Delta f[n] + \Delta^2 f[n],$$

из выражения (1.23) –

$$f[n+3] = f[n] + 3\Delta f[n] + 3\Delta^2 f[n] + \Delta^3 f[n],$$

$$f[n+l] = \sum_{k=0}^l \begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix} \Delta^k f[n]. \quad (1.25)$$

Примеры

1. $f[n] = a$, $a = \text{const}$, найти первую разность функции:

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n] = a - a = 0.$$

2. $f[n] = n^2$, определить разности функции:

$$\Delta f[n] = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1,$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 f[n] &= \Delta f[n+1] - \Delta f[n] = 2(n+1) + 1 - 2n - 1 = \\ &= 2n + 3 - 2n - 1 = 2,\end{aligned}$$

$$\Delta^3 f[n] = \Delta^2 f[n+1] - \Delta^2 f[n] = 2 - 2 = 0.$$

3. $f[n] = an + b$, $a, b = \text{const}$ определить первую и вторую разности:

$$\Delta f[n] = a(n+1) + b - (an + b) = an + a + b - an - b = a,$$

$$\Delta^2 f[n] = a - a = 0.$$

1.7.3. Суммирование решетчатых функций

Операция суммирования является обратной к вычислению конечной разности.

Пусть $f[n]$ – решетчатая функция, которая определена при $n = 1, 2, \dots$

Требуется найти решетчатую функцию $F[n]$, для которой $f[n]$ является первой разностью:

$$F[n] = \sum_{k=0}^{n-1} f[k], \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Функцию $F[n]$ называют *первообразной* для решетчатой функции $f[n]$.

Формула суммирования по частям имеет следующий вид:

$$\sum_{k=0}^n U[k] \Delta V[k] = U[k] V[k] \Big|_{k=0}^{k=n+1} - \sum_{k=0}^n V[k+1] \Delta U[k],$$

где $F[n] = U[n] V[n]$.

1.7.4. Разностные уравнения

Соотношение, связывающее решетчатую функцию $x[n]$ и ее разности до некоторого порядка k

$$\Phi[n, x[n], \Delta x[n] \dots \Delta^k x[n]] = 0, \quad (1.26)$$

называют разностным уравнением.

Используя формулу (1.25) для нахождения конечных разностных функций, выражение (1.26) можно преобразовать к виду

$$\Phi_1[n, x[n], x[n+1], x[n+2] \dots x[n+k]] = 0. \quad (1.27)$$

Если уравнение (1.27) содержит в явном виде функции $x[n]$ и $x[n+k]$, то исходное разностное уравнение (1.26) называют *уравнением порядка k* .

В процессе приведения (1.26) к (1.27) функции $x[n]$ могут взаимно уничтожаться, тогда можно получить

$$\Phi_2[n, x[n+1], x[n+2] \dots x[n+k]] = 0. \quad (1.28)$$

Если заменить переменную n на $m = n + 1$, то получим

$$\Phi_2[m-1, x[m], \dots x[m-1+k]] = 0,$$

это уравнение является разностным уравнением порядка $(k - 1)$.

Пример

$\Delta^3 x[n] + \Delta^2 x[n] + 2\Delta x[n] + 2x[n] = f[n]$ преобразуем к виду

$$x[n+3] - 2x[n+2] + 3x[n+1] = f[n],$$

введем $m = n + 1$, тогда получим

$$x[m+2] - 2x[m+1] + 3x[m] = f[m-1].$$

Таким образом, полученное уравнение является уравнением второго порядка, при том, что оно содержит разность третьего порядка.

Решетчатая функция $x[n]$, которая обращает уравнение в тождество, является *решением разностного уравнения*.

Рассматривая всевозможные начальные условия, получим *общее уравнение* как функцию произвольных постоянных C_0, C_1, \dots, C_{k-1} :

$$x[n] = \xi[n, C_0, C_1, \dots, C_{k-1}],$$

число произвольных постоянных совпадает с порядком уравнения.

Можно рассматривать разностное уравнение относительно смещенных решетчатых функций $x[n, \varepsilon]$:

$$\Phi[n + \varepsilon, x[n + \varepsilon], \Delta x[n + \varepsilon], \Delta^2 x[n + \varepsilon], \dots, \Delta^k x[n + \varepsilon]] = 0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Чтобы получить решение разностного уравнения порядка k для произвольных значений ε , следует задать в качестве начальных условий k функций переменной

$$\varepsilon : x[n_0, \varepsilon] = x_0[\varepsilon], \quad x[n_0 + 1, \varepsilon] = x_1[\varepsilon], \dots, \quad x[n_0 k - 1, \varepsilon] = x_{k-1}[\varepsilon].$$

Общее решение разностного уравнения зависит от k произвольных функций, заданных при $0 \leq \varepsilon \leq 1$:

$$x[n, \varepsilon] = \xi[n, \varepsilon, C_0[\varepsilon], C_1[\varepsilon], \dots, C_{k-1}[\varepsilon]].$$

1.7.5. Линейные разностные уравнения Однородные уравнения

Линейное разностное уравнение порядка k имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} a_0[n] \Delta^r x[n] + a_1[n] \Delta^{r-1} x[n] + \dots + a_{r-1}[n] \Delta x[n] + \\ + a_r[n] x[n] = f[n], \quad (r \geq k). \end{aligned}$$

Данное уравнение является *неоднородным разностным уравнением*, если правая часть $f[n]$ не равна тождественно нулю; в противном случае уравнение называют *однородным разностным уравнением*.

Рассмотрим общие теоремы, которые аналогичны для линейных дифференциальных уравнений.

Теорема 1. Если решетчатые функции $\xi_1[n], \dots, \xi_l[n]$ являются решением линейного разностного уравнения

$$x[n+k] + b_1[n]x[n+k-1] + \dots + b_k[n]x[n] = 0,$$

тогда функция

$$\xi[n] = \sum_{i=1}^l C_i \xi_i[n]$$

также является решением.

Решетчатые функции $x_1[n], x_2[n], \dots, x_k[n]$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие постоянные числа C_1, C_2, \dots, C_k , среди которых, по крайней мере, одно отличается от нуля, тогда для всех значений справедливо соотношение

$$C_1 x_1[n] + C_2 x_2[n] + \dots + C_k x_k[n] = 0.$$

Если данное уравнение может быть выполнено лишь при $C_1 = C_2 = \dots = C_k = 0$, то решетчатые функции называют линейно независимыми.

Теорема 2. Если при $n \geq n_0$ существует фундаментальная система решений $\xi_1[n], \xi_2[n], \dots, \xi_k[n]$ однородной системы решетчатых уравнений, то общее решение этого уравнения выражается следующей формулой:

$$\xi[n] = \sum_{i=1}^k C_i \xi_i[n], \quad (n \geq n_0).$$

1.7.6. Системы разностных уравнений

Системы разностных уравнений имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \Phi_i \left[n, x_1[n], \dots, \Delta^{k_1} x_1[n], x_2[n], \dots, \right. \\ & \left. \Delta^{k_2} x_2[n], \dots, x_i[n], \dots, \Delta^{k_l} x_l[n] \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.29)$$

переходя от разности к решетчатым функциям, получим

$$\begin{aligned} \Phi_i[n, x_1[n], \dots, x_1[kl+n], x_2[n], \dots, x_2[kl+n], \dots, \\ x_i[n], \dots, x_l[kl+n]] = 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Если система разностных уравнений (1.30) содержит в явном виде функции $x_i[n]$ и $x_i[n+k_i]$, то ее называют *системой порядка k по отношению к решетчатой функции $x_i[n]$* .

Сумма порядков системы относительно каждой функции $x_1[n]$, $x_2[n]$, ..., $x_l[n]$ называют *порядком системы разностных уравнений*.

Решение системы разностных уравнений (1.29) – это совокупность решетчатых функций $x_1[n]$, $x_2[n]$, ..., $x_l[n]$, обращающих все уравнения системы в тождество.

Систему разностных уравнений можно привести к нормальному виду, если ввести новые решетчатые функции

$$x_{i0}[n] = x_i[n], \quad x_{i1}[n] = x_i[n+1], \dots, \quad x_{ik-1}[n] = x_{ik}[n+k_i-1],$$

$$\begin{aligned} \text{тогда} \quad x_{i0}[n+1] = x_i[n], \quad x_{i1}[n+1] = x_{i2}[n], \quad x_{ik_i-2}[n+1] = x_{ik_i-1}[n], \\ x_{ik_i-1}[n+1] = F[n, x_{i0}[n], \dots, x_{ik_i-1}[n], \dots, x_{lk_i-1}[n]]. \end{aligned}$$

Получим систему разностных уравнений первого порядка, которую называют *нормальной системой разностных уравнений*.

Порядком нормальной системы разностных уравнений называют число k ее уравнений.

Будем рассматривать следующую систему линейных разностных уравнений:

$$x[n+1] = \sum_{j=1}^k a_{ij}[n]x_j + f_i[n], \quad i=1, \dots, k. \quad (1.31)$$

Система является *неоднородной*, если функция $f_i[n]$ тождественно не равна нулю; если же $f_i[n] = 0$, то система является *однородной*.

Систему (1.31) можно записать в векторной форме:

$$X[n+1] = A[n] \cdot X[n] + F[n],$$

где

$$A[n] = \begin{bmatrix} a_{11}[n] & a_{12}[n] & \dots & a_{1k}[n] \\ a_{21}[n] & a_{22}[n] & \dots & a_{2k}[n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}[n] & a_{k2}[n] & \dots & a_{kk}[n] \end{bmatrix}; \quad X[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \vdots \\ x_k[n] \end{bmatrix}; \quad F[n] = \begin{bmatrix} f_1[n] \\ f_2[n] \\ \vdots \\ f_k[n] \end{bmatrix}.$$

1.7.7. Однородные системы линейных разностных уравнений

Система однородных линейных разностных уравнений в векторно-матричной форме записи будет иметь следующий вид:

$$X[n+1] = A[n] \cdot X[n]. \quad (1.32)$$

Совокупность k линейно независимых решений системы однородных разностных уравнений (1.32) порядка k называют *фундаментальной системой решений*.

Общее решение системы (1.32) имеет вид

$$\xi[n] = \sum_{i=1}^k C_i \cdot \xi_i[n],$$

где $C_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

1.7.8. Неоднородные системы линейных разностных уравнений

Теорема. Общее решение линейной неоднородной системы разностных уравнений равно сумме ее частного решения $\psi[n]$ и общего решения соответствующей однородной системы уравнений (1.32).

$$x[n] = \psi[n] + \sum_{i=1}^k C_i \cdot \xi_i[n],$$

или

$$x[n] = X[n]C + \sum_{k=0}^{n-1} K[n, k]f[k], \quad (n \geq 1),$$

где $X[n]$ – матрица, столбцы которой образованы векторами фундаментальной матрицы системы (1.32); $K[n, k] = X[n]X^{-1}[k+1]$.

При нулевых начальных условиях $X[0] = 0$, $C = 0$, тогда частное решение системы примет вид

$$x[n] = \sum_{k=0}^{n-1} K[n, k]f[k].$$

1.8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.8.1. Основные сведения

Событие – результат опыта или наблюдений (например, отсутствие бракованных деталей в партии, выход из строя прибора и т. п.).

Если событие при эксперименте обязательно должно произойти, то оно называется *достоверным* (например, выбор годной детали из партии доброкачественных деталей).

Если известно, что в результате опыта событие не произойдет, то оно называется *невозможным*.

Случайное событие – событие, которое в результате опыта может произойти, а может и не произойти.

Элементарное событие – каждый исход одного опыта.

Всякое событие можно разложить на совокупность элементарных событий, и наоборот, всякое событие есть совокупность (множество) элементарных событий.

Совокупность (множество) всех элементарных событий Ω называют *пространством элементарных событий*, а элементарные события ω являются *точками* этого пространства.

В дальнейшем события будем обозначать прописными латинскими буквами ($A, B, C \dots$).

Несовместимые события – два события A и B при заданном комплексе условий S , если при данном комплексе условий появление одного из них исключает появление другого.

Пример

При бросании монеты пространство элементарных событий состоит из двух точек: ω_1 – выпадение орла (О), ω_2 – выпадение решки (Р); при трехкратном бросании монеты пространство событий состоит из восьми точек:

ω_1 – выпадение ООО; ω_2 – ОРО; ω_3 – ООР; ω_4 – РОО; ω_5 – РРО; ω_6 – РОР; ω_7 – ОРР; ω_8 – РРР.

Пространство элементарных событий может состоять из конечного числа точек, такое пространство называют *конечным*, или из бесконечного счетного – *счетное пространство*, или бесконечного несчетного числа точек – *непрерывное (несчетное) пространство*.

1.8.2. Алгебра событий

Введем следующие обозначения:

$\omega \in A$ – событие ω входит в событие A ;

$\omega \notin A$ – элементарное событие не принадлежит A .

Событие A влечет за собой событие B , если при наличии события A обязательно произойдет событие B

$$A \subset B.$$

Если событие A влечет за собой B , а B влечет за собой событие A , то такие события называются эквивалентными.

Объединением, или суммой, двух событий A и B называют такое событие C , которое состоит в осуществлении A или B , или A и B вместе:

$$C = A + B, \text{ или } C = A \cup B.$$

Если событие C эквивалентно объединению n -штук событий A_1, A_2, \dots, A_n , тогда

$$C = \sum_{i=1}^n A_i, \text{ или } C = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Пересечением или произведением двух событий A и B называют событие C , которое состоит в осуществлении и A и B :

$$C = AB \text{ или } C = A \cap B.$$

Если событие C эквивалентно пересечению n -штук событий A_1, A_2, \dots, A_n , тогда

$$C = \prod_{i=1}^n A_i, \text{ или } C = \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

Событие \bar{A} , которое заключается в том, что событие A не произойдет, называется *противоположным*.

Обозначим:

U – достоверное событие, V – невозможное событие.

Для противоположных событий A и \bar{A} справедливы

$$A\bar{A} = V; \quad A + \bar{A} = U.$$

Правила выполнения операций над событиями:

- 1) $A + A = A$;
- 2) $AA = A$;
- 3) $A + B = B + A$;
- 4) $AB = BA$;
- 5) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- 6) $A(CB) = (AB)C$;
- 7) $A(B + C) = AB + AC$;
- 8) $A + (BC) = (A + B)(A + C)$;
- 9) $A + U = U$;
- 10) $A + V = A$;
- 11) $AU = A$;
- 12) $AV = V$;
- 13) $\bar{\bar{A}} = A$;
- 14) $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$;
- 15) $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$;

- 16) $\bar{U} = V$;
- 17) $A + \bar{A} = U$;
- 18) $A\bar{A} = V$.

1.8.3. Вероятность события

Пусть произойдет n одинаковых опытов и в m случаях произошло событие A .

Тогда отношение m к числу n называют *статической вероятностью*, или *частотой события*, и обозначают

$$P^*(A) = \frac{m}{n} .$$

Предложим, что в результате n опытов событие A произошло k раз, а событие B – m раз, A и B совместны.

Тогда статическая вероятность называется *условной статической вероятностью* события A при наличии события B , событие (AB) произошло r раз.

$$P(A|B) = \frac{r}{m} .$$

Свойства статической вероятности:

- 1) $P^*(A) > 0$;

- 2) $P^*(U) = 1$;

- 3) события A и B несовместны, тогда $P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B)$.

Эти свойства распространяются и на условную статическую вероятность.

События являются *равновозможными*, если по условиям симметрии есть основание считать, что ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другое.

Вероятность события A – это отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов опыта к общему числу n всех равновозможных исходов опыта, вычисляется с помощью следующего выражения:

$$P(A) = \frac{m}{n} .$$

Условная вероятность события A – это вероятность события A , вычисленная при условии, что имело место событие B .

Обозначают: $P(A|B)$.

Условная вероятность события A при наличии события B вычисляется как отношение r опытов, благоприятствующих событиям A и B вместе, к числу m равновозможных исходов опыта,

$$P(A|B) = \frac{r}{m}.$$

Свойства вероятности события совпадают со свойствами статической вероятности.

1.8.4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Согласно *принципу умножения вероятностей* вероятность пересечения событий A и B равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого события при предположении, что первое событие произошло:

$$P(A|B) = P(A) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Пусть все пространство элементарных событий можно представить в виде объединения n попарно несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n (рис. 1.3).

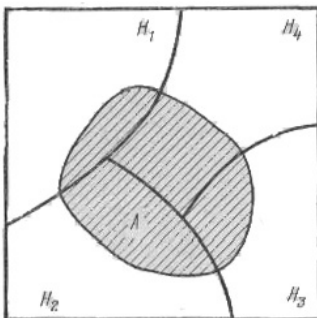


Рис. 1.3. Объединение n попарно несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n

Рассмотрим событие A , принадлежащее пространству (рис. 1.3) элементарных событий, тогда

$$A = AH_1 + AH_2 + AH_3 + \dots + AH_n,$$

так как события несовместны, то

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + P(AH_3) + \dots + P(AH_n) = \sum_{i=1}^n P(AH_i).$$

Согласно принципу умножения вероятностей получим

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i) - \text{формула полной вероятности.}$$

Пусть вероятности событий H_i известны до выполнения опыта – априорные вероятности гипотез H_i и условная вероятность события A .

Вычислим вероятность того, что осуществилось событие H_i , если в результате опыта событие A произошло:

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A | H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i)} - \text{формула Байеса.}$$

1.8.5. Зависимые и независимые события

Рассмотрим события A и B , причем $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$.

Событие A не зависит от события B , если

$$P(A | B) = P(A),$$

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Поэтому, если событие A не зависит от события B , то и событие B не зависит от A .

События A и B называют *независимыми*, если $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$. В противном случае события A и B называют *зависимыми*.

События A_1, A_2, \dots, A_n называются *независимыми в совокупности*, если для любой комбинации $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik}$ ($k \leq n$) выполнено соотношение

$$P\left(\prod_{r=1}^k A_{ir}\right) = \prod_{r=1}^k P(A_{ir}).$$

1.8.6. Случайные величины

Величина, которая в каждом отдельном случае в зависимости от результатов опыта может принять то или иное числовое значение, называется *случайной величиной*.

Например, случайной величиной является число попаданий в мишень при n выстрелах.

Конкретное значение, которое может принять случайная величина, называется *возможным ее значением*.

Случайную величину можно определить как функцию, заданную на пространстве элементарных событий Ω .

Обозначают X, Y, Z, \dots , а возможные их значения — x, y, z, \dots

Случайная величина зависит от элементарного события ω :

$$X = X(\omega).$$

Случайная величина, множество возможных значений которой конечно или счетно, называется *дискретной случайной величиной*.

Чтобы задать случайную величину, необходимо указать все возможные ее значения и поставить им в соответствие вероятности, с которых случайная величина принимает эти значения. Если случайная величина X дискретна, то ее можно задать таблицей (см. таблицу).

Распределение вероятностей случайной величины

Значение функции	x_1	x_2	...	x_n
Вероятность	P_1	P_2	...	P_n

Также распределение вероятностей изображают графически в виде графика.

1.8.7. Функция распределения вероятностей

Для случайной величины задать в виде таблицы распределение вероятностей невозможно, так как она принимает несчетное количество значений. Поэтому необходимо ввести новую характеристику.

Функция распределения вероятностей или функция распределения случайной величины X – это функция $F(X)$, равная вероятности события, состоящего в том, что эта случайная величина примет значение меньше, чем x , т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения вероятностей:

1) функция распределения принимает значения, заключенные между 0 и 1, т. е.

$$0 \leq F(x) \leq 1;$$

2) вероятность того, что случайная величина примет значение на полуинтервале $[a, b]$ ($a < b$), равна вероятности значений функции распределения на концах этого полуинтервала, т. е.

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a);$$

3) если случайная величина X принимает возможное значение x_k с вероятностью p_k , то ее функция распределения $F(x)$ имеет при $x = x_k$ разрыв первого рода. График функции $F(x)$ имеет при $x = x_k$ скачок, равный p_k ;

4) функция распределения является неубывающей функцией, т. е.

$$F(x_2) \geq F(x_1), \text{ если } x_2 > x_1;$$

5) функция распределения $F(x)$ стремится к нулю при неограниченном уменьшении x и стремится к единице при неограниченном возрастании, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Пусть X – дискретная величина; x_1, x_2, \dots, x_n – возможные значения; p_1, p_2, \dots, p_n – вероятность.

Если функция распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X есть непрерывная функция, то случайная величина является *непрерывной*.

Существуют случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый интервал, но функция распределения этих величин не везде является непрерывной, а в отдельных точках терпит разрывы, такая функция распределения называется *смешанной*.

Две случайные величины с одинаковыми функциями распределения называются *эквивалентными*.

1.8.8. Плотность распределения вероятностей

Производная от функции распределения случайной величины

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

если она существует, называется *плотностью распределения вероятностей* этой случайной функции.

Плотность распределения вероятностей есть предел отношения вероятности того, что случайная величина примет значения внутри интервала $(x, x + \Delta x)$ к длине этого интервала:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Свойства плотности распределения вероятностей $f(x)$:

1) $f(x) \geq 0$;

2) если X принимает значение из $[a, b]$, то вероятность события

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx, \quad \text{т. е. вероятность того, что случайная величина}$$

примет значения из $[a, b]$, равна площади криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$ под графиком плотности распределения вероятностей (рис. 1.4);

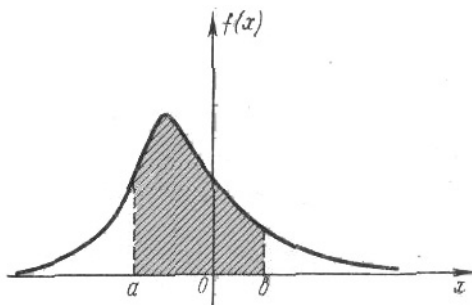


Рис. 1.4. График плотности распределения вероятностей

$$3) F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx;$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

1.8.9. Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание $M[X]$ – число, определяющееся интервалом

$$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

является одной из более важных числовых характеристик.

Для дискретной случайной величины X

$$M[x] = \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

математическое ожидание определяет координату центра группирования значений, принимаемых случайной величиной, а также является средним значением случайной величины.

Начальным моментом (или просто моментом) называют математическое ожидание случайной величины X r -й степени и обозначают α_r :

$$\alpha_r = M[X^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx .$$

Дисперсия – числовая характеристика, равная сумме произведений квадратов отклонений возможных значений случайной величины от математического ожидания на соответствующие этим возможным значениям вероятности,

$$D[X] = \sum_{k=1}^n (x_k - M[x])^2 p_k ,$$

характеризует величину разброса значений случайной величины около математического ожидания; чем больше разброс, тем больше дисперсия.

Центральный момент r -го порядка $X(\mu_r)$ – математическое ожидание r -й степени центрируемой случайной величины X^0 :

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^r f(x) dx = M[(X - M[X])^r] .$$

Среднее квадратичное отклонение – положительное значение квадратного корня из дисперсии, рассчитывается следующим образом:

$$\sigma_x = \sqrt{D[x]} = \sqrt{\mu_2} .$$

Среднее квадратичное значение случайной величины

$$\eta = \sqrt{\alpha_2} ,$$

где α_2 – начальный момент второго порядка.

Свойства математического ожидания случайной величины:

1) математическое ожидание неслучайной величины равно самой этой величине, т. е. $M[C] = C$;

2) неслучайный множитель C можно выносить за знак математического ожидания $M[C \cdot X] = C \cdot M[X]$;

$$3) M[X_1 + X_2] = M[X_1] + M[X_2];$$

$$4) M[X_1 \cdot X_2] = M[X_1] \cdot M[X_2].$$

Свойства дисперсии случайной величины:

$$1) C = \text{const}, D[C] = 0;$$

$$2) D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X];$$

$$3) D[X_1 + X_2] = D[X_1] + D[X_2].$$

Часть 2

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ЗНАКОМСТВО СО СРЕДОЙ И ЭЛЕМЕНТАМИ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА MathCAD

1. Цель работы

Изучить встроенные алгебраические операторы и функции программы MathCAD. Приобрести навыки построения графиков различных математических функций.

2. Общие сведения

MathCAD – это программный пакет, позволяющий автоматизировать процессы проектирования, синтеза и анализа любых инженерных технических задач.

Среди возможностей MathCAD можно выделить следующие:

- работа с переменными и константами;
- построение двумерных и трехмерных графиков функций в различных системах координат;
- выполнение преобразований и вычислений в символьном виде;
- задание и реализация любых математических действий над матрицами и векторами (массивами);
- решение и исследование свойств различных систем алгебраических уравнений;
- нахождение корней многочленов и функций;
- решение дифференциальных уравнений и многое другое.

Перед началом работы в MathCAD необходимо знать следующие основные важные правила:

- 1) различные данные задавать и вводить необходимо только на английском языке, за исключением примечаний;

2) всегда нужно учитывать принцип иерархии в написании файла вычисления – MathCAD прочитывает весь файл сверху вниз и слева направо;

3) присвоение начального значения переменной осуществляется с помощью оператора $:=$ (комбинация клавиш **Shift** **=**);

4) оператор $=$ необходимо использовать для получения и отображения результатов вычислений;

5) жирный знак равенства $=$ (комбинация клавиш **Ctrl** **=**), который используется как оператор приближенного равенства при решении систем алгебраических и дифференциальных уравнений и т. д.;

6) диапазон значений переменной задается в виде $a..b$, знак двоеточия ставится клавишей «ж»; если в диапазоне не указывается величина шага, то по умолчанию он будет равен единице; величину шага можно задавать через запятую после начального значения диапазона – $a,(step)..b$.

После запуска MathCAD сверху слева расположено главное меню, где пункт **View** (вид) содержит ряд пунктов, первый из которых – **Toolbars** (панели инструментов). Если раскрыть данное подменю, то можно рассмотреть все его подпункты, например **Math** (математика), – вызывается математическая панель.

Данное подменю содержит кнопки (рис. 2.1), дублирующие следующие пункты меню: **Calculator** (калькулятор), **Graph** (построение графиков), **Matrix** (матрицы), **Calculus** (вычисления), **Boolean** (булевы функции), **Greek** (греческий), **Programming** (программирование), **Symbolic** (символьные вычисления).

Пункт **Graph** (построение графиков) вызывает панель графики, пункт **Matrix** (матрицы) обеспечивает операции над матрицами, с помощью пункта **Calculus** (вычисления) производятся дифференцирование, интегрирование, суммирование и произведение, пункт **Boolean** (булевы функции) вводит булевы функции, пункт **Greek** (греческий) вводит греческий алфавит, пункт **Programming** (программирование) вызывает панель программирования, пункт **Symbolic** (символьные вычисления) делает возможным решение некоторых задач в символьном (аналитическом) виде.

В приложении 2 приведены часто используемые встроенные функции и операторы достоинств MathCAD, знание которых позволит решить поставленные задачи следующих лабораторных работ в рамках изучения дисциплины «Специальные главы высшей математики».

Одно из достоинств MathCAD – это удобное и простое построение различных графиков.

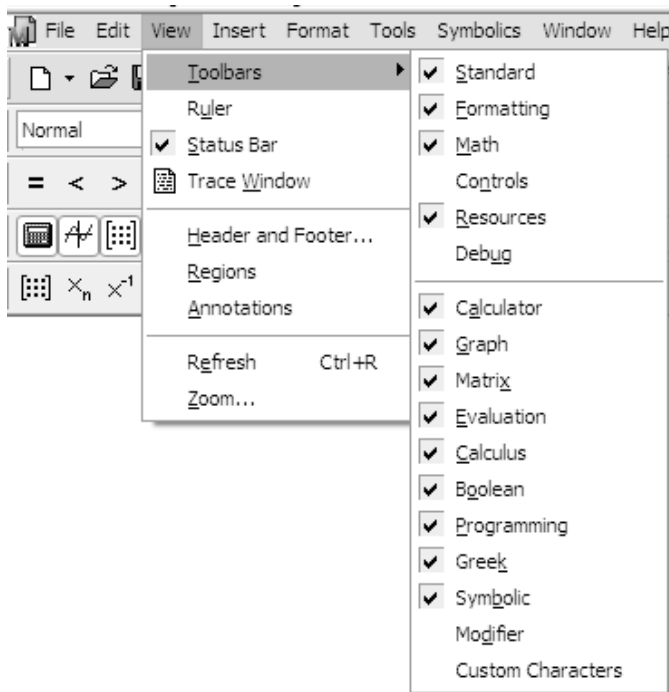


Рис. 2.1. Главное меню программного пакета MathCAD

На панели построения графиков расположены девять кнопок с изображением различных типов графиков, представленных на рис. 2.2, название графиков каждой кнопки высвечивается при подводе к ней курсора и ожидании в течение нескольких секунд:

- X-Y Plot – графики в декартовых координатах,
- Polar Plot – графики в полярных координатах,
- 3D Bar Chart – столбиковые диаграммы,
- Surface Plot – трехмерный график,
- Cunter Plot – карта линий уровня (изолиний),
- Vector Field Plot – векторное поле,
- 3D Scatter Plot – трехмерный точечный график.

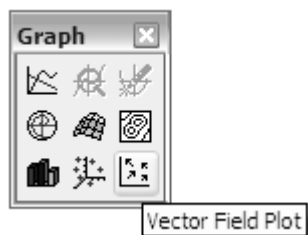


Рис. 2.2. Панель построения графиков

Для выполнения лабораторной работы понадобятся X-Y Plot – графики в декартовых координатах.

После построения графика в декартовой системе координат можно изменять его параметры графического отображения, например, если дважды щелкнуть левой кнопкой мыши по графику, то откроется вкладка его параметров (рис. 2.3).

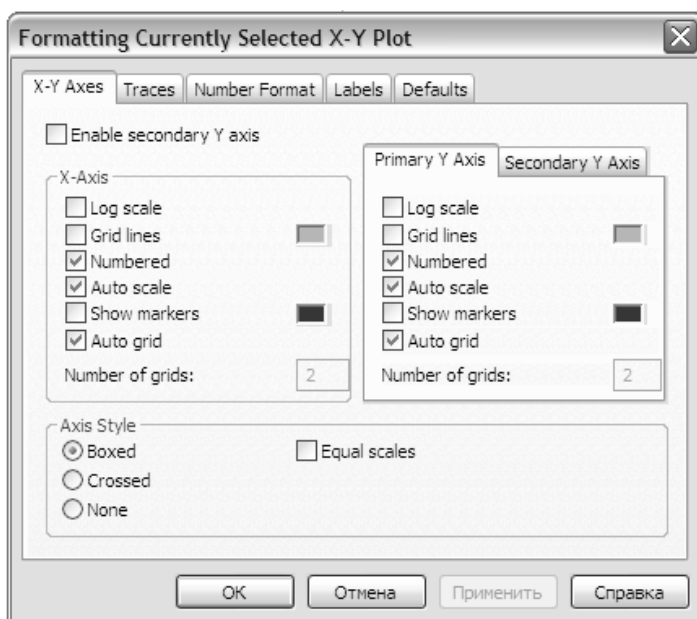


Рис. 2.3. Вкладка подменю построения графика

На первой странице вкладки имеются строки *X-Axes* (ось *X*) и *Primary Y-Axes* (первая ось *Y*), а под ними ряд надписей, левая часть которых относится к оси *X*, а правая – к оси *Y*:

Log Scale (логарифмическая шкала) вводит логарифмический масштаб для соответствующей оси;

Grid lines (сетка) – ее нажатие отображает сетку на графике;

Numbered (нумерация) – выводит нумерацию сетки;

Auto scale (выставление автоматического масштаба);

Show markers (отображение маркеров);

Auto grid (автоматическое разбиение сетки).

Вторая страница параметров графика *Trace* позволит изменить параметры отображения самого графика, т. е. можно изменять вид (сплошная линия, пунктир, точки), цвет, толщину и т. д.

3. Программа лабораторной работы

3.1. Используя панели **Calculator** (калькулятор) и **Calculus** (вычисления) подпункты подменю **Toolbars**, необходимо выполнить следующие вычисления:

а) вывести числовое значение следующих математических операторов: e , e^2 и π , π^2 ;

б) вычислить $4!$ и $\ln 50$;

в) решить $\int_0^1 \frac{(4x-3)}{(x^2+3x+4)} dx$ и $\int_0^5 x^2 dx$;

г) сначала необходимо задать переменную $x := 4$, а после вычислить следующее выражение: $\sin(x)^2 + \cos(x)$;

д) найти числовое значение $\sum_{n=0}^{20} n$ и $\sum_{n=0}^{20} \sum_{m=0}^{10} n^m$;

е) найти числовое значение $\prod_{k=1}^{20} (k-1)$;

ж) задать следующие переменные: $j := 0 \dots 10$ и $d_j := \sin(0.1 \cdot j \cdot \pi)$,

произвести следующие вычисления $\sum_j d_j$, $\sum_{n=0}^5 d_j^n$ и $\prod_j j^2$;

з) задать любое комплексное число q и вывести отдельно его вещественную и мнимую части ($\text{Re}(q)$ и $\text{Im}(q)$).

3.2. Используя панель **Graph** (построение графиков), постройте графики следующих математических функций:

а) задайте переменную $s := 0.4 \dots 5$ и функцию $f(s) := \frac{s+1}{s^2+1}$, выведите числовые значения заданных переменных и функции;

б) $t(u) := u^2$, диапазон значений переменной u задайте самостоятельно, выведите числовые значения заданных переменных и функций, а также на полученном графике установите маркеры и измените его параметры отображения;

в) в одной системе координат постройте все графики перечисленных ниже функций:

$$y(w) := 10 \cdot w, \quad p(w) := 100 \frac{\sin(w)}{w}, \quad z(w) := w^2,$$

где $w := -10, -9.9 \dots 10$ – это переменная, заданная с шагом 0,1.

3.3. Сделайте выводы по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие математические операции и действия можно выполнять в MathCAD?

2. Какие необходимо знать основные правила при работе в среде программного пакета MathCAD?

3. Какие панели инструментов можно выводить на рабочий стол, используя подменю Toolbars?

4. Каким образом можно задавать переменные и функции?

5. Какой порядок действий необходимо выполнить, чтобы построить график?

6. Каким образом можно изменять параметры отображения графика?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ В MathCAD

1. Цель работы

Повторить основные свойства матриц и алгебраических действий над ними.

Посредством среды MathCAD выполнить различные математические операции и преобразования над заданными матрицами.

2. Общие сведения

Прямоугольная матрица A размерностью $m \times n$ ($\dim(A) = (m \times n)$) – это таблица, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}],$$

где $i=1\dots m$, $j=1\dots n$, индекс i – номер строки, индекс j – номер столбца.

Если $m = n$, то матрица называется *квадратной*.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Если две матрицы A и B имеют одинаковый размер (размерность), то их называют *равными*:

$$\begin{aligned} A &= [a_{ij}] \\ \Rightarrow A &= B, \quad [a_{ij}] = [b_{ij}]. \\ B &= [b_{ij}] \end{aligned}$$

Транспонированной матрицей (A^T) называют для A ($\dim(A) = (m \times n)$), матрица размером $(n \times m)$, получаемая из матрицы A путем заменой ее строк столбцами:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ji}].$$

Алгебраические операции над матрицами

1. Нахождение суммы матриц

$$C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

2. Произведение матрицы на число ($k = \text{const}$)

$$C = kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

3. Произведение матриц $\dim(A) = (m \times n)$, $\dim(B) = (k \times p)$

Произведение определено, если $n = k$, т. е. количество столбцов множимого равно числу строк множителя:

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kp} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{k1} & \sum_{q=1}^{n=k} a_{1q}b_{q2} & \dots & \sum_{q=1}^{n=k} a_{1q}b_{qp} \\ \sum_{q=1}^{n=k} a_{2q}b_{q1} & \sum_{q=1}^{n=k} a_{2q}b_{q2} & \dots & \sum_{q=1}^{n=k} a_{2q}b_{qp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{q=1}^{n=k} a_{mq}b_{q1} & \sum_{q=1}^{n=k} a_{mq}b_{q2} & \dots & \sum_{q=1}^{n=k} a_{mq}b_{qp} \end{bmatrix}.$$

Размерность произведения матриц определяется по следующему правилу:

$$(m \times n)(k \times p) = (m \times p), \text{ если } n = k.$$

Свойства матриц:

- 1) свойство коммутативности для сложения: $A + B = B + A$;
- 2) свойство ассоциативности для сложения: $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- 3) существует единственная матрица X , чтобы $A + X = A$ ($X = 0$);
- 4) существует единственная матрица Y , чтобы $A + Y = 0$;
- 5) $a, b = \text{const}$, $a(b \cdot A) = (a \cdot b)A = b(a \cdot A)$;
- 6) $\dim(A) = \dim(B)$, $a = \text{const}$, тогда $a(B + A) = aB + aA$;

$$7) (a + b)A = aA + bA ;$$

$$8) \text{ свойство ассоциативности для произведения: } A(B \cdot C) = (A \cdot B)C ;$$

$$9) AE = EA ,$$

где $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ – единичная матрица, по главной диагонали стоят 1;

$$10) \text{ свойство дистрибутивности для произведения:}$$

$$(A \pm B)C = AC \pm BC ,$$

$$C(A \pm B) = CA \pm CB ;$$

$$11) (A + B)^T = A^T + B^T ,$$

$$(A \cdot B)^T = B^T A^T , (\lambda \cdot A)^T = \lambda A^T , \text{ где } \lambda = \text{const} ,$$

$$12) a(A \cdot B) = (a \cdot A)B = A(a \cdot B) .$$

$$\text{Пусть } \dim (X) = (n \times 1)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ – вектор-столбец,}$$

$$\text{тогда } X^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \text{ – вектор-строка.}$$

3. Программа лабораторной работы

3.1. Используя панель **Matrix** (матрицы), задайте произвольно две квадратные матрица A и B размерностью $\dim (A) = \dim (B) = (2 \times 2)$ таким образом, чтобы эти матрицы не были равными.

3.2. Найдите числовое значение определителей заданных матриц и убедитесь, что они не равны нулю, т. е. что матрицы являются невырожденными.

3.3. С помощью встроенных функций MathCAD найдите обратную (A^{-1}) и транспонированную (A^T) матрицы.

3.4. Проверьте свойства коммутативности и ассоциативности для сложения (произведения) матриц, матрицу C необходимо задать невырожденной.

3.5. Задайте матрицы D и H ($\dim(D) = \dim(H) = (5 \times 5)$) и выполните пункты 3.1–3.4 с данными матрицами.

3.6. Произвольно задайте вектор-столбец X и найдите вектор-строку X^T .

Вопросы для самоконтроля

1. Какую матрицу называют квадратной?
2. Какие действия подразумеваются под транспонированием матрицы?
3. Из каких этапов состоит нахождение обратной матрицы?
4. В чем заключаются свойства коммутативности и ассоциативности для сложения (произведения) матриц?
5. Чем отличается вектор-столбец от вектора-строки?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Цель работы

Изучить различные способы численного решения алгебраических линейных уравнений в среде MathCAD.

Используя встроенные функции MathCAD, найти решения алгебраических линейных уравнений.

2. Общие сведения

Среда программного пакета MathCAD позволяет находить численные значения корней, в том числе и систем линейных алгебраических уравнений, используя различные способы и встроенные функции. Далее будут рассмотрены некоторые из них.

Самый простой способ найти корни линейного алгебраического уравнения (полинома) вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

– это использовать функцию *polyroots*, которая не требует задания начального приближения. Данная функция может быть применена для нахождения корней многочленов с комплексными коэффициентами. Кроме того, функция *polyroots* возвращает сразу все корни как вещественные, так и комплексные.

Чтобы воспользоваться функцией *polyroots*, в первую очередь необходимо задать линейное алгебраическое уравнение путем формирования вектор-столбца, в который вводятся все коэффициенты полинома, начиная с a_0 , в том числе равные нулю.

Пример нахождения корней линейного уравнения с помощью оператора *polyroots* в MathCAD приведен в приложении 3 (ПЗ.1).

Линейные уравнения можно решать также с помощью встроенного оператора *solve* подменю **Symbolic**. Данный оператор позволяет решить линейное уравнение без задания первого приближения решения, так как это приведет к ошибке в программе. Пример решения уравнения с применением встроенного оператора *solve* приведен и рассмотрен в приложении 3 (ПЗ.2).

Необходимо учесть, что встроенный оператор *solve* можно использовать для нахождения решения линейного уравнения в символьном виде.

Для решения одного линейного уравнения с одним неизвестным используют встроенную функцию *root*, перед использованием которой необходимо задать начальные приближения переменной уравнения. MathCAD будет использовать заданные числовые значения переменной для нахождения решения линейного уравнения.

Нахождение решения уравнения посредством встроенной функции *root* состоит из нескольких пунктов:

– сначала необходимо задать начальное числовое приближение решения уравнения, от которого зависят значения корней, вычисляемые MathCAD;

- далее задается уравнение, например в качестве функции, зависящей от искомой переменной;
- определяется переменная как корень заданного уравнения с введением встроенной функции *root*;
- последним этапом является определение истинного числового значения решения линейного уравнения.

MathCAD позволяет определить с помощью данной функции как вещественные, так и комплексные корни линейных уравнений.

Пример нахождения корней линейного уравнения с помощью рассматриваемой функции в MathCAD приведен в приложении 3 (ПЗ.3).

3. Программа лабораторной работы

3.1. Задайте произвольно линейное уравнение третьего порядка и определите значение его решения с помощью встроенных функций MathCAD *polyroots*, *solve*, *root*.

3.2. Постройте график функции $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$ и определите начальное приближение его решения, также подтвердите нахождением его точного решения любой изученной встроенной функции MathCAD.

3.3. Найдите решение всеми изученными встроенными функциями MathCAD следующего уравнения: $x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0$.

3.4. Сделайте вывод по результатам проделанной работы.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие встроенные операторы и функции MathCAD позволяют найти решение линейного уравнения без задания его начального приближения?

2. Каким образом необходимо задать уравнение в MathCAD, чтобы найти его решение с помощью встроенной функции *polyroots*?

3. Какими способами можно определить начальное приближенное значение решения линейного уравнения в MathCAD?

4. Из каких этапов состоит нахождение решения линейного уравнения функцией *root*?

5. Какими изученными функциями MathCAD возможно найти комплексные корни линейных уравнений?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Цель работы

Исследовать и решить систему алгебраических линейных уравнений, используя метод Гаусса и Крамера, а также подтвердить полученные результаты с помощью метода обратной матрицы.

Изучить специальные встроенные операторы и функции MathCAD для решения систем линейных уравнений.

2. Общие сведения

Метод Гаусса является универсальным для исследования и решения систем линейных уравнений.

Пусть задана следующая система с m -штук линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (2.1)$$

Требуется чтобы $a_{11} \neq 0$, в противном случае это возможно устранить перестановкой уравнений.

Последовательно вычтем первое уравнение из второго, третьего и всех последующих уравнений системы, умножая на $\frac{a_{21}}{a_{11}}, \frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, \frac{a_{m1}}{a_{11}}$, тем самым исключая x_1 из всех уравнений начиная со второго, и получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \vdots \\ a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Если появятся нулевые равенства ($0 = 0$), то их исключают из системы уравнений.

Дальнейшие действия повторяют со вторым уравнением, домножая на $\frac{a'_{32}}{a'_{22}}, \frac{a'_{42}}{a'_{22}}, \dots, \frac{a'_{m2}}{a'_{22}}$, и вычитают из третьего, четвертого уравнений

и т. д.

Действия над уравнениями системы продолжают аналогично.

Процесс указанных эквивалентных преобразований над системой уравнений называют *процессом Гаусса*.

Возможно получить следующие результаты.

1. При некотором преобразовании получают уравнение, левая часть которого равна нулю, а правая часть не равна нулю – это говорит о несовместимости системы.

2. Система (1) сводится к треугольному виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \vdots \\ a^{(n-1)}_{nn}x_n = b^{(n-1)}_n, \end{cases}$$

где $a_{11}, a'_{22}, \dots, a^{(n-1)}_{nn} \neq 0$.

3. Система (1) преобразуется к трапецеидальному виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \vdots \\ a'_{ss}x_s + \dots + a^{(s-1)}_{sn}x_n = b^{(s-1)}_s. \end{cases}$$

Теорема. Если в процессе Гаусса появится уравнение $0 = b$ ($b \neq 0$), то исходная система несовместна; если она преобразуется к треугольному виду – система определенная; если приводится к трапецеидальному виду – система неопределенная.

Пример решения системы линейных уравнений методом Гаусса рассмотрен в приложении 3 (ПЗ.4).

Метод или правило Крамера позволяет решить систему линейных уравнений, у которой число уравнений равно числу неизвест-

ных с ненулевым главным определителем матрицы коэффициентов системы.

Пусть дана система n -шук линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (2.2)$$

Определитель системы (2.2) будет иметь следующий вид:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \text{главный определитель системы.}$$

Теорема. Если главный определитель n линейных уравнений не равен нулю, то система имеет единственное решение, если же он равен нулю, то система является неопределенной либо несовместной.

Рассмотрим вспомогательный определитель (D_k) :

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \dots + b_n A_{nk},$$

тогда $D_k x_k = D$ ($k=1, 2, \dots, n$),

$$x_k = \frac{D_k}{D} - \text{формула Крамера.}$$

Правило Крамера применимо только для решения квадратных определенных систем уравнений.

Пример решения системы уравнений в MathCAD методом Крамера приведен в приложении 3 (ПЗ.5).

Метод обратной матрицы также позволит найти решение системы линейных уравнений. Чтобы воспользоваться рассматриваемым мето-

дом, необходимо в первую очередь представить систему линейных уравнений в векторно-матричной форме записи следующего вида:

$$AX = B,$$

где A – квадратная матрица коэффициентов, стоящих перед неизвестными переменными x_n (n – количество уравнений и неизвестных искомым переменных), размерность которой зависит от количества уравнений и неизвестных переменных; X – вектор-столбец неизвестных переменных; B – вектор-столбец величин, расположенных в правой части уравнений рассматриваемой системы.

После нужно найти вид обратной матрицы A^{-1} , методика рассмотрена в разделе 1.1.2 настоящего пособия. Используя следующее выражение, можно найти искомые значения переменных x_n :

$$X = A^{-1}B.$$

Так же, как и правило Крамера, метод обратной матрицы применим только для решения квадратных определенных систем уравнений.

Решение системы линейных уравнений четвертого порядка в программе MathCAD методом обратной матрицы рассмотрено в приложении 3 (ПЗ.6).

Реализовать нахождение решения системы линейных уравнений можно также с использованием встроенных функций и операторов MathCAD без методов классической высшей математики. Далее рассмотрим некоторые из них.

MathCAD позволяет найти решение системы линейных уравнений максимально 50 порядка.

Для численного решения системы линейных уравнений в MathCAD используют сразу пару операторов *Given* и *Find*, также они позволяют найти решение и одного линейного уравнения.

Оператор *Given* программно указывает MathCAD, что после него расположена система уравнений. Данный оператор можно прописывать как прописными, так и строчными буквами любым шрифтом, но только на английском языке.

Оператор *Find* позволяет вычислить решение. Причем, если этот оператор представлен как функция одного аргумента, то он вернет одно решение, а если задано более одной искомой переменной, то он вычислит сразу вектор-столбец значений решения в зависимости от количества неизвестных, т. е. количество элементов вектор-

столбца решений напрямую зависит от количества заданных аргументов.

Чтобы найти решение заданной системы линейных уравнений с помощью операторов *Given* и *Find*, нужно выполнить несколько пунктов:

1) необходимо произвольно задать начальное приближение решения системы уравнений;

2) прописать оператор *Given*;

3) ввести систему уравнений после оператора *Given*, используя жирный знак равенства (комбинация клавиш **Ctrl** и **=**);

4) задать оператора *Find* с произвольным обозначением как функцию, зависящую от аргументов системы линейных уравнений, при том что количество заданных аргументов должно быть равно количеству неизвестных;

5) используя заданное обозначение функции, получить решение системы.

В приложении 3 (ПЗ.7 и ПЗ.8) приведены примеры нахождения решений для одного уравнения с одним неизвестным и для системы линейных уравнений с помощью рассмотренных выше операторов *Given* и *Find*.

Для нахождения численного решения системы линейных уравнений также можно использовать встроенную функцию *lsolve*, которую сначала необходимо представить в векторно-матричной форме без задания начального приближения решения. Пример нахождения решения системы уравнений приведен в ПЗ.9.

Необходимо учесть, что встроенную функцию *lsolve* можно использовать для нахождения решения системы линейных уравнений в символьном виде.

3. Программа лабораторной работы

3.1. Задайте в MathCAD следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 6y - 9z + 2v - 7w = 90, \\ 3x - 4 + 5z - 3v + 4w = 12, \\ 9x + y + 3z - 2v + 9w = 51, \\ 7x + 2y - 2z + v + 10w = 32, \\ 6x + 5y - 4z + 3v - 2w = 87. \end{cases}$$

3.2. Сформируйте матрицы A и B на основе заданной системы линейных уравнений, таким образом, чтобы привести заданную систему к следующему векторно-матричному виду:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{bmatrix} = B.$$

3.3. Найдите решение заданной системы линейных уравнений методами Гаусса и Крамера, а также с помощью метода обратной матрицы.

3.4. Подтвердите правильность нахождения решения заданной системы уравнений встроенными операторами *Given*, *Find* и функцией *lsolve* в MathCAD.

3.5. Сделайте вывод по результатам проделанной работы.

Вопросы для самоконтроля

1. Почему метод Гаусса является универсальным для решения систем уравнений?

2. Какие преобразования над системой линейных уравнений называют процессом Гаусса?

3. При каких условиях можно найти решение системы линейных уравнений методом Крамера?

4. Перечислите основные этапы методики нахождения решения системы линейных уравнений методом Крамера.

5. Какие преобразования и действия необходимо выполнить, чтобы найти решение системы уравнений методом обратной матрицы?

6. Какие имеются ограничения по применению метода обратной матрицы для нахождения решения системы линейных уравнений?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

1. Цель работы

Изучить специальные встроенные операторы и функции MathCAD для нахождения собственных значений и векторов заданной матрицы, а также найти диагональную матрицу.

2. Общие сведения

Пусть V_n – n -мерное линейное пространство.

Обозначим \mathfrak{R} – линейное преобразование (оператор).

Оператором, или преобразованием пространства V_n , называют правило, при котором каждому произвольному вектору $x \in V_n$ ставится в соответствие единственный вектор y , тогда x является *прообразом*, y – *образом* вектора x .

Собственный вектор – это ненулевой вектор $x \in V_n$, если $\mathfrak{R}x = \lambda x$ ($\lambda = \text{const}$).

Собственное значение – это число λ вектора x для оператора \mathfrak{R} ; собственное значение определяется однозначно.

Характеристическая матрица – это матрица вида

$$(A - \lambda E) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Характеристический многочлен (уравнение) – это определитель характеристической матрицы $(A - \lambda E)$.

Корни характеристического уравнения называют *характеристическими числами*.

Характеристическое уравнение матрицы, задающей линейное преобразование линейного пространства V_n , не зависит от выбора базиса.

Приведение матрицы к диагональному виду

Диагональная матрица – это квадратная матрица, у которой по главной диагонали расположены элементы $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, а все остальные элементы – нули.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Для того чтобы линейное преобразование пространства задавалось диагональной матрицей при некотором базисе, необходимо и достаточно, чтобы базис состоял из собственных векторов для линейного преобразования, причем диагональные элементы – это собственные значения, принадлежащие векторам базиса.

Нахождение собственных значений и векторов

Чтобы найти собственные значения или характеристические числа для заданной матрицы, необходимо:

- 1) убедиться что заданная матрица A является невырожденной, т. е. чтобы $\det(A) \neq 0$;
- 2) составить характеристическую матрицу $(A - \lambda E)$ и определить вид характеристического уравнения, т. е. $\det(A - \lambda E) = 0$;
- 3) найти корни характеристического уравнения, которые будут являться собственными значениями заданной матрицы A ;
- 4) используя уравнение

$$(A - \lambda_i E)X_i = 0,$$

где $i = 1 \dots n$ – порядок характеристического уравнения, а следовательно, количество собственных значений и векторов, найти собственные векторы X_i ;

- 5) составить матрицу из собственных векторов следующего вида:

$$X = [X_1 : X_2 : \dots : X_n];$$

б) определить вид диагональной матрицы D , по главной диагонали которой должны стоять собственные значения заданной матрицы A , а все остальные элементы матрицы D должны быть равны 0, можно с помощью уравнения

$$D = X^{-1}AX.$$

Чтобы реализовать нахождение собственных значений и векторов заданной матрицы в MathCAD, рассмотрим некоторые встроенные функции:

- $\text{eigenvals}(A)$ – встроенная функция, позволяющая найти собственные значения заданной невырожденной матрицы A ; найденное решение будет представлять собой вектор-столбец, состоящий из собственных значений матрицы A ;

- $\text{eigenvec}(A, \lambda_i)$ – позволяет найти собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_i заданной матрицы A ;

- $\text{eigenvecs}(A)$ – решением будет являться матрица, состоящая из собственных векторов, соответствующих собственным значениям заданной квадратной невырожденной матрицы A ; i – столбец матрицы-решения будет собственным вектором, соответствующим собственному значению λ_i .

Пример нахождения собственных значений и векторов, а также диагональной матрицы рассмотрен в приложении ПЗ.10.

3. Программа лабораторной работы

3.1. Проверьте, является ли матрица $R = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \\ 9 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ невырожденной.

3.2. Определите вид характеристического уравнения для заданной матрицы A , используя встроенные операторы MathCAD, а также найдите собственные значения матрицы.

3.3. Используя встроенные функции MathCAD, найдите все собственные векторы заданной матрицы.

3.4. Составьте матрицу из собственных векторов и определите вид диагональной матрицы D .

3.5. Повторите пп. 3.1–3.4 для матрицы A , вид которой был задан в рамках выполнения РГР.

3.6. Сделайте выводы по результатам проделанной работы.

Вопросы для самоконтроля

1. Для каких матриц невозможно найти собственные значения и векторы?

2. Каким образом можно определить вид характеристической матрицы и уравнения?

3. Что такое собственные значения и как их можно найти?

4. С помощью каких встроенных функций MathCAD можно найти собственные значения векторов для заданной матрицы?

5. Каким образом можно найти диагональную матрицу?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Цель работы

Изучить методику ввода дифференциальных уравнений в MathCAD, а также способы их решения.

Построение переходных процессов сигналов токов и напряжений дифференциальных уравнений, составленных на основе электрических цепей.

2. Общие сведения

Дифференциальное уравнение – это уравнение, которое, кроме неизвестных функций одной или нескольких переменных, содержит также и их производные.

Дифференциальные уравнения называют *обыкновенными*, если неизвестные функции являются функциями одной переменной, в противном случае дифференциальное уравнение называют *уравнением в частных производных*.

В дальнейшем будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Независимой переменной будем называть время t .

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} x(t) \pm \dots \pm a_1 \frac{d}{dt} x(t) \pm a_0 x(t) = 0$$

или

$$F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (2.3)$$

– дифференциальные уравнения n -порядка, где \dot{x} – обозначение производной x первого порядка; $x^{(n)}$ – обозначение производной x n -го порядка.

Решение системы (2.3) – это функция $x = \varphi(t)$, определенная на некотором интервале $\Delta \in t$, которая, будучи подставлена в уравнение (2.3), обращает это уравнение в тождество на всем интервале.

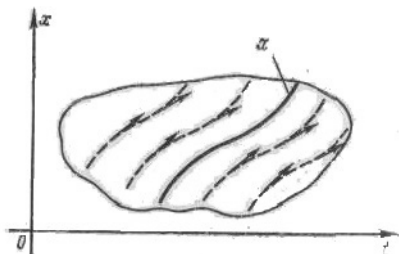


Рис. 2.4. Графическая интерпретация нахождения решения дифференциального уравнения

Графическая интерпретация решения уравнения:

- требуется найти все кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением поля;
- функция $f(t, x)$ задает некоторое направление в области G ;
- решению $x = \varphi(t)$ на плоскости будет соответствовать непрерывная кривая – *интегральная кривая*.

Функция $x = \varphi(t, C)$ – это *общее решение дифференциального уравнения*, где C – коэффициент, определяющий начальные условия, т. е. начальные значения для решения.

Чтобы приступить к решению дифференциального уравнения в MathCAD, необходимо правильно его ввести, используя либо специ-

альные операторы дифференцирования $\frac{d^n}{dt^n}$ и $\frac{d}{dt}$, либо в виде x' , где

символ производной «'» вводится **комбинацией Ctrl и F7**.

Также перед решением дифференциального уравнения в MathCAD необходимо избавиться от производных высших порядков (выше второго порядка) путем введения замены и выполнения некоторых преобразований. В результате исходное дифференциальное уравнение высшего порядка можно представить в качестве системы дифференциальных уравнений первого порядка в форме Коши, при этом количество дифференциальных уравнений полученной системы будет соответствовать порядку высшей производной исходного уравнения.

В качестве примера рассмотрим следующее уравнение:

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} x(t) \pm a_1 \frac{d}{dt} x(t) \pm a_0 x(t) = 0, \quad (2.4)$$

введем следующие обозначения:

$$x(t) = x_0, \quad \frac{d}{dt} x(t) = x_1.$$

Нужно учитывать также, что производную высшего порядка можно представить как ряд нескольких производных первого порядка

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} x(t) \right).$$

Тогда исходное дифференциальное уравнение (2.4) с учетом введенных обозначений может быть представлено как нормальная система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = x_1, \\ \frac{d}{dt} x_1 = \mp a_0 x_0 \mp a_1 x_1. \end{cases}$$

Для решения дифференциальных уравнений в программной среде MathCAD используют ряд встроенных функций, например *rkfixed*.

Функция *rkfixed* использует для решения дифференциальных уравнений универсальный метод Рунге–Кутты, в рассматриваемой функции задается несколько аргументов

$$rkfixed(X, t_1, t_2, D),$$

где X – вектор-столбец начальных условий размерностью n ; n – порядок дифференциального уравнения; t_1, t_2 – граничные точки, на интервале которых ищется решение дифференциального уравнения; $D(t, x)$ – вектор-столбец размерностью n , в котором задаются первые производные функций.

Пример решения дифференциального уравнения приведен в приложении ПЗ.13 и ПЗ.14.

Для решения относительно старшей производной линейных дифференциальных уравнений используется также встроенная функция *odesolve*.

В данной функции также можно задавать несколько аргументов

$$odesolve(t, b, step),$$

где t – переменная интегрирования; b – конечный интервал интегрирования; $step$ – шаг интегрирования, задавать не обязательно.

Чтобы найти решение дифференциального уравнения представленной выше встроенной функцией *odesolve*, необходимо выполнить несколько этапов:

- ввести оператор *Given*;
- задать дифференциальное уравнение и начальные условия решения;
- прописать функцией *odesolve* и ввести все аргументы;
- вывести решение дифференциального уравнения, которое можно представить в табличном виде или в качестве графика.

Пример решения дифференциальных уравнений приведен в приложениях ПЗ.11 и ПЗ.12.

3. Программа лабораторной работы

3.1. Постройте графики решений следующих дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) - \frac{d}{dt}x(t)\frac{1}{(x-1)} = x(x-1),$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + x(t) = \cos(3x),$$

используя встроенные функции *odesolve* и *rkfixed*.

3.2. Преобразуйте приведенные дифференциальные уравнения третьего порядка к нормальной системе дифференциальных уравнений и постройте графики решения данных уравнений, используя встроенные функции *odesolve* и *rkfixed*:

$$\frac{d^3}{dt^3}y(x) = x \sin(x),$$

$$2x \frac{d^3}{dt^3}y(x) + \frac{d^2}{dt^2}y(x) = \frac{d^3}{dt^3}y(x) - 9.$$

3.3. Составьте дифференциальные уравнения первого порядка для электрических цепей RL , RC и постройте графики решений.

Параметры электрических цепей представлены в приложении 1, примеры нахождения решений приведены в приложениях ПЗ.15 и ПЗ.16.

3.4. Составьте дифференциальное уравнение для электрической цепи RLC и решите его с помощью встроенных функций *odesolve* и *rkfixed*.

Параметры электрических цепей представлены в приложении 1, примеры нахождения решений приведены в приложении ПЗ.17.

3.5. Сделайте выводы по результатам проделанной работы.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое дифференциальное уравнение?
2. Каким образом можно определить порядок дифференциального уравнения?
3. В каком случае дифференциальное уравнение будут называть обыкновенным?
4. Каким образом можно перейти от дифференциального уравнения высшего порядка к нормальной системе дифференциальных уравнений?
5. Какие встроенные функции в MathCAD можно использовать для решения дифференциальных уравнений?
6. Какие этапы решения нужно выполнить при использовании встроенной функции *odesolve*?

Контрольные вопросы

1. Числовые матрицы и алгебраические действия над ними.
2. Свойства матриц.
3. Определитель матрицы и его свойства.
4. Ранг матрицы. Обратная матрица и ее свойства.
5. Функциональные и блочные матрицы.
6. Системы линейных уравнений. Правило Крамера.
7. Метод Гаусса.
8. Свойства линейного пространства.
9. Размерность и базис линейного пространства. Подпространство и его свойства.
10. Линейные преобразования линейного пространства.
11. Собственные векторы и собственные значения линейного пространства. Приведение матриц к диагональному виду.
12. Евклидовы и унитарные пространства. Длина вектора, ортогональность векторов.
13. Норма матрицы. Экспоненциальная матрица.
14. Симметричные и ортогональные преобразования.
15. Квадратичные матрицы.
16. Общие сведения о дифференциальных уравнениях.
17. Нормальная система дифференциальных уравнений.
18. Понятие нормальной линейной системы дифференциальных уравнений. Общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений.
19. Линейная неоднородная система. Формула Коши.
20. Линейное уравнение n -го порядка.
21. Понижение порядка линейной однородной системы дифференциальных уравнений.
22. Понятие комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа.
23. Алгебраические действия над комплексными числами (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня).
24. Функции комплексного переменного.
25. Понятие решетчатой функции. Конечные разности решетчатых функций.
26. Линейные разностные уравнения. Однородные уравнения.
27. Система разностных уравнений.
28. Однородные и неоднородные системы разностных уравнений.

29. Основные сведения теории вероятностей.
30. Алгебра событий.
31. Вероятность событий.
32. Зависимые и независимые события.
33. Случайные величины.
34. Функция распределения вероятностей.
35. Плотность распределения вероятностей.
36. Числовые характеристики случайных величин.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. *Чемоданов Б.К.* и др. Математические основы теории автоматического регулирования: учеб. пособие для вузов. Т. 1. – Изд. 2-е, доп. / под ред. Б.К. Чемоданова. – М.: Высшая школа, 1977. – 366 с.
2. *Данко П.Е.* и др. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч. 1. – Изд. 4-е, испр. и доп. – М.: Высшая школа, 1986. – 304 с., ил.
3. *Дьяконов В.П.* Mathcad 2001: специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002. – 328 с.

Дополнительная литература

1. *Горлова Н.А. Сёмиков Ю.И.* Excel & MathCad. Практический курс: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – 94 с.
2. *Турчак Л.И.* Основы численных методов: учеб. пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 320 с.
3. *Плис А.И., Сливина Н.А.* MathCad: математический практикум для экономистов и инженеров: учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999, 2000. – 656 с.
4. *Чердниченко В.С., Герман Р.П., Сёмиков Ю.И.* Специальные главы математики (часть первая): учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. – 95 с.
5. *Чердниченко В.С.* Специальные главы математики. Ч. 2. Практикум по электротехнике, электромеханике, электротехнологии: учеб. пособие для электромех. фак-та / В.С. Чердниченко, Р.П. Герман, Р.А. Бикеев; Новосиб. гос. техн. ун-т; каф. АЭТУ. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. – 118 с.
6. Основы теории вероятностей: конспект лекций / Н.Ш. Никитина. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. – 132 с.
7. Численные методы решения систем уравнений: метод. указ. к выполнению лаб. работ по курсу «Численные методы» для студентов III курса ФПМИ / М.Г. Персова, М.Э. Рояк, Ю.Г. Соловейчик, А.В. Чернышев. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. – 29 с.
8. Руководство к решению задач по спецглавам высшей математики: учеб. пособие / В.Я. Долгих и др. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 112 с.
9. *Дьяконов В.П.* Справочник по MathCAD PLUS 6.0 PRO. – М.: СК Пресс, 1997. – 336 с.: ил.
10. *Плис А.И., Сливина Н.А.* Mathcad 2000. Лабораторный практикум по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000. – 716 с.: ил.
11. *Ханова А.А.* Численное решение уравнений и систем. – Астрахань: Изд-во АГТУ, 2001. – 44 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ЗАДАНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Раздел 1. Линейная алгебра

Для произвольно заданной невырожденной матрицы A ($\dim A = 3 \times 3$) аналитически найти следующее.

1. Обратную матрицу и сделать проверку $A \cdot A^{-1} = E$.
2. Собственные значения, собственные векторы и диагональную матрицу для матрицы A в среде MathCAD.
3. Для уравнения $A \cdot x_i = B$ с заданной выше матрицей A найти компоненты x_i методом Гаусса по формуле Крамера и через обратную матрицу A^{-1} . Параметры вектора B и матрицы A выбираются произвольно.
4. Для трех магнитно-связанных RLC -контуров составить закон Ома в матричной форме и найти матрицу полного сопротивления системы.
5. Проверку аналитических расчетов выполнить в MathCAD.

Раздел 2. Дифференциальные уравнения

1. Составить дифференциальные уравнения первого порядка для электрических цепей RL , RC . Построить графики переходных процессов для токов в контуре и напряжений на реактивных элементах схемы. Показать, как изменяются токи в электрических цепях. Значения всех элементов схемы задаются по варианту.

2. Составить дифференциальные уравнения для электрической цепи RLC и решить его, построив графики переходных процессов тока и напряжения на одном из реактивных элементов (L , C). Параметры схемы $U = 10$ В, $L = 1$ Гн, $C = 1$ Ф, $R = 1$ Ом. Показать, как изменяются токи в электрической цепи, если активное сопротивление будет иметь значение 0,5 или 2 Ом.

Раздел 3. Теория вероятности и математическая статистика

Для случайных чисел (10–12 значений), полученных с помощью генератора случайных чисел (rnd) в MathCAD, найти математическое ожидание, среднеквадратичное значение, дисперсию, корреляционную функцию и построить графики плотности и функции вероятности.

Варианты параметров электрических цепей

Номер варианта	$U_{\text{вх}}$, В	R , Ом	C , Ф	L , Гн
1	7	0.5, 1, 2	0.7	0.12
2	8	0.4, 0.8, 1.6	0.7	0.12
3	9	0.5, 1, 2	0.75	0.13
4	10	0.4, 0.8, 1.6	0.75	0.13
5	11	0.5, 1, 2	0.8	0.14
6	12	0.4, 0.8, 1.6	0.8	0.14
7	13	0.5, 1, 2	0.85	0.15
8	14	0.4, 0.8, 1.6	0.85	0.15
9	15	0.5, 1, 2	0.55	0.16
10	16	0.7, 1.4, 3.5	0.55	0.16
11	17	0.5, 1, 2	0.5	0.17
12	18	0.7, 1.4, 3.5	0.5	0.17
13	19	0.5, 1, 2	0.4	0.18
14	20	0.7, 1.4, 3.5	0.4	0.18
15	21	0.5, 1, 2	0.35	0.19
16	22	0.7, 1.4, 3.5	0.35	0.19
17	23	0.5, 1, 2	0.25	0.2
18	24	0.7, 1.4, 3.5	0.25	0.2
19	25	0.5, 1, 2	0.17	0.22
20	26	0.7, 1.4, 3.5	0.17	0.22

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ОПЕРАТОРЫ MathCAD

abs – встроенная функция, которая позволяет найти абсолютное значение;

$acos(w)$ – встроенная функция, которая позволяет найти арккосинус значения w ;

$angle(z)$ или $arg(z)$ – функция, которая находит аргумент комплексного числа z – угол на комплексной плоскости между числом z и положительной вещественной полуосью;

$asin(w)$ – встроенная функция, которая позволяет найти арксинус w ;

$atan(w)$ – встроенная функция, которая позволяет найти арктангенс w ;

$augment(A, B)$ – функция, объединяющая матрицы A и B в одну, ставя их рядом друг с другом, притом эти матрицы должны иметь одинаковое количество строк;

$coeffs$ – оператор, решение которое он возвращает, представляет собой вектор-столбец коэффициентов используемого многочлена;

$collect$ – данная встроенная функция позволяет привести подобные слагаемые заданного полинома относительно определенной указанной переменной;

$cos(\alpha)$ – встроенная функция, которая позволяет найти косинус значения α ;

$cot(\alpha)$ – функция, позволяющая найти косинус значения α ;

$diag(V)$ – встроенная функция, формирующая квадратную матрицу, по главной диагонали которой ставят элементы вектора V ;

$eigenvals(A)$ – данная встроенная функция позволяет найти собственные значения заданной невырожденной матрицы A ; найденное решение будет представлять собой вектор-столбец, состоящий из собственных значений матрицы A ;

$eigenvec(A, \lambda_i)$ – позволяет найти собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_i заданной матрицы A ;

$eigenvecs(A)$ – решением будет являться матрица, состоящая из собственных векторов, соответствующих собственным значениям заданной квадратной невырожденной матрицы A ; i -столбец матрицы-решения будет собственным вектором, соответствующим собственному значению λ_i ;

exp(z) – данная встроенная функция позволяет найти экспоненту значения z ;

expand – оператор, который раскрывает скобки и приводит подобные в выражении;

find(x) – оператор, который позволяет вычислить решение, притом, что если этот оператор представлен как функция одного аргумента, то он вернет одно решение, а если задано более одной искомой переменной, то вычислит сразу вектор-столбец значений решения в зависимости от количества неизвестных, т. е. количество элементов вектор-столбца решений напрямую зависит от количества заданных аргументов;

given – оператор, который программно указывает MathCAD, что после расположена система уравнений. Данный оператор можно прописывать как прописными, так и строчными буквами любым шрифтом, но только на английском языке;

lsolve(A, B) – встроенная функция, которая определяет вектор-столбец решений системы линейных уравнений, представленной в векторно-матричной форме записи через матрицы A и B ;

$\max(X)$ и $\min(X)$ – встроенные функции, которые определяют максимальное или минимальное значение элементов вектора или матрицы X ;

odesolve(t, b, step) – встроенная функция, используемая для решения относительно старшей производной линейных дифференциальных уравнений, где t – переменная интегрирования; b – конечный интервал интегрирования; $step$ – шаг интегрирования, задавать не обязательно;

origin – оператор, позволяющий задать начальное значение нумерации переменных, без указания в MathCAD нумерация переменных начинается с 0 (по умолчанию);

polyroots – функция, которая не требует задания начального приближения, также данная функция может быть применима для нахождения корней многочленов с комплексными коэффициентами, кроме того, данная функция возвращает сразу все корни как вещественные, так и комплексные;

root(f(x), x) – встроенная функция, которая определяет значение переменной x , при которой $f(x)$ обращается в нуль, данная функция работает только со скалярными величинами; перед использованием рассматриваемой функции необходимо присвоить начальное числовое значение переменной x , которое будет как можно ближе к предполагаемому ответу;

$rkfixed(X, t_1, t_2, D)$ – встроенная функция, которая позволяет найти решение дифференциальных уравнений, где X – вектор-столбец начальных условий размерностью n ; n – порядок дифференциального уравнения; t_1, t_2 – граничные точки, на интервале которых ищется решение дифференциального уравнения; $D(t, x)$ – вектор-столбец размерностью n , в котором задаются первые производные функций;

$rref(A)$ – функция, осуществляющая приведение заданной матрицы A к треугольному виду посредством метода Гаусса;

$simplify$ – оператор, который упрощает выражение, выполняя различные преобразования, тем самым приводя заданное выражение к более простой форме записи;

$solve$ – оператор, который позволяет решить линейное уравнение без задания первого приближения решения;

$submatrix(A, i, j, n, m)$ – данная функция осуществляет формирование новой матрицы на основе заданной заранее матрицы A , используя все элементы, содержащиеся с i -й по j -ю строку и столбцах с n -го по m -го матрицы A .

НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В MathCAD

П3.1. Определение корней линейного уравнения с помощью оператора *polyroots*

Определение корней линейного уравнения

$$x^3 - 10x + 2 = 0 \quad - \text{ задается уравнение}$$

$$\underline{V} := \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad - \text{ после формирования вектор-столбец, состоящий из коэффициентов заданного уравнения}$$

$$\text{polyroots}(\underline{V}) = \begin{pmatrix} -3.258 \\ 0.201 \\ 3.057 \end{pmatrix} \quad - \text{ корни заданного линейного уравнения}$$

П3.2. Решения уравнения с применением встроенного оператора *solve*

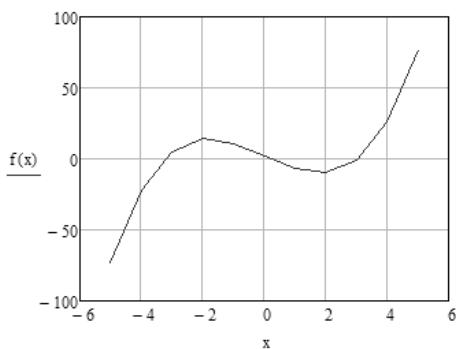
$$x^3 - 10x + 2 \text{ solve } x \rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{10}{\frac{1}{3} \left(-1 + \frac{1}{9} \sqrt{2919} i \right)^3} + \left(-1 + \frac{1}{9} \sqrt{2919} i \right)^{\frac{1}{3}} \\ 3 \cdot \left(-1 + \frac{1}{9} \sqrt{2919} i \right)^{\frac{2}{3}} + 10 - 3 \sqrt{3} \cdot \left(-1 + \frac{1}{9} \sqrt{2919} i \right)^{\frac{2}{3}} \cdot i + 10 \sqrt{3} \cdot i \\ \frac{1}{6 \cdot \left(-1 + \frac{1}{9} \sqrt{2919} i \right)^3} \\ 3 \cdot \left(-1 + \frac{1}{9} \sqrt{2919} i \right)^{\frac{2}{3}} + 10 - 10 \sqrt{3} \cdot i + 3 \sqrt{3} \cdot \left(-1 + \frac{1}{9} \sqrt{2919} i \right)^{\frac{2}{3}} \cdot i \\ \frac{1}{6 \cdot \left(-1 + \frac{1}{9} \sqrt{2919} i \right)^3} \end{array} \right] = \begin{pmatrix} 3.057 \\ -3.258 \\ 0.201 \end{pmatrix}$$

ПЗ.3. Нахождение корней линейного уравнения с помощью функции *root*

$x := -5..5$

$f(x) := x^3 - 10x + 2$ задается уравнение в качестве функции

Для нахождения начальных приближений корней заданного уравнения, построим график функции



$x_0 := -3$ начальное приближение первого корня

$x1 := \text{root}(f(x), x)$

$x1 = -3.258$ истинное значение первого корня

$x := 0$ начальное приближение второго корня

$x2 := \text{root}(f(x), x)$

$x2 = 0.201$ истинное значение первого корня

$x_0 := 3$ начальное приближение второго корня

$x3 := \text{root}(f(x), x)$

$x3 = 3.057$ истинное значение первого корня

П3.4. Пример решения системы линейных уравнений методом Гаусса

Решение системы уравнений методом Гаусса

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 30 \quad \text{задание системы линейных уравнений}$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 10$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

+

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{представление исходной системы линейных уравнений в векторно-матричной форме записи}$$

$$Ar := \text{augment}(A, B)$$

$$Ar = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$Arg := \text{rref}(Ar)$$

$$Arg = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.333 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2.833 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3.333 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3.5 \end{pmatrix}$$

$$X := \text{submatrix}(Arg, 0, 3, 4, 4)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0.333 \\ 2.833 \\ 3.333 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

П3.5. Пример решения системы линейных уравнений методом Крамера

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 30 \quad \text{задание системы линейных уравнений}$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 10$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$\underset{\text{мат}}{\mathbf{A}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{представление исходной системы линейных} \\ \text{уравнений в векторно-матричной форме} \\ \text{записи} \end{array}$$

$$|\mathbf{A}| = -12$$

Задание вспомогательных определителей

$$\mathbf{A1} := \begin{pmatrix} 30 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A2} := \begin{pmatrix} 1 & 30 & 3 & 4 \\ 1 & 10 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A3} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 30 & 4 \\ 1 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A4} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 30 \\ 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A1}| = -4$$

$$|\mathbf{A2}| = -34$$

$$|\mathbf{A3}| = -40$$

$$|\mathbf{A4}| = -42$$

Нахождение решения заданной системы линейных уравнений

$$x_1 := \frac{|\mathbf{A1}|}{|\mathbf{A}|} = 0.333 \quad x_2 := \frac{|\mathbf{A2}|}{|\mathbf{A}|} = 2.833 \quad x_3 := \frac{|\mathbf{A3}|}{|\mathbf{A}|} = 3.333 \quad x_4 := \frac{|\mathbf{A4}|}{|\mathbf{A}|} = 3.5$$

ПЗ.6. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 30 \quad \text{задание системы линейных уравнений}$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 10$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

представление исходной системы линейных уравнений в векторно-матричной форме записи

$$x := A^{-1} \cdot B \quad \text{нахождение решения заданной системы линейных уравнений}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.333 \\ 2.833 \\ 3.333 \\ 3.5 \end{pmatrix} \quad \text{вектор-столбец решения}$$

ПЗ.7. Решение линейного уравнения с одним неизвестным с помощью операторов Given и Find

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{- задаются начальное приближение решения}$$

Given

$$x^3 - 10 \cdot x + 2 = 0 \quad \text{- задается уравнение}$$

$$\text{korni} := \text{Find}(x)$$

$$\text{korni} = \begin{pmatrix} 0.201 \\ 3.057 \\ -3.258 \end{pmatrix} \quad \text{истинные искомые значения корней}$$

П3.8. Решение системы линейных уравнений с использованием операторов Given и Find

Решение системы линейных уравнений

$x := 1 \quad y := 1 \quad z := 1$ - задаются начальные приближения корней, выбираются произвольные значения

Given

$$3 \cdot x + 8 \cdot y - 9 \cdot z = 12 \quad - \text{ задаются уравнения системы}$$

$$5 \cdot x - 9 \cdot y + 2 \cdot z = 34$$

$$8 \cdot x - 6 \cdot y + 5 \cdot z = 98$$

$$\text{Find}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 11.457 \\ 3.913 \\ 5.964 \end{pmatrix}$$

П3.9. Решение системы линейных уравнений функцией Isolve

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 30 \quad \text{задание системы линейных уравнений}$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 10$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$\underline{\underline{A}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

представление исходной системы линейных уравнений в векторно-матричной форме записи

$$\text{Isolve}(A, B) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{17}{6} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.333 \\ 2.833 \\ 3.333 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

вектор-столбец решения заданной системы

ПЗ.10. Нахождение собственных значений векторов и диагональной матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{- задается матрица}$$

$|A| = 387$ - матрица должна быть невырожденной,
т.е. ее определитель не должен быть равен 0

$\lambda := \text{eigenvals}(A)$ - нахождение собственных значений

$$\lambda = \begin{pmatrix} 9.802 \\ -3.901 + 4.926i \\ -3.901 - 4.926i \end{pmatrix} \quad \text{- вектор собственных значений}$$

$X := \text{eigenvecs}(A)$ - нахождение собственных векторов

$$X = \begin{pmatrix} -0.418 & -0.341 - 0.342i & -0.341 + 0.342i \\ -0.735 & 0.671 & 0.671 \\ -0.534 & -0.214 + 0.52i & -0.214 - 0.52i \end{pmatrix} \quad \text{- матрица состоящая из собственных векторов по столбцам}$$

$$X^{-1} \cdot A \cdot X = \begin{pmatrix} 9.802 & -2.468 \times 10^{-15} & -2.417 \times 10^{-15} - 1.116i \times 10^{-15} \\ 2.22 \times 10^{-15} - 1.887i \times 10^{-15} & -3.901 + 4.926i & 1.998 \times 10^{-15} + 2.22i \times 10^{-15} \\ 1.776 \times 10^{-15} + 2.331i \times 10^{-15} & 1.998 \times 10^{-15} - 2.22i \times 10^{-15} & -3.901 - 4.926i \end{pmatrix}$$

— диагональная матрица, так как вычисления производятся с большой точностью, то элементы не равны 0, но значения очень близки, поэтому ими можно пренебречь.

П3.11. Решение дифференциального уравнения первого порядка встроенной функцией *odesolve*

Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Given

$$\frac{d}{dt}y(t) = y(t) - y(t)^2 \quad \text{задание дифференциального уравнения}$$

$$y(0) = 0.1 \quad \text{начальные условия}$$

$$y_{sol} := \text{Odesolve}(t, 10)$$

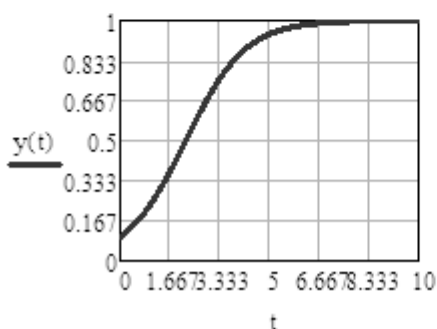


график решения
дифференциального
уравнения

ПЗ.12. Решение дифференциального уравнения второго порядка встроенной функцией *odesolve*

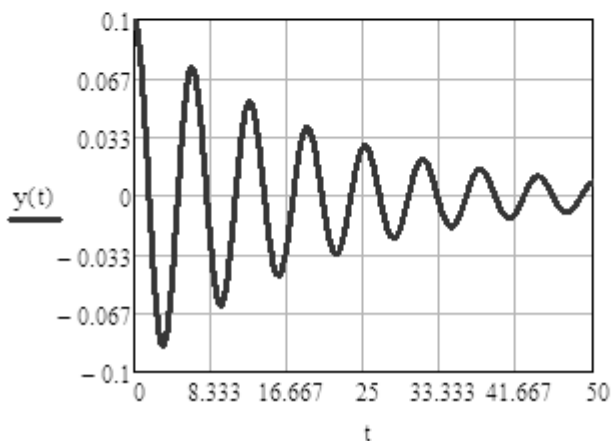
Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Given

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 0.1\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + y(t) = 0$$

$$y(0) = 0.1 \qquad y'(0) = 0$$

$y_{xx} := \text{Odesolve}(t, 50)$

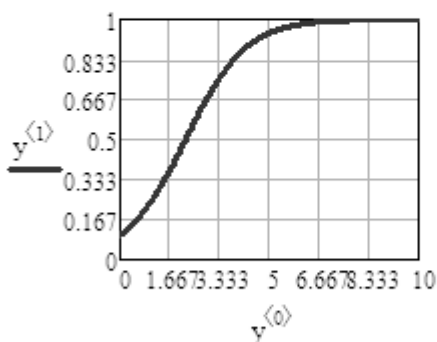


ПЗ.13. Решение дифференциального уравнения первого порядка встроенной функцией *rkfixed*

Метод Рунге Кутты

$$y := 0.1 \quad M := 100 \quad D(t, y) := y - y^2$$

$$y_{M+1} := rkfixed(y, 0, 10, M, D)$$



$y^{(i)}$ индекс сверху ставится комбинацией клавиш Ctrl+6

П3.14. Решение дифференциального уравнения второго порядка встроенной функцией *rkfixed*

Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных
уравнений второго порядка.

Метод Рунге Кутты

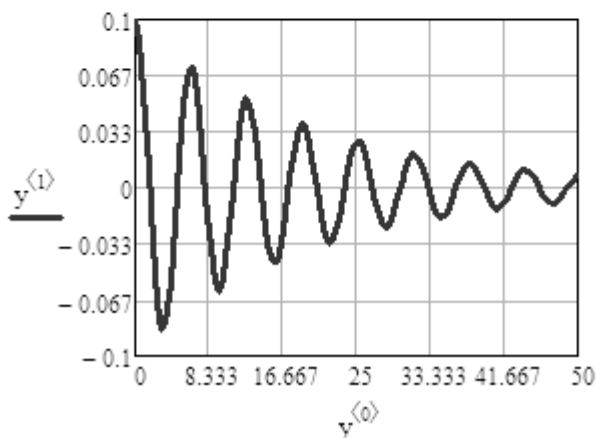
$$y''(t) + 0.1 \cdot y'(t) + y(t) = 0$$

$$y' = y_1 \quad y' = -y_0 - 0.1 \cdot y_1$$

$$\underline{\underline{D}}(t, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_0 - 0.1 \cdot y_1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{y}}_0 := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}} := 100$$

$$\underline{\underline{y}} := \text{rkfixed}(\underline{\underline{y}}_0, 0, 50, \underline{\underline{M}}, \underline{\underline{D}})$$



П3.15. Решение дифференциального уравнения электрической цепи RC

$$U := 11 \quad C := 0.8 \quad R1 := 2$$

Given

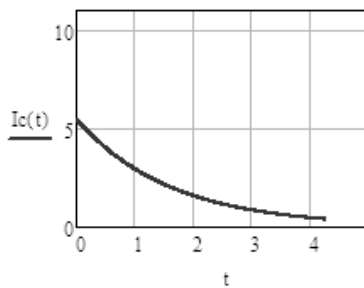
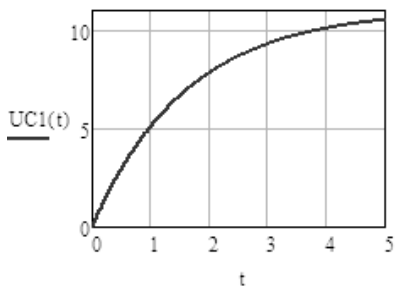
$$\frac{d}{dt} UC1(t) = \frac{U - UC1(t)}{R1 \cdot C}$$

$$UC1(0) = 0$$

$$t := 0, 0.01 \dots 5$$

$$UC1 := \text{Odesolve}(t, 5)$$

$$Ic(t) := C \cdot \left(\frac{d}{dt} UC1(t) \right)$$



П3.16. Решение дифференциального уравнения электрической цепи *RL*

$$U := 17 \quad R_{\text{mm}} := 0.7 \quad L_{\text{mm}} := 0.17$$

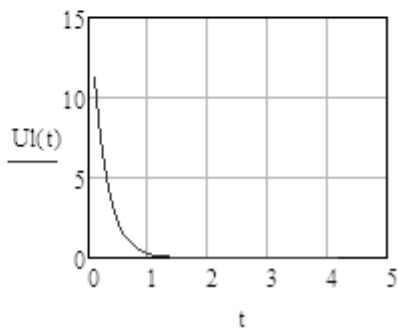
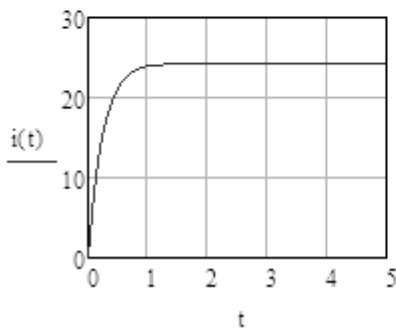
Given

$$L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) - U = 0$$

$$i(0) = 0 \quad t := 0, 0.1 \dots 5$$

$$i := \text{Odesolve}(t, 5)$$

$$U1(t) := L \cdot \left(\frac{d}{dt} i(t) \right)$$



ПЗ.17. Решение дифференциального уравнения электрической цепи *RLC*

$$\underline{U} := 17 \quad \underline{R} := 0.7 \quad \underline{L} := 0.17 \quad \underline{C} := 0.17$$

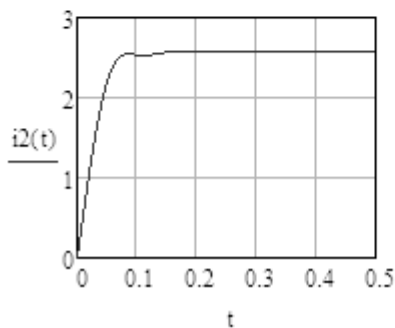
Given

$$i_2(t) \cdot R + L \cdot \left(\frac{d}{dt} i_2(t) \right) + \frac{i_2(t)}{C} - U = 0$$

$$i_2(0) = 0$$

$$t := 0, 0.01 \dots 0.5$$

$$i_2 := \text{Odesolve}(t, 50)$$



**Кучер Екатерина Сергеевна
Котин Денис Алексеевич**

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие

Редактор *Л.Н. Ветчакова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *С.И. Ткачева*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 27.02.2017. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз.
Уч.-изд. л. 5,81. Печ. л. 6,25. Изд. № 284/16. Заказ № 360. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20