

## Раздел 1. Линейная алгебра:

1.

Рассчитаем обратную матрицу A и сделаем проверку:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \\ 9 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad |A| = 99 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.727 & 0 & 0.273 \\ 0.818 & 0 & -0.182 \\ 0.232 & 0.111 & -0.101 \end{pmatrix} \quad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1.776 \times 10^{-15} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ручной счет:

$$\text{Определитель}_A := 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 9 \cdot 9 + 0 \cdot 4 \cdot 8 - (0 \cdot 1 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \cdot 0) = 99$$

Составим матрицу алгебраических дополнений:

$$\text{Матрица\_Дополнений} := \begin{bmatrix} (1 \cdot 0 - 9 \cdot 8) & -(4 \cdot 0 - 9 \cdot 9) & (4 \cdot 8 - 9 \cdot 1) \\ -(3 \cdot 0 - 0 \cdot 8) & (2 \cdot 0 - 0 \cdot 9) & -(2 \cdot 8 - 3 \cdot 9) \\ (3 \cdot 9 - 0 \cdot 1) & -(2 \cdot 9 - 0 \cdot 4) & (2 \cdot 1 - 3 \cdot 4) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -72 & 81 & 23 \\ 0 & 0 & 11 \\ 27 & -18 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{Матрица\_Дополнений}^T = \begin{pmatrix} -72 & 0 & 27 \\ 81 & 0 & -18 \\ 23 & 11 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{Обратная\_Матрица} := \frac{\text{Матрица\_Дополнений}^T}{\text{Определитель}_A} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{11} & 0 & \frac{3}{11} \\ \frac{9}{11} & 0 & -\frac{2}{11} \\ \frac{23}{99} & \frac{1}{9} & -\frac{10}{99} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.727 & 0 & 0.273 \\ 0.818 & 0 & -0.182 \\ 0.232 & 0.111 & -0.101 \end{pmatrix}$$

Проверка :

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \\ 9 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.727 & 0 & 0.273 \\ 0.818 & 0 & -0.182 \\ 0.232 & 0.111 & -0.101 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [2 \cdot (-0.727) + 3 \cdot 0.818] & 0 & [2 \cdot 0.273 + 3 \cdot (-0.182)] \\ (0.818 - 4 \cdot 0.727 + 2.088) & 9 \cdot 0.111 & (4 \cdot 0.273 - 1 \cdot 0.182 - 0.101 \cdot 9) \\ [9 \cdot (-0.727) + 8 \cdot 0.818] & 0 & (9 \cdot 0.273 - 0.182 \cdot 8) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [2 \cdot (-0.727) + 3 \cdot 0.818] & 0 & [2 \cdot 0.273 + 3 \cdot (-0.182)] \\ (0.818 - 4 \cdot 0.727 + 2.088) & 9 \cdot 0.111 & (4 \cdot 0.273 - 1 \cdot 0.182 - 0.101 \cdot 9) \\ [9 \cdot (-0.727) + 8 \cdot 0.818] & 0 & (9 \cdot 0.273 - 0.182 \cdot 8) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0.0 \\ -0.002 & 0.999 & 0.001 \\ 0.001 & 0 & 1.001 \end{pmatrix}$$

2.

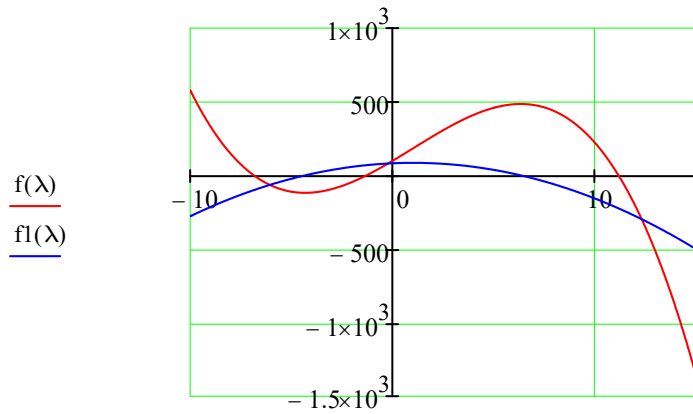
Найдем собственные значения, вектора и диагональную матрицу A:

Ручной счет:

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda \cdot E \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (A - \lambda \cdot E) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 3 & 0 \\ 4 & 1 - \lambda & 9 \\ 9 & 8 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda \cdot E| = 0 \rightarrow 3 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 + 82 \cdot \lambda + 99 = 0$$

$$f(\lambda) := 3 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 + 82 \cdot \lambda + 99 \quad f'(\lambda) := \frac{d}{d\lambda} f(\lambda) \rightarrow 6 \cdot \lambda - 3 \cdot \lambda^2 + 82$$



$$\lambda_n = \lambda_m - \frac{f(\lambda_m)}{\frac{d}{dt}f(\lambda_m)}$$

$$\lambda := -8 \quad \lambda_n := -8 - \frac{(3 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 + 82 \cdot \lambda + 99)}{(6 \cdot \lambda - 3 \cdot \lambda^2 + 82)} = -7.07$$

$$\lambda := -7.07 \quad \lambda_n := -7.07 - \frac{(3 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 + 82 \cdot \lambda + 99)}{(6 \cdot \lambda - 3 \cdot \lambda^2 + 82)} = -6.865$$

$$\lambda := -6.865 \quad \lambda_n := -6.865 - \frac{(3 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 + 82 \cdot \lambda + 99)}{(6 \cdot \lambda - 3 \cdot \lambda^2 + 82)} = -6.855$$

Первое собственное число:

$$\lambda_1 := -6.855$$

$$\lambda := -3 \quad \lambda_n := -3 - \frac{(3 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 + 82 \cdot \lambda + 99)}{(6 \cdot \lambda - 3 \cdot \lambda^2 + 82)} = -0.486$$

$$\lambda := -0.486 \quad \lambda_n := -0.486 - \frac{(3 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 + 82 \cdot \lambda + 99)}{(6 \cdot \lambda - 3 \cdot \lambda^2 + 82)} = -1.251$$

$$\lambda := -1.251 \quad \lambda_n := -1.251 - \frac{(3 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 + 82 \cdot \lambda + 99)}{(6 \cdot \lambda - 3 \cdot \lambda^2 + 82)} = -1.295$$

$$\lambda := -1.295 \quad \lambda_n := -1.295 - \frac{(3 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 + 82 \cdot \lambda + 99)}{(6 \cdot \lambda - 3 \cdot \lambda^2 + 82)} = -1.295$$

Второе собственное число:

$$\lambda_2 := -1.295$$

$$\lambda := 10 \quad \lambda_n := 10 - \frac{(3 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 + 82 \cdot \lambda + 99)}{(6 \cdot \lambda - 3 \cdot \lambda^2 + 82)} = 11.386$$

$$\lambda := 11.386 \quad \lambda_n := 11.386 - \frac{(3 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 + 82 \cdot \lambda + 99)}{(6 \cdot \lambda - 3 \cdot \lambda^2 + 82)} = 11.158$$

$$\lambda := 11.158 \quad \lambda_n := 11.158 - \frac{(3 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 + 82 \cdot \lambda + 99)}{(6 \cdot \lambda - 3 \cdot \lambda^2 + 82)} = 11.15$$

$$\lambda := 11.15 \quad \lambda_n := 11.15 - \frac{(3 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 + 82 \cdot \lambda + 99)}{(6 \cdot \lambda - 3 \cdot \lambda^2 + 82)} = 11.15$$

Третье собственное число:

$$\lambda_3 := 11.15$$

Найдем собственные вектора:

$$\lambda_1 = -6.855 \quad (A - \lambda_1 \cdot E) \cdot X = 0 \quad A_{\lambda 1} := \begin{bmatrix} 2 - (-6.855) & 3 & 0 \\ 4 & 1 - (-6.855) & 9 \\ 9 & 8 & -(-6.855) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8.855 & 3 & 0 \\ 4 & 7.855 & 9 \\ 9 & 8 & 6.855 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{8.855}{8.855} & \frac{3}{8.855} & 0 \\ 4 & 7.855 & 9 \\ 9 & 8 & 6.855 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 \cdot \frac{3}{8.855} & 0 \\ 9 & 9 \cdot \frac{3}{8.855} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.339 & 0 \\ 0 & 6.5 & 9 \\ 0 & 4.951 & 6.855 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.339 & 0 \\ 0 & \frac{6.5}{6.5} & \frac{9}{6.5} \\ 0 & 4.951 & 6.855 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.951 & 4.951 \cdot \frac{9}{6.5} \end{pmatrix} \text{float, 4} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 & 0.339 & 0 \\ 0 & 1.0 & 1.385 \\ 0 & 0 & -0.0002308 \end{pmatrix}$$

Положим  $x_3 := 0.565$

$$X = \begin{pmatrix} -0.339x_2 \\ -1.385x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -0.339(-1.385 \times 0.565) \\ -1.385 \times 0.565 \\ 0.565 \end{bmatrix} \text{float, 3} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.265 \\ -0.783 \\ 0.565 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1.295 \quad (A - \lambda_1 \cdot E) \cdot X = 0 \quad A_{\lambda 1} := \begin{bmatrix} 2 - (-1.295) & 3 & 0 \\ 4 & 1 - (-1.295) & 9 \\ 9 & 8 & -(-1.295) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3.295 & 3 & 0 \\ 4 & 2.295 & 9 \\ 9 & 8 & 1.295 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3.295}{3.295} & \frac{3}{3.295} & 0 \\ 4 & 2.295 & 9 \\ 9 & 8 & 1.295 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 \cdot \frac{3}{3.295} & 0 \\ 9 & 9 \cdot \frac{3}{3.295} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.91 & 0 \\ 0 & -1.347 & 9 \\ 0 & -0.194 & 1.295 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.91 & 0 \\ 0 & \frac{-1.347}{-1.347} & \frac{9}{-1.347} \\ 0 & -0.194 & 1.295 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.194 & -0.194 \cdot \frac{9}{-1.347} \end{pmatrix} \text{float, 4} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 & 0.91 & 0 \\ 0 & 1.0 & -6.682 \\ 0 & 0 & -0.001214 \end{pmatrix}$$

Положим  $x_3 := 0.11$

$$X = \begin{pmatrix} -0.91x_2 \\ 6.682x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -0.91(6.682 \times 0.11) \\ 6.682 \times 0.11 \\ 0.11 \end{bmatrix} \text{float, 3} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.669 \\ 0.735 \\ 0.11 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 11.15 \quad (A - \lambda_1 \cdot E) \cdot X = 0 \quad A_{\lambda 1} := \begin{bmatrix} 2 - (11.15) & 3 & 0 \\ 4 & 1 - (11.15) & 9 \\ 9 & 8 & -11.15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -9.15 & 3 & 0 \\ 4 & -10.15 & 9 \\ 9 & 8 & -11.15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-9.15}{-9.15} & \frac{3}{-9.15} & 0 \\ 4 & -10.15 & 9 \\ 9 & 8 & -11.15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 \cdot \frac{3}{-9.15} & 0 \\ 9 & 9 \cdot \frac{3}{-9.15} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.328 & 0 \\ 0 & -8.839 & 9 \\ 0 & 10.951 & -11.15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.328 & 0 \\ 0 & -8.839 & 9 \\ 0 & 10.951 & -11.15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10.951 & 10.951 \cdot \frac{9}{-8.839} \end{pmatrix} \text{float}, 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 & -0.328 & 0 \\ 0 & 1.0 & -1.018 \\ 0 & 0 & 0.0004695 \end{pmatrix}$$

Положим  $x_3 := 0.682$

$$X = \begin{pmatrix} 0.328x_2 \\ 1.018x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.328(1.018 \times 0.682) \\ 1.018 \times 0.682 \\ 0.682 \end{bmatrix} \text{float}, 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0.228 \\ 0.694 \\ 0.682 \end{pmatrix}$$

Проверка :

Собственные значения:

$$\lambda := \text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 11.15 \\ -1.295 \\ -6.855 \end{pmatrix}$$

Собственные вектора:

$$X := \text{eigenvecs}(A) = \begin{pmatrix} -0.228 & -0.669 & 0.265 \\ -0.695 & 0.735 & -0.782 \\ -0.682 & 0.11 & 0.565 \end{pmatrix}$$

$$B1 := \text{eigenvec}(A, \lambda_0) = \begin{pmatrix} 0.228 \\ 0.695 \\ 0.682 \end{pmatrix} \quad B2 := \text{eigenvec}(A, \lambda_1) = \begin{pmatrix} -0.669 \\ 0.735 \\ 0.11 \end{pmatrix} \quad B3 := \text{eigenvec}(A, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 0.265 \\ -0.782 \\ 0.565 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица:

$$X^{-1} \cdot A \cdot X = \begin{pmatrix} 11.15 & 3.775 \times 10^{-15} & 0 \\ 8.327 \times 10^{-15} & -1.295 & -5.163 \times 10^{-15} \\ 6.217 \times 10^{-15} & 0 & -6.855 \end{pmatrix}$$

3.

Решить данную систему уравнений методом Гаусса, Крамера и обратной матрицей:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 1x_2 + 9x_3 &= 2 \\ 9x_1 + 8x_2 &= 3 \end{aligned} \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \\ 9 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Методом гаусса:

$$X := \text{rref}(\text{augment}(A, B)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.091 \\ 0 & 1 & 0 & 0.273 \\ 0 & 0 & 1 & 0.152 \end{pmatrix}$$

$$x_1 := \text{submatrix}(X, 0, 0, 3, 3) = (0.091) \quad x_2 := \text{submatrix}(X, 1, 1, 3, 3) = (0.273)$$

$$x_3 := \text{submatrix}(X, 2, 2, 3, 3) = (0.152)$$

Ручной счет:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-4 \cdot I]{-2 \cdot I} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{поменяем местами 1 и 3}]{+ \text{вычет из 1 } 2 \cdot III} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{+2II} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 18 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 18 & 3 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+4 \cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 72 & 11 \\ 0 & 1 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 99 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{/99} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 72 & 11 \\ 0 & 1 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.152 \end{pmatrix} \xrightarrow[-18 \cdot III]{-72 \cdot III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.092 \\ 0 & 1 & 0 & 0.273 \\ 0 & 0 & 1 & 0.152 \end{pmatrix}$$

Ответы сходятся.

Методом Крамера:

$$A1 := \text{augment}(B, \text{submatrix}(A, 0, 2, 1, 2)) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad |A1| = 9$$

$$A2 := \text{augment}(\text{submatrix}(A, 0, 2, 0, 0), B, \text{submatrix}(A, 0, 2, 2, 2)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 9 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad |A2| = 27$$

$$A3 := \text{augment}(\text{submatrix}(A, 0, 2, 0, 1), B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad |A3| = 15$$

$$x1 := \frac{|A1|}{|A|} = 0.091 \quad x2 := \frac{|A2|}{|A|} = 0.273 \quad x3 := \frac{|A3|}{|A|} = 0.152$$

Ручной счет:

$$A1 := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Определитель\_A1} := (1 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 9 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot 8) - (0 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 9 \cdot 8 + 3 \cdot 2 \cdot 0) = 9$$

$$A2 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 9 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Определитель\_A2} := (2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 9 \cdot 9 + 0 \cdot 4 \cdot 3) - (0 \cdot 2 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 0) = 27$$

$$A3 := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Определитель\_A3} := (2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 4 \cdot 8) - (1 \cdot 1 \cdot 9 + 2 \cdot 2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \cdot 3) = 15$$

$$x1 := \frac{\text{Определитель\_A1}}{\text{Определитель\_A}} = \frac{1}{11} = 0.091 \quad x2 := \frac{\text{Определитель\_A2}}{\text{Определитель\_A}} = \frac{3}{11} = 0.273$$

$$x3 := \frac{\text{Определитель\_A3}}{\text{Определитель\_A}} = \frac{5}{33} = 0.152$$

Ответы сходятся.

Методом обратной матрицы:

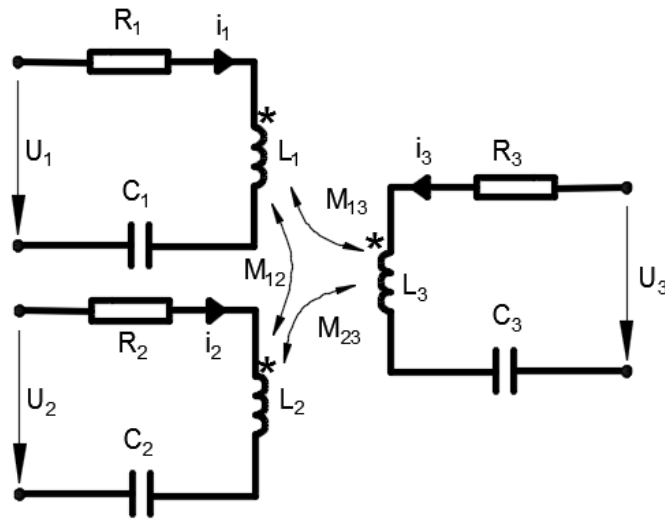
$$X := A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0.091 \\ 0.273 \\ 0.152 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x1 &:= \text{submatrix}(X, 0, 0, 0, 0) = (0.091) & x2 &:= \text{submatrix}(X, 1, 1, 0, 0) = (0.273) \\ x3 &:= \text{submatrix}(X, 2, 2, 0, 0) = (0.152) \end{aligned}$$

Ручной счет:

$$X = \begin{pmatrix} -0.727 & 0 & 0.273 \\ 0.818 & 0 & -0.182 \\ 0.232 & 0.111 & -0.101 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.727 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0.273 \cdot 3 \\ 0.818 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 0.182 \cdot 3 \\ 0.232 \cdot 1 + 0.111 \cdot 2 - 0.101 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.092 \\ 0.272 \\ 0.151 \end{pmatrix}$$

Ответы сходятся.

4.



$$U_1 = i_1 \cdot R_1 + L_1 \cdot \left( \frac{d}{dt} i_1 \right) + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + M_{13} \cdot \left( \frac{d}{dt} i_3 \right) + M_{12} \cdot \left( \frac{d}{dt} i_2 \right)$$

$$U_2 = i_2 \cdot R_2 + L_2 \cdot \left( \frac{d}{dt} i_2 \right) + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + M_{12} \cdot \left( \frac{d}{dt} i_1 \right) + M_{23} \cdot \left( \frac{d}{dt} i_3 \right)$$

$$U_3 = i_3 \cdot R_3 + L_3 \cdot \left( \frac{d}{dt} i_3 \right) + \frac{1}{C_3} \int i_3 dt + M_{13} \cdot \left( \frac{d}{dt} i_1 \right) + M_{23} \cdot \left( \frac{d}{dt} i_2 \right)$$

Перейдем в пространство изображений:

$$U_1(p) = i_1(p) \cdot \left( R_1 + L_1 \cdot p + \frac{1}{C_1 \cdot p} \right) + i_3(p) \cdot p \cdot M_{13} + i_2(p) \cdot p \cdot M_{12}$$

$$U_2(p) = i_2(p) \cdot \left( R_2 + L_2 \cdot p + \frac{1}{C_2 \cdot p} \right) + i_3(p) \cdot p \cdot M_{23} + i_1(p) \cdot p \cdot M_{12}$$

$$U_3(p) = i_3(p) \cdot \left( R_3 + L_3 \cdot p + \frac{1}{C_3 \cdot p} \right) + i_1(p) \cdot p \cdot M_{13} + i_2(p) \cdot p \cdot M_{23}$$

Составим матричную форму записи:

$$U(p) = \begin{pmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \\ U_3(p) \end{pmatrix} \quad Z(p) = \begin{pmatrix} Z_1(p) & p \cdot M_{12} & p \cdot M_{13} \\ p \cdot M_{12} & Z_2(p) & p \cdot M_{23} \\ p \cdot M_{13} & p \cdot M_{23} & Z_3(p) \end{pmatrix}, \quad i(p) = \begin{pmatrix} i_1(p) \\ i_2(p) \\ i_3(p) \end{pmatrix}$$

$$Z_1(p) = \left( R_1 + L_1 \cdot p + \frac{1}{C_1 \cdot p} \right)$$

$$Z_2(p) = \left( R_2 + L_2 \cdot p + \frac{1}{C_2 \cdot p} \right)$$

$$Z_3(p) = \left( R_3 + L_3 \cdot p + \frac{1}{C_3 \cdot p} \right)$$

$$U(p) = Z(p) \cdot i(p)$$

Найдем обратную матрицу сопротивлений:

$$\text{Определитель}_Z = Z_1(p) \cdot \begin{vmatrix} Z_2(p) & p \cdot M_{23} \\ p \cdot M_{23} & Z_3(p) \end{vmatrix} - p \cdot M_{12} \cdot \begin{vmatrix} p \cdot M_{12} & p \cdot M_{23} \\ p \cdot M_{13} & Z_3(p) \end{vmatrix} + p \cdot M_{13} \cdot \begin{vmatrix} p \cdot M_{12} & Z_2(p) \\ p \cdot M_{13} & p \cdot M_{23} \end{vmatrix}$$

$$\text{Определитель}_Z = Z_1(p) \cdot (Z_2(p) \cdot Z_3(p) - M_{23}^2 \cdot p^2) + M_{12} \cdot p \cdot (M_{13} \cdot M_{23} \cdot p^2 - M_{12} \cdot p \cdot Z_3(p)) +$$

$$+ M_{13} \cdot p \cdot (M_{12} \cdot M_{23} \cdot p^2 - M_{13} \cdot p \cdot Z_2(p))$$

$$\text{Определитель}_Z = Z_1(p) \cdot Z_2(p) \cdot Z_3(p) - M_{12}^2 \cdot p^2 \cdot Z_3(p) - M_{13}^2 \cdot p^2 \cdot Z_2(p) - M_{23}^2 \cdot p^2 \cdot Z_1(p) + 2 \cdot M_{12} \cdot M_{13} \cdot M_{23} \cdot p^3$$

Раскроем определитель:

$$\begin{aligned} \text{Определитель}_Z = & \left( R_1 + L_1 \cdot p + \frac{1}{C_1 \cdot p} \right) \cdot \left( R_2 + L_2 \cdot p + \frac{1}{C_2 \cdot p} \right) \cdot \left( R_3 + L_3 \cdot p + \frac{1}{C_3 \cdot p} \right) - M_{12}^2 \cdot p^2 \cdot \left( R_3 + L_3 \cdot p + \frac{1}{C_3 \cdot p} \right) \cdot \\ & - M_{13}^2 \cdot p^2 \cdot \left( R_2 + L_2 \cdot p + \frac{1}{C_2 \cdot p} \right) - M_{23}^2 \cdot p^2 \cdot \left( R_1 + L_1 \cdot p + \frac{1}{C_1 \cdot p} \right) + 2 \cdot M_{12} \cdot M_{13} \cdot M_{23} \cdot p^3 \end{aligned}$$

Составим матрицу алгебраических дополнений:

$$\text{Дополнения}_Z = \begin{bmatrix} \left( Z_2(p) \cdot Z_3(p) - M_{23}^2 \cdot p^2 \right) & \left( M_{13} \cdot M_{23} \cdot p^2 - M_{12} \cdot p \cdot Z_3(p) \right) & \left( M_{12} \cdot M_{23} \cdot p^2 - M_{13} \cdot p \cdot Z_2(p) \right) \\ \left( p^2 \cdot M_{13} \cdot M_{23} - M_{12} \cdot Z_3(p) \right) & \left( Z_1(p) \cdot Z_3(p) - p^2 \cdot M_{13}^2 \right) & \left( p^2 \cdot M_{13} \cdot M_{12} - Z_1(p) \cdot p \cdot M_{23} \right) \\ \left( p^2 \cdot M_{12} \cdot M_{23} - p \cdot M_{13} \cdot Z_2(p) \right) & \left( p^2 \cdot M_{13} \cdot M_{12} - Z_1(p) \cdot p \cdot M_{23} \right) & \left( Z_1(p) \cdot Z_2(p) - p^2 \cdot M_{12}^2 \right) \end{bmatrix}$$

Транспонируем её:

$$\begin{pmatrix} Z_2(p) \cdot Z_3(p) - M_{23}^2 \cdot p^2 & M_{13} \cdot M_{23} \cdot p^2 - M_{12} \cdot p \cdot Z_3(p) & M_{12} \cdot M_{23} \cdot p^2 - M_{13} \cdot p \cdot Z_2(p) \\ M_{13} \cdot M_{23} \cdot p^2 - M_{12} \cdot p \cdot Z_3(p) & Z_1(p) \cdot Z_3(p) - M_{13}^2 \cdot p^2 & M_{12} \cdot M_{13} \cdot p^2 - M_{23} \cdot p \cdot Z_1(p) \\ M_{12} \cdot M_{23} \cdot p^2 - M_{13} \cdot p \cdot Z_2(p) & M_{12} \cdot M_{13} \cdot p^2 - M_{23} \cdot p \cdot Z_1(p) & Z_1(p) \cdot Z_2(p) - M_{12}^2 \cdot p^2 \end{pmatrix} = \text{Дополнения}_Z_{\text{трансп}}$$

Раскроем матрицу:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \text{Дополнения}_Z_{\text{трансп}11} \\ \text{Дополнения}_Z_{\text{трансп}21} \\ \text{Дополнения}_Z_{\text{трансп}31} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \left( R_2 + L_2 \cdot p + \frac{1}{C_2 \cdot p} \right) \cdot \left( R_3 + L_3 \cdot p + \frac{1}{C_3 \cdot p} \right) - M_{23}^2 \cdot p^2 \\ M_{13} \cdot M_{23} \cdot p^2 - M_{12} \cdot p \cdot \left( R_3 + L_3 \cdot p + \frac{1}{C_3 \cdot p} \right) \\ M_{12} \cdot M_{23} \cdot p^2 - M_{13} \cdot p \cdot \left( R_2 + L_2 \cdot p + \frac{1}{C_2 \cdot p} \right) \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} \text{Дополнения}_Z_{\text{трансп}12} \\ \text{Дополнения}_Z_{\text{трансп}22} \\ \text{Дополнения}_Z_{\text{трансп}32} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} M_{13} \cdot M_{23} \cdot p^2 - M_{12} \cdot \left( R_3 + L_3 \cdot p + \frac{1}{C_3 \cdot p} \right) \\ \left( R_1 + L_1 \cdot p + \frac{1}{C_1 \cdot p} \right) \cdot \left( R_3 + L_3 \cdot p + \frac{1}{C_3 \cdot p} \right) - M_{13}^2 \cdot p^2 \\ M_{12} \cdot M_{13} \cdot p^2 - M_{23} \cdot p \cdot \left( R_1 + L_1 \cdot p + \frac{1}{C_1 \cdot p} \right) \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} \text{Дополнения}_Z_{\text{трансп}13} \\ \text{Дополнения}_Z_{\text{трансп}23} \\ \text{Дополнения}_Z_{\text{трансп}33} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} M_{12} \cdot M_{23} \cdot p^2 - M_{13} \cdot p \cdot \left( R_2 + L_2 \cdot p + \frac{1}{C_2 \cdot p} \right) \\ M_{12} \cdot M_{13} \cdot p^2 - M_{23} \cdot p \cdot \left( R_1 + L_1 \cdot p + \frac{1}{C_1 \cdot p} \right) \\ \left( R_1 + L_1 \cdot p + \frac{1}{C_1 \cdot p} \right) \cdot \left( R_2 + L_2 \cdot p + \frac{1}{C_2 \cdot p} \right) - M_{12}^2 \cdot p^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Обратная}_Z = \frac{\text{Дополнения}_Z_{\text{трансп}}}{\text{Определитель}_Z}$$

$$\text{Обратная}_Z \cdot U(p) = \text{Обратная}_Z \cdot Z(p) \cdot i(p) \quad \text{Обратная}_Z \cdot Z(p) = E$$

$$\text{Обратная}_Z \cdot U(p) = i(p)$$

## Раздел 2. Дифференциальные уравнения:

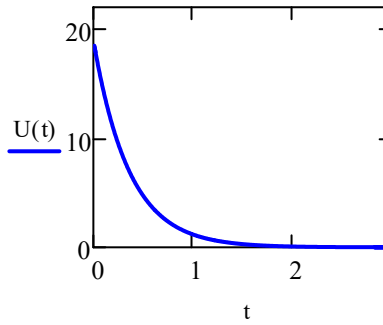
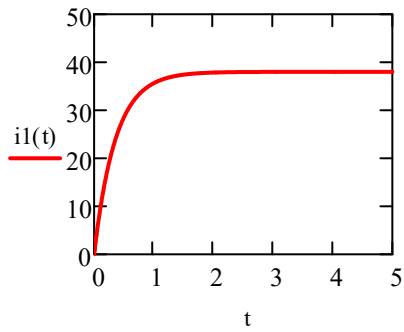
1.

**Цепь RL:**  $U := 19$      $R_1 := 0.5$      $L := 0.18$

Given

$$L \cdot \left( \frac{d}{dt} i_1(t) \right) + R_1 \cdot i_1(t) - U = 0$$

$$i_1(0) = 0 \quad i_1 := \text{Odesolve}(t, 5) \quad U(t) := L \cdot \left( \frac{d}{dt} i_1(t) \right)$$



Рассмотрим влияние активного сопротивления на ток в цепи:  $U := 19$      $R_2 := 1$      $R_3 := 2$

Given

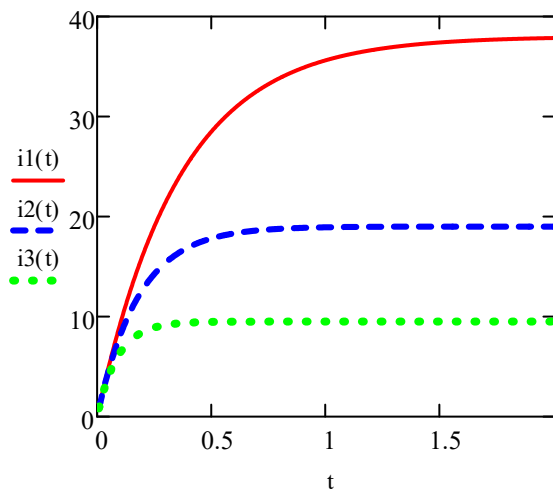
$$L \cdot \left( \frac{d}{dt} i_2(t) \right) + R_2 \cdot i_2(t) - U = 0$$

$$i_2(0) = 0 \quad i_2 := \text{Odesolve}(t, 5)$$

Given

$$L \cdot \left( \frac{d}{dt} i_3(t) \right) + R_3 \cdot i_3(t) - U = 0$$

$$i_3(0) = 0 \quad i_3 := \text{Odesolve}(t, 5)$$





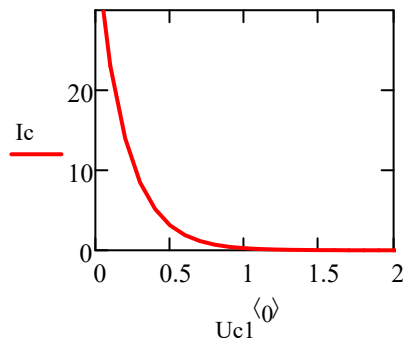
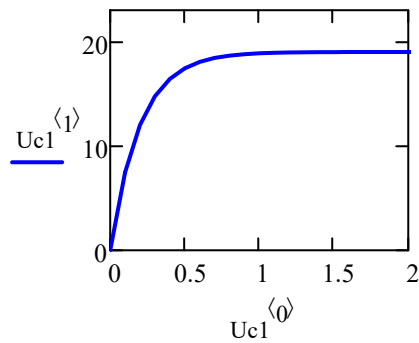
**Цепь RC:**  $U := 19$   $C := 0.4$   $R_1 := 0.5$

$$R_1 \cdot C \cdot \left( \frac{d}{dt} U_{c1}(t) \right) + U_{c1}(t) - U = 0$$

$$U_{c10} := 0 \quad D(t, U_{c1}) := \frac{U - U_{c1}}{R_1 \cdot C}$$

$$U_{c1} := \text{rkfixed}(U_{c10}, 0, 10, 100, D)$$

$$I_c := \frac{U - U_{c1}^{(1)}}{R_1}$$



Рассмотрим влияние активного сопротивления на напряжение в конденсаторе:  $U := 19$   $R_2 := 1$   $R_3 := 2$

$$R_2 \cdot C \cdot \left( \frac{d}{dt} U_{c2}(t) \right) + U_{c2}(t) - U = 0$$

$$R_3 \cdot C \cdot \left( \frac{d}{dt} U_{c3}(t) \right) + U_{c3}(t) - U = 0$$

$$U_{c20} := 0$$

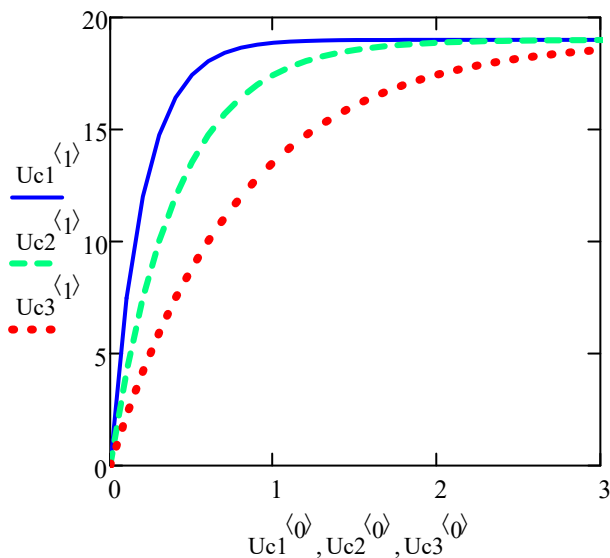
$$U_{c30} := 0$$

$$D2(t, U_{c2}) := \frac{U - U_{c2}}{R_2 \cdot C}$$

$$D3(t, U_{c3}) := \frac{U - U_{c3}}{R_3 \cdot C}$$

$$U_{c2} := \text{rkfixed}(U_{c20}, 0, 10, 100, D2)$$

$$U_{c3} := \text{rkfixed}(U_{c30}, 0, 10, 100, D3)$$



2.

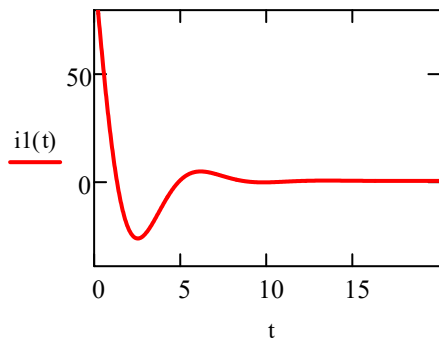
**Цепь RLC:**  $U_{\text{внеш}} := 10$   $L := 1$   $C := 1$   $R_1 := 1$   $R_2 := 0.5$   $R_3 := 2$

Given

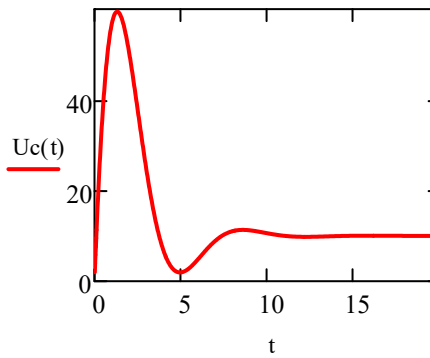
$$C \cdot R_1 \cdot \left( \frac{d}{dt} U_c(t) \right) + L \cdot C \cdot \frac{d^2}{dt^2} (U_c(t)) + U_c(t) - U_{\text{внеш}} = 0$$

$$U_c(0) = 0 \quad U_c'(0) = 100 \quad U_c := \text{Odesolve}(t, 50) \quad i_l(t) := C \cdot \left( \frac{d}{dt} U_c(t) \right)$$

Ток в цепи:



Напряжение на емкости:



Рассмотрим влияние активного сопротивления на ток в цепи:

Given

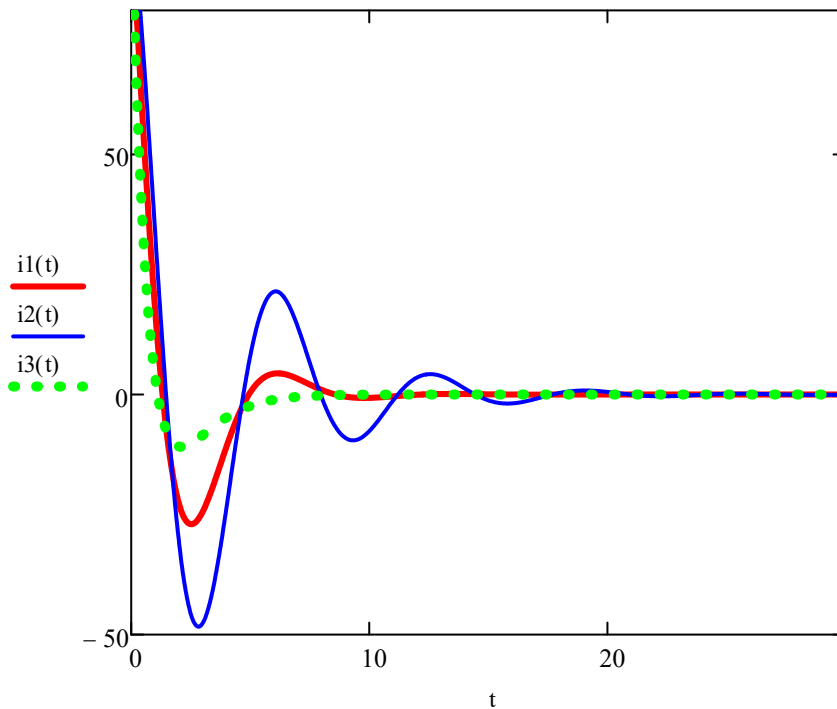
$$C \cdot R_2 \cdot \left( \frac{d}{dt} U_c(t) \right) + L \cdot C \cdot \frac{d^2}{dt^2} (U_c(t)) + U_c(t) - U_{\text{ВНЕС}} = 0$$

$$U_c(0) = 0 \quad U_c'(0) = 100 \quad U_c := \text{Odesolve}(t, 50) \quad i_2(t) := C \cdot \left( \frac{d}{dt} U_c(t) \right)$$

Given

$$C \cdot R_3 \cdot \left( \frac{d}{dt} U_c(t) \right) + L \cdot C \cdot \frac{d^2}{dt^2} (U_c(t)) + U_c(t) - U_{\text{ВНЕС}} = 0$$

$$U_c(0) = 0 \quad U_c'(0) = 100 \quad U_c := \text{Odesolve}(t, 50) \quad i_3(t) := C \cdot \left( \frac{d}{dt} U_c(t) \right)$$



### Раздел 3. Теория вероятности и математическая статистика

$\text{rnd}(x) \quad k := 1..10 \quad V_k := \text{rnd}(10) \quad \text{ORIGIN} := 1$

$k := (8.76 \ 9.559 \ 5.393 \ 4.621 \ 8.622 \ 7.797 \ 9.968 \ 6.115 \ 2.662 \ 8.401)^T$

Математическое ожидание:

$$\text{mean}(k) = 7.19$$

$$\frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} k_i = 7.19$$

Ручной счет:

$$\text{Средне\_ариф} := \frac{(8.76 + 9.559 + 5.393 + 4.621 + 8.622 + 7.797 + 9.968 + 6.115 + 2.662 + 8.401)}{10} = 7.19$$

$$i := 1 \dots 10$$

$$D_i := k_i - 7.19 \quad D^T \text{ float,3} \rightarrow (1.57 \ 2.37 \ -1.8 \ -2.57 \ 1.43 \ 0.607 \ 2.78 \ -1.07 \ -4.53 \ 1.21)$$

$$\text{Дисперсия} := \frac{[1.57^2 + 2.37^2 + (-1.8)^2 + (-2.57)^2 + 1.43^2 + 0.607^2 + 2.78^2 + (-1.07)^2 + (-4.53)^2 + 1.21^2]}{10} = 5.12$$

Среднеквадратичное отклонение:

$$\text{cvar}(k, k) = 5.117$$

$$\frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} [(k_i)^2 - \text{mean}(k)^2] = 5.117$$

Ручной счет:

$$D1_i := (k_i)^2 - 7.19^2 \quad D1^T \text{ float,3} \rightarrow (25.0 \ 39.7 \ -22.6 \ -30.3 \ 22.6 \ 9.1 \ 47.7 \ -14.3 \ -44.6 \ 18.9)$$

$$\text{СреднеКв\_Отклон} := \frac{[25.0 + 39.7 + (-22.6) + (-30.3) + 22.6 + 9.1 + 47.7 + (-14.3) + (-44.6) + 18.9]}{10} = 5.12$$

$$\sqrt{\text{Дисперсия}} = 2.263 \quad \sqrt{\text{СреднеКв\_Отклон}} = 2.263$$

Плотность распределение вероятности:

$$P_i := \frac{k_i}{\sum_{i=1}^{10} k_i} \quad P^T \text{ float,3} \rightarrow (0.122 \ 0.133 \ 0.075 \ 0.0643 \ 0.12 \ 0.108 \ 0.139 \ 0.0851 \ 0.037 \ 0.117)$$

$$k := (8.76 \ 9.559 \ 5.393 \ 4.621 \ 8.622 \ 7.797 \ 9.968 \ 6.115 \ 2.662 \ 8.401)^T$$

$$P(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x < 2 \\ 0.037 & \text{if } 2 \leq x < 4 \\ (0.075 + 0.0643) & \text{if } 4 \leq x < 6 \\ (0.108 + 0.0851) & \text{if } 6 \leq x < 8 \\ (0.122 + 0.133 + 0.12 + 0.139 + 0.117) & \text{if } 8 \leq x < 10 \end{cases}$$

Дисперсия:

$$\text{var}(k) = 5.117$$

$$\frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} (k_i - \text{mean}(k))^2 = 5.117$$

Среднеквадратичное значение отклонения:

$$\text{stdev}(k) = 2.262$$

$$\sqrt{\text{var}(k)} = 2.262$$

$$\sqrt{\text{cvar}(k, k)} = 2.262$$

Функция распределение вероятности:

$$F(q) := \begin{cases} 0 & \text{if } -\infty < q < 0 \\ 0 & \text{if } 0 \leq q < 2 \\ 0.037 & \text{if } 2 \leq q < 4 \\ 0.037 + (0.075 + 0.0643) & \text{if } 4 \leq q < 6 \\ 0.037 + (0.075 + 0.0643) + (0.108 + 0.0851) & \text{if } 6 \leq q < 8 \\ 0.037 + (0.075 + 0.0643) + (0.108 + 0.0851) + (0.122 + 0.133 + 0.12 + 0.139 + 0.117) & \text{if } 8 \leq q < 10 \\ 1 & \text{if } 10 \leq q < \infty \end{cases}$$

