

**ВАРИАНТ 1.**

1. Случайная величина  $X$  распределена по закону Релея:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = \ln X$ .

2. Найти  $P(X_1 - X_2 > -1)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (0, 2), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1.5 \\ -1.5 & 3 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 2.**

1. Случайная величина  $X$  распределена по закону Коши:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найти плотность распределения случайной величины  $Y = \arctg X$ .

2. Найти  $P(X_1 - X_2 > 1.1)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (3, 1), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.45 \\ 0.45 & 0.71 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 3.**

1. Значения острого угла ромба со стороной  $a$  распределены равномерно в интервале  $(0, \pi/2)$ . Найти плотность распределения вероятностей площади ромба.

2. Найти  $P(X_1 - X_2 > 0)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (-0.15, 0), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 4.**

1. Случайная величина  $X$  имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = X^3$ .

2. Найти  $P(X_1 - X_2 > 2\sqrt{6})$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (0.5, 0.5), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 5.**

1. Плотность распределения случайной величины  $X$  имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = b^2 - X^2$ , если  $b > a$ .

2. Найти  $P(X_1 - X_2 > -1)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (0, 5), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 6.**

1. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину  $X$ , распределенную равномерно в интервале  $(0, 1)$ , чтобы получить случайную величину  $Y$ , распределенную по экспоненциальному закону с параметром  $\lambda > 0$ ?

2. Найти  $P(0 < X_1 < 2 | X_2 = 2)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (4, 3), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 7.**

1. Измеренное значение радиуса круга распределено по нормальному закону с математическим ожиданием  $m = 50$  и дисперсией  $\sigma^2 = 0.25$ . Найти плотность распределения площади круга и его среднюю площадь.

2. Найти  $P(0 < X_1 < 2 | X_2 = 2)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (1.5, 1.5), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 8.**

1. Найти закон распределения объема шара, если его радиус является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием  $m = 10$  и дисперсией  $\sigma^2 = 0.25$ .

2. Найти  $P(1 < X_1 < 2 | X_2 = 0.5)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (1, 1.5), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 5/3 & 25 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 9.**

1. Найти плотность распределения вероятностей объема куба, длина ребра которого является случайной величиной, распределенной равномерно в интервале  $(0, a)$ .

2. Найти  $P(-1 < X_1 < 1 | X_2 = \sqrt{3})$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (0, 0), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -4/\sqrt{3} \\ -4/\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 10.**

1. Пусть  $X$  и  $Y$  — независимые случайные величины, причем  $X \sim \text{Exp}(1/2)$ ,  $Y \sim \text{Exp}(1/3)$ . Найти функцию плотности распределения вероятностей случайной величины  $Z = X + Y$ .

2. Найти  $P(0 < X_1 < 9 | X_2 = 2)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (4, 0), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 48 & -24 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 11.**

1. Диаметр цилиндрического вала имеет погрешность изготовления, поэтому его измененное значение является случайной величиной, распределенной равномерно на интервале  $(a, b)$ . Найти плотность распределения вероятностей площади поперечного сечения вала.

2. Найти  $P(X_2 > 2X_1)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (2, 1), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3/4 & -3/4 \\ -3/4 & 4 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 12.**

1. Прочность  $X$  некоторого образца имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием  $m_1 = 20$  МПа и дисперсией  $\sigma_1^2 = 1$  МПа<sup>2</sup>. На образец действует случайная нагрузка  $Y$ , распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием  $m_2 = 4$  МПа и дисперсией  $\sigma_2^2 = 4$  МПа<sup>2</sup>. Найти вероятность разрушения образца, то есть вероятность события  $\{X > Y\}$ .

2. Найти  $P(X_2 > 2X_1)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (6, 10), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 13.**

1. На окружность радиуса  $R$  случайным образом брошены две точки. Считая, что длина хорды, соединяющей эти точки, является равномерно распределенной случайной величиной, найти плотность распределения вероятностей длины кратчайшей дуги между брошенными точками.

2. Найти  $P(X_2 > 2X_1)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (0.6, 0.3), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.81 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 14.**

1. Угол  $\lambda$  сноса самолета вычисляется по формуле

$$\lambda = \arcsin\left(\frac{u}{v} \sin \varepsilon\right),$$

где  $\varepsilon$  — угол действия ветра,  $u$  — скорость ветра,  $v$  — скорость самолета в воздухе ( $u$  и  $v$  измеряются в одинаковых единицах). Считая, что значения угла действия ветра распределены равномерно в интервале  $(-\pi, \pi)$ , найти плотность распределения вероятностей угла сноса при  $u = 20$  м/с,  $v = 720$  км/ч.

2. Найти  $P(X_2 > 2X_1)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (2, 1), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 15.**

1. У центробежного регулятора стороны равны и составляют так называемый "параллелограмм" регулятора, острый угол  $\varphi$  которого является случайной величиной, распределенной равномерно в интервале  $(\pi/6, \pi/4)$ . Найти закон распределения длин диагоналей параллелограмма регулятора, если его сторона равна  $a$ .

2. Найти  $P(X_2 > 2X_1)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (2, 7), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 16.**

1. Найти функцию распределения случайной величины  $Y = kX$ ,  $k > 0$ , если  $X \sim \text{Exp}(2)$ .

2. Найти  $P(|X_2| < 3 | X_1 = 0)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (0, 2), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 48 & -24 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 17.**

1. Найти функциональное преобразование, которому надо подвергнуть случайную величину  $X \sim R(0, \pi)$ , чтобы получить случайную величину  $Y$ , распределенную по закону Коши:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

2. Найти  $P(|X_2| < 5.5 | X_1 = 1)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (5, 2), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.25 \\ -0.25 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 18.**

1. Измеренное значение  $X$  стороны квадрата является случайной величиной, плотность распределения которой

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \notin (0, \pi). \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей площади квадрата.

2. Найти  $P(|X_2| < 8\sqrt{2}/3 | X_1 = 10)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (10, 0), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 40 & -8\sqrt{10} \\ -8\sqrt{10} & 48 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 19.**

1. Случайная величина  $V$  — скорость молекул газа массы  $m$  — при абсолютной температуре  $T$  распределено по закону Максвелла-Больцмана:

$$f_V(v) = \lambda v^2 \exp(-\beta v^2), \quad v > 0,$$

где  $\beta = m/(2kT)$ ,  $k$  — постоянная Больцмана, а  $\lambda$  — нормирующий множитель. Найти значение  $\lambda$  и плотность распределения случайной величины  $E = mV^2/2$  — кинетической энергии газа массы  $m$  при температуре  $T$ .

2. Найти  $P(|X_2| < 0.6 | X_1 = 4)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (1, 1.5), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -0.54 \\ -0.54 & 1.08 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 20.**

1. Случайная величина  $X$  распределена равномерно в интервале  $(0, 2)$ . Найти значения математического ожидания и дисперсии случайных величин

$$Y = -4X, \quad Z = X - Y, \quad V = X + 2Y - 3Z - 1.$$

2. Найти  $P(|X_2| < 1 | X_1 = 3)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (1, 0.2), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 21.**

1. Пусть  $X \sim R(0, 20)$ ,  $Y \sim \text{Exp}(1/2)$ ,  $\rho(X, Y) = -0.8$ . Найти вектор средних и корреляционную матрицу случайного вектора  $(U, V)$ , если  $U = 2X - 3Y + 5$ ,  $V = -3X + Y + 1$ .

2. Найти  $P(3X_2 - X_1 > 0)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (3, 3), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1/2 \\ -1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 22.**

1. По сторонам прямого угла  $xOy$  скользит линейка длины 1, занимая случайное положение, причем случайная величина  $X$  — абсцисса точки опоры линейки на ось  $Ox$  — равномерно распределена в интервале  $(0, 1)$ . Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $R$  — расстояния от начала координат до линейки.

2. Найти  $P(3X_2 - X_1 > 0)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (1, 1), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1/3 \\ -1/3 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 23.**

1. Время  $T$  безотказной работы приборов некоторого типа является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Считая, что затраты  $C$  на обслуживание прибора обратно пропорциональны времени их безотказной работы, то есть  $C = a/T$ ,  $a > 0$ , найти закон распределения случайной величины  $C$ .

2. Найти  $P(3X_2 - X_1 > 0)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (0, -0.3), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 \\ 1/6 & 0.09 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 24.**

1. Найти вектор средних, ковариационную и корреляционную матрицы случайного вектора  $(X, Y)$ , если  $X \sim R(-1, 3)$ ,  $Y = 4 - 3X$ .

2. Найти  $P(3X_2 - X_1 > 0)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (4, 2), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 4/3 \\ 4/3 & 4 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 25.**

1. Найти вектор средних, ковариационную и корреляционную матрицы случайного вектора  $(U, V)$ , если  $U = X + 3Y - 2$ ,  $V = 2X - Y + 1$ ,  $M[X] = 1$ ,  $D[X] = 5$ ,  $M[Y] = -2$ ,  $D[Y] = 4$ ,  $\text{cov}(X, Y) = 3$ .

2. Найти  $P(3X_2 - X_1 > 0)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (0, 1), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 16 & -2/3 \\ -2/3 & 16/9 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 26.**

1. На положительную часть оси абсцисс прямоугольной декартовой системы координат  $xOy$  случайным образом бросают точку  $M_x$ , а на положительную часть оси ординат — точку  $M_y$ . Найти математическое ожидание и дисперсию квадрата расстояния между этими точками, если  $|OM_x| \sim R(0, a)$ ,  $|OM_y| \sim R(0, b)$ .

2. Найти  $P(5 < X_1 < 14 | X_2 = 1)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (4, -3), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	min
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 27.**

1. На отрезок  $[0, a]$  случайным образом бросают 2 точки. Найти закон распределения расстояния между ними, если их координаты являются случайными величинами, которые независимы и равномерно распределены на  $[0, a]$ .

2. Найти  $P(1 < X_1 < 3 | X_2 = 0.5)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (1, 4.5), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 5/3 & 5 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	$\min$
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 28.**

1. На окружность радиуса  $a$  с центром в начале декартовой системы  $Oxy$  случайным образом бросают точку  $M$ . Радиус-вектор точки  $M$  проецируется на ось абсцисс и на этой проекции (как на стороне) строится квадрат. Найти математическое ожидание и дисперсию площади этого квадрата, если значение полярного угла точки  $M$  равномерно распределено в интервале  $(0, 2\pi)$ .

2. Найти  $P(0 < X_1 < 2 | X_2 = 2)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (15, 15), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	$\min$
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 29.**

1. Прямая  $l$  располагается на плоскости  $Oxy$ , проходя через точку  $O$  и образуя угол в  $30^\circ$  с осью абсцисс. Пусть  $(X, Y)$  — случайный вектор, компоненты которого равны соответствующим координатам точки  $M$ , случайным образом брошенной на эту плоскость. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния от точки  $O$  до проекции точки  $M$  на прямую  $l$ , если известно, что  $M[X] = 2$ ,  $D[X] = 16$ ,  $M[Y] = 4$ ,  $D[Y] = 64$ ,  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .

2. Найти  $P(-1 < X_2 < 1 | X_1 = \sqrt{3})$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (0, 0), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -4/\sqrt{3} \\ -4/\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	$\min$
Баллы	2	3	5	3

**ВАРИАНТ 30.**

1. Через точку  $B(0, b)$  проводится прямая  $l$  под углом  $\varphi$  к оси ординат. Найти функцию плотности распределения вероятностей случайной величины  $X$  — абсциссы точки пересечения прямой  $l$  с осью абсцисс, — если  $\varphi \sim R(-\pi/2, \pi/2)$ .

2. Найти  $P(0 < X_2 < 9 | X_1 = 2)$ , если  $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$ , где

$$\vec{m} = (4, 0), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 48 & -24 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}.$$

b

№ задачи	1	2	$\Sigma = \max$	$\min$
Баллы	2	3	5	3