Министерство образования и науки Российской Федерации
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Балаковский инженерно-технологический институт

МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению контрольной работы 1
для студентов направления «Химическая технология»
заочной формы обучения

Балаково 2015

Введение

Изучение математики для инженерно-технических специальностей ставит следующие цели: ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических инженерно-технических задач; привить навыки самостоятельного изучения учебной литературы по математике и ее спецглавам; развить логическое мышление и выработать навыки математического исследования прикладных вопросов, а также научить составлять математические модели инженерных задач.

Методические указания к выполнению, оформлению и сдаче контрольных работ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил:

1. Студент должен выполнить контрольную работу по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки или студенческого билета.
2. Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного.
3. На титульном листе разборчиво пишутся фамилия и инициалы студента, учебный номер (шифр), название дисциплины, номер контрольной работы, название учебного заведения. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и подпись студента.
4. В работу включаются все задачи, указанные в задании, строго по своему варианту. Контрольные работы, содержащие лишь часть задания, а также задачи не своего варианта, не засчитываются и возвращаются студенту.
5. Решения задач надо располагать в порядке возрастания номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

6. Перед решением каждой задачи следует полностью записать ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными соответствующего номера.
7. Решения задач излагать подробно и записывать аккуратно, объясняя все действия и делая необходимые чертежи.
8. После получения проверенной работы (как не зачтенной, так и зачтенной) студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и недочеты.
9. Рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех исправлений и дополнений в соответствии с указаниями рецензента.

Содержание контрольной работы 1 и примеры выполнения задач

Темы контрольной работы 1

1. Линейная и векторная алгебра.
2. Аналитическая геометрия.
3. Комплексные числа.
4. Введение в математический анализ.
5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Основные теоретические сведения контрольной работы №1

Л и т е р а т у р а: [1], гл. I, II, III, IV, V,VI; [2], гл. I, II, III, IV, V, VI, VII; [3], гл. I, II, III, IV, V, VI, VII; [4], гл. I, II, III.

1. Совокупность чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов, называется матрицей.

Обозначают матрицу буквами $A, B, C, \ldots$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

A - матрица размером $m\times n$, $a_{11}, a_{12,\dots,} a_{mn}$ - элементы матрицы.

Коротко записывают так: $A=(a_{ij})$, где i - номер строки; j - номер столбца. Матрица размера $n\times n$ называется квадратной матрицей n-го порядка.

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ матрицы, элементы $a_{m1}, a_{m-1,2} \dots, a_{1,n}$ - побочную диагональ матрицы.

Квадратная матрица $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ называется единичной матрицей.

Матрица A^T, которая получается из данной матрицы A заменой строк столбцами, называется транспонированной к A:

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$, имеющей m строк и k столбцов, на матрицу $B=(b_{ij})$, имеющую k строк и n столбцов, называется матрица $C=AB=(c_{ij})$, имеющая m строк и n столбцов, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ik}b_{kj}$$

2. Определитель - это число, поставленное по определенным правилам в соответствие квадратной матрице. Обозначается $D=detA=\Delta$.

Определитель второго порядка:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (3)$$

Определитель третьего порядка вычисляется по правилу треугольника:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12} \qquad (4)$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя D n-го порядка называется определитель $n\text{-}1$ порядка, получаемый из данного определителя вычеркиванием i строки и j столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Например: $M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ - минор элемента a_{31} определителя D.

Алгебраическим дополнением A_{ij} какого-либо элемента a_{ij} называется его минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$, где i , j –номера строки и столбца элемента a_{ij}:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \qquad (5)$$

Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к матрице A, если выполняется равенство:

$$A^{-1}A=AA^{-1}=E \qquad (6)$$

Если определитель D матрицы A не равен нулю, то обратная матрица вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\tilde{A}\ , \qquad (7)$$

где $\tilde{A}$ - присоединенная матрица, составляется из алгебраических дополнений следующим образом:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

3. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1,x_2,x_3 имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 = & b_2 \\ a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 = & b_3 \end{cases} \qquad (9)$$

где a_{ij} – коэффициенты системы; b_i - свободные члены.

Определитель 3-го порядка D, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Решение системы методом Крамера: если определитель системы D не равен нулю, то решение находится по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}\ , \tag{10}$$

где определители D_1, D_2, D_3 вычисляются следующим образом:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Систему (9) можно записать в матричной форме:

$$AX=B, \tag{12}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (9) *матричным способом*: если определитель системы D не равен нулю, то решение системы имеет вид:

$$X=A^{-1}B. \tag{13}$$

4. Система линейных алгебраических уравнений называется однородной, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Однородная система всегда имеет нулевое решение: $x_1=0,\ x_2=0, \dots, x_n=0$.

5. Вектором называется отрезок с определенным на нем направлением.

Обозначается $\vec{a}, \vec{AB}$.

Координатами вектора $\vec{AB}$ в прямоугольной системе координат в пространстве называются его проекции на оси координат O_x, O_y, O_z.

Обозначается $\vec{AB} = \{X,\ \ Y,\ \ Z\}$,

где $X = np_{Ox}\vec{AB} = x_2 - x_1$; $Y = np_{Oy}\vec{AB} = y_2 - y_1$; $Z = np_{Oz}\vec{AB} = z_2 - z_1$, (15)

точка $A(x_1, y_1, z_1)$ - начало вектора; $B(x_2, y_2, z_2)$ - конец вектора.

Длина вектора вычисляется по формуле:

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\ . \tag{16}$$

Вектор может быть разложен по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, т.е. представлен в виде:

$$\vec{AB} = X\ \vec{i} + Y\ \vec{i} + Z\ \vec{k}\ . \tag{17}$$

6. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, определяемое равенством:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\varphi, \tag{18}$$

где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2, \tag{19}$$

где $\vec{a} = \{X_1,\ \ Y_1,\ \ Z_1\}$, $\vec{b} = \{X_2,\ \ Y_2,\ \ Z_2\}$.

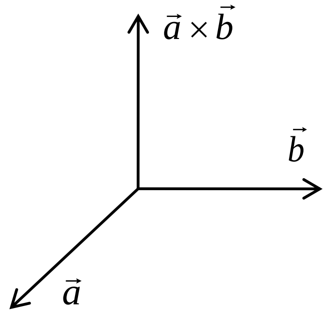

Рис.1. Векторное произведение

7. Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ (рис.1), обладающий свойствами:

1) длина вычисляется по формуле: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$,

где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ образуют правую тройку.

Выражение векторного произведения через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \qquad (20)$$

где X_1, $У_1$, Z_1 - координаты вектора $\vec{a}$; X_2, $У_2$, Z_2 - координаты вектора $\vec{b}$.

Геометрически длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S_{пар\text{-}ма}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \qquad (21)$$

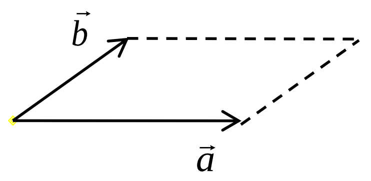

Рис.2. Параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

8. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ и векторного произведения $\vec{b}$ х $\vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{a}\,(\vec{b}\times\vec{c}). \qquad (22)$$

Выражение смешанного произведения векторов через их координаты:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} X_1 & \vec{Y}_1 & \vec{Z}_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \qquad (23)$$

где X_1, $У_1$, Z_1 - координаты вектора $\vec{a}$; X_2, $У_2$, Z_2 - координаты вектора $\vec{b}$; X_3, $У_3$, Z_3 - координаты вектора $\vec{c}$.

Модуль смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:

$$V_{пар-да} = \left| \vec{a}\,\vec{в}\,\vec{c} \right|. \tag{24}$$

9. Общее уравнение плоскости *S* имеет вид:

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{25}$$

где $\vec{N} = \{A, B, C\}$ - нормальный вектор плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0 \tag{26}$$

Угол между двумя плоскостями S_1 и S_2 определяется как угол между их нормальными векторами $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1\,\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{27}$$

10. Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \tag{28}$$

11. Полярная система координат представляет собой полюс *O* и полярную ось *OE* с выбранным на ней масштабом (рис.3).

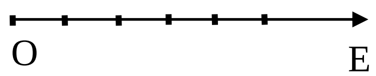

Рис.3. Полярная система координат

Произвольная точка *M* в полярной системе координат имеет две координаты (ρ, φ), где ρ - полярный радиус; φ - полярный угол (рис.4); $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

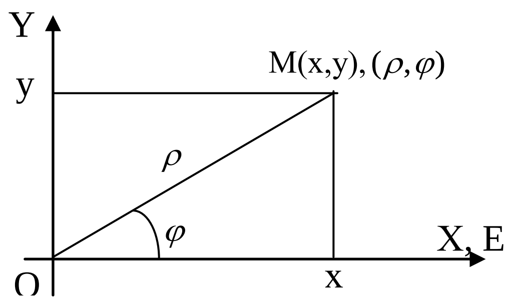

Рис.4. Координаты точки в полярной и прямоугольной системах координат

Рассмотрим полярную и прямоугольную системы координат такие, что полюс совпадает с началом координат, а полярная ось – с положительной полуосью Ox (рис.4).

Прямоугольные координаты (x,y) точки M и ее полярные координаты (ρ, φ) связаны соотношениями:

$$x = \rho cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (29)$$

12. Определение конечного предела в точке:

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех значений x из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначим $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, одновременно стремящиеся к нулю или к бесконечности при $x \to a$, называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$.

Предел отношения бесконечно малых (бесконечно больших) функций не изменяется, если каждую из них заменить эквивалентной функцией, т.е.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}, \qquad (30)$$

если $f(x) \infty f_1(x)$, $\varphi(x) \infty \varphi_1(x)$.

13. При вычислении пределов могут получаться неопределенности вида:

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^{∞}.

Элементарными приемами раскрытия неопределенностей являются:

1) сокращение на множитель, создающий неопределенность;

2) деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента;

3) применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших;

4) использование двух замечательных пределов:

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin(\alpha(x))}{\alpha(x)}=1 \qquad (31)$$

- I замечательный предел,

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e \qquad (32)$$

- II замечательный предел.

14. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x=a$, если предельное значение функции в точке $x=a$ равно ее значению $f(a)$:

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a). \qquad (33)$$

15. Выражение вида $z=x+iy=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется комплексным числом (в алгебраической и тригонометрической формах), i - мнимая единица, $i^2=-1$, $x=\operatorname{Re}z$ - действительная часть, $y=\operatorname{Im}z$ - мнимая часть комплексного числа z, ρ,φ - модуль и аргумент числа Z.

Если известны x и y, то ρ,φ находим по формулам:

$$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi=\arg z=\begin{cases} arctg\frac{y}{x},\ если\ x>0,\ y>0, \\ arctg\frac{y}{x}+\pi,\ если\ x>0,\ y<0, \\ arctg\frac{y}{x}-\pi,\ если\ x<0,\ y<0. \end{cases} \qquad (34)$$

Если известны ρ и φ, то x и y находим по формулам:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi. \qquad (35)$$

Извлечение корня *n-й* степени (*n* - натуральное число) из числа $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ $(z\neq 0)$ производится по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad (36)$$

где $\sqrt[n]{\rho}$ - арифметический корень из модуля ρ, *k = 0, 1,2,..., n-1.*

16. Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). Если *r* – радиус окружности, а точка *C (a, в)* – ее центр, то уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad (37)$$

Если центр окружности совпадает с началом координат, то ее уравнение

$$x^2+y^2=r^2. \qquad (38)$$

17. Эллипсом называется множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Если фокусы эллипса находятся на оси Ох на равных расстояниях от начала координат в точках $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$, то получится простейшее (каноническое) уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (39)$$

где a - большая полуось; b - малая полуось.

Формула связи между величинами a, b, c для эллипса

$$a^2=b^2+c^2 \qquad (40)$$

18. Гиперболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Если поместить фокусы гиперболы в точки $F_1(-c,\ 0)$ и $F_2(c,\ 0)$, то получится каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (41)$$

где a - действительная полуось; b- мнимая полуось; a, b, c связаны соотношением

$$a^2=c^2-b^2. \qquad (42)$$

19. Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Если директрисой параболы является прямая $x=-\frac{p}{2}$ (p – расстояние между фокусом и директрисой), а фокусом – точка $\left(\frac{p}{2},0\right)$, то уравнение параболы имеет вид:

$$y^2=2px. \qquad (43)$$

20. Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (44)$$

21. Таблица производных:

1. $(c)'=0$	2. $(x^n)'=nx^{n-1}$	3. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $(a^x)'=a^x\ln a$	5. $(e^x)'=e^x$	6. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$
7. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$	8. $(sinx)'=cosx$	9. $(cosx)'=-sinx$
10. $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	11. $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	12. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14. $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$	15. $(arcctgx)'=-\frac{2}{1+x^2}$

22. Правила дифференцирования

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (c \cdot u)' = c \cdot u', \quad (u \cdot v)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad (45)$$

23. Правило Лопиталя: Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций (неопределенность вида $0/0$ или ∞/∞) равен пределу отношения их производных:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (46)$$

если предел в правой части равенства существует.

24. Если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ или $f(x)>f(x_0)$, то x_0 называется точкой экстремума функции $f(x)$ (соответственно точкой максимума или минимума).

Необходимое условие экстремума: если x_0 – экстремальная точка дифференцируемой функции $f(x)$, то первая производная $f'(x_0) = 0$.

Достаточное условие экстремума: точка x_0 является экстремальной точкой $f(x)$, если ее первая производная $f'(x_0)$ меняет знак при переходе через точку x_0 с плюса на минус при максимуме, с минуса на плюс при минимуме.

25. Точка x_0 называется точкой перегиба кривой $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 меняется направление выпуклости.

Необходимое условие точки перегиба: пусть $y=f(x)$ – дважды дифференцируемая функция. Если точка $B(x_0,f(x_0))$ - точка перегиба кривой $y=f(x)$, то вторая производная $f''(x_0) = 0$.

Достаточное условие точки перегиба: точка $B(x_0,f(x_0))$ называется точкой перегиба кривой $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x_0)$ меняет знак.

26. Прямая $y=kx+b$ называется наклонной асимптотой кривой y=f(x), если расстояние от точки кривой до этой прямой стремится к нулю при $x \to \infty$. При этом

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) \qquad (47)$$

При к=0 имеем горизонтальную асимптоту: $y=b$.

Прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой, если

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty \ \text{ или } \lim_{x\to a+0} f(x)=\infty, \qquad (48)$$

27. Общая схема исследования функции и построения ее графика:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на симметричность и периодичность;
3) определить точки пересечения графика функции с координатными осями;
4) выяснить существование асимптот;
5) найти точки экстремума и промежутки монотонности;
6) найти точки перегиба и промежутки выпуклости;
7) построить график функции.

Примеры выполнения задач контрольной работы №1

Пример 1. По координатам вершин пирамиды $A_1(2,-3,1)$, $A_2(-1,-4,2)$, $A_3(4,-1,2)$, $A_4(3,-4,2)$ найти: 1) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

Р е ш е н и е. 1. Находим векторы $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}=(-1-2)\vec{i}+(-4+3)\vec{j}+(2-1)\vec{k}=-3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},$$

$$\overrightarrow{A_1A_3}=(4-2)\vec{i}+(-1+3)\vec{j}+(2-1)\vec{k}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}.$$

Длины этих векторов, т.е. длины ребер A_1A_2 и A_1A_3 таковы:

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{11},\qquad \left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\sqrt{9}=3.$$

2. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ находим по формуле (19):

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=(-3)\cdot 2+(-1)\cdot 2+1\cdot 1=-7.$$

Косинус угла между векторами находим по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|}=\frac{-7}{\sqrt{11}\cdot 3}=-\frac{7}{3\sqrt{11}}.$$

3. Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, т.е. половине длины векторного произведения этих векторов:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}-6\vec{k}+2\vec{k}+3\vec{j}-2\vec{i}=-3\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}$$

$$S_{\text{треугольника}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+5^2+(-4)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\,\textit{кв.ед.}$$

4. Объем V пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$.

Координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_4}=\{1,-1,1\}$,

$$V_{\text{пирамиды}}=\frac{1}{6}V_{\text{пар-да}}=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}-3 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\left(-3\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right)=\frac{1}{6}\operatorname{mod}(-3\cdot 3+1\cdot 1+1\cdot(-4))=$$

$$=\frac{1}{6}\operatorname{mod}(-12)=2\,\textit{куб.ед.}$$

Пример 2. Найти угол между плоскостью P_1, проходящей через точки $A_1(2,-3,1)$, $A_2(-1,-4,2)$, $A_3(4,-1,2)$ и плоскостью P_2, проходящей через точки A_1, A_2, $A_4(3,-4,2)$.

Р е ш е н и е. Находим уравнения плоскостей P_1 и P_2 по формуле (26):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -1-2 & -4+3 & 2-1 \\ 4-2 & -1+3 & 2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

(x-2)(-3)-(y+3)(-5)+(z-1)(-4)=0,

3x-5y+4z-25=0 - уравнение плоскости P_1,

$\vec{N}_1 = \{3,-5,4\}$ - ее нормальный вектор.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -1-2 & -4+3 & 2-1 \\ 3-2 & -4+3 & 2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

(x-2)0-(y+3)(-4)+(z-1)4=0,

y+z+2=0 - уравнение плоскости P_2, $\vec{N}_2 = \{0,1,1\}$ - ее нормальный вектор.

Угол φ между плоскостями находим по формуле (27)

$$\cos\phi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|} = \frac{3\cdot 0 + (-5)\cdot 1 + 4\cdot 1}{\sqrt{3^2+(-5)^2+4^2}\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{-1}{10}, \quad \varphi = \arccos(-\frac{1}{10}).$$

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точки *A₁(2,-3,1)* и *A₂(-1,-4,2)*.

Р е ш е н и е. Используя формулу (28), получаем:

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-(-3)}{-4-(-3)} = \frac{z-1}{2-1}, \qquad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-(-3)}{-1} = \frac{z-1}{1}$$ - уравнение искомой прямой.

Пример 4. С помощью формул Крамера найти решение системы:

$$\begin{cases} x_1 + \;\; 2x_2 + \;\; -3x_3 = \;\; -7 \\ 3x_1 + \;\; 2x_2 + \;\; -4x_3 = \;\; -4 \\ 2x_1 + \;\; -x_2 + \qquad = \;\; 7 \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Находим определитель системы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0-16+9+12-0-4 = 1.$$

Так как $D \neq 0$, то решение системы находим по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

Находим D_1, D_2, D_3:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -7 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & -4 \\ 7 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 56 - 12 + 42 - 0 + 28 = 2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -7 & -3 \\ 3 & -4 & -4 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 56 - 63 - 24 - 0 + 28 = -3,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 16 + 21 + 28 - 42 - 4 = 1.$$

Получаем решение системы: $x_1 = \dfrac{2}{1} = 2$, $\quad x_2 = \dfrac{-3}{1} = -3$, $\quad x_3 = \dfrac{1}{1} = 1$.

Пример 5. Найти решение системы из примера 4 с помощью обратной матрицы.

Р е ш е н и е. Для данной системы имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- матрица системы, столбец неизвестных и столбец свободных членов.

Определитель $D \neq 0$, следовательно, матрица A имеет обратную A^{-1}.

Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} (-1)^{1+1} = -4, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} (-1)^3 = -8,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} (-1)^4 = -7, \qquad A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} (-1)^3 = 3,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} (-1)^4 = 6, \qquad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} (-1)^5 = 5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} (-1)^4 = -2, \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} (-1)^5 = -5, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} (-1)^6 = -4.$$

Составим присоединенную матрицу $\tilde{A}$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица A^{-1} имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Матричное решение системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28-12-14 \\ 56-24-35 \\ 49-20-28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Откуда следует, что $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_3=1$ (в силу равенства двух матриц).

Пример 6. Найти полярные координаты точки $M(-3,-\sqrt{3})$.

Р е ш е н и е. Используя формулы (27), находим полярный радиус и полярный угол точки М:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-3)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12}, \quad \varphi = arctg\,\frac{y}{x} = arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{-3}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \\ \frac{7}{6}\pi \end{cases}.$$

Чтобы выяснить, какой из двух углов будет полярным углом точки М, надо изобразить точку $M(-3,-\sqrt{3})$ на координатной плоскости. Так как точка $M \in$III четверти, то $\varphi = \frac{7}{6}\pi$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(x-3)^2}{\arcsin(x-3)}$.

Р е ш е н и е. Подставляя вместо x его предельное значение, равное 3, получаем:

$$\lim_{x\to 3}\ln(x-3)^2 = \ln(3-3)^2 = \ln 0 = -\infty,$$

$\lim\limits_{x\to3}(\arcsin(x-3)) = \arcsin(3-3) = \arcsin 0 = 0$. Поэтому

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\ln(x-3)^2}{\arcsin(x-3)} = \dfrac{\infty}{0} = \infty$.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2+5x}{-4x^2+7}$.

Р е ш е н и е. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на старшую степень аргумента, т.е. на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+5x}{-4x+7} = \lim_{x\infty}\frac{\frac{12x^2}{x^2}}{\frac{-4x^2}{x^2}+\frac{7}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{12+\frac{5}{x}}{-4+\frac{7}{x^2}} = \frac{12+0}{-4+0} = -3.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin 8x}{(arctg2x)^2}$.

Р е ш е н и е. Для раскрытия получающейся здесь неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ используем метод замены бесконечно малых функций эквивалентными. Так как при $x\to0$ $\sin 8x \infty 8x$, $(arctg\,2x)^2 = arctg\,2x\cdot arctg\,2x \infty 2x\cdot2x = 4x^2$, то на основании формулы (30) находим

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin 8x}{(arctg2x)^2} = \lim_{x\to0}\frac{x\cdot8x}{4x^2} = 2.$$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to0}(4-3x)^{\frac{1}{6(x-1)}}$.

Р е ш е н и е. Здесь используется II замечательный предел:

$$\lim_{x\to0}(4-3x)^{\frac{1}{6(x-1)}} = \lim_{x\to0}(1-3x+3)^{\frac{1}{3-3x}\cdot\frac{1}{6(x-1)}\cdot(3-3x)} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{3-3x}{6(x-1)}} = e^{\frac{-1}{2}}.$$

Пример 11. Изобразить на комплексной плоскости числа:

$$1)\ z_1 = -4-4i;\ 2)\ z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Записать число z_1 в тригонометрической, а число z_2 - в алгебраической форме.

Р е ш е н и е. Для числа z_1 имеем $x_1 = \operatorname{Re} Z_1 = -4$, $y_1 = \operatorname{Im} z_1 = -4$.

Откладывая по оси Ox $x_1 = -4$, а по оси Oy $y_1 = -4$, получаем точку комплексной плоскости, соответствующую числу z_1.

Найдем модуль и аргумент числа z_1:

$$\rho_1 = |z_1| = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2} = \sqrt{32},$$

$$\varphi = arctg\frac{y}{x} - \pi = arctg\left(\frac{-4}{-4}\right) - \pi = arctg1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}.$$

Тригонометрическая форма z_1 имеет вид: $z_1 = \sqrt{32}\left(\cos\frac{3}{4}\pi - i\sin\frac{3}{4}\pi\right).$

Модуль числа z_2 равен $\rho_2 = 3$, а аргумент $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$.

Для изображения этого числа на комплексной плоскости проводим из полюса луч под углом $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$ к полярной оси и откладываем на нем отрезок длиной $\rho_2 = 3$. Полученная точка соответствует числу z_2.

Действительная часть и мнимая части z_2:

$$\operatorname{Re} Z_2 = x_2 = \rho_2\cos\varphi_2 = 3\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{Im} Z_2 = y_2 = \rho_2\sin\varphi_2 = 3\sin\frac{3\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, алгебраическая форма числа z_2 имеет вид $z_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Пример 12. Вычислить $\sqrt[3]{z_2}$ (см. пример 11).

Р е ш е н и е. Используя формулу, получаем

$$\sqrt[3]{z_2}=\sqrt[3]{3\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)}=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2\pi k}{3}\right)\quad,\quad k=0,\ 1,\ 2.$$

При $k=0$ $\quad \sqrt[3]{z_2}=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{3\pi}{12}+i\sin\frac{3\pi}{12}\right)=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$

при $k=1$ $\quad \sqrt[3]{z_2}=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right),$

при $k=2$ $\quad \sqrt[3]{z_2}=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+4\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right).$

Пример 13. Исследовать на экстремум функцию $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Р е ш е н и е. Находим первую производную: $y'=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

Из уравнений $y'=0$ и $y'=\infty$ получаем точки возможного экстремума: $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=1$. Исследуем их, определяя знак первой производной слева и справа от каждой точки. Для наглядности результаты представим в виде таблицы 1:

Таблица 1

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	-	∞	-	0	+
y	возр.	max	убыв.	не опр.	убыв.	min	возр.

В первой строке указаны интервалы, на которые область определения функции разбивается точками x_1, x_2, x_3, и сами эти точки. Во второй строке указаны знаки производной y' в интервалах монотонности. В третьей строке приведено заключение о поведении функции и ее значения в экстремальных точках.

Исследуемая функция, как следует из таблицы 1, имеет максимум в точке $x=0$ $(y(0)=0)$ и минимум в точке $x=2$ $(y(2)=4)$. Точка $x=1$ не является точкой экстремума, так как функция не определена в этой точке.

Пример 14. Найти асимптоты функции $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Р е ш е н и е. Точка $x=1$ является точкой разрыва функции.

Так как $\lim\limits_{x \to 1\pm} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$, то прямая $x=1$ служит вертикальной асимптотой данного графика.

Ищем наклонные асимптоты $y=kx+b$, используя формулы (47):

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{2x-1} = 1 ,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} (\frac{x^2}{x-1} - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=x+1$.

Пример 15. Построить график функции $y = \frac{x^2}{x-1}$, используя общую схему исследования функции.

Р е ш е н и е. 1. Область определения: $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. Функция не является симметричной и периодической.

3. График функции имеет одну вертикальную асимптоту $x=1$ и одну наклонную асимптоту $y=x+1$ (пример 14).

4. График пересекает оси в точке $(0,0)$.

5. Как было показано выше (пример 13), функция имеет один максимум при $x=0$ и один минимум при $x=2$.

6. Вторая производная

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

ни в одной точке не равна нулю и обращается в бесконечность при $x=1$.

При переходе через точку $x=1$ направление выпуклости изменяется (табл. 2), но эта точка не является точкой перегиба (функция в ней не определена).

Таблица 2

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$y^{//}$	-	∞	+
y	$\cap$	не опр.	$\cup$

Учитывая полученные результаты, строим график функции (рис.5).

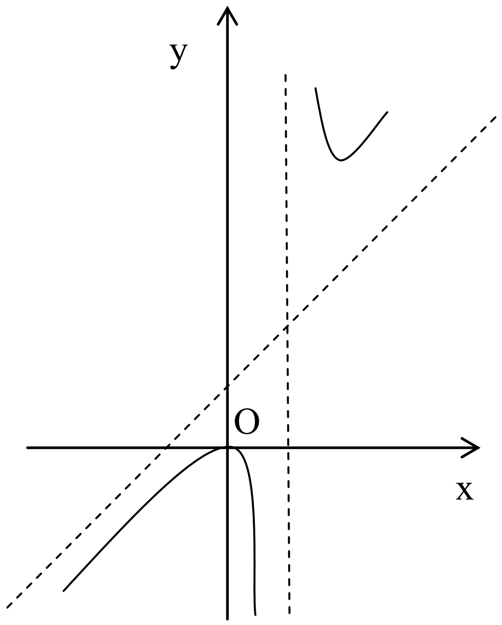

Рис.5. График функции

Задания контрольной работы №1

Задание I. По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти: 1) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4)объем пирамиды; 5) уравнения прямых A_1A_2 и A_1A_3; 6) уравнения плоскостей $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$; 7) угол между плоскостями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$.

1. $A_1(-1; 2; 1)$, $A_2(-2; 2; 5)$, $A_3(-3; 3; 1)$, $A_4(-1; 4; 3)$.
2. $A_1(-1; 1; -1)$, $A_2(-3; 1; 3)$, $A_3(-4; 2; -1)$, $A_4(-2; 3; 1)$.
3. $A_1(1; 1; 2)$, $A_2(0; 1; 6)$, $A_3(-1; 2; 2)$, $A_4(1; 3; 4)$.
4. $A_1(-1; -2; 1)$, $A_2(-2; -2; 5)$, $A_3(-3; -1; 1)$, $A_4(-1; 0; 3)$.
5. $A_1(2; -1; 1)$, $A_2(1; -1; 5)$, $A_3(0; 0; 1)$, $A_4(2; 1; 3)$.

6. $A_1(-1; 1; -2)$, $A_2(-2; 1; 2)$, $A_3(-3; 2; -2)$, $A_4(-1; 3; 0)$.

7. $A_1(1; 2; 1)$, $A_2(0; 2; 5)$, $A_3(-1; 3; 1)$, $A_4(1; 4; 3)$.

8. $A_1(-2; -1; 1)$, $A_2(-3; -1; 5)$, $A_3(-4; 0; 1)$, $A_4(-2; 1; 3)$.

9. $A_1(1; -1; 2)$, $A_2(0; -1; 6)$, $A_3(-1; 0; 2)$, $A_4(1; 1; 4)$.

10. $A_1(1; -2; 1)$, $A_2(0; -2; 5)$, $A_3(-1; -1; 1)$, $A_4(1; 0; 3)$.

Задание II. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется найти ее решение: 1) с помощью формул Крамера; 2) средствами матричного исчисления; 3) методом Гаусса.

11. $\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1-3x_2+3x_3=1 \\ x_2-5x_3=-9 \end{cases}$; 12. $\begin{cases} -2x_2-5x_3=-12 \\ -2x_1-x_2+3x_3=7 \\ -x_1+x_2+x_3=4 \end{cases}$;

13. $\begin{cases} -3x_1+x_2+3x_3=10 \\ -2x_2-x_3=-4 \\ 2x_1-x_2+3x_3=3 \end{cases}$; 14. $\begin{cases} -x_1+2x_3=5 \\ 2x_1+2x_2+5x_3=10 \\ 3x_1-2x_2+2x_3=-1 \end{cases}$;

15. $\begin{cases} 2x_1-x_2-6x_3=-15 \\ 3x_1-x_2+x_3=-2 \\ -x_1+3x_3=7 \end{cases}$; 16. $\begin{cases} -x_1+x_2-x_3=0 \\ 3x_1-4x_2+3x_3=-1 \\ -2x_2-3x_3=-8 \end{cases}$;

17. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-1 \\ -x_1+3x_3=7 \\ x_1+x_2+3x_3=6 \end{cases}$; 18. $\begin{cases} 3x_1-2x_2=-5 \\ x_1-2x_2+x_3=-1 \\ x_1+3x_2-x_3=0 \end{cases}$;

19. $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=-2 \\ x_1-2x_2-4x_3=-11 \\ -2x_1-x_2=1 \end{cases}$; 20. $\begin{cases} -x_1+3x_3=4 \\ 3x_1-2x_2+x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-x_3=-3 \end{cases}$.

Задание III. Вычислить пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

21. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x}{-5x^2+x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\ln(x+4)}{ctg(x+2)}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{e^{x^2}-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to-1}(3+2x)^{5/(x+1)}$.

22. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2+7x+2}{x^2-5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0,5-0}\frac{2x-1}{\ln(0,5-x)}$; 3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\arcsin(4-x)}{\ln(x-3)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x^2\right)^{1/\left(2x^2\right)}$.

23. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x^2-x}{3x^2+7x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x}{1-\cos(2/x)}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{tg(\pi/4+\pi x/4)}{e^{x+1}-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 4}(5-x)^{-2/(x-4)}$.

24. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x+5}{-5x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{\sin(3x-1)}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 3x)}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to -3}(7+2x)^{4/(x+3)}$.

25. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2-x}{22x^2+3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{e^{x-3}}{x^2-5x+6}$; 3) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\frac{tg^2(\pi-3x)}{(3x-\pi)^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{-3/(4-2x)}$.

26. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^2+5x+2}{x^2+4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{x+1}}{\ln(1+\frac{1}{x^2})}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ctg(\pi x/2)}{x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-5x^2\right)^{-3/x^2}$.

27. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^2+5x}{x^2+4x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin(1/x)}{3x^2+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{\ln(1-3x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to -4}(9+2x)^{6/(x+4)}$.

28. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x-1}{-2x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(\pi/2-2x)}{\sin 5x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{1-tgx}{\sin(\pi/4-x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}(-3-2x)^{-2/(x+2)}$.

29. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-7x^2+4x}{3x^2-x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{ctg(x-3)}{2^x}$; 3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+4}{\arcsin(x+2)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{-3/(x-1)}$.

30. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-3x-1}{-4x^2+2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x-3}{tg(x+1)}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{e^{-x^2}-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{1/(6-2x)}$.

Задание IV. Найти алгебраическую и тригонометрическую формы числа $z = z_1+z_2$. Изобразить числа z_1, z_2, z на комплексной плоскости. Вычислить z^{12} по формуле Муавра.

31. $z_1=-2$, $z_2=2(cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3))$.

32. $z_1=-2i$, $z_2=2(cos(5\pi/6)+i\sin(5\pi/6))$.

33. $z_1=-2$, $z_2=2(cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))$.

34. $z_1=-2i$, $z_2=2(cos(11\pi/12)+i\sin(11\pi/12))$.

35. $z_1=2$, $z_2=2(cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3))$.

36. $z_1=-2i$, $z_2=2(cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6))$.

37. $z_1=2$, $z_2=2(cos(5\pi/3)+i\sin(5\pi/3))$.

38. $z_1=2i$, $z_2=2(cos(7\pi/6)+i\sin(7\pi/6))$.

39. $z_1=2$, $z_2=2(cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3))$.

40. $z_1=-2$, $z_2=2(cos(5\pi/6)+i\sin(5\pi/6))$.

Задание V. Найти производные первого порядка.

41. 1) $y=\dfrac{7}{5\sqrt[7]{x^5}}$, 2) $y=\sin^4\left(x/4\right)$, 3) $y=e^{arctg\left(x/3\right)}$,

4) $x=arctg\left(t^2\right), y=\ln\left(1+t^4\right)$.

42. 1) $y=\dfrac{4}{3\sqrt[4]{x^3}}$, 2) $y=tg^5\left(2x/5\right)$, 3) $y=\cos(\ln(1-x^2))$,

4) $x=\arccos t, y=\sqrt{(1-t^2)^3}$.

43. 1) $y=\dfrac{5}{6\sqrt[5]{x^6}}$, 2) $y=\cos^3\left(4x/3\right)$, 3) $y=ctg\left(e^{7x}\right)$,

4) $x=\ln(5-2t), y=arctg(5-2t)$.

44. 1) $y=\dfrac{3}{7\sqrt[3]{x^7}}$, 2) $y=ctg^4\left(x/4\right)$, 3) $y=\arcsin\sqrt[3]{4-5x}$,

4) $x=te^{-4t}, y=(1-4t)^2$.

45. 1) $y=\dfrac{3}{4\sqrt[3]{x^4}}$, 2) $y=\ln^5\left(x/5\right)$, 3) $y=e^{\arcsin(2x-4)}$,

4) $x=tg(1-2t), y=\dfrac{1}{\cos^2(1-2t)}$.

46. 1) $y=\dfrac{5}{7\sqrt[5]{x^7}}$, 2) $y=\arcsin^4\left(5x/3\right)$, 3) $y=\ln(x-\cos 3x)$,

4) $x=\sin^3 t, y=\cos^3 t-4$.

47. 1) $y=\dfrac{4}{5\sqrt[4]{x^5}}$, 2) $y=\arccos^4\left(\dfrac{5x}{4}\right)$, 3) $y=\sin\ln\left(x^3+1\right)$,

4) $x=te^{-5t}, y=(5t-1)^2$.

48. 1) $y=\dfrac{6}{5\sqrt[6]{x^5}}$, 2) $y=arcctg^5\left(2x/5\right)$, 3) $y=tg\left(e^{5-2x}\right)$,

4) $x=\cos^3(2t), y=\sin^3(2t)$.

49. 1) $y=\dfrac{7}{6\sqrt[7]{x^6}}$, 2) $y=arctg^3\left(4x/3\right)$, 3) $y=\ln\left(2-\cos^2 x\right)$,

4) $x=\dfrac{1}{\sin^2(2t)}, y=tg(3t)$.

50. 1) $y=\dfrac{5}{4\sqrt[5]{x^4}}$, 2) $y=\sin^4\left(e^x/4\right)$, 3) $y=\ln\left(3x^2-tg2x\right)$,

4) $x=\sqrt{1-t^2}, y=\arcsin t$.

Задание VI. Построить график функции $y=f(x)$.

51. $y=x^3+6x^2+9x+4$
52. $y=x^3+3x^2-9x+5$
53. $y=x^3+6x^2-15x+8$
54. $y=x^3-3x^2-24x-28$
55. $y=x^3+12x^2+45x+50$
56. $y=x^3-6x^2+9x-4$
57. $y=x^3-3x^2-9x-5$
58. $y=x^3-6x^2-15x-8$
59. $y=x^3+3x^2-24x+28$
60. $y=x^3-12x^2+45x-50$

Таблица вариантов

Вариант	Номера заданий
1	1 11 21 31 41 51
2	2 12 22 32 42 52
3	3 13 23 33 43 53
4	4 14 24 34 44 54
5	5 15 25 35 45 55
6	6 16 26 36 46 56
7	7 17 27 37 47 57
8	8 18 28 38 48 58
9	9 19 29 39 49 59
10	10 20 30 40 50 60

Список основной и дополнительной литературы

Основная

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. - 11 изд. – М.: Айрис-пресс, 2013. - 608 с.
2. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. С контрольными работами. 1 курс. Учебное пособие / Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 576 с.

Дополнительная

3. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч.: учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко [и др.]. - 7-е изд., испр. - М.: Мир и Образование: Астрель: Оникс, Ч. 1. - 2012. - 368 с.
4. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу: Учебное пособие. – 6-е изд., стер. - СПб.: Издательство «Лань», 2014. – 464 с.

Содержание

МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению контрольной работы 1
для студентов направления «Химическая технология»
заочной формы обучения

Составила Барановская Лариса Вакифовна