Занятие 3. Матричное представление графов

Основные определения

Развитие алгоритмических подходов к анализу свойств графов требует определенных способов описания графов, более пригодных для практических вычислений, в том числе с использованием ЭВМ. Рассмотрим три наиболее распространенных способа представления графов.

Предположим, что все вершины и все ребра неориентированного графа или все вершины и все дуги (включая петли) ориентированного графа пронумерованы начиная с единицы. Граф (неориентированный или ориентированный) может быть представлен в виде матрицы типа $n \times m$ где n – число вершин, а m – число ребер (или дуг). Для неориентированного графа элементы этой матрицы задаются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если для вершины } i, \text{ребро } j \text{ инцидентно} \\ 0, \text{в других случаях} \end{cases}$$

Для ориентированного графа элементы матрицы задаются так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если для вершины } i, \text{дуга } j \text{ выходящая} \\ 0, \text{в других случаях} \\ -1, \text{если для вершины } i \text{ дуга } j \text{ входящая} \end{cases}$$

Матрицу, определенную указанным образом, называют *матрицей инцидентности*.

Несмотря на то, что представление графа в виде матрицы инцидентности играет весьма большую роль в теоретических исследованиях, практически этот способ весьма неэффективен. В матрице в каждом столбце только два ненулевых элемента, что делает этот способ представления графа неэкономным при большом количестве вершин.

Более эффективной матричной структурой, представляющей граф, служит матрица смежности вершин. Это квадратная матрица В порядка n, элементы которой определяют следующим образом:

для неориентированного графа: $b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i \text{ и } j \text{ смежные} \\ 0, \text{в других случаях} \end{cases}$

для ориентированного графа: $b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если из вершины } i \text{ в } j \text{ есть дуга} \\ 0, \text{в других случаях} \end{cases}$

Еще один способ матричного задания графов – матрица Кирхгофа. Пусть дан простой граф G с n вершинами. Тогда матрица Кирхгофа $K = (k_{i,j})_{n \times n}$ данного графа будет определяться следующим образом:

$$k_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i), \text{если } i = j \\ -1, \text{если } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0, \text{в других случаях} \end{cases}$$

где *deg*(v_i) – степень вершины v_i, то есть количество рёбер графа, инцидентных вершине v_i (при подсчёте степени ребро-петля учитывается дважды).

Также матрицу Кирхгофа можно определить как разность матриц K=D-A, где A – это матрица смежности данного графа, а $D = (d_{i,j})_{n \times n}$ – матрица, на главной диагонали которой степени вершин графа, а остальные элементы – нули:

$$d_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i), \text{если } i = j \\ 0, \text{в других случаях} \end{cases}$$

Пример решения задачи

1. Постройте матрицу инцидентности следующего графа:

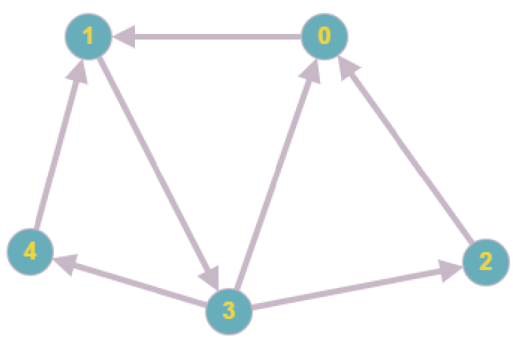

Рисунок 1.

Матрица инцидентности графа с 5 вершинами и 7 ребрами имеет 5 строк и 7 столбцов, строки соответствуют вершинам графа, а столбцы – ребрам.
В соответствии с определением искомая матрица имеет вид:

	(0,1)	***(0,2)***	***(0,3)***	***(1,3)***	***(1,4)***	***(2,3)***	***(3,4)***
0	1	-1	-1	0	0	0	0
1	-1	0	0	1	-1	0	0
2	0	1	0	0	0	-1	0
3	0	0	1	-1	0	1	1
4	0	0	0	0	1	0	-1

2. Постройте матрицу смежности графа, представленного на рисунке 1:

Матрица смежности графа с 5 вершинами имеет 5 строк и 5 столбцов, строки и столбцы соответствуют вершинам графа. В соответствии с определением искомая матрица имеет вид:

	0	***1***	***2***	***3***	***4***
0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	1	0	0	0	0
3	1	0	1	0	1
4	0	1	0	0	0

3. Постройте матрицу Кирхгофа графа, представленного на рисунке 2:

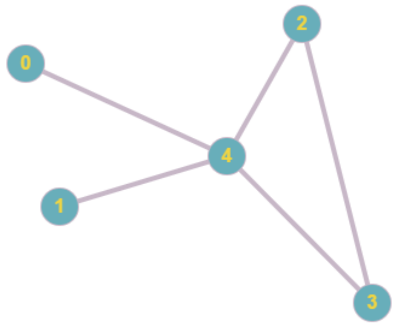

Рисунок 2.

Матрица Кирхгофа графа с 5 вершинами имеет 5 строк и 5 столбцов. На главной диагонали матрицы стоят степени соответствующих вершин. В соответствии с определением искомая матрица имеет вид:

	0	***1***	***2***	***3***	***4***
0	1	0	0	0	-1
1	0	1	0	0	-1
2	0	0	2	-1	-1
3	0	0	-1	2	-1
4	-1	-1	-1	-1	4

Задания для самостоятельной работы

1. Построить связный неориентированный граф с 8-ю вершинами.
2. Построить его матрицу смежности.
3. Построить его матрицу инцидентности.
4. Построить матрицу Кирхгофа графа.
5. Вычислить матрицы инцидентности подграфов Q графа G, где

$$Q = G - v_i - v_j,\ i = 1, 2, 3,\ j = 4, 5$$

6. Построить граф по заданной матрице инцидентности:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

7. Для полученного графа построить дополнительный граф. Для полученного дополнительного графа построить матрицу смежности.
8. Пусть G—граф, множество вершин которого совпадает с отрезком натурального ряда $\{1,2,...5\}$, а множество ребер определяется следующим условием: несовпадающие вершины v_i и v_j смежны тогда, когда числа *i* и *j* взаимно просты. Какой вид имеют: матрица смежности графа G; матрица инциденций G; матрица Кирхгофа графа G?
9. Определить, какой из графов, заданных множеством ребер, является колесом, какой из графов является полным, какой из графов является двудольным.
   a. E1={(1,4),(2,4),(4,3),(1,2),(2,3),(1,3)}
   b. E2={(1,2),(1,4),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4)}
   c. E2={(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)}