

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«ТЮМЕНСКИЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Институт геологии и нефтегазодобычи

Кафедра кибернетических систем

## **ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗВЕНЬЯ**

методические указания и задания к практическим занятиям  
по дисциплине «Теория автоматического управления»  
для студентов направлений

15.03.04-Автоматизация технологических процессов и производств, 27.03.04 –  
Управление в технических системах и 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника  
всех форм обучения

Составители  
*Л.Н.Макарова,*  
*кандидат технических наук, доцент*  
*Н.В.Лапик,*  
*старший преподаватель*  
*Ю.В.Халилова,*  
*ассистент*

Тюмень  
ТИУ  
2017

## Элементарные звенья.

### 1. Основное содержание работы.

Элементарное звено – часть системы, имеющая математическим описанием линейное дифференциальное уравнение не выше второго порядка.

Изучение элементарных звеньев провести согласно следующего плана:

- 1.1 По имеющейся схеме составить дифференциальное уравнение.
- 1.2 Записать аналитическое выражение для передаточной функции.
- 1.3 Записать аналитическое выражение для амплитудно-фазовой частотной характеристики  $W(j\omega)$ , заменив  $p = j\omega$ , провести преобразования, учитывая, что  $j^2 = -1; j^3 = -j; j^{-4} = 1$
- 1.4 Привести  $W(j\omega)$  к виду  $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ , построить график  $W(j\omega)$ , называемый годографом.
- 1.5 Записать аналитическое выражение для амплитудно-частотной

характеристики

$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$ , а также используя свойства модуля, также как:

$$|Z_1 Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$$

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

### 1.6 Записать фазо-частотную характеристику

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$$

построить ее график

### 1.7 Записать аналитическое выражение для логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ)

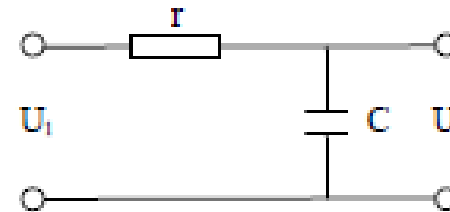
$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega),$$

записать асимптотические уравнения, построить графики ЛАЧХ и ЛФЧХ.

### 2. Пример выполнения задания лабораторной работы

#### 2.1 По схеме построить дифференциальное уравнение:

##### Пример 1

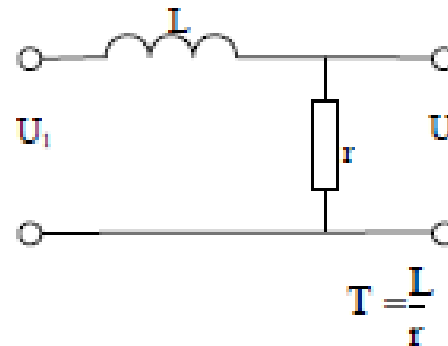


$$U_1 = U_2 + rC \frac{du_2}{dt}$$

т.е.

$$U_2 + T \frac{du_2}{dt} = U_1$$

##### Пример 2



$$U_2 + \frac{L du_2}{rdt} = U_1$$

$$U_2 + T \frac{du_2}{dt} = U_1$$

$$T = \frac{L}{r}$$

$$y + T \frac{dy}{dt} = kx$$

### 2.2 Найти аналитическое выражение для передаточной функции

#### 2.2.1 Запишем исходное уравнение в изображениях:

$$y(p) + Tpy(p) = kx(p)$$

$$y(1 + Tp) = kx$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{k}{1 + Tp}$$

2.3 Запишем формулу для амплитудно-фазо-частотной характеристики  $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$

$$2.3.1 \quad p = j\omega$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + jT\omega}$$

2.3.2 Домножим на сопряженное выражение числитель и знаменатель

$$W(j\omega) = \frac{k(1 - j\omega)}{1 + T^2\omega^2} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}$$

2.3.3 Проанализируем полученное выражение

$$U(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} > 0 \quad \omega = 0 \quad U(0) = k;$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad U(\infty) = 0;$$

$$v(\omega) < 0, \omega \in \mathbb{R}, \omega = 0, v(0) = 0; \text{ т.е.}$$

$$\omega = 0 \quad W(j\omega) = k;$$

$$\omega = \infty \quad W(j\omega) = 0;$$

2.3.4 Определим вид голографа

$U(U)$  - окружность, в самом деле

$$U = \frac{K}{1 + T^2\omega^2} \quad T^2\omega^2 = \frac{K}{U} - 1$$

$$T\omega = \sqrt{\frac{K}{U} - 1} = \sqrt{\frac{K - U}{U}}$$

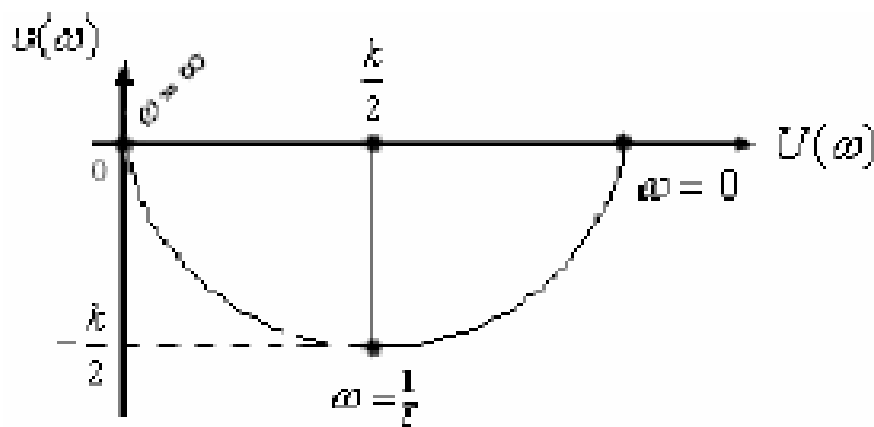
$$V = \frac{K \sqrt{\frac{K - U}{U}}}{1 + \frac{K}{U} - 1} = \frac{KU \sqrt{K - U}}{K \sqrt{U}};$$

$$V = \sqrt{KU - U^2} = \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \left(U - \frac{K}{2}\right)^2}$$

$$V^2 + \left(U - \frac{K}{2}\right)^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2; \text{ центр окружности } \left(\frac{K}{2}; 0\right);$$

$$\text{радиус } r = \frac{k}{2};$$

$$\omega = \frac{1}{T}; \quad U\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{K}{2}; \quad V\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{K}{2};$$



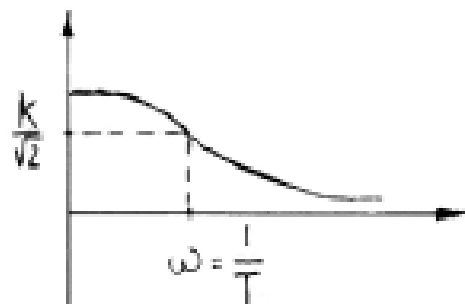
4. Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{|K|}{|1+jT\omega|} = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

$$\omega = 0 \quad A(0) = K$$

$$\omega = \frac{1}{T} \quad A\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad A(\infty) = 0$$



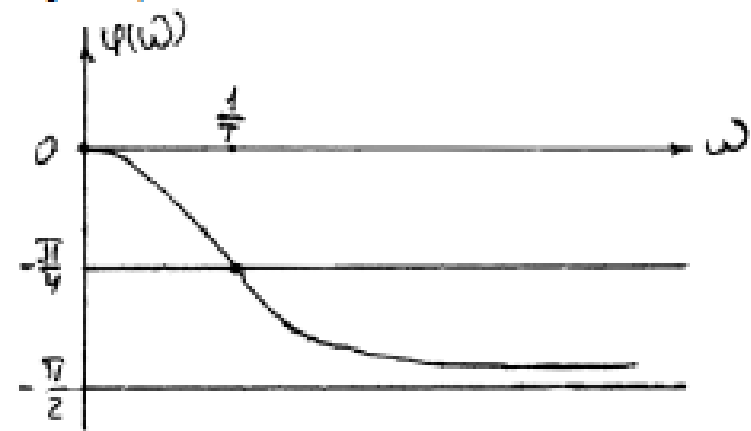
5. Фаза-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \left( \frac{-KT\omega}{1+T^2\omega^2} \right) : \left( \frac{K}{1+T^2\omega^2} \right) = -\arctg(T\omega)$$

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

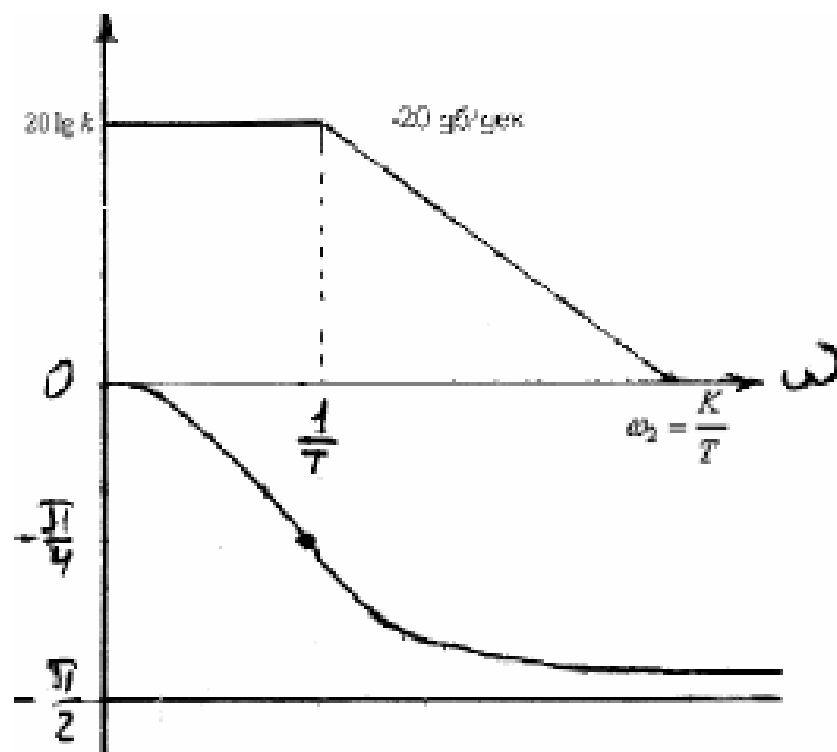


6. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

6.1.

$$\beta(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = 20 \lg k - 20 \cdot \frac{1}{2} \lg(1+T^2\omega^2)$$

$$\omega \ll \frac{1}{T}, \quad \alpha(\omega) = 20 \lg k$$



$$\omega \gg \frac{1}{T}$$

$$\alpha(\omega) = -20 \frac{1}{2} 2 \lg T \omega \neq 20 \lg k = 20 \lg k - 20 \lg T \omega$$

### 6.2. Построение.

До  $\omega = \frac{1}{T}$  формула ЛАЧХ имеет вид прямой, параллельной

оси частот, начиная с  $\omega = \frac{1}{T}$  ее наклон составляет -20

дБ/дек, т.е. частота изменяется в 10 раз (логарифм на 1 единицу), формула изменяется на -20 единиц.

6.3. Чтобы вычислить  $\omega_2$ , нужно  $L(\omega)$  приравнять нулю  
 $20 \lg k - 20 \lg T \omega = 0$

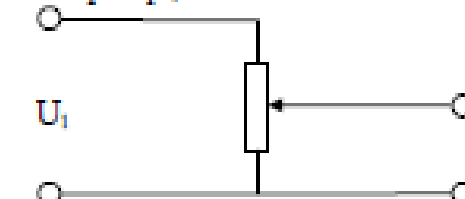
$$\lg k = \lg T \omega$$

$$\omega_2 = \frac{k}{T} 20 \lg k$$

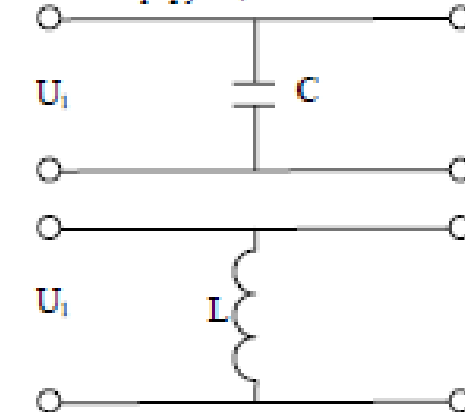
7. Логарифмическая фазочастотная характеристика имеет тот же вид, что фазочастотная, с учетом изменения масштаба по оси абсцисс, так как вместо  $\omega$  при построении логарифмических частотных характеристик используются логарифмы  $\omega$ .

Записать дифференциальное уравнение, передаточную функцию и частотные характеристики, построить графики частотных характеристик для следующих элементарных звеньев:

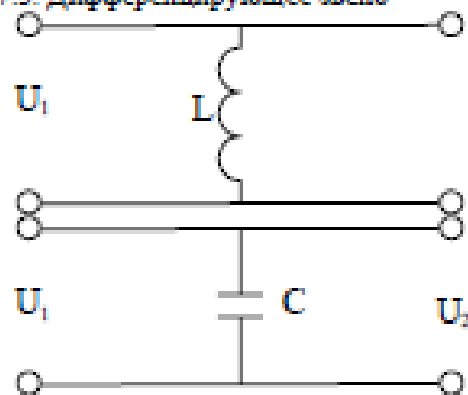
### 7.1. Пропорциональное звено



### 7.2. Интегрирующее звено



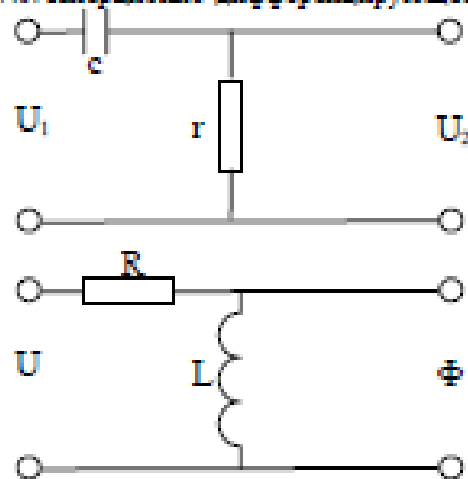
7.3. Дифференцирующее звено



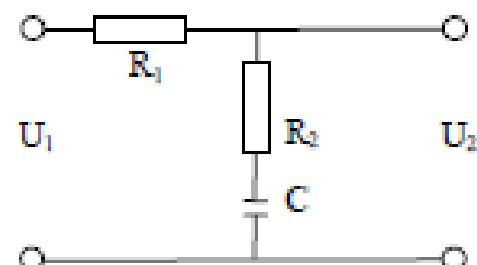
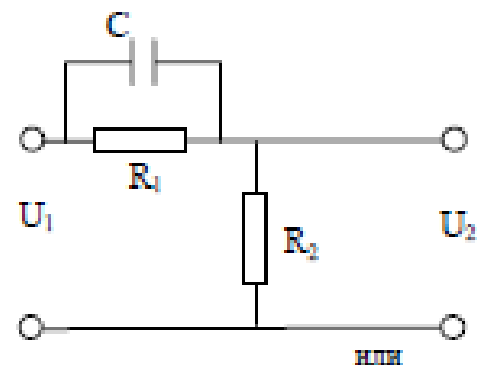
7.4. Форсирующее звено

$$y = k \left( x + T \frac{dx}{dt} \right)$$

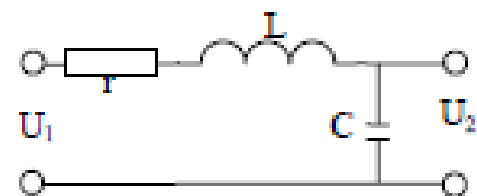
7.5. Инерционно-дифференцирующее звено



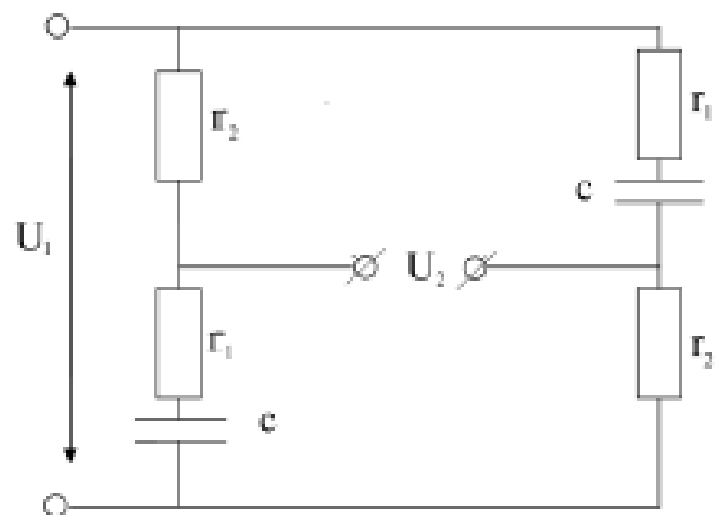
7.6. Инерционно форсирующее звено



7.7. Колебательное звено



7.8. Неминимально-фазовое звено типа



7.9. Неустойчивое инерционно-дифференцирующее звено

$$y - T \frac{dy}{dx} = k \left( U + T_0 \frac{dy}{dt} \right)$$

### 8. Содержание отчета

- 8.1. Привести схему, соответствующую элементарному звену
- 8.2. Составить дифференциальное уравнение, записать его в изображении по Лапласу
- 8.3. Составить передаточную функцию
- 8.4. Построить АФЧХ
- 8.5. Построить АЧХ, ФЧХ
- 8.6. Построить ЛАЧХ, ЛФЧХ