МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт геологии и нефтегазодобычи

Кафедра кибернетических систем

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ

методические указания и задания к практическим занятиям
по дисциплине «Теория автоматического управления»
для студентов направлений
15.03.04-Автоматизация технологических процессов и
производств, 27.03.04 – Управление в технических системах и
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
всех форм обучения

Составители
Л.Н.Макарова,
кандидат технических наук, доцент
Н.В.Лапик,
старший преподаватель
Ю.В.Халилова,
ассистент

Тюмень
ТИУ
2017

1 Цель лабораторной работы

Изучение алгебраических критериев устойчивости для определения состояния линейной системы.

1.1 Критерий Вышнеградского

Критерий Вышнеградского применяется для исследования устойчивости систем, если дифференциальное уравнение имеет порядок не выше третьего.

Система устойчива, если коэффициенты характеристического уравнения $a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0$ положительны ($a_0 > 0; a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0$) и $a_1a_2 > a_0a_3$.

Замечание 1. Характеристическое уравнение замкнутой системы можно построить по операторным уравнениям разомкнутой системы вида:

$$A(p)X(p) = B(p)U(p) + C(p)Z(p),$$

где Z(p) – изображение функции помех;

X(p) – изображение выходной характеристики;

U(p) - изображение входной характеристики.

Оно равно $A(p) + B(p) = 0$.

1.2 Проверить устойчивость системы, если её дифференциальное уравнение имеет вид:

$$[(T_0p+1)(T_1p+1)(T_2p+1)+k_0k_p]x = (T_1p+1)(T_2p+1)Z(x),$$

где $T_0 = 0{,}02c; T_1 = 0{,}01c; T_2 = 0{,}05c; k_0 = 20; k_p = 0{,}2.$

1.3 Определить устойчивость системы по её характеристическому уравнению:

$$a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0$$, где

а) $a_0 = 0,02; a_1 = 0,4; a_2 = 1,3; a_3 = 25$;

б) $a_0 = 0,02; a_1 = 0,4; a_2 = 1,3; a_3 = 30$;

в) $a_0 = 0,02; a_1 = 0,2; a_2 = 1,5; a_3 = 60$.

1.4 Определение устойчивости по теореме Ляпунова

Для определения устойчивости по теореме Ляпунова необходимо вычислить корни характеристического уравнения. Линейная система а асимптотически устойчива, если все корни её характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, т.е. являются левыми.

Задание Определить устойчива ли система, если она имеет передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{2}{0,02s^3 + 0,32s^2 + 1,3s + 1}.$$

Решение: Характеристическое уравнение для такой системы имеет вид

$$0,02s^3 + 0.32s^2 + 1.3s + 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $s_1 = -1$; $s_2 = -10$, $s_3 = -5$ имеют отрицательные действительные части, следовательно, система устойчива.

Вычисление корней в программе *Matlab*

Задается полином, для которого необходимо найти корни, корни рассчитываются командой roots(P).

Пример расчета корней для задания 3:

```
P=[0.02 0.32 1.3 1]
P=0.02 0.32 1.3 1
roots(P)
-1
-5
-10
```

2 Критерий Гурвица

Для определения устойчивости по критерию Гурвица нужно построить определитель, в первой строке которого пишутся нечётные коэффициенты, начиная a_1, во второй строке чётные коэффициенты , начиная с a_0.

Индексы коэффициентов убывает в каждом столбце, начиная с первой строки до последней. Коэффициенты с отрицательными индексами заменяются нулями.

Система устойчива, если все коэффициенты положительны, а также положительны и все определители, начиная со второго порядка, построенные от верхнего левого угла.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & a_2 & a_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix} = \Delta_n .$$

Т.к. $a_n > 0$, то расчет определителей ведется до (n-1)-ого порядка.

Вычисление определителей в программе Mathlab

Расчет определителей в программе Mathlab выполняется с помощью последовательности команд.

Задание матрицы:

A=[$a_{11}\ a_{12}\ a_{1n}$; $a_{21} \dots a_{2n}$; $\dots a_{n1} \dots a_{nn}$]

A=

a_{11} a_{12} a_{1n}

a_{21} a_{2n}

...

a_{nn} a_{nn}

Расчет определителя:

det (A)

Пример расчета определителя:

$A = [1\ 2\ 3;\ 0\ 4\ 5;\ 3\ 6\ 7]$

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{matrix}$$

det (A)

A= -8 .

3 Критерий Рауса

Система устойчива, если в первом столбце таблицы Рауса все коэффициенты положительны (таблица 1).

Таблица 1 - Таблица для расчета коэффициентов Рауса

Коэффициенты r_i	a_0	a_2	a_4	a_6
	a_1	a_3	a_5	a_7
$r_0 = \frac{a_0}{a_1}$	$c_{13} = a_2 - r_0 a_3$	$c_{23} = a_4 - r_0 a_5$	$c_{33} = a_6 - r_0 a_7$	$c_{43} = a_8 - r_0 a_9$
$r_1 = \frac{a_1}{c_{13}}$	$c_{14} = a_3 - r_1 c_{23}$	$c_{24} = a_5 - r_1 c_{33}$	$c_{34} = a_7 - r_1 c_{43}$	$c_{44} = a_9 - r_1 c_{53}$
$r_2 = \frac{c_{13}}{c_{14}}$	$c_{15} = c_{23} - r_2 c_{24}$	$c_{25} = c_{33} - r_2 c_{34}$	$c_{35} = c_{43} - r_2 c_{44}$	$c_{45} = c_{53} - r_2 c_{54}$
…………	…………..	…………	……………..	…………….

Замечание. Если среди r_i есть отрицательные, то система неустойчива, характеристическое уравнение имеет правые корни, при этом их число равно числу перемен знака в столбце r_i.

5 Задания для определения устойчивости алгебраическими критериями

Определить устойчивость системы по её характеристическому уравнению, используя критерий Гурвица, критерий Рауса, теорему Ляпунова:

5.1 $a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0,$

$a_0 = 2 \cdot 10^{-9}; a_1 = 2 \cdot 10^{-5}; a_2 = 3 \cdot 10^{-2}; a_3 = 1{,}3 \cdot 10^{-1}; a_4 = 100;$

5.2 $a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0,$

$a_0 = 0{,}001; a_1 = 0{,}05; a_2 = 0{,}4; a_3 = 1; a_4 = 20;$

5.3 $a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0,$

$a_0 = 0{,}001; a_1 = 0{,}05; a_2 = 0{,}4; a_3 = 1; a_4 = 100;$

5.4 $a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0,$

$a_0 = 0{,}001; a_1 = 0{,}03; a_2 = 0{,}25; a_3 = 1; a_4 = 10; a_5 = 60;$

5.5 $a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0,$

$a_0 = 0{,}001; a_1 = 0{,}05; a_2 = 0{,}25; a_3 = 1; a_4 = 10; a_5 = 40.$

6 Расчет критических значений параметров системы

Критерий Гурвица может использоваться для расчета критического значения параметра, соответствующего границе устойчивости. Для этого определитель (n-1)-ого порядка приравнивается нулю и разрешается относительно интересующего параметра. Решив полученное уравнение, вычисляют критическое значение параметра.

Задание 4. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + k = 0,$$

найти критическое значение коэффициента усиления при заданных значениях постоянных времени $T_1 = 10c; T_2 = 5c; T_3 = 2c.$

Решение. Раскроем скобки характеристического уравнения:

$$(10p+1)(5p+1)(2p+1)+k=0;$$
$$100p^3+80p^2+17p+1+k=0;$$
$$a_0=100;\ a_1=80;\ a_2=17;\ a_3=(1+k).$$

Составим определитель Гурвица:

$$A=\begin{vmatrix} 80 & (1+k) & 0 \\ 100 & 17 & 0 \\ 0 & 80 & (1+k) \end{vmatrix}.$$

Необходимое условие устойчивости системы $1+k>0$.

Для устойчивости системы нужно, чтобы определитель $\Delta_{n-1}=\Delta_2$ был положительным, т.е.

$$\begin{vmatrix} 80 & 1+k \\ 100 & 17 \end{vmatrix}>0;$$

$$80*17-100(1+k)>0;$$
$$1260-100k>0;$$
$$k<12{,}6.$$

Таким образом, коэффициент усиления не должен превышать этого значения.

7 Задания для определения критических значений параметров по критерию Гурвица

7.1 По двум известным параметрам $(k;T_1)$ или $(k;T_2)$ для системы с передаточной функцией построить области устойчивости по незаданному параметру (T_2 или T_1):

$$W(S)=\frac{k}{S(T_1S+1)(T_2S+1)}.$$

7.2 Для системы со структурной схемой (рисунок 1) построить области устойчивости по параметрам $(k\,;T_1)$, где $k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$, $T_2 = 0{,}1c$, $T_3 = 2c$.

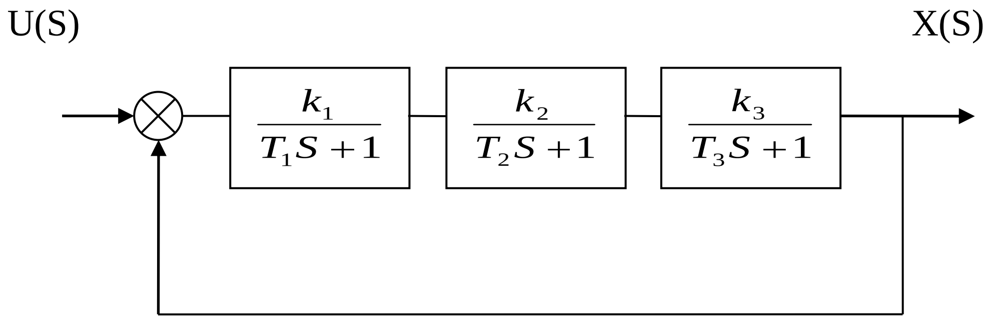

Рисунок 1 – Структурная схема к п.1.9.2

7.3 Для системы со структурной схемой (рисунок 2) построить области устойчивости по параметрам k_1 и T_3, $T_1 = 0{,}01c$, $T_2 = 0{,}1c$, $k_2 = 4$, $k_3 = 5$.

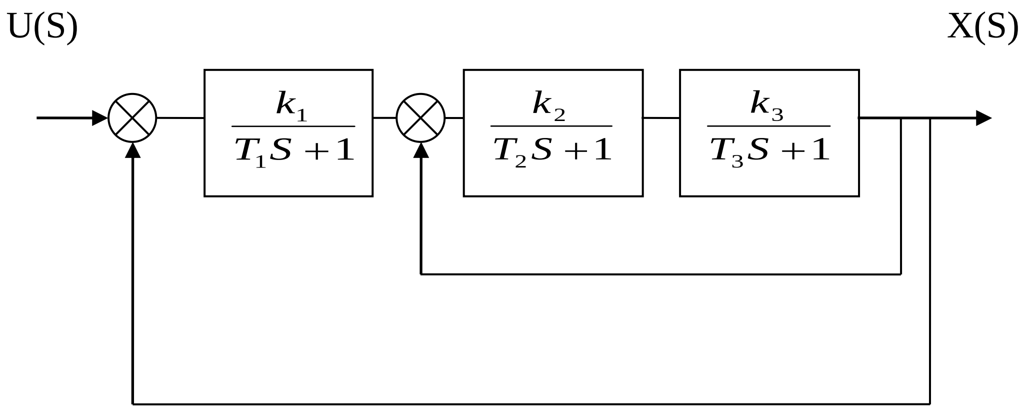

Рисунок 2 – Структурная схема к п.1.9.3

Вопросы для самопроверки

1) Какие линейные системы считаются устойчивыми, неустойчивыми, безразлично устойчивыми?
2) Как записать характеристическое уравнение?
3) Составляющие вектора состояния по Ляпунову?
4) От чего зависит свободная составляющая вектора состояния?
5) Для какой системы вынужденная составляющая равна вектору состояния?

6) Как по виду корней характеристического уравнения можно определить состояние линейной системы по устойчивости?

7) Приведите примеры, когда можно уверенно сказать, что система неустойчива.

8) Каков порядок главного определителя Гурвица для характеристического уравнения пятого порядка?

9) Как можно определить критическое значение некоторого параметра по критерию Гурвица?

10) Порядок расчета таблицы Рауса.

11) Какими методами можно определить число правых корней характеристического уравнения?

5 Список использованной литературы

1 Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления [Текст] – С.-П.: Продукция, – 2003. –743 с.

2 Воронов А.А. Теория автоматического управления. Т.1. Теория линейных систем автоматического управления – М.:Высшая Школа, 1986. – 368с.

3 Теория автоматического управления [Текст] // Под ред. Нетушила А.В., Т.1.–М.:ВШ, – 1972. – 372с.

4 Теория автоматического управления [Текст] // Под ред. Солодовникова В.В. – Кн 1. – М.: Машиностроение. – 1967. – 411с.

5 Теория автоматического управления // Под ред. Яковлева В.Б. – М.:В.Ш. – 2003. – 567с.

6 Ротач В.Я.Теория автоматического управления [Текст] – М.: МЭИ, 2004. –387с.

7 Теория автоматического управления: Учеб. для вузов/С.К Душин, Н.С.Зотов, Д.Е.Имаев и др.;Под.ред.В.Б.Яковлева.–2-еизд., перераб. –М.: Высшая школа, 2005. -567с.

8 Сборник задач по теории автоматического регулирования[Текст] //Под ред. В.А.Бесекерского. –5-е изд., перераб. – М.: Наука, 1978. - 512с.

9 Дьяконов В.П. Matlab 6/6.1/6.5 Simulink 4/5 в математике и моделировании [Текст] - М.: Солон-Пресс, 2003. - 565с.