Федеральное агентство связи

Сибирский Государственный Университет Телекоммуникаций и Информатики

**Межрегиональный центр переподготовки специалистов**

# Экзамен

# По дисциплине: Дискретная математика

*Мурзина Т.С.*

**Выполнил**:

**Группа**:

**Проверил**: Мурзина Т.С.

Новосибирск, 2019 г

**Билет № 7**

Дисциплина Дискретная математика

**1. Мощность множества. Теорема о мощности множества всех подмножеств данного множества.**

Множество - конечная или бесконечная совокупность объектов, выделенная по общему для них признаку (свойству или отношению), мыслимая как нечто целое

Мощность множества — это обобщение понятия количества (числа элементов множества), которое имеет смысл для всех множеств, включая бесконечные. Существуют бо́льшие, есть ме́ньшие бесконечные множества, среди них счётное множество является самым маленьким.

**Определение:** Пусть даны два множества *A* и *B.* Тогда они называются равномощными, если между ними существует биекция *f:AB.* Из свойств биекции следует, что равномощность является отношением эквивалентности. Мощностью или кардинальным числом множества *A* называется соответствующий ему класс эквивалентности. Мощность множества обозначается |A|. Тот факт, что два множества равномощны, записывается: |A| = |B|.

В основе этого понятия лежат естественные представления о сравнении множеств:

- Любые два множества, между элементами которых может быть установлено взаимно-однозначное соответствие (биекция), содержат одинаковое количество элементов (имеют одинаковую мощность).

- Обратно: множества, равные по мощности, должны допускать такое взаимно-однозначное соответствие.

- Часть множества не превосходит полного множества по мощности (то есть по количеству элементов).

1. Мощность множества натуральных чисел N обозначаются символом («алеф-нуль»). Множество называется бесконечным, если его мощность (не меньше мощности множества натуральных чисел), таким образом, счётные множества — это «самые маленькие» из бесконечных множеств. Следующие кардинальные числа в порядке возрастания обозначаются (где индекс пробегает все порядковые числа). Среди кардинальных чисел нет наибольшего: для любого множества кардинальных чисел существует кардинальное число, большее всех элементов этого множества.

2. Про множества, равномощные множеству всех вещественных чисел, говорят, что они имеют мощность континуума, и мощность таких множеств обозначается символом **с**. Предположение о том, что , называется континуум-гипотезой.

3. Для мощностей, как и в случае конечных множеств, имеются понятия: «равенство», «больше», «меньше». То есть для любых множеств *A* и *B* возможно только одно из трёх:

- , или *А* и *В* равномощны;

- , или *А* мощнее *В,* то есть *А* содержит подмножество, равномощное *В,* но *А* и *В* не равномощны;

- или *В* мощнее *А* –в этом случае *В* содержит подмножество, равномощное *А,* но *А* и *В* не равномощны;

- Ситуация, в которой *A* и *B* не равномощны и ни в одном из них нет части, равномощной другому, невозможна. Это следует из теоремы Цермело. Иначе это означало бы существование несравнимых между собой мощностей (что в принципе возможно, если не принимать аксиому выбора).

- Ситуация, в которой и , невозможна по теореме Кантора — Бернштейна.

**Свойства:**

- Два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда они состоят из одинакового числа элементов. То есть для конечного множества понятие мощности совпадает с привычным понятием количества.

- Для бесконечных множеств мощность множества может совпадать с мощностью своего собственного подмножества, например .

- Более того, множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно содержит равномощное собственное (то есть не совпадающее с основным множеством) подмножество.

- Теорема Кантора гарантирует существование более мощного множества для любого данного: Множество всех подмножеств множества A имеет большую мощность, чем *A*, или .

- С помощью канторова квадрата можно также доказать следующее полезное утверждение: Декартово произведение бесконечного множества A с самим собой равномощно *A*.

- Мощность декартова произведения:

- Формула включения-исключения в простейшем виде:

Теорема о мощности множества всех подмножеств данного множества.

Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств.

Теорема утверждает, что на основе любого множества (конечного или бесконечного) можно построить множество большей мощности и, следовательно, классов эквивалентности бесконечных множеств неограниченное количество.

*ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:*

Предположим, что существует множество *A*, равномощное множеству всех своих подмножеств , то есть, что существует такая биекция *f*, ставящая в соответствие каждому элементу множества *A* некоторое подмножество множества *A*.

Рассмотрим множество *B*, состоящее из всех элементов *A*, не принадлежащих своим образам при отображении f (оно существует по аксиоме выделения):

*f* биективно, а *B⊆ A*, поэтому существует *𝒴* ∈*A* такой, что *f(𝒴)=B* .

Теперь посмотрим, может ли *𝒴* принадлежать *B*.

Если *𝒴∈ B*, то *𝒴∈* *f*(*𝒴*), а тогда, по определению *B*, *𝒴∉* *B*.

И наоборот, если *𝒴∉* B, то *𝒴∉* *f*(*𝒴*), а следовательно, *𝒴* ∈*B.*  В любом случае, получаем противоречие.

Следовательно, исходное предположение ложно и *A* не равномощно 2*A*.

Заметим, что 2*A* содержит подмножество, равномощное *A* (например, множество всех одноэлементных подмножеств *A*), а тогда из только что доказанного следует |2A|>|A|.

*Но вопрос остается открытым: чему же равна мощность множества всех подмножеств заданного множества?*

**2. Заданы универсальное множество *U* и три его подмножества *A*, *B*, *C*.**

**Проверить (доказать или опровергнуть) справедливость соотношения:**

**.**



Решение:

Преобразуем правую часть заданного равенства:



После преобразований левая и правая части равенства не совпадают, значит, заданное соотношение неверно.

*Вывод неверен. Ошибка произошла уже в первой строке, почему-то там пересечение заменилось (кем?) на объединение.*

**3. Задано бинарное отношение , где . Определить, выполняются ли для данного отношения свойства симметричности и рефлексивности. Ответ обосновать.**



Решение:

Составим бинарное отношение в виде пар, удовлетворяющих условию:

Отношение является рефлексивным, если пара .

Так как ,

то *R* является рефлексивным.

Отношение является симметричным, если , то и .

Выполняется для всех пар *откуда это видно?* , поэтому отношение является симметричным.

**4. Упростив логическую функцию двух переменных , проверить ее самодвойственность, монотонность и линейность. Ответ обосновать.**



Решение:

*хоть бы знаки равенства в нужных местах поставили!*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | X | | |  | | --- | | Y | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | X | ⊕ | Y | | |  | | --- | |  | |  | | |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  |  | | ( | X | ⊕ | Y | ) | → |  | | |  | | --- | |  | |  | | |  | | --- | |  | |  | | |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | | Y | ~ |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  | |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | ( | ( |  | ⊕ | Y | ) | → |  | ) | → |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

1. Проверим самодвойственность на основе таблицы истинности сокращенной функции или же полной что дана выше

Строим таблицу истинности для

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| |  | | --- | | y | | | |  | | --- | |  | |  | |
| 0 | | 1 |
| 1 | | 0 |

Ответ: Если записать с конца полученное значения изменив 0 на 1 и 1 на 0, то эти значения совпадут с полученными значит функция **самодвойственна.**

*Самодвойственная функция* — [булева функция](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D1%83%D0%BB%D0%B5%D0%B2%D0%B0_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F), двойственная сама к себе. Функцией, двойственной к функции  , называется функция  . Значит, функция  является самодвойственной, если  . Другими словами самодвойственная функция на противоположных друг другу наборах значений аргументов принимает противоположные значения.

2. Функция линейна, если её многочлен Жегалкина не содержит произведения (конъюнкций) переменных.

Для построения полинома Жегалкина методом неопределенных коэффициентов, построим таблицу истинности данной функции:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | y | | |  | | --- | |  | |  | |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Пусть полином Жегалкина имеет вид:

P(Y) = C0 ⊕ C1Y

P(0) = C0 = 1

P(1) = C0 ⊕ C1 = 0 => 1 ⊕ C1 = 0 => C1 = 1

Получаем полином Жегалкина:

P(Y) = 1 ⊕ Y

Ответ: Функция линейна так как многочлен Жегалкина не содержит конъюнкций переменных.