Негосударственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Центросоюза Российской Федерации

**СИБИРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ**

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и задания к практическим занятиям,
контрольной и внеаудиторной работе студентов
направления 38.03.01 *Экономика*

НОВОСИБИРСК 2018

Кафедра статистики и математики

АВТОРЫ: Л.Г. Гузевский, д-р физ.-мат. наук, профессор
В.В. Комиссаров, канд. физ.-мат. наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТ: Н. В. Шаланов, д-р экон. наук, профессор

Рекомендовано к изданию кафедрой статистики и математики, протокол от 12 марта 2018 г. № 8.

Заведующий кафедрой Н.В. Шаланов

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В настоящее время трудно найти такую область деятельности человека, где в той или иной степени не применялись бы методы теории вероятностей и математической статистики. Кроме естественных отраслей науки и техники (математика, физика, химия, инженерные области) эти методы находят широкое применение в истории, медицине, экономике, социологии, генетике, лингвистике и т.д.

Методическое пособие состоит из двух частей: теории вероятностей и математической статистики

Основная задача теории вероятностей – изучение численных закономерностей в опытах, результаты которых невозможно предсказать до проведения испытаний.

В математической статистике изучаются закономерности массовых случайных явлений или процессов на основе систематизации, обработки и интерпретации экспериментальных результатов с целью изучения статистических закономерностей.

Математическая статистика, как и теория вероятностей, имеет дело со случайным экспериментом. В этом смысле она является частью теории вероятностей. Однако, если в теории вероятностей исходным было знание природы эксперимента, в силу чего мы могли узнать вероятности появления всевозможных исходов эксперимента, то в математической статистике положение в известном смысле обратное: исходными являются результаты эксперимента, по которым требуется, по возможности, более точно “восстановить” неизвестное (полностью и частично) распределение, соответствующее этому эксперименту.

В теории вероятностей имеют дело с заданным распределением случайных величин и выявляют еще до опыта закономерности, которые будут иметь место после его проведения. Типичными задачами математической статистики являются определение закона распределения случайной величины (или системы случайных величин) по статистическим данным, нахождение неизвестных параметров распределения, проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

Возникающие в современной экономике задачи настолько сложны и многообразны, что их решение невозможно без использования методов фундаментальной математики и современных информационных и вычислительных технологий.

Интуиция и опыт далеко не всегда дают положительный результат для принятия оптимальных решений в хозяйственной деятельности, а просчёты и ошибки часто ведут к большим материальным потерям. Экономические «эксперименты» слишком длительные и дорогостоящие, и здесь на помощь приходит математическая модель как инструмент исследования и прогноза экономических процессов.

В математике изучаются методы исследований и построение на их основе математических моделей реальных экономических явлений. Математическое моделирование используется для создания рациональных способов управления экономическими процессами. Математический аппарат позволяет четко сформулировать изучаемую проблему и найти наилучшее решение задачи в рамках построенной модели. Именно на этом этапе является востребованной математическая культура специалистов экономического профиля.

В связи с этим целью изучения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» направления 080100.62 *Экономика* является достижение ими достаточно высокого уровня математической подготовки и умение использовать современные компьютерные технологии при их решении.

Содержание дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» основывается на приемственности и взаимосвязи с такими дисциплинами, как «Математический анализ», «Линейная алгебра». Программа составлена на основе учебной программы по данной дисциплине направления 080503.65 в соответствии с государственным стандартом.

Предлагаемая методическая разработка содержит программу дисциплины, задания контрольной работы и методические указания по их выполнению. В ней сформулированы основные теоретические положения и даны образцы решения задач контрольной работы. В разделе «Задания самостоятельной работы студентов» приведены типовые задачи по каждой теме, входящей в программу дисциплины.

2. ТЕМЫ И ИХ КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. Теория вероятностей

Тема ***1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей***

Испытание, события, виды событий. Случайные события. Частота и вероятность. Операции над событиями. Полная группа элементарных событий. Классическое и статистическое определения вероятности. Основные формулы комбинаторики. Правило суммы, правило произведения. Зависимые и независимые события, условная вероятность.

Основные формулы для вычисления вероятностей. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного события. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Тема 2. Повторные независимые испытания

Формула Бернулли. Локальная и интегральная формулы Лапласа. Наивероятнейшее число наступлений событий.

Тема 3. Дискретная случайная величина

Виды случайные величины. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. Биномиальное распределение. Распределение Пуассона. Геометрическое распределение. Основные числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение, их смысл, свойства и вычисление.

Тема 4. Непрерывные случайные величины

Дифференциальная и интегральная функции распределения непрерывной случайной величины, их свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

Нормальный закон распределения. Особенности нормального закона распределения непрерывной случайной величины, его основные характеристики. Кривая Гаусса. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Вычисление вероятности заданного отклонения. Правило трех сигм.

Понятие о законе больших чисел.

Раздел 2. Математическая статистика

Тема 5. Обработка выборочных данных

Генеральная совокупность и выборка. Выборочный метод. Статистическое распределение выборки, его графическое изображение в виде полигона и гистограммы. Основные характеристики выборочного распределения: средняя, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Тема 6. Точечные и интервальные оценки

Статистические гипотезы. Выбор вида гипотезы. Оценки параметров. Несмещенные, эффективные и самостоятельные оценки. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределенной случайной величины.

Тема 7. Проверка статистических гипотез

Статистическая проверка гипотезы о нормальном распределении случайной величины. Критерий согласия Пирсона.

Тема 8. Теория корреляции

Виды зависимостей между случайными величинами. Задачи теории корреляции. Корреляционная таблица. Уравнение регрессии. Статистические методы обработки экспериментальных данных. Метод наименьших квадратов для нахождения параметров уравнения линейной регрессии. Оценка тесноты линейной связи по коэффициенту линейной корреляции. Понятие о нелинейной корреляции. Корреляционное отношение

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Согласно рабочему (индивидуальному) учебному плану студенты заочной формы обучения в пятом семестре выполняют одну контрольную работу по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика», которая содержит семь заданий. В методических указаниях даны образцы решения аналогичных задач, предлагаемым в контрольной работе. .

Оформляя контрольную работу, детально приводите результаты решения задач, не вдаваясь в подробные словесные объяснения.

Контрольная работа должна быть выполнена в межсессионный период и представлена на проверку в методкабинет.

Обратите внимание на правила ее оформления.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Выполнять контрольную работу следует в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного и зеленого, оставляя поля для замечаний преподавателя.
2. На обложке тетради нужно *разборчиво* написать фамилию, инициалы, шифр, название дисциплины. В конце работы привести список использованной литературы, дату выполнения и расписаться.
3. Работа должна содержать все задачи именно Вашего варианта.
4. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях.
5. Перед решением каждой задачи следует записать полностью ее условие.
6. Решения задач нужно излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
7. Получив проверенную работу, следует исправить все отмеченные преподавателем ошибки и недочеты и выполнить все его рекомендации.

Если контрольная работа возвращена на доработку, то необходимо в короткий срок исправить указанные ошибки и недочеты (в той же тетради) и сдать работу на повторную проверку.

После правильного выполнения всех заданий контрольной работы со студентом проводится собеседование, по результатам которого ставится оценка: *«зачтено»* или *«незачтено»*. Защита контрольных работ осуществляется в межсессионный период во время субботних консультаций или во время сессии.

Студент обязан выполнить и защитить контрольную работу до сдачи экзамена.

Правило выбора задач контрольной работы

Номера задач контрольной работы определяются с помощью приведенной ниже таблицы по двум последним цифрам номера личного дела (шифра) студента.

В верхней строке (по горизонтали), где помещены цифры от 0 до 9, следует выбрать цифру, являющуюся ***последней*** в номере вашего шифра.

В левой графе таблицы (по вертикали), где также помещены цифры от 0 до 9, необходимо выбрать цифру, являющуюся ***предпоследней*** в номере вашего шифра.

На пересечении вертикальной и горизонтальной линий вы найдете номера задач своей контрольной работы.

Например, если шифр Э-10-102-Д то номера задач выбираем по последней цифре шифра 2 и предпоследней цифре 0. Контрольная работа должна включать задачи 2, 13, 29, 34, 49, 56 64.

Будьте внимательны при выборе варианта задания. Если какая-нибудь задача не соответствует варианту задания, то контрольная работа возвращается на доработку.

По всем вопросам, связанным с изучением данной дисциплины, студент может обратиться на кафедру статистики и математики по адресу: 630087, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 26. СибУПК, корп. 1, к.223, тел. кафедры 3–46–21–87

ТАБЛИЦА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОМЕРОВ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Последняя цифра шифра

Предпоследняя цифра шифра	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
	4	3	2	1	8	9	10	6	5	7
	14	15	13	12	17	16	11	20	19	18
	26	28	29	30	21	22	23	24	25	27
0	32	31	34	35	36	37	38	33	39	40
	47	48	49	50	42	43	44	45	46	41
	60	57	56	54	51	52	53	55	58	59
	65	63	64	67	69	66	62	68	61	70
	5	4	3	2	1	10	7	9	8	6
	15	14	13	12	11	16	20	19	18	17
	25	27	28	30	29	21	22	23	24	26
1	40	32	33	34	35	36	37	31	38	39
	48	47	50	49	44	45	46	41	43	42
	51	55	60	52	59	57	53	58	56	54
	62	65	68	64	70	67	66	69	63	61
	6	10	8	9	7	1	2	3	4	5
	16	15	14	13	12	20	18	19	17	11
	24	26	27	28	29	30	21	22	23	25
2	36	37	40	31	32	33	34	35	39	38
	49	50	41	42	43	44	45	46	47	48
	54	60	57	55	53	58	52	59	56	51
	64	70	63	67	65	62	66	68	61	69

Продолжение табл.

		Последняя цифра шифра									
		0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
Предпоследняя цифра шифра	***3***	7	6	9	10	3	2	1	8	5	4
		17	18	19	16	20	11	12	14	13	15
		23	24	25	26	27	28	29	30	22	21
		37	38	31	32	33	34	35	36	40	39
		49	50	48	47	41	42	43	44	45	46
		54	55	58	56	60	52	59	53	51	57
		62	69	66	65	64	63	68	70	61	67
	4	8	7	10	5	4	6	2	1	9	3
		18	19	17	20	12	14	13	15	11	16
		22	23	24	25	21	27	28	29	30	26
		38	31	32	33	34	35	36	37	39	40
		42	46	45	49	48	47	50	41	43	44
		58	56	57	60	52	59	53	55	51	54
		65	69	66	61	63	62	68	64	67	70
	5	3	2	1	4	5	7	9	10	6	8
		13	17	15	16	14	12	18	11	20	19
		27	29	30	21	22	24	25	26	28	23
		31	33	32	34	35	36	39	37	40	38
		46	45	47	48	50	49	41	42	43	44
		51	56	57	54	55	53	60	52	58	59
		70	62	69	67	66	64	68	66	65	61

Окончание табл.

		Последняя цифра шифра									
		0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
Предпоследняя цифра шифра	***6***	1	2	3	10	4	5	6	7	8	9
		11	12	13	20	14	15	16	17	18	19
		30	21	28	29	27	26	24	25	23	22
		39	40	31	38	32	33	34	35	36	37
		44	41	46	45	49	47	50	48	43	42
		60	57	56	54	51	52	53	55	58	59
		67	68	69	62	61	65	64	63	70	66
	7	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
		40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
		43	44	45	46	47	48	49	50	41	42
		54	56	55	60	57	53	51	58	59	52
		68	66	61	63	62	64	70	65	67	69
	8 или 9	2	1	6	7	3	8	4	5	10	9
		12	13	14	11	19	16	15	17	20	18
		28	30	22	23	24	25	26	27	29	21
		40	38	39	36	31	37	32	33	34	35
		45	46	42	41	43	44	50	47	48	49
		51	54	58	53	55	59	52	57	56	60
		66	67	63	68	69	70	65	61	62	64

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Теория вероятностей

Задачи 1 – 10

Для сигнализации на складе установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при необходимости первое устройство сработает, составляет p_1, для второго и третьего устройства эти вероятности равны соответственно p_2 и p_3. Найти вероятность того, что в случае необходимости сработают:

а) все устройства;

б) только одно устройство;

в) хотя бы одно устройство.

№ *задачи*	p_1	p_2	p_3
1	0,7	0,85	0,9
2	0,75	0,9	0,8
3	0,95	0,9	0,75
4	0,98	0,85	0,8
5	0,75	0,8	0,95
6	0,85	0,95	0,8
7	0,9	0,85	0,95
8	0,95	0,75	0,7
9	0,8	0,85	0,9
10	0,7	0,9	0,98

Методические указания к решению задач 1 – 10

Основные понятия теории вероятностей

Испытание **–** это изначальное понятие**,** разъясняется как действие, наблюдение, опыт и проч.

Исходы испытания называются э***лементарными событиями***.

Пример 1. Некто подбросил монету, которая упала гербом вверх. Здесь испытание – подбрасывание монеты, а результат этого испытания – «выпадение герба» – это событие.

Пример 2. В результате подбрасывания игрального кубика выпало три очка на верхней грани. В этом случае, испытание – подбрасывание кубика, а «выпадение трех очков» – событие.

Заметим, что монета в примере 1 могла упасть не гербом, а решкой (цифрой) вверх. Аналогично, в примере 2, в результате подбрасывания кубика могло бы выпасть, например, два или пять очков. Событие, которое в результате испытания может произойти, а может и не произойти, называется ***случайным***.

Пусть в результате испытания могут появиться несколько событий. События называются ***несовместными,*** если появление одного из них исключает появление других.

Пример 3. Рассмотрим такое испытание, как сдача экзамена по математике одним из студентов. В результате этого испытания могут произойти, например, следующие события:

событие A – экзамен сдан на оценку «4»,

событие B – экзамен сдан на оценку «3»,

событие C – экзамен сдан на оценку выше, чем «3».

В этом случае, события A и B несовместны, так как получение оценки «3» исключает получение оценки «4» за этот же экзамен. Напротив, события A и C совместны, поскольку они могут произойти одновременно.

События называются:

несовместными, если в одном и том же испытании появление одного из них исключает появление других. В противном случае события называются ***совместными***;

равновозможными, если по условиям симметрии нет оснований считать появление какого-либо из них более возможным по отношению к другим, т.е. все события имеют равные “шансы”.

Достоверным называются событие, которое обязательно наступит в результате испытания.

Невозможным называются событие, которое в результате испытания заведомо не произойдет.

Несколько событий образуют ***полную группу***, если они попарно несовместны и в результате испытания появление хотя бы одного из них является достоверным событием. Отсюда следует, что если события, образуют полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится только одно из этих событий.

Пространством элементарных событий (или ***исходов***), соответствующих рассматриваемому испытанию, будем называть такое множество ***несовместных*** событий, одно из которых обязательно произойдет в результате испытания, причём любой интересующий нас результат испытания может быть однозначно описан с помощью элементов этого множества.

В примере с игральным кубиком пространство элементарных исходов образуют 6 событий: $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$, которые заключаются в том, что количество выпавших очков равно соответственно 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Действительно, эти события несовместны и одно из них обязательно произойдет в результате подбрасывания кубика. Кроме того, с помощью этих событий можно описать любые другие события. Например, событие A – «выпало четное число очков» – означает, что появились события E_2 или E_4 или E_6, эти три элементарных исхода благоприятствуют наступлению события A.

Элементарные исходы называются ***равновозможными,*** если ни у одного из них нет преимуществ перед другими, чтобы произойти в результате испытания.

Рассмотрим пример с игральной костью. Игральная кость – это однородный кубик, на гранях которого изображено количество очков от 1 до 6, так как всего граней 6. Испытание – бросание игральной кости. Событие – выпадение определенного количества очков на верхней грани. Полную группу событий образуют шесть событий: $\Omega=\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, которые заключаются в том, что количество выпавших очков составит соответственно 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. По условию симметрии игральной кости все шесть элементарных исходов являются равновозможными.

Пусть событие A – “ количество выпавших очков - четное число”. Это означает, что появились события E_2 или E_4 или E_6 . По этим трем элементарным исходам можно судить о появлении события A. Эти три интересующие нас события называют ***благоприятными*** событиями.

Если событие B –"количество выпавших очков больше четырех", то это означает, что благоприятными являются события E_5 и E_6.

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется число $P(A)$, равное отношению числа элементарных исходов m, благоприятствующих событию A, к общему числу элементарных равновозможных исходов n, образующих полную группу,

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1.1}$$

Для ***достоверного*** события все исходы благоприятные, то есть $m = n$:

$$P(A) = \frac{m}{n} = 1$$

Для ***невозможного*** события, которое не может произойти в результате испытания, $m = 0$:

$$P(A) = \frac{m}{n} = 0$$

Для ***случайного*** события, которое может произойти, а может и не произойти в результате испытания,

$$0<P(A)<1.$$

В примере с игральной костью всего элементарных равновозможных исходов $n = 6$, поэтому, если событие A – " количество выпавших очков - четное число", а событие B –"количество выпавших очков больше четырех", то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Заметим, что если $E_1, E_2, \ldots, E_6$ – количество выпавших очков от 1 до 6, то $P(E_1) = P(E_2) = \ldots = P(E_6) = 1/6$, так как любому элементарному событию благоприятствует один исход (одна грань из шести).

Рассмотрим ещё пример. Пусть в урне 20 одинаковых шаров (по размеру, температуре, гладкости), которые отличаются только цветом, например, 12 из них красные, а остальные – белые. Испытание – извлечение наугад одного шара. Событие A – появление красного шара. Очевидно, что всего элементарных исходов $n = 20$ (по количеству шаров), причём все эти исходы равновозможные. Благоприятными являются 12 исходов (по количеству красных шаров), поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{12}{20}=0{,}6.$$

Вероятность является ***числовой мерой*** объективной возможности наступления события. Вероятность можно задавать в процентах, например $P(A)= 0{,}8$ (80%).

Основные теоремы теории вероятностей

Суммой A+B (A или B) двух событий A и B называется событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий.

Произведением A·B (A и B) двух событий A и B называется событие, состоящие в совместном появлении этих событий.

Условной вероятностью $\boldsymbol{P_A(B)}$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Пример 5. В урне имеется 3 белых и 2 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара во втором испытании (событие B) при условии, что в первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение. Изначально в урне было 5 шаров, из которых 3 белых и 2 черных. После первого испытания, то есть извлечения чёрного шара, в урне осталось 4 шара, из них 3 белых и 1 чёрный. Искомая условная вероятность $P_A(B)= 3/4$.

События A и B называются ***независимыми***, если появление одного из этих событий не изменяет вероятности наступления другого, то есть $P(A)= P_B(A)$ или $P(B)= P_A(B)$. В противном случае события называются ***зависимыми***.

Теорема сложения вероятностей ***несовместных*** событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Теорема умножения вероятностей ***независимых*** событий:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

Теорема умножения вероятностей ***зависимых*** событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Теорема сложения вероятностей ***совместных*** событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Противоположным событию $\boldsymbol{A}$ называется событие $\overline{A}$ (не $\boldsymbol{A}$), если оно наступает тогда и только тогда, когда событие $\boldsymbol{A}$ не наступает.

Пример 6. *а*) Событие A – изделие бракованное,

событие $\overline{A}$ – изделие без брака.

в) Событие B – студент сдал экзамен,

событие $\overline{B}$ – студент не сдал экзамен.

с) Событие C – хотя бы один лотерейный билет выиграл,

событие $\overline{C}$ – ни один лотерейный билет не выиграл.

Из приведенных примеров видно, что противоположное событие можно сформулировать путем простого логического отрицания.

Вероятность противоположного события находится по формуле

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Задача

В партии, состоящей из одинаковых по внешнему виду изделий, смешаны 40 изделий первого сорта и 60 изделий второго сорта. Наугад взяты два изделия. Найти вероятность того, что:

а) оба изделия окажутся первого сорта;

б) окажется, что изделия разных сортов;

в) хотя бы одно из изделий окажется первого сорта.

Решение. Введем обозначения:
событие A_1 – первое взятое изделие I сорта,
событие A_2 – второе взятое изделие I сорта,
событие B_1 – первое взятое изделие II сорта,
событие B_2 – второе взятое изделие II сорта.

В данной задаче всего изделий в партии 40+60=100. Первое изделие выбирается из партии случайным образом, определяется его сортность и в партию оно ***не*** возвращается. Второе изделие выбирается из оставшихся изделий. Заметим, что в этом случае события A и B являются зависимыми. Найдем вероятности событий.

а) P(оба изделия I сорта) = $P(A_1$ и $A_2) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P_{A1}(A_2) =$

$$= \frac{40}{100} \cdot \frac{39}{99} = \frac{78}{495} = 0{,}1576.$$

Здесь мы воспользовались теоремой умножения вероятностей для зависимых событий. Поясним более подробно, как были найдены вероятности $P(A_1)$ и $P_{A1}(A_2)$.

При выборе первого изделия общее число исходов равно 100 (по числу изделий) и все они равновозможные. Число исходов, благоприятствующих событию A_1, равно 40 (по числу изделий I сорта). По классическому определению вероятности находим $P(A_1) = m / n =$ 40 /100.

Найдем условную вероятность $P_{A1}(A_2)$, то есть вероятность выбрать второе изделие I сорта при условии, что первое выбранное изделие также было I сорта. Очевидно, что состав партии изменился: в партии осталось 100– 1 = 99 изделий, из них изделий первого сорта 40 – 1 = 39. Поэтому, при выборе второго первосортного изделия, общее число исходов 99, из них благоприятствуют событию A_2 только 39. По классическому определению вероятности находим:

$$P_{A1}(A_2) = m / n = 39 /99.$$

б) P (изделия разных сортов) = $P(A_1$ и B_2 или B_1 и $A_2) =$

$$= P(A_1 \cdot B_2 + B_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P_{A1}(B_2) + P(B_1) \cdot P_{B1}(A_2) =$$

$$= \frac{40}{100} \cdot \frac{60}{99} + \frac{60}{100} \cdot \frac{40}{99} = \frac{16}{33} = 0{,}4848.$$

Здесь мы воспользовались теоремой сложения вероятностей несовместных событий и теоремой умножения вероятностей зависимых событий. При нахождении условных вероятностей учитываем, сколько всего осталось исходов и сколько из них благоприятствуют второму нужному событию.

в) P(хотя бы одно изделие I сорта) = 1 – P (нет изделий I сорта)=

= 1 – P (оба изделия II сорта) = $1 - P(B_1$ и $B_2) = 1 - P(B_1 \cdot B_2) =$

$$= 1 - P(B_1) \cdot P_{B1}(B_2) = 1 - \frac{60}{100} \cdot \frac{59}{99} = \frac{106}{165} = 0{,}6424.$$

Ответы: а) 0,1576; б) 0,4848; в) 06424.

Задачи 11 – 20

В ювелирный магазин изделия поступают от трех разных изготовителей в соотношении: ***m*** % всех поступающих изделий, составляют изделия первого изготовителя, ***n*** % – второго, остальные изделия третьего изготовителя. Вероятность того, что изделие, произведённое первым изготовителем, имеет скрытый дефект, равна p_1, для второго и третьего изготовителей эти вероятности равны соответственно p_2, и p_3,.

а) Найти вероятность того, что наудачу выбранное изделие имеет скрытый дефект.

б) Оказалось, что наудачу выбранное изделие имеет скрытый дефект. Какова вероятность того, что оно произведено вторым изготовителем?

№ *задачи*	*m*	*n*	p_1	p_2	p_3
11	60	15	0,03	0,05	0,02
12	65	20	0,06	0,05	0,01
13	70	15	0,02	0,05	0,04
14	45	35	0,01	0,05	0,01
15	30	45	0,02	0,05	0,05
16	40	25	0,07	0,05	0,07
17	65	15	0,03	0,05	0,04
18	80	10	0,01	0,05	0,03
19	55	35	0,04	0,05	0,01
20	50	35	0,01	0,05	0,03

Методические указания к решению задач 41 – 50

Формула полной вероятности

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют ***полную группу***, если они попарно несовместны и в результате испытания одно из них обязательно произойдёт.

Для таких событий справедливо равенство:

$$P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1.$$

Противоположные события A и $\overline{A}$ всегда образуют полную группу, поэтому $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ или $P(\overline{A}) = 1 - P(A)\cdot$

Пусть событие A наступает с одним из событий (гипотез) H_i, тогда вероятность этого события находится по формуле, называемой ***формулой полной вероятности***:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A),$$

где события H_1, H_2, … , H_n образуют полную группу.

Формула Байеса

По этой формуле находится вероятность наступления гипотезы H_k при условии, что событие A произошло:

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}.$$

Здесь в знаменателе стоит вероятность события A, вычисляемая по формуле полной вероятности, а в числителе – одно из слагаемых формулы полной вероятности, соответствующее гипотезе H_k.

Задача

Страховая компания разделяет застрахованных клиентов на три класса риска: 55% всех клиентов относятся к классу малого риска, 30% к классу среднего риска, остальные к классу высокого риска. Вероятность выплаты страхового вознаграждения клиентам класса малого риска составляет 0,01, клиентам класса среднего риска 0,03 и клиентам класса высокого риска 0,08.

а) Найти вероятность того, что случайно выбранному клиенту будет выплачено страховое вознаграждение.

б) Оказалось, что случайно выбранному клиенту выплачено страховое вознаграждение. Какова вероятность, что он оказался из группы высокого риска?

Решение. Обозначим:
событие A – клиенту будет выплачено страховое вознаграждение;
событие H_1 – клиент относится к классу малого риска;
событие H_2 – клиент относится к классу среднего риска;
событие H_3 – клиент относится к классу высокого риска.

По условию задачи клиенты класса малого риска составляют 55% всех застрахованных клиентов, следовательно $P(H_1) = 0,55$, класс среднего риска составляет 30% клиентов, тогда $P(H_2) = 0,30$ и на класс высокого риска приходится оставшиеся 15 % всех клиентов то есть $P(H_3) = 0,15$. Очевидно, что

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 0,55 + 0,30 + 0,15 = 1.$$

Вероятность выплаты страхового вознаграждения для клиента класса малого риска равна 0,01, то есть $P_{H1}(A) = 0,01$. Для клиента класса среднего риска эта вероятность составляет 0,03, следовательно, $P_{H2}(A) = 0,03.$ Аналогично, $P_{H3}(A) = 0,08.$

а) Учитывая, что событие A произойдет обязательно с одним из событий (гипотез) H_i, образующих полную группу, применим формулу полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =$$
$$= 0,55 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,15 \cdot 0,08 = 0,0265.$$

б) Пусть оказалось, что случайно выбранный клиент получил страховое вознаграждение. Найдём вероятность того, что этот клиент относится к группе высокого риска (гипотеза H_3). Используем для этого формулу Байеса:

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \cdot P_{H3}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H3}(A)} =$$

$$= \frac{0,15 \cdot 0,08}{0,55 \cdot 0,01 + 0,30 \cdot 0,03 + 0,15 \cdot 0,08} = \frac{0,0120}{0,0265} = 0,4528\ (45,28\%).$$

Ответы: $P(A) = 0{,}0265$; $P_A(H_3) = 0{,}4528$.

Повторение независимых испытаний

Задачи 21 – 30

Вероятность того, что в результате проверки изделию будет присвоен знак «*изделие высшего качества*» равна $\boldsymbol{p}$.

1. На контроль поступило $\boldsymbol{n}$ изделий. Какова вероятность того, что знак высшего качества будет присвоен ровно $\boldsymbol{m}$ изделиям.

2. При тех же условиях найти вероятность того, что в партии из $\boldsymbol{N}$ изделий знак высшего качества получат:

а) ровно $\boldsymbol{k}$ изделий;

б) не менее чем $\boldsymbol{k_1}$, но не более, чем $\boldsymbol{k_2}$ изделий.

№ задачи	*p*	*n*	*m*	*N*	*k*	k_1	k_2
21	0.4	8	5	20	7	5	10
22	0.3	7	4	24	9	5	15
23	0.2	6	3	28	6	4	16
24	0.3	5	2	30	12	8	20
25	0.6	4	1	32	18	15	20
26	0.2	9	6	36	7	5	25
27	0.5	7	3	27	10	12	22
28	0.4	6	1	20	7	10	18
29	0.6	8	4	22	14	15	19
30	0.5	5	3	31	13	7	26

Методические указания к решению задач 21 – 30

Формула Бернулли

Пусть известна вероятность появления события A в каждом независимом испытании: $P(A) = \boldsymbol{p}$, тогда $P(\overline{A}) = 1 - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$ – это вероятность не появления события A. Испытание повторяется $\boldsymbol{n}$ раз. Требуется найти вероятность того, что событие A наступит при этом ровно $\boldsymbol{k}$ раз.

Обозначим $\boldsymbol{P_n(k)}$ – вероятность того, что в $\boldsymbol{n}$ испытаниях событие A наступит ровно $\boldsymbol{k}$ раз. Эта вероятность находится по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где **!** – знак факториала, математической операции такой, что

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Например,

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ и т. д.

Внимание: $\mathbf{0! = 1}$.

Формулу Бернулли удобно применять, если число повторных испытаний невелико ($n \leq 10$).

Формулы Лапласа

Если число испытаний велико ($n > 10$), то вместо формулы Бернулли используется ***локальная формула Лапласа,*** которая является приближенной:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_0), \quad \text{где} \quad x_0 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значение функции $\varphi(x_0)$ берётся по таблице (см. Приложение 1).

Если число испытаний велико ($n > 10$) и нужно найти вероятность того, что при $\boldsymbol{n}$ испытаниях событие A наступит от $\boldsymbol{k_1}$ до $\boldsymbol{k_2}$ раз, то применяют ***интегральную формулу Лапласа***, которая также является приближенной:

$$P_n(k_1;\, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \qquad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции Лапласа $\Phi(x)$ берут по таблице (Приложение 2).

Приближенные формулы дают тем более точный результат, чем больше значение n.

Задача

Баскетболист совершает броски мяча по корзине. Вероятность того, что мяч попадет в корзину, равна 0,7.

1. Баскетболист совершил 5 бросков. Какова вероятность того, что он попал ровно 2 раза.

2. При тех же условиях найти вероятность того, что из 20 бросков попаданий будет:

а) ровно 11 раз;

б) не менее чем 12, но не более 18 раз.

Решение. По условию задачи: $\boldsymbol{p} = 0{,}7$; $\boldsymbol{n} = 5$; $\boldsymbol{m} = 2$;
$\boldsymbol{N} = 20$; $\boldsymbol{k} = 11$; $\boldsymbol{k_1} = 12$; $\boldsymbol{k_2} = 18$.
Вероятность промаха при одном броске: $\boldsymbol{q} = 1 - \boldsymbol{p} = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

1. Вероятность попадания ровно два раза в серии из пяти бросков находим по формуле Бернулли:

$$P_5(2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^3 =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}027 = 10 \cdot 0{,}01323 = 0{,}1323.$$

2. Пусть количество бросков $\boldsymbol{N} = 20$.

а) Найдем вероятность $P_{20}(11)$ приближенно с помощью локальной формулы Лапласа:

$$P_{20}(11) \approx \frac{1}{\sqrt{Npq}} \cdot \varphi(x_0), \quad \text{где}$$

$$x_0 = \frac{k - Np}{\sqrt{Npq}} = \frac{11 - 20 \cdot 0,7}{\sqrt{20 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{-3}{\sqrt{4,2}} \approx -1,46.$$

Результат вычисления для $\boldsymbol{x_0}$ округляем до сотых, так как значения локальной функции Лапласа $\varphi(x_0)$ табулированы в Приложении 1 с такой точностью. По таблице приложения 1, учитывая четность функции $\varphi(x_0)$, находим:

$$\varphi(x_0) = \varphi(-1,46) = \varphi(1,46) = 0,1374.$$

Тогда

$$P_{20}(11) \approx \frac{1}{\sqrt{20 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} \cdot \varphi(-1,46) = \frac{1}{\sqrt{4,2}} \cdot 0,1374 = 0,0670.$$

б) Вероятность того, что число попаданий будет не менее 12 но не более 18 раз, вычисляем по интегральной формуле Лапласа:

$$P_{20}(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где}$$

$$x_1 = \frac{k_1 - Np}{\sqrt{Npq}} = \frac{12 - 20 \cdot 0,7}{\sqrt{20 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{-2}{\sqrt{4,2}} \approx -0,9759 \approx -0,98;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - Np}{\sqrt{Npq}} = \frac{18 - 20 \cdot 0,7}{\sqrt{20 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{4}{\sqrt{4,2}} \approx 1,9518 \approx 1,95.$$

Значения для $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$ округляем до сотых, так как таблица значений интегральной функции Лапласа $\Phi(x)$ предусматривает именно такую точность для x. По таблице приложения 2, учитывая нечетность функции $\Phi(x)$, находим:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-0,98) = -\Phi(0,98) = -0,3365;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(1,95) = 0,4744.$$

Тогда

$$P_{20}(12;18) \approx \Phi(1,95) - \Phi(-0,98) = 0,4744 + 0,3365 = 0,8109.$$

Ответы: 1. 0,1323.

2. а) 0,0670; б) 0,8109.

Случайные величины

Задачи 31 – 40

В лотерее на каждые 100 билетов приходится m_1 билетов с выигрышем a_1 тыс. рублей, m_2 билетов с выигрышем a_2 тыс. рублей, m_3 билетов с выигрышем a_3 тыс. рублей и т.д. Остальные билеты из сотни не выигрывают.

Составить закон распределения величины выигрыша для владельца одного билета и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Пояснить смысл указанных характеристик.

№ *задачи*	a_1	m_1	a_2	m_2	a_3	m_3	a_4	m_4	a_5	m_5
31	20	1	10	2	5	8	3	10	1	15
32	18	2	15	3	10	5	35	20	20	7
33	15	3	12	10	8	15	4	20	30	6
34	16	2	10	5	6	8	3	10	2	15
35	10	5	8	10	6	12	4	15	2	18
36	6	2	5	4	4	6	3	10	2	15
37	14	2	12	8	8	15	5	20	1	30
38	12	5	10	8	6	14	3	25	1	30
39	8	4	5	6	4	12	2	20	15	25
40	5	8	4	10	3	15	2	25	10	50

Методические указания к решению задач 31 – 40

Дискретная случайная величина, её основные характеристики

Случайной величиной называется переменная, принимающая свои возможные числовые значения с определенной вероятностью.

Например: X – балл, который можно получить на экзамене;
Y – число студентов, которые могут посетить лекцию;
Z – возможная величина выигрыша в лотерее;
U – рост случайно выбранного человека и т.п.

Дискретная случайная величина X принимает отдельные числовые значения. Закон распределения дискретной случайной величины записывается в виде таблицы, где перечислены все возможные значения случайной величины X и соответствующие им вероятности:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Следует иметь в виду, что всегда $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$

Основные числовые характеристики закона распределения дискретной случайной величины.

1) ***Математическое ожидание***, ожидаемое среднее значение случайной величины:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... x_n \ p_n = a.$$

2) ***Дисперсия,*** мера рассеяния значений случайной величины X от среднего значения $\boldsymbol{a}$:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a\ )^2 p_i = (x_1 - a)^2 p_1 + (x_2 - a)^2 p_2 + ... + (x_n - a)^2 p_n \ .$$

Второй способ вычисления дисперсии:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

где $M(X)$ определено выше, а

$$M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + ... + x_n{}^2 p_n = \sum x_i^2 p_i \ .$$

3) ***Среднее квадратическое отклонение*** (характеристика рассеяния в единицах признака X):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X).}$$

Задача

В лотерее на каждые 100 билетов приходится 2 билета с выигрышем по 50 т. р., 5 билетов по 20 т. р., 10 билетов по 10 т. р. , 20 билетов по 5 т. р. и 25 билетов по 3 т. р. Остальные билеты не выигрывают.

Составить закон распределения величины выигрыша для владельца одного билета и найти его основные характеристики.

Найти вероятность того, что владелец одного лотерейного билета товара станет обладателем выигрыша не менее 5 т. р.

Решение. Обозначим за X тыс. рублей – величину выигрыша на один билет. Очевидно, что X – случайная дискретная величина. Составим закон распределения этой случайной величины, перечислив все ее возможные значения и найдя соответствующие им вероятности. Число выигрышных билетов из 100 составляет: 2 + 5 + 10 + 20 + 25 = 62, значит, число невыигрышных билетов: 100 – 62 = 38.

Располагая величины возможного выигрыша $\boldsymbol{x_i}$ в порядке возрастания, получим следующую таблицу, которая задаёт закон распределения дискретной случайной величины X:

$\boldsymbol{x_i}$	0	3	5	10	20	50
$\boldsymbol{p_i}$	0,38	0,25	0,20	0,10	0,05	0,02

где $p_1 = P(X=0) = \dfrac{38}{100} = 0{,}38$; $p_2 = P(X=3) = \dfrac{25}{100} = 0{,}25$ и т. д.

Отметим, что $\sum p_i = 0{,}38 + 0{,}25 + 0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}02 = 1.$

1) Математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = \sum x_i p_i = 0\cdot 0{,}38 + 3\cdot 0{,}25 + 5\cdot 0{,}2 + 10\cdot 0{,}1 + 20\cdot 0{,}05 + 50\cdot 0{,}02 = 4{,}75.$$

Таким образом, ожидаемый средний выигрыш на 1 билет составляет 4,75 т. р.

2) Дисперсию случайной величины найдем двумя способами:

а) $$D(X) = \sum_{i=1}^{6} \left[x_i - M(X)\right]^2 \cdot p_i =$$

$$= (0-4{,}75)^2 \cdot 0{,}38 + (3-4{,}75)^2 \cdot 0{,}25 + (5-4{,}75)^2 \cdot 0{,}2 +$$

$$+ (10-4{,}75)^2 \cdot 0{,}1 + (20-4{,}75)^2 \cdot 0{,}05 + (50-4{,}75)^2 \cdot 0{,}02 =$$

$$= 8{,}57375 + 0{,}76525 + 0{,}0125 + 2{,}75625 + 11{,}628125 + 40{,}95125 = 64{,}6875.$$

б) $$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2.$$

$$M(X^2)=\sum x_i^2\cdot p_i = 0^2\cdot 0{,}38+3^2\cdot 0{,}25+5^2\cdot 0{,}2+10^2\cdot 0{,}1+20^2\cdot 0{,}05+50^2\cdot 0{,}02=$$
$$=0+2{,}25+5+10+20+50 = 87{,}25.$$

Тогда: $D(X)=87{,}25-(4{,}75)^2=87{,}25-22{,}5625=64{,}6875.$

Очевидно, что результаты вычислений дисперсии по обоим способам совпадают.

3) Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{64{,}6875}\approx 8{,}04285.$$

Таким образом, $\boldsymbol{\sigma}$ = 8,04285 т. р. – характеристика разброса фактических значений выигрыша от найденного среднего значения, $\boldsymbol{a}$ = 4,75 т. р. Это означает, что основные значения случайной величины выигрыша находятся в диапазоне $(4{,}75\pm 8{,}04285)$ т. р., что соответствует данным задачи.

Найдём вероятность того, что выигрыш X составит не менее 5 т. р., то есть $X\geq 5$. Это означает, что X=5 или X=10 или X=20 или X=50. Используя теорему сложения вероятностей для несовместных событий, получим:

$$P(X\geq 5) = P(X=5 \text{ или } X=10 \text{ или } X=20 \text{ или } X=50) =$$
$$= P(X=5) + P(X=10) + P(X=20) + P(X=50) =$$
$$=0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}02 = 0{,}37.$$

Здесь значения вероятностей взяты из таблицы, задающей закон распределения случайной величины X.

Ответы. $M(X) = 4{,}75$; $D(X) = 64{,}6875$;

$\sigma(X) = 8{,}04285$; $P(X\geq 5) = 0{,}37$.

Задачи 41 – 50

Вес одной порции мясного блюда должен составлять, $\boldsymbol{a}$ гр. В процессе приготовления возникают случайные погрешности, в результате которых вес порционного блюда является случайной величиной подчиненной нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением σ гр.

Найти вероятность того, что:

а) вес изделия составит от α до β гр.;

б) величина погрешности веса будет менее δ гр.

№ задачи	a	σ	α	β	δ
41	100	5	90	105	10
42	110	8	95	115	12
43	120	7	98	125	14
44	130	6	110	135	16
45	140	9	120	145	10
46	150	5	145	165	15
47	160	6	150	165	16
48	125	7	120	135	14
49	155	8	150	165	15
50	145	9	140	155	12

Методические указания к решению задач 41 – 50

Нормальный закон распределения непрерывной случайной величины

Непрерывная случайная величина X может принимать любые значения из некоторого промежутка. Распределение вероятностей ее значений $\boldsymbol{x}$ на этом промежутке задаётся дифференциальной функцией распределения $f(x)$, которая имеет смысл плотности вероятностей.

Исследования показали, что в большом числе встречающихся на практике случаев с достаточным основанием можно считать, что случайные величины распределены по нормальному закону.

Плотность вероятностей нормального распределения задаётся функцией:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}},$$

где $\boldsymbol{a}$ - математическое ожидание; $\boldsymbol{\sigma}$ - среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Значения этой функции можно находить с помощью таблицы (см. Приложение 1).

Графиком этой функции является кривая Гаусса, наглядно показывающая характер распределения вероятностей для значений случайной величины X (Рис.2). При построении кривой для определённости взяты значения $\boldsymbol{a}$ = 8 и $\boldsymbol{\sigma}$ = 4. На графике видны особенности нормального распределения случайной величины X.

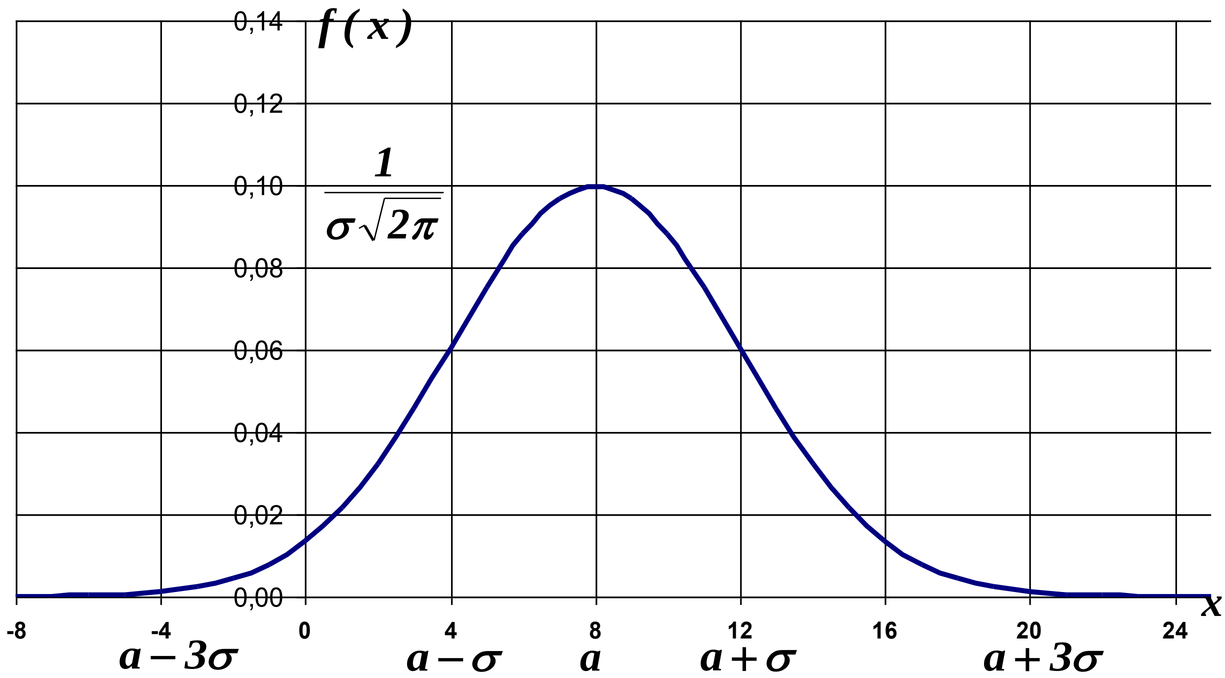

Рис. 2

Особенности нормального распределения

1) Наиболее вероятны значения X, близкие к ожидаемому среднему значению $\boldsymbol{a}$.

2) Отклонения значений X от среднего значения $\boldsymbol{a}$ в обе стороны равновероятны.

3) Большие отклонения значений X от $\boldsymbol{a}$ маловероятны.

Площадь под кривой Гаусса всегда равна единице, что соответствует полной вероятности. Поэтому при уменьшении $\boldsymbol{\sigma}$ плотность перераспределится ближе к $\boldsymbol{a}$, рассеяние уменьшится. При увеличении $\boldsymbol{\sigma}$ график кривой Гаусса становится более расплывчатым, что говорит об увеличении рассеяния.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал (α ; β) находят по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, значения которой берут по таблице (см. Приложение 2).

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения «X - a» меньше $\boldsymbol{\delta}$, равна:

$$P\left(\left|x - a\right| < \delta\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В частности, если $\delta = 2\sigma$, получим:

$$P\left(\left|x - a\right| < 2\sigma\right) = 2\Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544 \approx 95.44\%,$$

то есть на 95,44% справедливо утверждение о том, что значения x нормально распределённой случайной величины отличаются от её среднего значения ***a*** менее, чем на величину $\mathbf{2\sigma}$. Этот результат часто используют в экономических приложениях.

Аналогично, при $\delta = 3\sigma$, получим:

$$P\left(\left|x - a\right| < 3\sigma\right) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973 \approx 99{,}7\%.$$

Последний результат называют правилом «трех сигм»: почти достоверно (на 99,7%), что значения нормально распределенной случайной величины отличаются от своего среднего значения ***a*** менее, чем на 3σ, то есть практически все значения нормально распределенной случайной величины X находятся в интервале: (a–3σ; a+3σ), что соответствует графику кривой Гаусса (рис.2).

Задача

Вес изготовленного серебряного изделия должен составлять 100 гр. При изготовлении возможны случайные погрешности, в результате которых вес изделия случаен и подчинен нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 10 гр. Требуется найти вероятность того, что:

а) вес изделия составит от 80 до 105 гр.;

б) величина погрешности в весе не превзойдет трёх граммов по абсолютной величине.

Решение.

По условию задачи, $\boldsymbol{a}$=100, $\boldsymbol{\alpha}$ = 80, $\boldsymbol{\beta}$=105, $\boldsymbol{\sigma}$ = 10, $\boldsymbol{\delta}$ = 3.

а) Воспользуемся формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Тогда,

$$P(80 < X < 105) = \Phi\left(\frac{105-100}{10}\right) - \Phi\left(\frac{80-100}{10}\right) =$$

= $\Phi(0,5) - \Phi(-2)$ = $\Phi(0,5) + \Phi(2)$, здесь учтено что $\Phi(-2) = -\Phi(2)$.

По таблице Приложения 2 находим:

$$\Phi(0,5) = 0,1915; \qquad \Phi(2) = 0,4772.$$

Следовательно, искомая вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал (80;105) равна:

$$P(80 < X < 105) = 0,1915 + 0,4772 = 0,6687 \ (66,87\%).$$

б) Вероятность того, что абсолютная величина отклонения «*X*-***a***» меньше $\boldsymbol{\delta}$ = 3, находим по формуле:

$$P(|X - a| < \delta) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \quad \text{тогда}$$

$$P(|X - 100| < 3) = 2 \cdot \Phi(3/10) = 2 \cdot 0,1179 = 0,2358 \ (23,58\%),$$

здесь значение $\Phi(3/10) = \Phi(0,3) = 0,1179$ взято по таблице приложения 2.

Таким образом, найдена вероятность попадания случайной величины X в промежуток (100 ± 3), то есть от 97 до 103.

***Ответы*:** *а*) 0,6687; *б*) 0,2358.

Математическая статистика

Математическая статистика базируется на теории вероятностей и является теоретической основой для всей статистики. Ее задачей является создание способов сбора и методов обработки статистической информации.

Обработка выборочных данных

Задачи 51 – 60

По итогам выборочных обследований, для некоторой категории сотрудников, величина их месячного заработка x_i тыс. рублей и соответствующее количество сотрудников n_i представлены в виде интервального статистического распределения.

а) Построить гистограмму относительных частот распределения.

б) Найти основные характеристики распределения выборочных данных: среднее выборочное значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

в) Оценить генеральные характеристики по найденным выборочным характеристикам точечным образом.

г) Зная, что значения признака *X* в генеральной совокупности подчинены нормальному закону распределения, найти доверительный интервал для оценки математического ожидания (генерального среднего значения) с надежностью γ считая, что генеральная дисперсия равна исправленной выборочной дисперсии.

51

X	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10
n_i	5	10	20	15	10

$\gamma = 0,95$

52

X	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
n_i	2	5	15	10	8

$\gamma = 0,90$

53

X	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17
n_i	5	10	20	15	10

$\gamma = 0,92$

54

X	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22
n_i	7	12	18	13	15

$\gamma = 0{,}94$

55

X	6-10	10-14	14-20	20-24	24-28
n_i	5	12	20	15	8

$\gamma = 0{,}91$

56

X	6,5-7,5	7,5-8,5	8,5-9,5	9,5-10,5	10,5-11, 5
n_i	7	15	22	18	8

$\gamma = 0{,}93$

57

X	9-11	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21
n_i	8	13	15	15	7	2

$\gamma = 0{,}85$

58

X	7-11	11-15	15-19	19-23	23-27	27-31	31-35
n_i	5	15	25	18	12	8	2

$\gamma = 0{,}99$

59

X	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22
n_i	8	15	19	22	12	5	1

$\gamma = 0{,}98$

60

X	8-8,2	8,2-8,4	8,4-8,6	8,6-8,8	8,8-9,0
n_i	3	7	20	15	5

$\gamma = 0{,}88$

Методические указания к решению задач 51 – 60

Статистическое распределение выборки

Выборочный метод – один из основных методов математической статистики. Его сущность заключается в том, что изучение большой совокупности объектов относительно некоторого количественного признака X производится по сравнительно небольшому числу случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называется множество всех изучаемых объектов, из которых производится выборка.

Выборочной совокупностью (***выборкой***) называется множество объектов, отобранных для изучения из генеральной совокупности. Выборка должна быть организована случайным образом, чтобы правильно представлять генеральную совокупность.

Объемом совокупности называется количество объектов в совокупности. Объем выборки $\boldsymbol{n}$, как правило, значительно меньше объема $\boldsymbol{N}$ генеральной совокупности: $\boldsymbol{n} \ll \boldsymbol{N}$.

Данные выборки записываются в виде таблицы, называемой статистическим распределением выборки:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

В первой строке перечислены все наблюдаемые значения признака X в порядке их возрастания (или убывания). Они называются вариантами x_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, k$). Во второй строке указаны частоты n_i соответствующих вариант x_i, они показывают, сколько раз наблюдалось каждое значение признака X.

Очевидно, что сумма всех частот n_i равна объему выборки n:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Основные числовые характеристики выборки

Средняя выборочная (среднее взвешенное значение признака в выборке):

$$\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{к} x_i n_i}{n} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k).$$

Дисперсия выборочная. Характеризует разброс (рассеяние) значений вариант $\boldsymbol{x_i}$ от выборочного среднего значения $\overline{x_в}$ и измеряется в квадратных единицах признака X:

$$D_в = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_в)^2 n_i = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \bar{x}_в)^2 n_1 + (x_2 - \bar{x}_в)^2 n_2 + \ldots + (x_к - \bar{x}_в)^2 n_k\right].$$

Для вычисления дисперсии используется также другая, часто более удобная формула:

$$D_в = \overline{x_в^2} - (\bar{x}_в)^2,$$

где

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i n_i; \qquad \overline{x_в^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i .$$

Среднее квадратическое отклонение выборки **–** это характеристика рассеяния значений признака $\boldsymbol{x_i}$ в выборке от среднего выборочного значения $\overline{x_в}$ в единицах признака *X:*

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} .$$

Точечные оценки генеральных характеристик

С помощью найденных выборочных характеристик $x_в, D_в, \sigma_в$ оцениваются соответствующие генеральные характеристики:

$\bar{X}$ – генеральная средняя;

D – генеральная дисперсия;

σ – генеральное среднее выборочное отклонение.

Точечными называются оценки с помощью числа. Они имеют следующий вид:

$$\bar{x} \approx \overline{x_в}\ ; \quad D \approx \frac{n}{n-1} \cdot D_в = S_в{}^2, \quad \sigma \approx S_в = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_в}\ ,$$

где $S_в^2$ - так называемая исправленная выборочная дисперсия.

Приведенные точечные оценки носят случайный характер, так как зависят от выборки. Эти оценки удовлетворяют следующим требованиям.

Несмещённость, означает отсутствие систематических ошибок, то есть, нет отклонений только в одну сторону от истинного значения.

Состоятельность, означает, что при увеличении объема выборки увеличивается вероятность того, что оценка будет более точной.

Эффективность, означает, что данная оценка имеют самый незначительный разброс по сравнению с другими возможными несмещёнными оценками.

Интервальные оценки генеральных характеристик

Точечные оценки генеральных характеристик являются приближенными, причём точность их приближения неизвестна. Эти оценки могут оказаться далекими от истинных значений характеристик генеральной совокупности: $\overline{x} = a$, D, σ. Поэтому для оценки генеральных характеристик используются также интервальные оценки, когда неизвестная характеристика заключена в некотором интервале с заданной надежностью (вероятностью) **γ**. Такой интервал называется доверительным. Значения надежности берутся, как правило, высокими: 0,9; 0,95; 0,99 или 0,999, что соответствует 90; 95; 99 или 99,9%.

Если количественный признак X в генеральной совокупности распределен по нормальному закону, причем среднее квадратическое отклонение **σ** этого распределения известно, то с вероятностью **γ** доверительный интервал, заданный выражением

$$(\overline{x_в} - t \cdot \sigma / \sqrt{n}; \quad \overline{x_в} + t \cdot \sigma / \sqrt{n}),$$

покрывает неизвестное математическое ожидание $\boldsymbol{a}$. Здесь вспомогательный параметр $\boldsymbol{t}$ находится из соотношения $2\Phi(t) = \gamma$ с помощью таблицы для интегральной функции Лапласа $\Phi(t)$ (см. приложение 2).

Графическое представление выборочных данных

Значения $\boldsymbol{n_i}$ называются абсолютными частотами, их сумма равна объему выборки: $\sum n_i = n$. Относительные частоты $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ показывают долю значений $\boldsymbol{x_i}$ в общем объеме выборки. Очевидно, что сумма всех относительных частот (долей) равна 1: $\sum w_i = 1$.

Графически дискретное статистическое распределение изображается в виде полигона частот, обычно относительных. ***Полигон*** частот представляет собой ломаную линию, соединяющую соседние точки с координатами (x_i ; w_i).

Статистическое распределение выборки часто носит интервальный характер. В этом случае указывают числовые частичные интервалы, куда попадают значения признака X, и n_i – количество значений, попавших в каждый частичный интервал.

Интервальное статистическое распределение изображается на графике в виде гистограммы относительных частот. ***Гистограмма*** – это ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников (рис.3). В основании каждого прямоугольника лежит частичный интервал, а высотой прямоугольника является относительная частота w_i , а чаще величина $\dfrac{w_i}{h_i}$, где h_i – длина частичного интервала. При таком построении площадь каждого частичного прямоугольника равна относительной частоте w_i , а сумма всех площадей, то есть площадь ступенчатой фигуры, равна единице, так как $\sum w_i = 1$.

Задача

В результате выборочного наблюдения за вкладами клиентов банка получено следующее распределение клиентов по величине вклада X т. р.:

X	До 100	100-200	200-300	300-400	400-500
n_i	10	18	20	32	28

где n_i – количество клиентов с величиной вклада в заданном интервале.

а) Изобразить данное распределение графически, построив гистограмму относительных частот.

б) Найти основные характеристики выборки: среднее значение, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

в) Оценить генеральные характеристики по найденным выборочным характеристикам.

г) С надежностью 95% указать доверительный интервал для генеральной средней, приняв гипотезу о нормальном распределении признака X, и считая, что генеральная дисперсия равна исправленной выборочной дисперсии.

Решение. Найдем объем выборки n:

$$n = \sum n_i = 10 + 18 + 20 + 32 + 28 = 108,$$

то есть для обследования выбрано 108 клиентов.

а) Вычислим относительные частоты для каждого частичного интервала:

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{10}{108} = 0{,}093; \qquad w_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{18}{108} = 0{,}167;$$

$$w_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{20}{108} = 0{,}185; \qquad w_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{32}{108} = 0{,}296;$$

$$w_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{28}{108} = 0{,}259\ .$$

Рекомендуем все вычисления вести с точностью до 0,001.

Контроль: $\sum w_i = 0{,}093 + 0{,}167 + 0{,}185 + 0{,}296 + 0{,}259 = 1$.

В итоге получено следующее интервальное распределение относительных частот признака *X:*

X	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500
w_i	0,093	0,167	0,185	0,296	0,259

Шаг разбиения h это длина каждого частичного интервала: h=100. Строим гистограмму относительных частот (Рис. 3).

На графике по горизонтальной оси *OX* отложены частичные интервалы для признака *X*, а по вертикальной оси – значения относительных частот w_i.

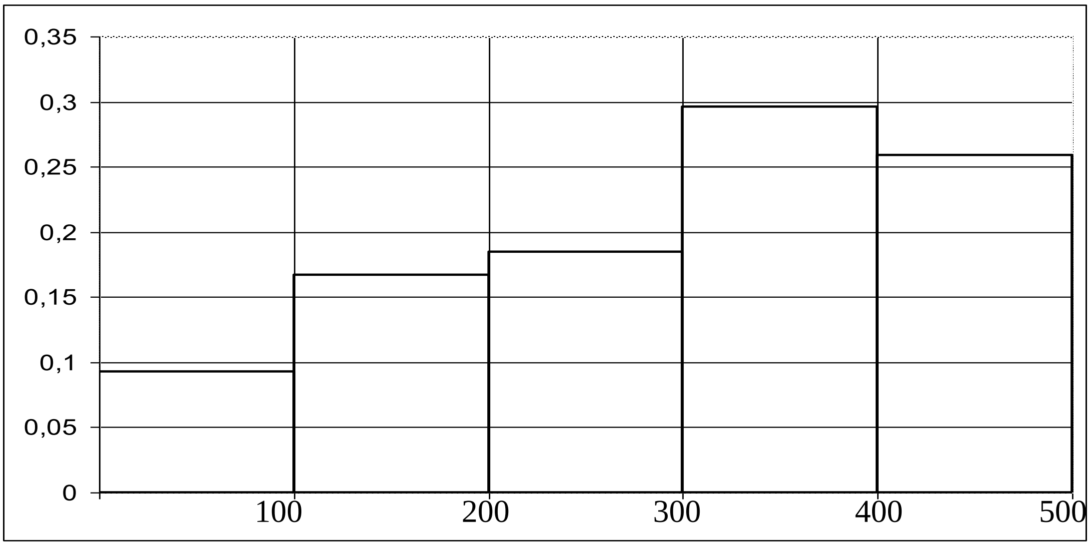

Рис. 3

б) Для нахождения характеристик выборки от заданного интервального распределения признака X перейдем к дискретному распределению, выбирая в качестве значений признака $\boldsymbol{x_i}$ *середины* частичных интервалов:

$\boldsymbol{x_i}$	50	150	250	350	450
$\boldsymbol{n_i}$	10	18	20	32	28

Найдем основные характеристики этого распределения.

Средняя выборочная (средняя величина вклада в т. р.):

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i n_i = \frac{1}{108}(50 \cdot 10 + 150 \cdot 18 + 250 \cdot 20 + 350 \cdot 32 + 450 \cdot 28) =$$

$$= \frac{1}{108}(500 + 2700 + 5000 + 11200 + 12600) = \frac{1}{108} \cdot 32000 \approx 296{,}296.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum (x_i - \overline{x_в})^2 \cdot n_i = \frac{1}{108} \cdot \left[(50 - 296{,}296)^2 \cdot 10 + (150 - 296{,}296)^2 \cdot 18 + \right.$$

$$\left. + (250 - 296{,}296)^2 \cdot 20 + (350 - 296{,}296)^2 \cdot 32 + (450 - 296{,}296)^2 \cdot 28 \right] =$$

$$= \frac{1}{108}(606617{,}196 + 385245{,}353 + 42866{,}392 + 92291{,}828 +$$

$$+ 661497{,}749) = \frac{1}{108} \cdot 1788518{,}518 = 16560{,}3566.$$

Второй способ вычисления дисперсии.

Найдем среднее квадратов значений признака:

$$\overline{x_в^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i^2 n_i = \frac{1}{108}(50^2 \cdot 10 + 150^2 \cdot 18 + 250^2 \cdot 20 + 350^2 \cdot 32 + 450^2 \cdot 28) =$$

$$= \frac{1}{108}(25000 + 405000 + 1250000 + 3920000 + 5670000) =$$

$$= \frac{1}{108} \cdot 11270000 \approx 104351{,}852\ , \quad \text{тогда}$$

$$D_в = \overline{x_в^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2 = 104351{,}852 - (296{,}296)^2 =$$

$$=104351{,}8519 - 87791{,}4952 = 16560{,}3566.$$

Этот результат должен совпадать с результатом первого способа (иногда приближенно из-за округлений).

Выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_{в} = \sqrt{Dв} = \sqrt{16560{,}3566} \approx 128{,}687\,,$$

то есть, в среднем разброс вкладов составляет $\pm$ 128,687 тыс. рублей от среднего значения 296,296 тыс. рублей.

в) Оценим неизвестные генеральные характеристики.
Генеральное среднее значение: $\overline{x} \approx \overline{x_{в}} = 296{,}296$ т. р.
Генеральная дисперсия:

$$D \approx \frac{n}{n-1} D_{в} = \frac{108}{108-1} \cdot 16560{,}3566 \approx 16715{,}1263.$$

Генеральное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{16715{,}1263} \approx 129{,}287 \text{ т. р.}$$

г) Доверительный интервал для оценки генеральной средней ***a*** (среднего вклада) с надежностью γ находим по формуле:

$$a \in (\overline{x_{в}} - t \cdot \sigma / \sqrt{n}; \quad \overline{x_{в}} + t \cdot \sigma / \sqrt{n}).$$

По условию задачи $n = 108$; $\overline{x_{в}} = 296{,}296$; $\sigma = 129{,}287$, $\gamma = 0{,}95$. Неизвестный параметр t находим из условия: $2\Phi(t) = \gamma$. Поскольку в данной задаче $\gamma = 0{,}95$, то есть $2\Phi(t) = 0{,}95$, то $\Phi(t) = 0{,}475$. По таблице Приложения 2, находим $t = 1{,}96$.

Вычислим по этим данным доверительный интервал:

$$\left(296{,}296 - 1{,}96 \cdot \frac{129{,}287}{\sqrt{108}}; \quad 296{,}296 + 1{,}96 \cdot \frac{129{,}287}{\sqrt{108}}\right),$$

$$(296{,}296 - 24{,}384; \quad 296{,}296 + 24{,}384),$$

$$(271{,}912; \quad 320{,}680).$$

Таким образом, с вероятностью 95% неизвестная генеральная средняя (математическое ожидание) находится в этом интервале:

$$\overline{x} = a \in (271{,}912; \quad 320{,}680).$$

Длина полуинтервала $\delta = t \cdot \sigma / \sqrt{n} = 24{,}384$ характеризует точность оценки и называется предельной ошибкой оценки. Оценка тем точнее, чем меньше $\boldsymbol{\delta}$ и, следовательно, доверительный интервал становится более узким.

Величина предельной ошибки $\boldsymbol{\delta}$ зависит от $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{t}$. Очевидно, что с увеличением объема выборки $\boldsymbol{n}$ предельная ошибка $\boldsymbol{\delta}$ уменьшается и, следовательно, точность оценки повышается. При увеличении рассеяния $\boldsymbol{\sigma}$ предельная ошибка $\boldsymbol{\delta}$ увеличивается, то есть оценка делается менее точной. Увеличение надежности $\boldsymbol{\gamma}$ ведет к росту вспомогательного параметра $\boldsymbol{t}$ и расширению доверительного интервала (надежнее попасть в большой интервал). Это делает оценку менее точной. Таким образом, при повышении надежности оценки ухудшается ее точность.

Ответы: $\overline{x_в} = 296{,}296$; $D_в = 16560{,}3566$; $\sigma_в = 128{,}683$.

$\overline{x} \approx 296{,}296$; $D \approx 16715{,}1263$; $\sigma \approx 129{,}287$.

$\overline{x} = a \in (271{,}912;\ 320{,}680)$ с надёжностью 95%.

Элементы теории корреляции

Задачи 61 – 70

С целью анализа взаимного влияния прибыли предприятия и его издержек выборочно были проведены наблюдения за этими показателями в течение ряда месяцев: X – величина месячной прибыли в т. р., Y – месячные издержки в процентах к объему продаж. Результаты выборки представлены в виде таблицы.
По данным выборки:

а) оценить тесноту линейной связи между признаками X и Y;

б) найти зависимость между признаками в виде уравнения линейной регрессии $\overline{y}_x = ax + b$;

в) построить графически наблюдаемые выборочные значения признаков и прямую регрессии.

г) Используя уравнение линейной регрессии, спрогнозировать величину месячных издержек в процентах к объему продаж, если величина месячной прибыли будет составлять $X = K$ т. р.

61

X	20	30	40	50	60
Y	25	22	20	16	10

$K = 70$

62

X	25	35	45	55	65
Y	23	21	18	14	9

$K = 75$

63

X	30	40	50	60	70
Y	28	25	20	15	11

$K = 80$

64

X	35	45	55	65	75
Y	26	20	18	16	12

$K = 85$

65

X	40	50	60	70	80
Y	23	20	18	16	9

$K = 90$

67

X	50	60	70	80	90
Y	26	23	20	18	12

$K = 100$

68

X	55	65	75	85	95
Y	24	20	18	15	10

$K = 105$

69

X	60	70	80	90	100
Y	25	23	19	14	11

$K = 110$

70

X	65	75	85	95	105

$K = 115$

Y	27	24	20	15	12

Методические указания к решению задач 61 – 70

Виды зависимостей

Пусть каждый из рассматриваемых объектов характеризуется двумя признаками X и Y. Между этими признаками X и Y могут существовать различные виды зависимостей.

Функциональная зависимость – это «жёсткая» (детерминированная) зависимость, когда каждому значению признака X соответствует *единственное* значение признака Y. Зависимость задается в виде функции $y = f(x)$.

Статистическая зависимость – в этом случае каждому значению признака X соответствует статистическое распределение признака Y. Эта зависимость задается в виде корреляционной таблицы.

Корреляционная зависимость – это частный случай статистической зависимости, когда каждому значению x признака X соответствует среднее значение $\overline{y}_x$ признака Y и связь между ними достаточно хорошо описывается функцией $\overline{y}_x = f(x)$, которая называется функцией регрессии Y по X.

Аналогично, если каждому значению признака Y соответствует среднее значение $\overline{x}_y = \varphi(y)$, то последняя функция называется функцией регрессии X по Y.

Корреляционная зависимость между признаками, это зависимость между средними значениями этих признаков.

Корреляционная зависимость между признаками может проявляться с разной степенью силы.

Две основные задачи теории корреляции:

1) оценить силу (тесноту) связи между признаками X и Y;
2) найти вид (форму) этой связи в виде уравнения регрессии.

Наиболее простой и употребляемый вид связи – линейная связь. Она задается уравнением линейной регрессии $\overline{y}_x = a \cdot x + b$ и изображается на графике в виде прямой регрессии.

Оценка тесноты линейной связи

Оценка тесноты линейной связи между признаками X и Y производится с помощью коэффициента линейной корреляции $\boldsymbol{r}$:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Коэффициент r может принимать значения от –1 до +1 включительно:

$$-1 \le \boldsymbol{r} \le 1 \qquad \text{или} \qquad |\boldsymbol{r}| \le 1.$$

Знак r указывает направление связи: прямая или обратная. Абсолютная величина $|\boldsymbol{r}|$ указывает на силу (тесноту) связи и устанавливается по приведённой ниже шкале.

Шкала Чаддока

Значение $\lvert\mathbf{r}\rvert$	0-0,1	0,1-0,3	0,3-0,5	0,5-0,7	0,7-0,9	0,9-0,99	1
Теснота линейной связи	Связи нет	Слабая	Умеренная	Заметная	Высокая	Очень высокая	Функциональная

При $\boldsymbol{r} > 0$ связь ***прямая***, то есть с ростом $\boldsymbol{x}$ растет $\boldsymbol{y}$.

При $\boldsymbol{r} < 0$ связь ***обратная***, то есть с ростом $\boldsymbol{x}$ убывает $\boldsymbol{y}$.

Уравнение линейной регрессии

Уравнение регрессии показывает, как средние значения одного признака $\boldsymbol{Y}$ зависят от значений другого признака $\boldsymbol{X}$. Часто эта зависимость является линейной:

$$\overline{y}_x = ax + b.$$

Параметры $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в уравнении линейной регрессии находятся по методу наименьших квадратов, который приводит к следующим формулам для их вычисления:

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x^{\ 2}};$$

$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}.$$

Задача

С целью анализа взаимного влияния прибыли предприятия и его издержек выборочно были проведены наблюдения за этими показателями в течение ряда месяцев: X – величина месячной прибыли в т. р., Y – месячные издержки в процентах к объему продаж. Результаты выборки представлены в виде таблицы:

X	50	56	60	62	65	72	78
Y	20,4	18,1	15,2	10,6	8,8	8,7	8,0

По данным выборки:

а) оценить тесноту линейной связи между признаками X и Y;

б) найти зависимость между признаками в виде уравнения линейной регрессии $\overline{y}_x = a \cdot x + b$;

в) построить графически наблюдаемые выборочные значения признаков и прямую регрессии.

г) Используя уравнение линейной регрессии, спрогнозировать величину месячных издержек в процентах к объему продаж, если величина месячной прибыли будет составлять 82 т. р.

Решение. По условию имеется $\boldsymbol{n}$ = 7 наблюдений для соответственных значений признаков X и Y.

Найдем средние значения признаков $\overline{x}$ и $\overline{y}$, а также их средние квадратические отклонения σ_x и σ_y по тем же формулам, что и в предыдущей задаче, но с учетом того, что каждое значение признака встречается только один раз, то есть все $\boldsymbol{n_i}$ = 1.

Вычисления будем вести с точностью до 0,001.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1}{7}(50 + 56 + 60 + 62 + 65 + 72 + 78) = \frac{443}{7} \approx 63{,}286;$$

$$\overline{y} = \frac{\sum y_i n_i}{n} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{1}{7}(20{,}4 + 18{,}1 + 15{,}2 + 10{,}6 + 8{,}8 + 8{,}7 + 8{,}0) =$$

$$= \frac{89{,}80}{7} \approx 12{,}829;$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n} = \frac{1}{7}(50 \cdot 20{,}4 + 56 \cdot 18{,}1 + 60 \cdot 15{,}2 + 62 \cdot 10{,}6 + 65 \cdot 8{,}8 +$$

$$+ 72 \cdot 8{,}7 + 78 \cdot 8{,}0) = \frac{1}{7} \cdot 5425{,}2 \approx 775{,}029 \ ;$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2}{n} = \frac{1}{7}(50^2 + 56^2 + 60^2 + 62^2 + 65^2 + 72^2 + 78^2) \approx 4081{,}857;$$

$$\overline{y^2} = \frac{\sum y_i^2}{n} = \frac{1}{7}(20{,}4^2 + 18{,}1^2 + 15{,}2^2 + 10{,}6^2 + 8{,}8^2 + 8{,}7^2 + 8{,}0^2) =$$

$$= \frac{1304{,}3}{7} \approx 186{,}329;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \sqrt{4081{,}857 - 63{,}286^2} = \sqrt{76{,}739} \approx 8{,}760;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2} = \sqrt{186{,}329 - 12{,}829^2} = \sqrt{21{,}746} \approx 4{,}663.$$

а) Оценим тесноту линейной связи по коэффициенту линейной корреляции ***r***:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{775{,}029 - 63{,}286 \cdot 12{,}829}{8{,}760 \cdot 4{,}663} \approx -0{,}9025 \approx -0{,}9.$$

Так как ***r*** < 0, то связь обратная, то есть с ростом значений признака *X* значения признака *Y* убывают.

Так как $|\boldsymbol{r}| = |-0{,}9| = 0{,}9$, то по шкале Чаддока, приведенной выше, определяем, что линейная связь очень высокая.

б) Найдем уравнение линейной регрессии. Его параметры:

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x^{\ 2}} = \frac{775{,}029 - 63{,}286 \cdot 12{,}829}{76{,}739} \approx -0{,}48;$$

$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x} = 12{,}829 - (-0{,}48) \cdot 63{,}286 \approx 43{,}193.$$

В результате получим, что среднее значение издержек $\overline{y}_x$ связано с величиной прибыли x уравнением:

$$\overline{y}_x = -0{,}48x + 43{,}193.$$

в) Изобразим графически данные значения (x_i; y_i) в виде точек на плоскости xOy (Рис. 4).

Прямую регрессии $y = -0{,}48x + 43{,}193$ строим по двум точкам:
$x = 0$; $y = -0{,}48 \cdot 0 + 43{,}193 \approx 43$.
$x = 80$; $y = -0{,}48 \cdot 80 + 43{,}193 = 43{,}193 - 38{,}4 \approx 4{,}8$.
Получены точки (0; 43) и (80; 4,8).

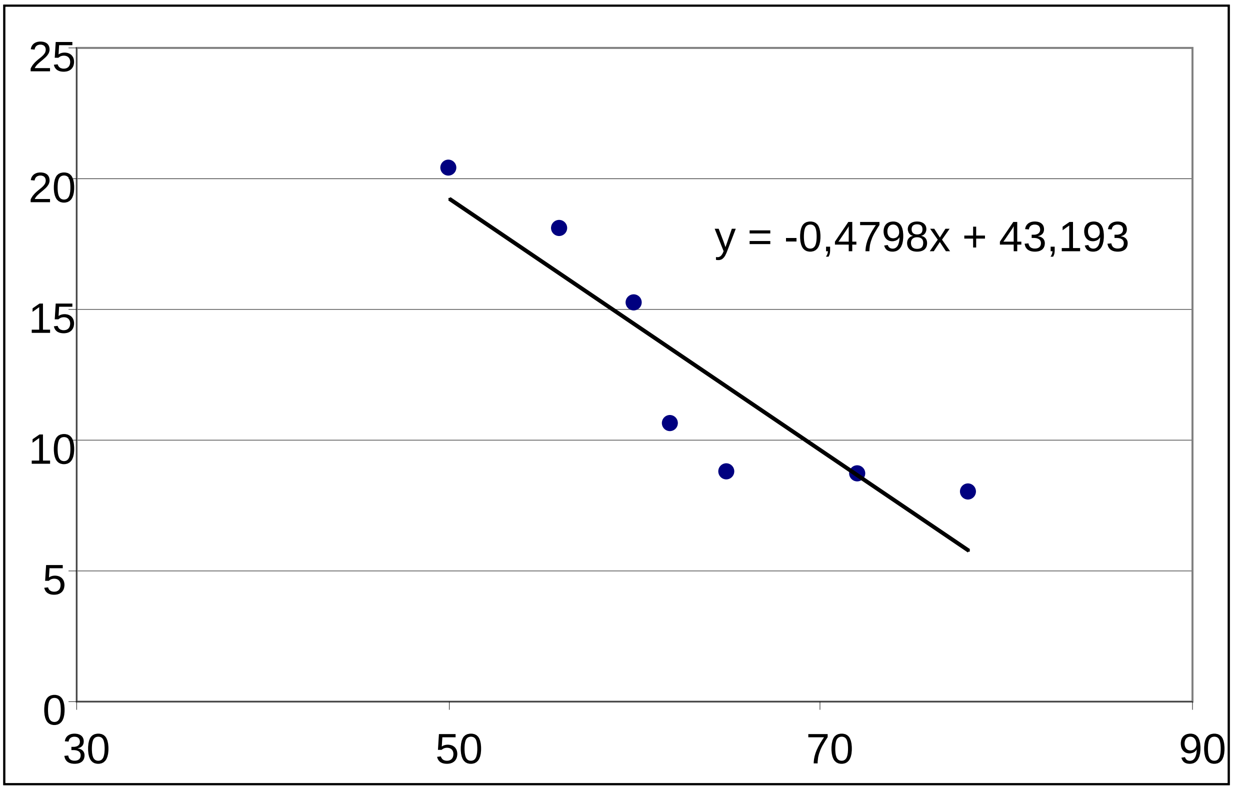

Рис. 4

На графике прямая регрессии убывает и проходит через точку $A(\overline{x}; \overline{y})$, то есть (63,3; 12,8). Прямая регрессии наилучшим образом приближена ко всем данным точкам, которые расположены вблизи прямой по обе стороны от нее.

г) Используя найденную зависимость, спрогнозируем величину месячных издержек, если месячная прибыль составит 82 тыс. руб.:
$y = -0{,}48 \cdot 82 + 43{,}193 \approx 3{,}8$, то есть 3,8% к объёму продаж.

Ответ. Корреляционная зависимость между признаками X и Y очень высокая, ее можно описать линейным уравнением регрессии:

$$\boldsymbol{y} = -0{,}48\boldsymbol{x} + 43{,}193.$$

Прогнозируемые издержки составят 3,8% к объёму продаж.

5. ЗАДАНИЯ ВНЕАУДИТОРНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Раздел 1. Теория вероятностей

Тема 1. Случайные события

1. Испытание, события, виды событий.
2. Классическое и статистическое определения вероятности.
3. Студенческий совет состоит из 15 человек, среди которых 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наугад выбирают 5 человек на предстоящую конференцию. Какова вероятность того, что: *а*) будут выбраны только одни второкурсники; *б*) не будет выбрано ни одного второкурсника; *в*) будут выбраны только третьекурсники; *г*) все первокурсники будут выбраны на конференцию; *д*) будет выбран следующий состав: 1 первокурсник, 2 второкурсника и 2 третьекурсника.
4. Теоремы сложения вероятностей для несовместных и совместных событий.
5. Теоремы умножения вероятностей для независимых и зависимых событий.
6. Определение полной группы событий, свойство вероятностей событий, образующих полную группу.
7. Устройство состоит из 4-х независимо работающих элементов. Вероятность остаться исправными во время работы для каждого из них равна: p_1=0,6, p_2=0,4, p_3=0,8, p_4=0,6, соответственно. Найти вероятность того, что во время работы устройства все элементы будут исправны.
8. Подброшены монета и игральный кубик. Найти вероятность того, что на монете выпала цифра, а на кубике – число очков, кратное двум.
9. Два постоянных покупателя зашли в магазин. Первый из них покупает молоко в 90% случаев, а второй – в 80%. Какова вероятность того, что в этот раз молоко будет куплено?
10. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9: второй – 0,6: третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом

будут сданы: а) только второй экзамен: б) только один экзамен; в) три экзамена г) по крайней мере два экзамена; д) хотя бы один экзамен.

11. Эксперт оценивает качественный уровень трех видов изделий по потребительским признакам. Вероятность того, что изделию первого вида будет присвоен знак качества, равна 0,95; для изделий второго и третьего видов эти вероятности равны соответственно 0,85 и 0,65. Найти вероятность того, что знак качества будет присвоен: *а*) всем изделиям; *б*) только одному изделию; *в*) хотя бы одному изделию.

12. Для подготовки к экзамену студенту выдано 20 вопросов.

13. Студент выучил половину из них. Какова вероятность того, что он сдаст экзамен, если для этого он должен ответить хотя бы на два из трёх вопросов, предложенных ему случайным образом?

14. Банкротство банка может произойти по трем причинам, вероятность первой – 0,01; второй – 0,32; третьей – 0,2. Найти вероятность того, что банк обанкротится.

15. В партии товара, состоящей из 50 мужских костюмов, находится 30 изделий местного производства. Товаровед наудачу отбирает три изделия. Какова вероятность, что все три изделия окажутся: *а*) местного производства; *б*) не местного производства?

16. Формула полной вероятности и формула Байеса.

17. В магазин поступает натуральный сок в бутылках от двух изготовителей: местного и иногороднего, причем местный изготовитель поставляет 60% всей продукции. Вероятность того, что при транспортировке бутылка окажется разбитой, для местной продукции равна 0,6%, а для иногородней продукции она составляет 2%. Найти вероятность того, что взятая наугад бутылка окажется разбитой. Взятая бутылка оказалась разбитой, какова вероятность, что она от местного изготовителя?

Тема 2. Повторные независимые испытания

1. Когда используется формула Бернулли?
2. Наивероятнейшее число появлений события в $\boldsymbol{n}$ испытаниях.

3. Оптовая база снабжает товаром $\boldsymbol{n}$ магазинов. Вероятность того, что в течение дня поступит заявка на товар, равна $\boldsymbol{p}$ для каждого магазина. Найти вероятность того, что в течение дня поступят: *а*) ровно $\boldsymbol{k}$ заявок; *б*) не менее $\boldsymbol{k_1}$, но не более $\boldsymbol{k_2}$ заявок. Каково наивероятнейшее число поступающих в течение дня заявок и чему равна соответствующая ему вероятность?

1) $p = 0{,}6$; $n = 7$; $k = 4$; $k_1 = 0$; $k_2 = 2$;

2) $p = 0{,}7$; $n = 20$; $k = 7$; $k_1 = 8$; $k_2 = 14$.

Тема 3. Случайные величины

1. Случайные величины, их виды и способы задания.

2. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, их смысл.

3. Биномиальный закон распределения дискретной случайной величины, его основные характеристики.

4. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по известному закону ее распределения, заданному таблицей:

X	12	14	18	24	27
P	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

5. Производство даёт в среднем 40% изделий отличного качества. Наугад взяты пять изделий. Составить закон распределения случайной величины X – количества изделий отличного качества среди пяти взятых изделий, и найти его основные характеристики.

6. Способы задания непрерывной случайной величины. Интегральная и дифференциальная функции распределения непрерывной случайной величины, их вероятностный смысл, свойства и взаимная связь.

7. Основные характеристики непрерывно распределённой случайной величины, их вычисление.

8. Плотность вероятности случайной величины X задана функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при } x \le 0, \\ x/2 & \textit{при } 0 < x \le 2, \\ 0 & \textit{при } x > 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала (1,2).

9. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \dfrac{x}{4} & при \quad 0<x\le 4,\\ 1 & при \quad x>4.\end{cases}$$

требуется найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

10. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ x^2 & при \quad 0<x\le 1,\\ 1 & при \quad x>1.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний случайная величина $\boldsymbol{X}$ ровно три раза примет значение, заключенное в интервале (0,25; 0,75).

11. Нормальный закон распределения непрерывной случайной величины, его особенности.

12. Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 540 г. Известно, что 5 % коробок имеют массу, меньшую 500 г. Вес коробок распределён по нормальному закону. Каков процент коробок, масса которых: а) менее 470 г; б) от 500 до 550 г; в) отличается от средней массы не более чем на 30 г?

13. Понятие о законе больших чисел.

14. Интервал движения автобусов составляет 15 минут. Какова вероятность того, что пассажир на остановке автобуса будет ждать его не более 5 минут?

Раздел 2. Математическая статистика

Тема 4. Элементы математической статистики

1. Сущность выборочного метода.
2. Статистическое распределение выборки.

3. Основные характеристики выборочного распределения.

4. Точечные и интервальные оценки генеральных характеристик.

5. По данным выборки найти относительные частоты и построить гистограмму относительных частот:

X	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
n_i	3	6	8	2	1

Вычислить среднюю выборочную, дисперсию и среднее выборочное квадратическое отклонение. Дать точечные оценки основных генеральных характеристик. С надёжностью 95% найти доверительный интервал для генеральной средней.

6. Для вариационного ряда: 1; 2; 3; 3; 4; 5; 5; 5; 7 указать моду, медиану и размах варьирования. Вычислить среднее значение и дисперсию.

7. Найти среднее значение, дисперсию и среднее квадратическое отклонение для вариационного ряда:

X	5	10	12	15	20
n_i	2	1	5	1	1

Указать также моду, медиану и размах варьирования.

18. Определение статистической гипотезы. Основная и конкурирующая гипотезы.

19. Понятие о критериях согласия.

20. Из большой партии изделий по схеме случайной бесповторной выборки было проверено 20 изделий с целью определения случайной величины X – процента влажности древесины, из которой изготовлены эти изделия. Получены следующие результаты:

X	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
n_i	3	6	8	2	1

По данным этой выборки, на уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном законе распределения значений признака в генеральной совокупности, используя критерий согласия Пирсона.

11. Понятие корреляционной зависимости между случайными величинами.

9. Оценка силы (тесноты) линейной корреляционной связи по коэффициенту линейной корреляции.

10. Имеются следующие данные об уровне механизации работ X % и производительности труда Y (тонн/час) для нескольких однотипных предприятий:

X	30	32	36	40	41	47	54	55	56	60

Y	24	20	28	30	31	33	37	40	34	38

Оценить тесноту и направление связи между признаками X и Y с помощью коэффициента линейной корреляции и найти уравнение линейной зависимости производительности труда Y от уровня механизации работ X. Результаты пояснить графически.

14. Результаты выборки о соответственных значениях двух признаков X и Y представлены корреляционной таблицей:

$У\backslash X$	12	17	22	27	32	37
25					4	1
35				9	5	
45		4	10	8		
55			8	6		
65	3	7	2			

Найти общие и условные средние для признаков X и Y. Оценить тесноту линейной зависимости между признаками и составить уравнения линейной регрессии Y по X и X по Y. Найти корреляционное отношение.

15. Для нескольких приблизительно одинаковых по площади гастрономических магазинов имеются следующие данные об уровне их издержек X %, годовом объёме товарооборота Y (млн. руб.) и годовой прибыли Z (тыс. руб.):

X	5,2	7,5	8,4	10,1	12,0
Y	1,6	2,5	5,0	5,8	7,2
Z	1500	2040	4850	6360	7820

Найти уравнение линейной регрессионной модели для зависимости прибыли Z от издержек обращения X и объёма товарооборота Y. Найти выборочные коэффициенты парной и частной корреляции и проанализировать степень тесноты линейной связи между всеми парами переменных. Используя найденную регрессионную модель, рассчитать средний уровень годовой прибыли, если издержки обращения составят 11% при объёме годового товарооборота 10 млн. руб.

6. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

6.1. Основная литература

1. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. — 2-е изд., испр. и перераб. — М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2018. — 240 с. — (Среднее профессиональное образование). - Режим доступа: http://znanium.com/go.php?id=944923

2. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие / Бирюкова Л.Г., Бобрик Г.И., Матвеев В.И., - 2-е изд. - М.:НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 289 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011793-5. - Режим доступа: http://znanium.com/go.php?id=370899.

3. Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование: Учебное пособие / Белько И.В., Морозова И.М., Криштапович Е.А. - М.:НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2016. - 299 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт 7БЦ) ISBN 978-5-16-011748-5. - Режим доступа: http://znanium.com/go.php?id=542521

6.2. Дополнительная литература

4. Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы: Учебник / Кацман Ю.Я. - Томск:Изд-во Томского политех. университета, 2013. - 131 с.: ISBN 978-5-4387-0173-6

5. Теория вероятностей: Учебник / Р.Ш. Хуснутдинов. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 175 с.: 60x88 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (обложка) ISBN 978-5-16-005312-7, 500 экз.

6. Теория вероятностей. Примеры и задачи/ВасильчикМ.Ю., АркашовН.С., КовалевскийА.П. и др., 2-е изд. - Новосиб.: НГТУ, 2014. - 124 с.: ISBN 978-5-7782-2487-2

7. ИНФОРМАЦИОННОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Перечень обучающих, контролирующих и расчетных компьютерных программ

- Excel;
- Power Point;
- Statistica;
- MathCad V.14

Перечень интернет – ресурсов

- **www.wikipedia.ru** **-** википедия «Математические методы в экономике»**;**

- **www.cemi.rssi.ru** - сайт Центрального экономико-математического института РАН. .

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ Приложение 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0631	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	2519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\varphi(x \geq 4) = 0 \qquad \varphi(-x) = \varphi(x)$$

Приложение 2

Таблица значений функции $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	Φ(***x***)	***x***	Φ(***x***)	***x***	Φ(***x***)	***x***	Φ(***x***)
0.00	0.0000	0.37	0.1443	0.74	0.2703	1.11	0.3665
0.01	0.0040	0.38	0.1480	0.75	0.2734	1.12	0.3686
0.02	0.0080	0.39	0.1517	0.76	0.2764	1.13	0.3708
0.03	0.0120	0.40	0.1554	0.77	0.2794	1.14	0.3729
0.04	0.0160	0.41	0.1591	0.78	0.2823	1.15	0.3749
0.05	0.0199	0.42	0.1628	0.79	0.2852	1.16	0.3770
0.06	0.0239	0.43	0.1664	0.80	0.2881	1.17	0.3790
0.07	0.0279	0.44	0.1700	0.81	0.2910	1.18	0.3810
0.08	0.0319	0.45	0.1736	0.82	0.2939	1.19	0.3830
0.09	0.0359	0.46	0.1772	0.83	0.2967	1.20	0.3849
0.10	0.0398	0.47	0.1808	0.84	0.2995	1.21	0.3869
0.11	0.0439	0.48	0.1844	0.85	0.3023	1.22	0.3883
0.12	0.0478	0.49	0.1879	0.86	0.3051	1.23	0.3907
0.13	0.0517	0.50	0.1915	0.87	0.3078	1.24	0.3925
0.14	0.0557	0.51	0.1950	0.88	0.3106	1.25	0.3944
0.15	0.0596	0.52	0.1985	0.89	0.3133	1.26	0.3962
0.16	0.0638	0.53	0.2019	0.90	0.3159	1.27	0.3980
0.17	0.0675	0.54	0.2054	0.91	0.3186	1.28	0.3997
0.18	0.0714	0.55	0.2088	0.92	0.3212	1.29	0.4015
0.19	0.0753	0.56	0.2123	0.93	0.3238	1.30	0.4032
0.20	0.0793	0.57	0.2157	0.94	0.3264	1.31	0.4049
0.21	0.0832	0.58	0.2190	0.95	0.3289	1.32	0.4066
0.22	0.0871	0.59	0.2224	0.96	0.3315	1.33	0.4082
0.23	0.0910	0.60	0.2257	0.97	0.3340	1.34	0.4099
0.24	0.0948	0.61	0.2291	0.98	0.3365	1.35	0.4115
0.25	0.0987	0.62	0.2324	0.99	0.3389	1.36	0.4131
0.26	0.1026	0.63	0.2357	1.00	0.3413	1.37	0.4147
0.27	0.1064	0.64	0.2389	1.01	0.3438	1.38	0.4162
0.28	0.1103	0.65	0.2422	1.02	0.3461	1.39	0.4177
0.29	0.1141	0.66	0.2454	1.03	0.3485	1.40	0.4192
0.30	0.1179	0.67	0.2486	1.04	0.3508	1.41	0.4207
0.31	0.1217	0.68	0.2517	1.05	0.3581	1.42	0.4222
0.32	0.1255	0.69	0.2549	1.06	0.3554	1.43	0.4236
0.33	0.1293	0.70	0.2580	1.07	0.3577	1.44	0.4251
0.34	0.1331	0.71	0.2611	1.08	0.3599	1.45	0.4265
0.35	0.1368	0.72	0.2642	1.09	0.3621	1.46	0.4279
0.36	0.1406	0.73	0.2673	1.10	0.3643	1.47	0.4292

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.48	0.4306	1.76	0.4608	2.08	0.4812	2.64	0.4959
1.49	0.4319	1.77	0.4616	2.10	0.4821	2.66	0.4961
1.50	0.4332	1.78	0.4625	2.12	0.4830	2.68	0.4963
1.51	0.4345	1.79	0.4633	2.14	0.4838	2.70	0.4965
1.52	0.4357	1.80	0.4641	2.16	0.4846	2.72	0.4967
1.53	0.4370	1.81	0.4649	2.18	0.4854	2.74	0.4969
1.54	0.4382	1.82	0.4656	2.20	0.4861	2.76	0.4971
1.55	0.4394	1.83	0.4664	2.22	0.4868	2.78	0.4973
1.56	0.4406	1.84	0.4671	2.24	0.4875	2.80	0.4974
1.57	0.4418	1.85	0.4678	2.26	0.4881	2.82	0.4976
1.58	0.4429	1.86	0.4686	2.28	0.4887	2.84	0.4977
1.59	0.4441	1.87	0.4693	2.30	0.4893	2.86	0.4979
1.60	0.4452	1.88	0.4699	2.32	0.4898	2.88	0.4980
1.61	0.4463	1.89	0.4706	2.34	0.4904	2.90	0.4981
1.62	0.4474	1.90	0.4713	2.36	0.4909	2.92	0.4982
1.63	0.4484	1.91	0.4719	2.38	0.4913	2.94	0.4984
1.64	0.4495	1.92	0.4726	2.40	0.4918	2.96	0.4985
1.65	0.4505	1.93	0.4732	2.42	0.4922	2.98	0.4986
1.66	0.4515	1.94	0.4338	2.44	0.4927	3.00	0.49865
1.67	0.4525	1.95	0.4744	2.46	0.4931	3.20	0.49931
1.68	0.4535	1.96	0.4750	2.48	0.4934	3.40	0.49966
1.69	0.4545	1.97	0.4756	2.50	0.4938	3.60	0.49984
1.70	0.4554	1.98	0.4761	2.52	0.4941	3.80	0.49993
1.71	0.4564	1.99	0.4767	2.54	0.4945	4.00	0.49997
1.72	0.4573	2.00	0.4772	2.56	0.4948	4.50	0.49999
1.73	0.4582	2.02	0.4783	2.58	0.4951	5.00	0.50000
1.74	0.4591	2.04	0.4793	2.60	0.4953		
1.75	0.4599	2.06	0.0480	2.62	0.4956		

$$\Phi(x > 5) = 0{,}5$$

$$\Phi(-x) = -\Phi(x)$$