

Индивидуальное домашнее задание № 1 часть 1

ИДЗ № 1 выполняется на тему: «Переходные процессы в цепях с сосредоточенными параметрами. Линии с распределенными параметрами в установившемся режиме».

Индивидуальное домашнее задание № 1 состоит из двух частей:

Первая часть включает решение двух задач:

- 1.1, 1.2 – развивающие навыки расчета переходных процессов в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами с одним и двумя накопителями энергии. В задаче используются методы: классический, операторный, интеграла Дюамеля;

Схемы на рис. 1.1, a –1.10, a относятся к задаче 1.1.

Схемы на 1.1, b –1.10, b , относятся к задаче 1.2.

Задача 1.1

1. В заданной цепи, изображенной на рис. 1.1, a –1.10, a (схема на рис. 1.1, a –1.10, a выбирается по правилу выбора варианта из табл. 1.1), в момент времени $t = 0$ срабатывает ключ **К** и на интервале времени $0 \leq t \leq t_0$ подключается источник постоянной ЭДС $e(t) = E_0$ или источник постоянного тока $J(t) = J_0$.

Требуется: определить закон изменения тока в катушке индуктивности (схема RL) или напряжения на конденсаторе (схема RC) **классическим методом**. Построить график изменения искомой величины на интервале времени $0 \leq t \leq 4\tau$, где τ – постоянная времени цепи с одним накопителем энергии (в секундах). Ее численное значение определяется из характеристического уравнения, как величина, обратная корню $\tau = \left| \frac{1}{p} \right|$.

2. В заданной цепи (рис. 1.1, a –1.10, a) в момент времени $t = 0$ срабатывает ключ **К**, который подключает источник ЭДС $e(t)$ или тока $J(t)$, изменяющиеся по экспоненциальному закону:

$$e(t) = E_0 \cdot e^{-at} \quad \text{или} \quad J(t) = J_0 \cdot e^{-at},$$

где a – постоянный коэффициент, определяется по данным табл. 1.1 из заданного соотношения $a \cdot \tau$.

Требуется: определить закон изменения той же величины (см. п. 1) **операторным методом**. Построить график изменения искомой величины на интервале времени $0 \leq t \leq 4 \cdot \tau$.

3. В заданной цепи (рис. 1.1, a –1.10, a) в момент времени $t = 0$ срабатывает ключ **К** и на интервале времени $0 \leq t \leq t_0$ подключается источник ЭДС $e(t)$ или тока $J(t)$, изменяющиеся по линейному закону:

$$e_1(t) = E_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \text{ или } J_1(t) = J_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)$$

$$\text{при } t \geq t_0 \quad e_2(t) = 0; \quad J_2(t) = 0.$$

Требуется: определить закон изменения той же величины (см. п. 1) **методом интеграла Дюамеля**. Построить график изменения искомой величины на интервалах времени $0 \leq t \leq t_0$ и $t \geq t_0$. **Принять** $t_0 = 2 \cdot \tau$, где τ – постоянная времени цепи.

Параметры элементов цепи и источников указаны в табл. 1.1.

Таблица 1.1

№ варианта	№ схемы (см. рис.)	E_0 , В	J_0 , А	$a \cdot \tau$	L , мГн	C , мкФ	R_1	R_2	R_3
							Ом		
1	1.1 а, б	100	–	2	4	500	10	6	4
2	1.4 а, б	50	–	2	1	10	10	25	5
3	1.6 а, б	150	–	3	10	10	40	60	100
4	1.9 а, б	100	–	2	4	5	20	20	10
5	1.2 а, б	–	1	2	1	10	10	10	4
6	1.10 а, б	40	–	2	1	10	0,5	3	0,5
7	1.3 а, б	–	2	3	10	10	50	10	10
8	1.9 а, б	50	–	2	1	10	6	6	1
9	1.5 а, б	–	10	2	20	100	50	50	50
10	1.7 а, б	–	1	2	2	10	2	2	4
11	1.8 а, б	–	5	3	1	10	0	4	4
12	1.10 а, б	100	–	2	2	10	1	4	1
13	1.8 а, б	–	4	3	2	10	5	5	0
14	1.7 а, б	–	0,5	2	1	10	1	1	3
15	1.6 а, б	60	–	2	2	1670	1	0	6
16	1.4 а, б	100	–	2	1	10	20	5	15
17	1.5 а, б	–	0,2	2	10	10	40	60	100
18	1.1 а, б	20	–	3	1	1500	2	4	1
19	1.3 а, б	–	0,8	2	10	100	10	100	25
20	1.4 а, б	100	–	2	2	5	20	40	20
21	1.2 а, б	–	0,1	3	1	10	1	2	3
22	1.8 а, б	–	0,4	2	0,4	10	5	2,5	0
23	1.6 а, б	10	–	2	2	1670	1	2	4
24	1.7 а, б	–	3	2	4	5	20	20	5
25	1.10 а, б	100	–	2	20	10	1	14	3

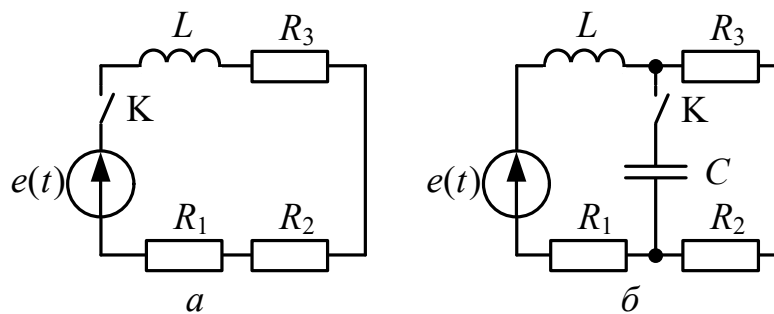


Рис. 1.1

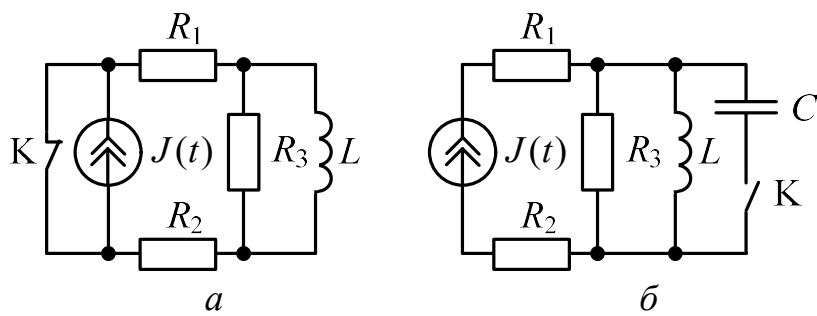


Рис. 1.2

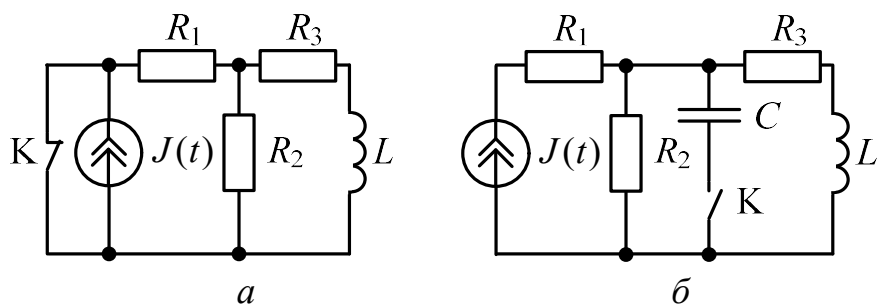


Рис. 1.3

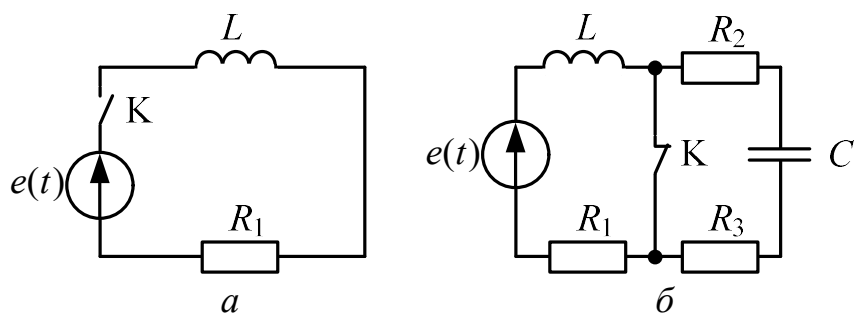


Рис. 1.4

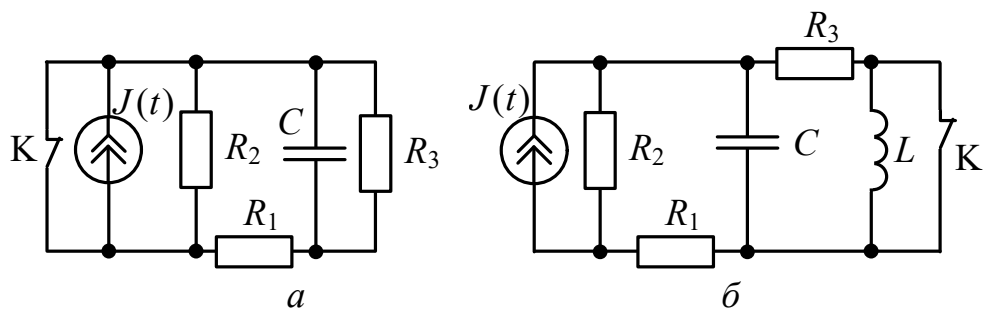


Рис. 1.5

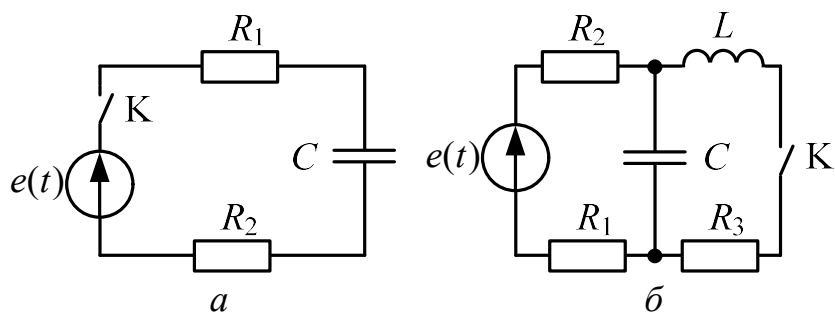


Рис. 1.6

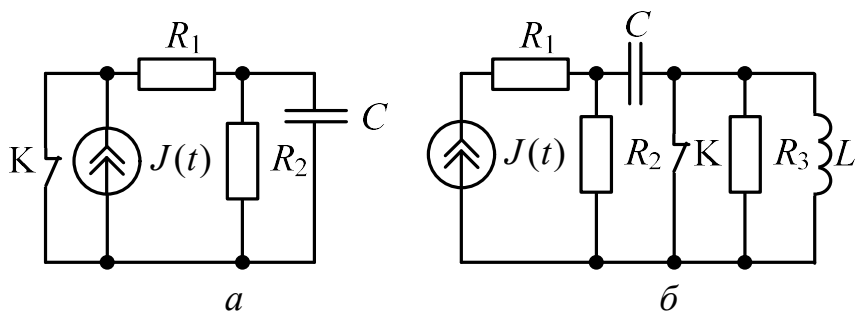


Рис. 1.7

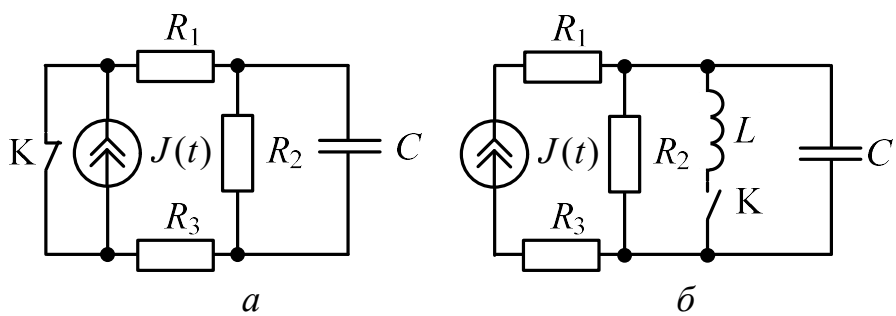


Рис. 1.8

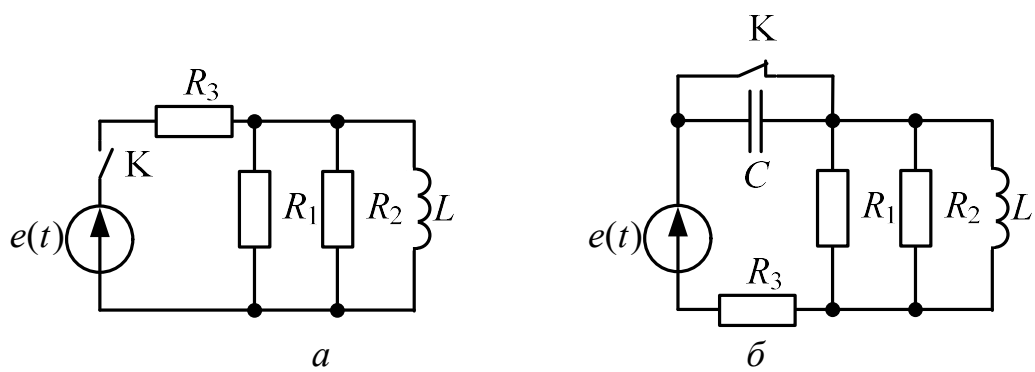


Рис. 1.9

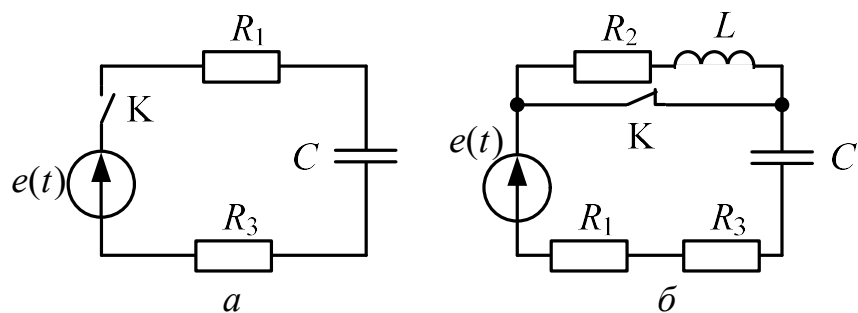


Рис. 1.10

Задача 1.2

В цепи, изображенной на рис. 1.1, б–1.10, б, в момент времени $t = 0$ срабатывает ключ **К**, который подключает источник постоянной ЭДС $e(t) = E_0$ или источник постоянного тока $J(t) = J_0$.

Требуется: определить закон изменения той же величины (см. задачу 1.1) **классическим методом**. Построить график изменения искомой величины на интервале времени $0 \leq t \leq 4\tau_{\max}$, где $\tau_{\max}$ – большая по величине постоянная времени цепи второго порядка.

Теоретические сведения и методические указания к решению индивидуального домашнего задания № 1

Переходные процессы возникают при коммутациях, под которыми понимают включение, отключение, переключение источников энергии или элементов цепи. Импульсные воздействия вызывают переходные процессы без коммутаций, как, например, в предлагаемой задаче.

1. Классический метод

Классический метод анализа электрических цепей основан на интегрировании дифференциального уравнения цепи, записанного относительно выбранной переменной. В качестве переменных принимают величины, для которых легко записать начальные условия (значения). Как правило, это токи индуктивных и напряжения емкостных элементов. Порядок дифференциального уравнения определяется числом накопителей энергии – индуктивных и емкостных элементов. Дифференциальное уравнение получают, записывая систему уравнений для мгновенных значений токов и напряжений на основании законов Кирхгофа и разрешая её относительно одной из переменных (тока, напряжения).

Решение полученного дифференциального уравнения представляется суммой частного и общего решений. Составляющие токов и напряжений,

определяемые частным решением дифференциального уравнения, обусловлены вынуждающим воздействием источников, поэтому их называют вынужденными или **принужденными** ($f_{\text{пр}}(t)$). Эти составляющие отсутствуют, когда нет внешнего воздействия (правая часть уравнения равна нулю). Составляющие токов и напряжений, определяемые общим решением однородного дифференциального уравнения, обусловлены энергией, связанной с накопителями. Эти составляющие называют **свободными** ($f_{\text{св}}(t)$). Таким образом, в классическом методе решение определяется наложением составляющих:

$$f(t) = f_{\text{пр}}(t) + f_{\text{св}}(t). \quad (1.1)$$

Принужденная составляющая является частным решением дифференциального уравнения и определяется видом воздействия. В цепи с постоянными и гармоническими источниками принужденные составляющие совпадают с установившимися значениями и могут быть найдены любым из известных методов расчета цепей в установившихся режимах.

Свободная составляющая определяется видом корней **характеристического** уравнения. Последнее получают из однородного дифференциального уравнения путем его алгебраизации, подставляя вместо d/dt алгебраический оператор p .

Характеристическое уравнение можно составлять, не прибегая к решению системы дифференциальных уравнений относительно одной переменной, а воспользоваться одним из приёмов:

1. Составить определитель матрицы контурных сопротивлений или узловых проводимостей для рассматриваемой цепи в комплексной форме. Заменив величину $j\omega$ на p , приравнять определитель к нулю и решить полученное уравнение относительно p . Полученные значения – корни характеристического уравнения.

2. Составить относительно входных зажимов цепи выражение входного комплексного сопротивления $\underline{Z}(p)$ при питании от источника ЭДС или проводимости $\underline{Y}(p)$ – при питании от источника тока. При этом C заменяется на $1/pC$, а L заменяется на pL и, приравняв $Z(p)$ или $Y(p)$ к нулю, определить корни решением полученного уравнения.

Возможны варианты записи свободной составляющей:

$$1. f_{\text{св}}(t) = \sum_{i=1}^n A_i \cdot e^{p_i t}, \quad (1.2, a)$$

если корни p_i вещественные разные;

$$2. f_{\text{св}}(t) = \sum_{i=1}^n A_i \cdot t^{i-1} \cdot e^{p_i t}, \quad (1.2, б)$$

если корни вещественные равные (кратные);

$$3. f_{\text{св}}(t) = \sum_{i=1,3,5}^{n-i} A_i \cdot e^{-\delta_i t} \cdot \sin(\omega_{\text{св}_i} \cdot t + \gamma_i), \quad (1.2, в)$$

если корни попарно комплексно-сопряженные;

$$p_i = -\delta_i + j\omega_{\text{св}_i}; \quad p_{i+1} = -\delta_i - j\omega_{\text{св}_i}.$$

Величины A_i , γ_i – постоянные интегрирования.

В первом случае процесс называют апериодическим, во втором – предельным апериодическим или критическим, в третьем – затухающим периодическим или колебательным.

Постоянные интегрирования находят из начальных условий, для чего составляют систему уравнений относительно свободной составляющей искомой величины и её производных для момента времени $t = 0_+$ или $t = t_0$, если учитывается запаздывание коммутации. Например, для цепи второго порядка с вещественными корнями:

$$f_{\text{св}}(0_+) = A_1 + A_2; \quad f'_{\text{св}}(0_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2.$$

Здесь $f_{\text{св}}(0_+) = f(0_+) - f_{\text{пр}}(0_+)$ и $f'_{\text{св}}(0_+) = f'(0_+) - f'_{\text{пр}}(0_+)$ – начальные условия.

Различают зависимые и независимые начальные условия.

Независимые начальные условия (ННУ) – значения токов в индуктивных и напряжений на ёмкостных элементах в момент коммутации.

Согласно законам коммутации ток в ветви с индуктивностью и напряжение на ёмкости в момент коммутации не изменяются скачком

$$i_L(0_-) = i_L(0_+); \quad u_C(0_-) = u_C(0_+), \quad (1.3)$$

поэтому эти величины находят расчетом докоммутационных схем в установившихся режимах.

Зависимые начальные условия (ЗНУ) – значения токов и напряжений в момент непосредственно после коммутации, не подчиняющихся законам коммутации. Они определяются в схеме после коммутации по законам Кирхгофа с использованием ранее найденных независимых начальных условий. Зависимые начальные условия можно определять по эквивалентным схемам, составленным для момента коммутации ($t = 0_+$). Для этого в послекоммутационную схему вместо индуктивностей

и ёмкостей включают соответственно источники тока и ЭДС. Токи источников тока по величине и направлению равны $i_L(0)$, ЭДС источников равны $u_C(0)$, но направлены противоположно току.

Порядок расчёта переходного процесса классическим методом:

1. В схеме «до коммутации» определяют независимые начальные условия – токи в индуктивных и напряжения на ёмкостных элементах.
2. В схеме «после коммутации» рассчитывают зависимые начальные условия и принуждённые составляющие искомых величин.
3. Определяют корни характеристического уравнения и записывают общий вид решения как сумму свободной и принуждённой составляющих.
4. Находят постоянные интегрирования, используя независимые и зависимые начальные условия.

Пример 1

Для цепи на рис. 1.11, а в момент времени $t = 0$ срабатывает ключ **К** и подключается постоянный источник ЭДС $e(t) = E_0$. Определить $u_C(t)$ при переходном процессе классическим методом, если заданы параметры $E_0 = 100$ В, $R = 50$ Ом, $C = 100$ мкФ.

Решение

1. Согласно классическому методу, запишем выражение для напряжения переходного процесса: $u_C(t) = u_{Cпр} + Ae^{pt}$.
2. Определяем ННУ: $u_C(0_-) = u_C(0_+) = 0$.
3. Определяем принужденную составляющую $u_{Cпр}$. Так как в момент времени $t = \infty$ ёмкость в цепи постоянного тока имеет бесконечно большое сопротивление и является разрывом цепи, то по второму закону Кирхгофа получим $u_{Cпр} = E_0/2 = 50$ В.

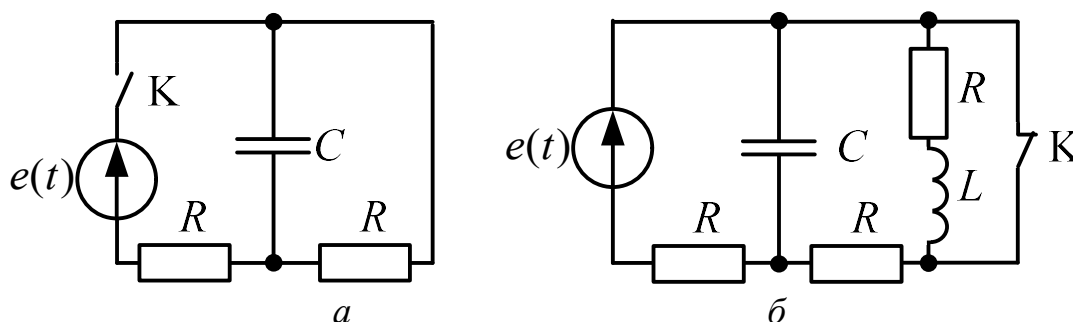
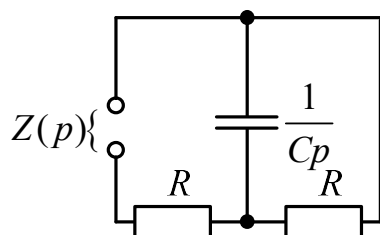


Рис. 1.11

4. Корень характеристического уравнения определим из схемы на рис. 1.12, а, которая получается путем замены C на $1/pC$. Относительно зажимов источника ЭДС определяем:



$$Z(p) = R + \frac{R \cdot 1/pC}{R + 1/pC} = 0, \text{ откуда}$$

$$\text{получим } p = -\frac{2}{RC} = -400 \frac{1}{\text{с}}.$$

Рис. 1.12, а

5. Определим постоянную интегрирования из уравнения переходного процесса (п. 1), записав его для момента времени $t = 0_+$:

$$A = u_C(0) - u_{C\text{пр}} = -E_0/2 = -50.$$

6. Записываем окончательный ответ:

$$u_C(t) = u_{C\text{пр}} + Ae^{pt} = \frac{E_0}{2} - \frac{E_0}{2} \cdot e^{-\frac{2}{RC}t} = 50 - 50 \cdot e^{-400t} \text{ В.}$$

7. Для построения графика определим постоянную времени:

$$\tau = \frac{1}{|p|} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Расчет графика сводим в таблицу:

t	0	τ	$2 \cdot \tau$	$3 \cdot \tau$	$4 \cdot \tau$
$A \cdot e^{-t/\tau}$	50	18,4	6,37	2,5	0,92
$u_C(t), \text{В}$	0	31,6	43,2	47,5	49,08

График $u_C(t)$ показан на рис. 1.12, б.

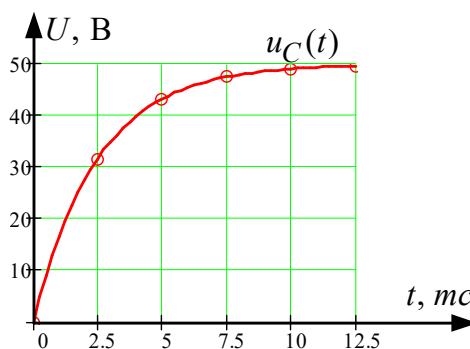


Рис. 1.12, б

Пример 2

В цепи, изображенной на рис. 1.11, б, действует постоянный источник ЭДС $e(t) = E_0$. В момент времени $t = 0$ срабатывает ключ **К**.

Определить напряжение $u_C(t)$ переходного процесса классическим методом, если заданы параметры:

$$E_0 = 150 \text{ В}, \quad R = 50 \text{ Ом}, \quad L = 0,1 \text{ Гн}, \quad C = 100 \text{ мкФ}.$$

Решение

ННУ определяем из расчета цепи до коммутации. Так как ключ **К** замкнут, то $i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0$, емкость в цепи постоянного тока является разрывом цепи и заряжена до напряжения, которое находим по второму закону Кирхгофа:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = \frac{E_0}{2} = 75 \text{ В}.$$

Для определения ЗНУ рисуем схему замещения после коммутации в момент времени $t = 0_+$ (рис. 1.13):

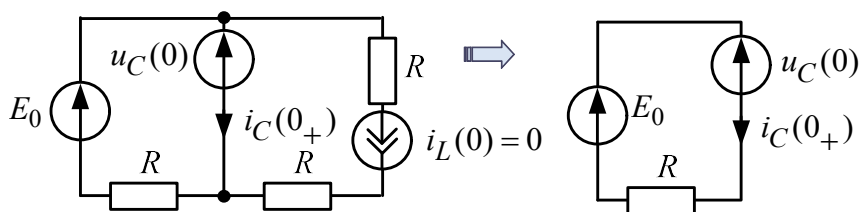


Рис. 1.13

Так как $i_L(0) = 0$, то по второму закону Кирхгофа получим:

$$i_C(0_+) = \frac{E_0 - U_C(0)}{R} = 1,5 \text{ А}.$$

Определяем принужденную составляющую $u_{Cпр}$. Так как в момент времени $t = \infty$ емкость в цепи постоянного тока имеет бесконечно большое сопротивление и является разрывом цепи, а индуктивность имеет нулевое сопротивление, то по второму закону Кирхгофа получим

$$u_{Cпр} = \frac{2E_0}{3} = 100 \text{ В}.$$

Определим корни характеристического уравнения из схемы (рис. 1.14):

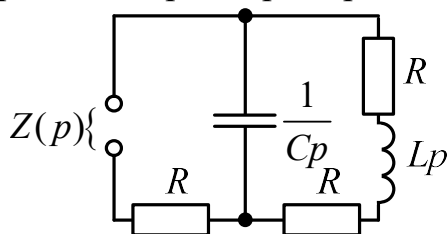


Рис. 1.14

Определим входное сопротивление,

$$Z(p) = R + \frac{\frac{1}{pC} \cdot (2R + pL)}{2R + pL + \frac{1}{pC}} = 0,$$

откуда получим $p_1 = -355 \frac{1}{\text{с}}, p_2 = -845 \frac{1}{\text{с}}$. Так как корни характеристического уравнения вещественные и разные, то переходный процесс является **апериодическим**.

Постоянные интегрирования определим из решения системы уравнений, записанной при нулевых начальных условиях:

$$u_C(t) = u_{\text{Спр}} + A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t};$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = C \cdot p_1 \cdot e^{p_1 t} + C \cdot p_2 \cdot e^{p_2 t},$$

при $t = 0_+$ получим:

$$\begin{cases} u_C(0) = u_{\text{Спр}} + A_1 + A_2; \\ i_C(0_+) = C \cdot p_1 \cdot A_1 + C \cdot p_2 \cdot A_2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 75 = 100 + A_1 + A_2; \\ 1 = 10^{-4} \cdot (-355) \cdot A_1 + 10^{-4} \cdot (-845) \cdot A_2, \end{cases}$$

откуда определим: $A_1 = 63,52$; $A_2 = -88,52$ окончательный ответ:

$u_C(t) = 100 + 63,52 \cdot e^{-355 \cdot t} - 88,52 \cdot e^{-845 \cdot t}$ В, для построения графика определим постоянные времени:

$$\tau_1 = \frac{1}{|p_1|} = 2,817 \cdot 10^{-3} \text{ с}; \quad \tau_2 = \frac{1}{|p_2|} = 1,18 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Расчет графика сводим в таблицу:

t	0	τ	$2 \cdot \tau$	$3 \cdot \tau$	$4 \cdot \tau$
$A_1 \cdot e^{-t/\tau_1}$	63,52	23,36	8,6	3,16	1,16
$A_2 \cdot e^{-t/\tau_2}$	-88,52	-32,5	-12	-4,4	-1,62

График $u_C(t)$ показан на рис. 1.15.

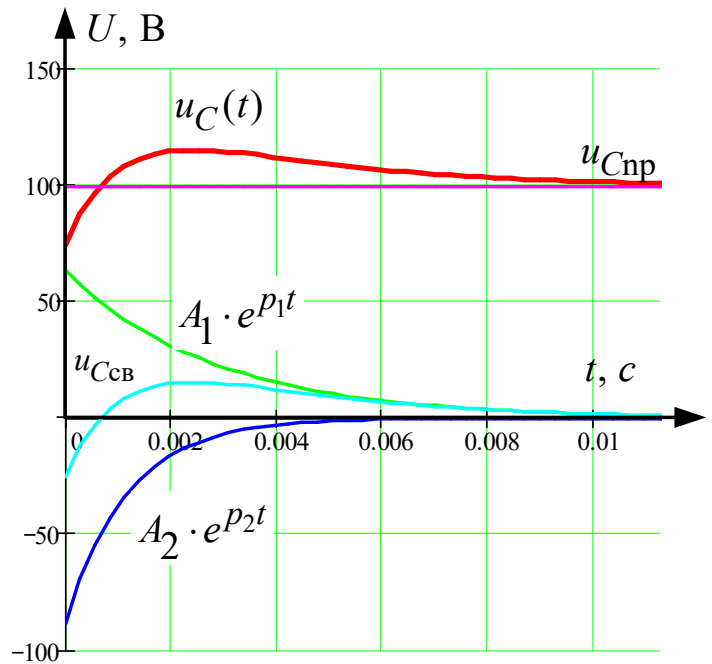


Рис. 1.15

2. Интеграл Дюамеля

Интеграл Дюамеля применяют для расчёта тока или напряжения в ветвях схемы с нулевыми начальными условиями при действии единственного источника ЭДС или тока произвольной формы.

Наиболее распространённая форма записи:

$$f_p(t) = f(0) \cdot h(t) + \int_0^t f'(x) h(t-x) dx, \quad (1.4)$$

где $f_p(t)$ – искомая реакция цепи – ток или напряжение;

$f(0)$ – начальное значение входного воздействия;

$h(t)$ – переходная характеристика;

$h(t-x)$ – переходная характеристика с учетом запаздывания;

x – переменная интегрирования (время запаздывания);

$f'(x)$ – производная от входного воздействия – ЭДС или тока источника.

Переходная характеристика – это реакция линейной пассивной цепи в виде тока или напряжения переходного процесса на воздействие единичной функции, т. е. на подключение ее к источнику постоянного напряжения или постоянного тока единичной величины $E_0 = 1$ В или $J_0 = 1$ А при нулевых начальных условиях $i_L(0) = 0$, $u_C(0) = 0$. Переходная характеристика определяется классическим или операторным методом.

Порядок расчёта переходных процессов методом интеграла Дюамеля:

1. Классическим или операторным методом находят переходную характеристику $h(t)$.
2. Определяют запаздывающую переходную характеристику $h(t-x)$ путем замены t на $t-x$.
3. Вычисляют производную по времени x от входного воздействия – напряжения (тока) источника.
4. Записывают интеграл Дюамеля с момента времени $t=0$ до заданного t . При этом учитывают возможные скачки напряжения (тока) в начале и конце каждого интервала изменения входного сигнала.

Пример 3

Для схемы на рис. 1.11, а с нулевыми начальными условиями на интервале времени $0 \leq t \leq t_0$ действуют источник ЭДС $e(t)$, изменяющийся по линейному закону: $e_1(t) = E_0 \cdot (1 - \frac{t}{t_0})$; при $t \geq t_0$ $e_2(t) = 0$.

Определить $u_C(t)$ методом интеграла Дюамеля, если заданы параметры цепи: $E_0 = 150$ В, $R = 50$ Ом, $C = 100$ мкФ, принять $t_0 = 2 \cdot \tau$, где $\tau = |1/p|$.

Решение

1. Переходную характеристику $h(t)$ для напряжения $u_C(t)$ определим из примера 1, задавая величину источника ЭДС $E_0 = 1$ В:

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{2}{RC}t}.$$

2. Запаздывающая переходная характеристика при замене t на $t-x$:

$$h(t-x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{2}{RC}(t-x)}.$$

3. Определим $\tau = \frac{RC}{2} = 25 \cdot 10^{-4}$ с из примера 1 и $t_0 = RC = 5 \cdot 10^{-3}$ с.

4. Расчет $u_C(t)$ ведем для двух интервалов:

1-й интервал $0 \leq t \leq t_0$

$e_1(t) = E_0 \cdot (1 - \frac{t}{t_0})$, определим производную $e_1'(t) = e_1'(x) = -\frac{E_0}{t_0}$; под-

ставляем полученные выражения в интеграл Дюамеля:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= E_0 \cdot h(t) + \int_0^t e_1'(x) \cdot h(t-x) \cdot dx = \frac{E_0}{2} - \frac{E_0}{2} \cdot e^{-\frac{2}{RC}t} - \\ &- \int_0^t \frac{E_0}{t_0} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{2}{RC}(t-x)} \right) \cdot dx = \frac{E_0}{2} - \frac{E_0}{2} \cdot e^{-\frac{2}{RC}t} - \frac{E_0}{2t_0} \cdot t + \\ &+ \frac{E_0}{2t_0} \cdot \frac{RC}{2} \cdot e^{-\frac{2}{RC}t} \cdot (e^{\frac{2}{RC}t} - 1) = E_0 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{RC}{4t_0} \right) - \frac{E_0}{2t_0} \cdot t - \\ &- E_0 \cdot \left(\frac{RC}{4t_0} - \frac{1}{2} \right) \cdot e^{-\frac{2}{RC}t} = 112.5 - 15000 \cdot t - 112.5 \cdot e^{-400t}, \text{ В;} \end{aligned}$$

2-й интервал $t \geq t_0$

на втором интервале у первого интеграла меняется верхний предел интегрирования t на t_0 , кроме того $e_2'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= E_0 \cdot h(t) + \int_0^{t_0} e_1'(x) \cdot h(t-x) \cdot dx + \int_{t_0}^t e_2'(x) \cdot h(t-x) \cdot dx = \\ &= \frac{E_0}{2} - \frac{E_0}{2} \cdot e^{-\frac{2}{RC}t} - \int_0^{t_0} \frac{E_0}{t_0} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{2}{RC}(t-x)} \right) \cdot dx = \\ &= \frac{E_0}{2} - \frac{E_0}{2} \cdot e^{-\frac{2}{RC}t} - \frac{E_0}{2t_0} \cdot t_0 + \frac{E_0}{2t_0} \cdot \frac{RC}{2} \cdot e^{-\frac{2}{RC}t} \cdot (e^{\frac{2}{RC}t_0} - 1) = \\ &= \frac{E_0}{2} \left[\frac{RC}{2t_0} \cdot (e^{\frac{2}{RC}t_0} - 1) - 1 \right] \cdot e^{-\frac{2}{RC}t} = 164.55 \cdot e^{-400t} \text{ В.} \end{aligned}$$

Расчет графика сводим в таблицу:

	$0 \leq t \leq t_0$						$t \geq t_0$				
$t \cdot 10^{-3}, \text{ с}$	0	1	2	3	4	5	5	6	8	10	12
$u_C, \text{ В}$	0	22	31,9	33,6	29,7	22,3	22,3	14,9	6,7	3	1,35

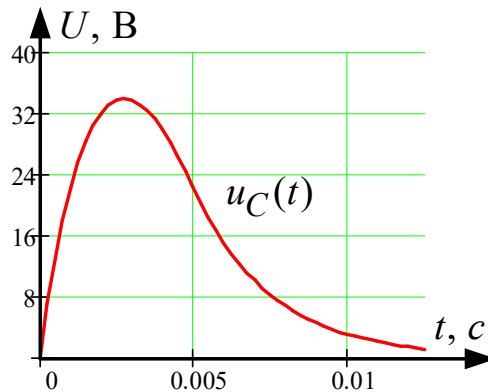


Рис. 1.16

График напряжения $u_C(t)$ переходного процесса показан на рис. 1.16.

3. Операторный метод

Операторным называют метод, базирующийся на преобразовании интегро-дифференциальных уравнений цепи (функций времени-оригиналов) в алгебраические уравнения в изображениях (функциях комплексного оператора p) с последующим переходом к оригиналам. Взаимные преобразования осуществляются с помощью прямого и обратного преобразований Лапласа соответственно:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt; \quad f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int F(p) \cdot e^{pt} dt. \quad (1.5)$$

Соответствие между изображением и оригиналом записывается:

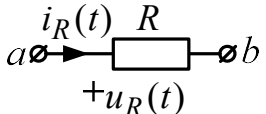
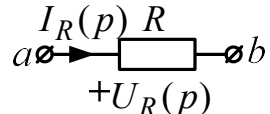
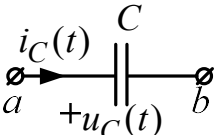
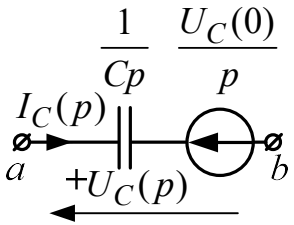
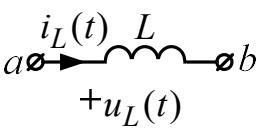
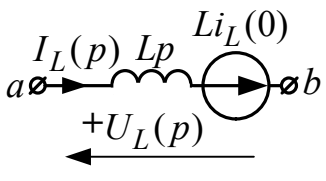
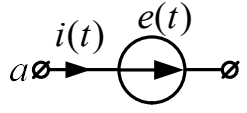
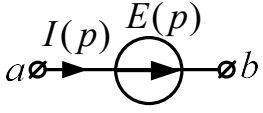
$$f(t) \overset{*}{\rightleftharpoons} F(p) \text{ или } F(p) \overset{*}{\rightleftharpoons} f(t).$$

На основании преобразований Лапласа легко показать, что схемам цепи для мгновенных значений величин, соответствуют эквивалентные операторные схемы. Изображения основных элементов цепи в операторной форме показаны в табл. 1.3.

Заметим, что операторные схемы составляются для цепи «после коммутации» и включают в себя помимо источников, действующих в цепи после коммутации, так называемые, внутренние источники. Внутренние источники учитывают ненулевые начальные условия на накопителях энергии (индуктивность, ёмкость), которые, как показано в п. 1, определяются в схеме «до коммутации».

Операторные схемы замещения рассчитывают любым известным методом расчёта линейной цепи, применимым для установившегося режима.

Таблица 1.3

Элемент	Операторное изображение элемента	Взаимосвязь напряжений и токов
		Резистор: $U_R(p) = I(p) \cdot R$
		Емкость: $U_C(p) = \frac{I(p)}{Cp} + \frac{U_C(0)}{p}$
		Индуктивность: $U_L(p) = I(p) \cdot Lp - L \cdot i_L(0)$
		Источник ЭДС: Определяется видом функции. Для $e(t) = E$, $E(p) = \frac{E}{p}$; Для $e(t) = E \cdot e^{-at}$, $E(p) = \frac{E}{p+a}$.

Переход от изображений к оригиналам – искомым функциям времени – осуществляется по таблицам изображений или по **теореме разложения**.

Если изображение имеет вид правильной рациональной дроби:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A_m \cdot p^m + A_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots A_0}{B_n \cdot p^n + B_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots B_0},$$

где $m < n$, причем дробь $A(p)/B(p)$ – несократимая, коэффициенты A_K , B_K – действительные числа, а знаменатель дроби $B(p)$ не имеет кратных корней (полюсов), то оригинал функции определяется суммой экспоненциальных составляющих:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t}, \quad (1.6)$$

$$\text{или } f(t) = \frac{A(0)}{B_1(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{p_k \cdot B_1'(p_k)} \cdot e^{p_k t}, \quad (1.6, a)$$

когда один из корней знаменателя равен нулю, т.е. $B(p) = p \cdot B_1(p)$.

Данные равенства называют **теоремой разложения**.

При наличии комплексно-сопряженных корней слагаемые теоремы разложения будут также комплексно-сопряженными, т.е.:

$$\begin{aligned} & \frac{A(p_1)}{B_1'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{B_1'(p_2)} \cdot e^{p_2 t} = \\ & = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{A(p_1)}{B_1'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} \right\} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{A(p_2)}{B_1'(p_2)} \cdot e^{p_2 t} \right\} \end{aligned} \quad (1.6, б)$$

Порядок расчёта переходных процессов операторным методом

1. По законам коммутации определяют независимые начальные условия $u_C(0)$ и $i_L(0)$.
2. Составляют операторную схему замещения.
3. Находят любым методом изображения искомых величин.
4. Определяют оригиналы искомых величин.

Пример 4

В цепи на рис. 1.11, а в момент времени $t = 0$ срабатывает ключ **К** и подключается источник ЭДС $e(t)$, изменяющийся по экспоненциальному закону: $e(t) = E_0 \cdot e^{-at}$. Определить $u_C(t)$ операторным методом при заданных параметрах цепи:

$$E_0 = 150 \text{ В}, \quad R = 50 \text{ Ом}, \quad C = 100 \text{ мкФ}, \quad a \cdot \tau = 2.$$

Решение

1. Определяем ННУ $u_C(0) = 0$.

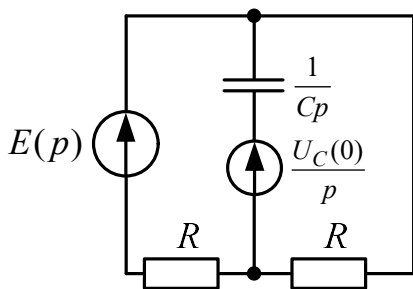


Рис. 1.17

2. Составляем операторную схему замещения для цепи после коммутации (рис 1.17):

$$\text{Здесь } E(p) = \frac{E_0}{p+a} = \frac{150}{p+800},$$

$$\tau = \frac{RC}{2} = 25 \cdot 10^{-4} \text{ с (из примера 1)}, \quad a = \frac{2}{\tau} = 800 \frac{1}{\text{с}}.$$

3. Рассчитываем $u_C(p)$ методом узловых потенциалов. Принимаем $\phi_a = 0$, для узла b составляем уравнение:

$$\phi_b \cdot \left(\frac{2}{R} + pC\right) = \frac{E}{(p + \alpha) \cdot R} + \frac{U_C(0) \cdot pC}{p}, \text{ с учетом того, что } U_C(0) = 0$$

получаем:

$$U_C(p) = \phi_b = \frac{E}{(p + \alpha) \cdot (2 + pRC)} = \frac{E}{p^2 RC + p(2 + \alpha RC) + 2\alpha} =$$

$$= \frac{150}{0,005 \cdot p^2 + 6 \cdot p + 1600} = \frac{A(p)}{B(p)}.$$

4. Определяем оригинал $u_C(t)$ при помощи теоремы разложения: приравняем $B(p) = 0$, отсюда получаем:

$$p_1 = -800 \frac{1}{c}; \quad p_2 = -400 \frac{1}{c},$$

берем производную $B'(p) = 2pRC + 2 + \alpha RC = 0,01 \cdot p + 6$;

находим оригинал:

$$u_C(t) = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{150}{0,01 \cdot (-800) + 6} e^{-800t} +$$

$$+ \frac{150}{0,01 \cdot (-400) + 6} e^{-400t} = -75 \cdot e^{-800t} + 75 \cdot e^{-400t} \text{ В,}$$

постоянные времени: $\tau_1 = \frac{1}{800} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ с,} \quad \tau_2 = \frac{1}{400} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$

Расчет графика сводим в таблицу:

t	0	τ	2τ	3τ	4τ
$75 \cdot e^{-t/\tau}$	75	27,6	10,15	3,73	1,37

График напряжения $u_C(t)$ переходного процесса показан на рис. 1.18:

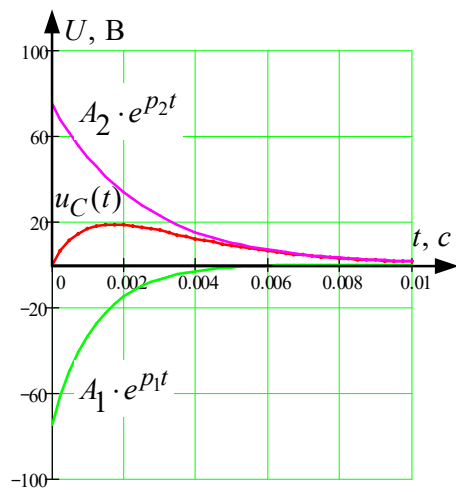


Рис. 1.18