

Контрольная работа №1. Вариант №1

№1, 26 Какие преимущества дает параметрическое представление кривой

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

по сравнению с неявным ($F(x, y) = 0$) и явным ($y = f(x)$) представлениями?

№2, 36 Найти длину дуги кривой

$$x^3 = 3a^2y, \quad 2xz = a^2$$

между плоскостями

$$y = \frac{a}{3}, \quad y = 2a.$$

№3, 56 Для кривой, заданной следующим соотношением, найти репер Френе, кривизну и кручение

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ t\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

№4, 26 Найдите кривизну астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ в произвольной точке. Подсказка: вначале астроида необходимо параметризовать.

№5, 16 Запишите формулу для вычисления элемента дуги кривой в двумерном пространстве с произвольной метрикой $G = [g_{ij}]$, $i, j = 1, 2$.

№6, 46 Используя формулу из пункта 5 в координатах (u, v) найти длину кривой $u = v$ если задана метрика

$$G = \frac{R^2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \begin{bmatrix} 1 + v^2 & -uv \\ -uv & 1 + u^2 \end{bmatrix}$$

№7, 36 Доказать, что кривизна двумерной кривой

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

в декартовых координатах вычисляется по формуле

$$k(t) = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}.$$

Контрольная работа №1. Вариант №2

№1, 26 Для одной и той же кривой можно ввести различные параметризации и получить разные параметрические уравнения. Выведите два разных параметрических уравнения для окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

№2, 36 Найти длину дуги одного витка между двумя точками пересечения с плоскостью xz линии

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \cos \frac{t}{2}.$$

№3, 56 Для кривой, заданной следующим соотношением, найти репер Френе, кривизну и кручение

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} e^t \sin t \\ e^t \cos t \\ e^t \end{pmatrix}$$

№4, 26 Найдите кривизну параболы $y^2 = 2px$ в произвольной точке. Подсказка: вначале параболу необходимо параметризовать.

№5, 16 Запишите формулу для вычисления элемента дуги кривой в двумерном пространстве с произвольной метрикой $G = [g_{ij}]$, $i, j = 1, 2$.

№6, 46 Используя формулу из пункта 5 в координатах (u, v) найти длину кривой $-1 < u < 1$, $v = 0$ если задана метрика

$$G = \frac{R^2}{1 - u^2 - v^2} \begin{bmatrix} 1 - v^2 & uv \\ uv & 1 - u^2 \end{bmatrix}$$

№7, 36 Доказать, что кривизна двумерной кривой

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

в декартовых координатах вычисляется по формуле

$$k(t) = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}.$$