Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашская государственная сельскохозяйственная академия»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО И ЗАДАНИЯ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ ПО РАЗДЕЛУ «СТАТИКА»

Чебоксары – 2014

УДК 531.8

ББК 22.21

Рецензент: канд. техн. наук, доцент Иванов М.Ю. (ГОУ ВПО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет». Волжский филиал).

Теоретическая механика: Методическое руководство и задания к расчетно-графической работе по разделу «Статика» / Сост. С.С. Алатырев, И.С. Кручинкина. – Чебоксары: ФГБОУ ВПО ЧГСХА, 2014. – 44с.

В пособии в краткой форме приведены теоретические сведения и задания к расчетно-графической работе по разделу «Статика» теоретической механики, показан пример их выполнения, а также предварительные методические указания к выполнению заданий и вопросы для осуществления самопроверки при подготовке к защите выполненной работы.

Оно предназначено для обеспечения самостоятельной работы студентов очного и заочного обучения при изучении названного курса по направлениям подготовки 35.03.06 – Агроинженерия, 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства.

Рекомендовано к изучению учебно-методическим советом ФГБОУ ВПО ЧГСХА.

Предисловие

Статика является одним из разделов теоретической механики, в которой излагается учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием сил. Для успешного освоения основных положений статики требуется не только глубокого изучения теории, но и приобретения твердых практических навыков в решении задач.

Практические навыки в решении задач статики студент приобретает в большей степени самостоятельно при выполнении расчетно-графических работ. Однако для выполнения этих работ необходимо иметь соответствующие базовые знания статики, которые в краткой форме изложены ниже.

Выполнение заданий следует начать с разбора приведенных здесь тем, разобраться в их деталях, обращая внимание на их практическое приложение.

Следует заметить, что задания для выполнения расчетно-графических работ имеют комплексный характер, охватывают широкий круг тем статики. Они тесно увязаны тематически с рабочими программами «Теоретическая механика» для направлений подготовки 35.03.06 – Агроинженерия, 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов и специальности 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства.

Пособие призвано формировать у студентов компетенции ОК-1, ОК-2, ПК-1 и ПК-3.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ

Задания выполняются студентами на основе полученных знаний по следующим основным темам раздела «Статика»:

- силы сосредоточенные и распределенные, проекции сил на осях координат и плоскость;
- связи и их статические реакции;
- разложение сил на заданные направления;
- аналитический способ задания сил;
- система сходящихся сил и их равновесие;
- момент силы относительно точки;
- пара сил, момент пары сил;
- алгебраические моменты;
- теорема Вариньона;
- равновесие плоской системы сил;
- расчет ферм;
- моменты сил относительно координатных осей;
- условия равновесия пространственной системы сил.

Ниже вкратце изложены материалы названных тем.

1.1 Силы сосредоточенные и распределенные. Проекции сил на осях координат и плоскость

Силой называется величина, являющаяся мерой механического взаимодействия материальных тел друг с другом.

Сила – величина векторная (рис. 1.1). Ее действие на тело определяется:

- модулем (числовым значением);
- направлением;
- точкой приложения.

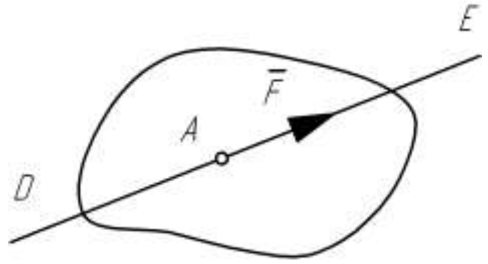


Рисунок 1.1 – Схема действия силы $\overline{F}$: A – точка приложения; DE – линия действия силы

Вектор силы будем обозначать буквой с чертой ($\overline{F}$), а модуль силы – буквой без черты (F).

Аналитический метод решения задач статики основывается на понятии о проекции силы на ось. Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси (рис. 1.2). Если этот угол острый, - проекция положительна, если тупой, - отрицательна, а если сила перпендикулярна оси, ее проекция на ось равна нулю. Так, для сил, изображенных на рис. 1.2:

$$F_x = F\cos\alpha = ав,\ Q_x = Q\cos\alpha_1 = -Q\cos\varphi = -de,\ P_x = 0.$$

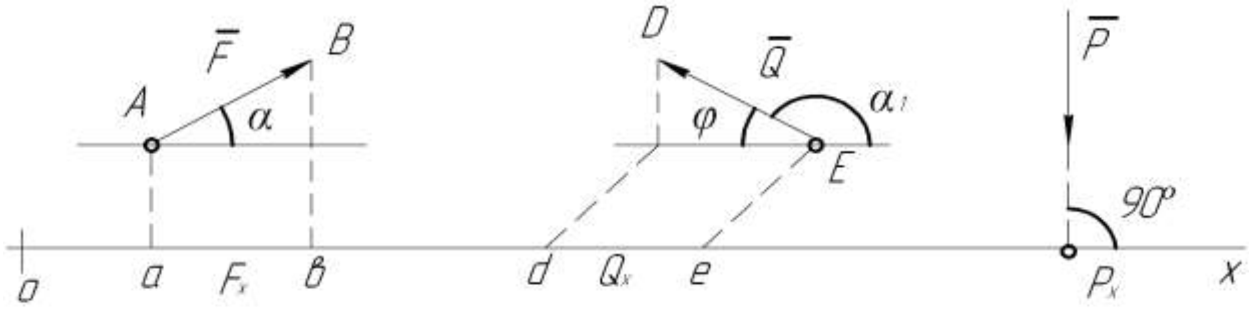


Рисунок 1.2 – Проекции сил на ось

Проекция силы на плоскость равна вектору, заключенному между проекциями начала и конца силы $\overline{F}$ на эту плоскость (рис. 1.3).

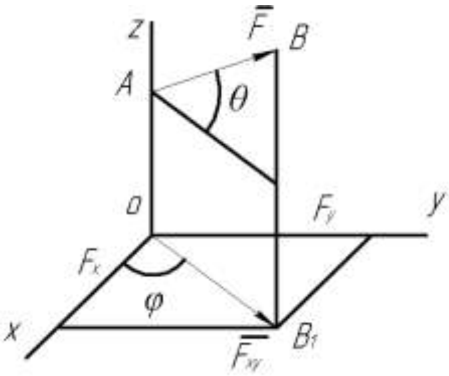


Рисунок 1.3 – Проекция силы на плоскость

Связь между проекцией силы $\overline{F}_{xy}$ на плоскость и проекциями ее на ось F_x и F_y следующая:

$$F_x = F_{xy}\cos\varphi = F\cos\theta\cos\varphi\,,$$

$$F_y = F_{xy}\sin\varphi = F\cos\theta\sin\varphi\,.$$

1.2 Связи и их статические реакции

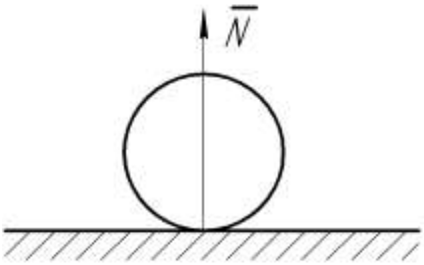
Все то, что ограничивает перемещения тела в пространстве, называют связью.

Тело, стремясь осуществить перемещение, будет действовать на связь с некоторой силой. Одновременно связь будет действовать на тело такой же по модулю силой, направленной противоположно.

Сила, с которой данная связь действует на тело, называется реакцией связи.

Основные виды связей.

Гладкая поверхность. Реакция связи направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел (рис. 1.4).



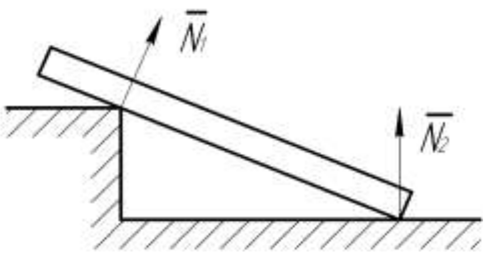


Рисунок 1.4 – Реакции связи гладкой поверхности

Нить нерастяжимая. Реакция связи направлена вдоль нити к точке подвеса (рис. 1.5).

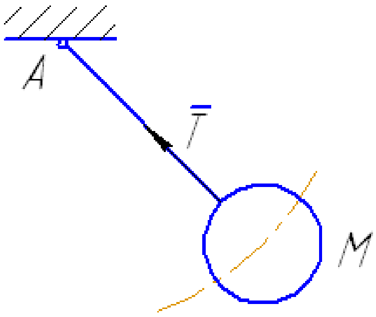


Рисунок 1.5 – Реакция связи нерастяжимой нити

Цилиндрический шарнир. Реакция связи может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При этом реакция связи заменяется ее составляющими R_x и R_y (рис. 1.6).

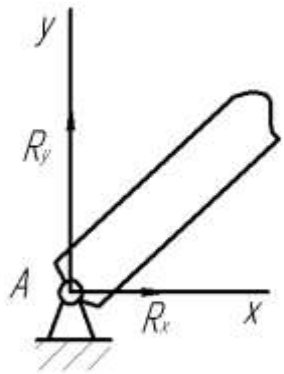


Рисунок 1.6 – Реакции связи цилиндрического шарнира

Опора на катках (рис. 1.7). Реакция подобной опоры проходит через ось шарнира и направлена по нормали к опорной поверхности.

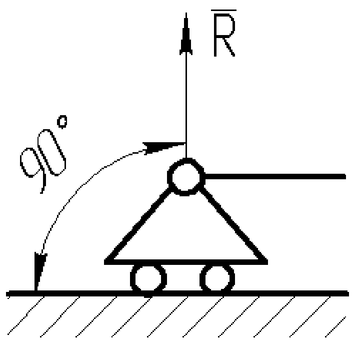


Рисунок 1.7 – Реакция связи опоры на катках

Сферический шарнир. Реакция сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве. При этом реакция связи заменяется ее составляющими R_x, R_y и R_z (рис. 1.8).

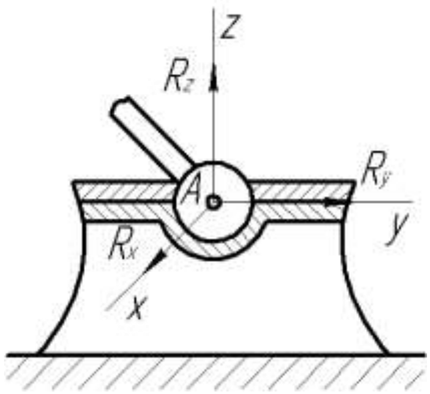


Рисунок 1.8 – Реакции связи сферического шарнира

Невесомый стержень с шарнирами на концах. Реакция связи направлена вдоль оси стержня (рис. 1.9).

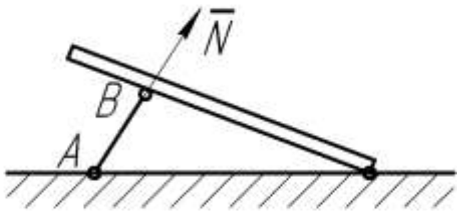


Рисунок 1.9 – Реакция связи невесомого стержня с шарнирами на концах

1.3 Геометрическое сложение и разложение сил

Силы складываются геометрически по правилу параллелограмма (рис. 1.10) или построением силового многоугольника (рис. 1.11).

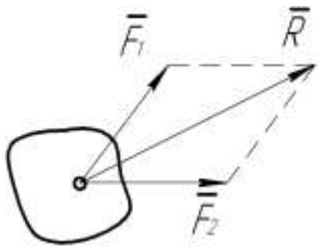


Рисунок 1.10 – Сложение сил по правилу параллелограмма

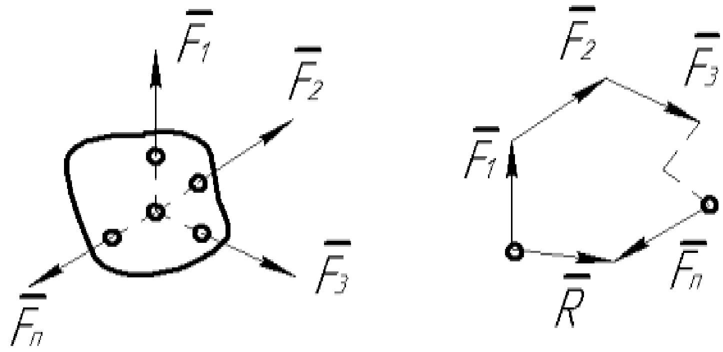


Рисунок 1.11 – Сложение сил построением силового многогранника

Геометрическая сумма сил системы называется главным вектором этой системы.

Система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную главному вектору.

Разложить данную силу на несколько составляющих – значит найти такую систему нескольких сил, для которой данная сила является равнодействующей.

Разложение силы по двум заданным направлениям сводится к построению такого параллелограмма, у которого разлагаемая сила является диагональю, а стороны – ее составляющими.

Разложение силы по трем заданным направлениям достигается построением параллелепипеда, у которого диагональ изображает заданную силу $\overline{R}$, а ребра, параллельные заданным направлениям, - ее составляющие.

1.4 Аналитический способ задания и сложения сил

Аналитический способ задания сил возможен, когда известны проекции сил на осях F_x, F_y и F_z, а также координаты точки приложения силы x, y и z. При этом можно определить модуль силы и углы (рис. 1.12), которые сила образует с координатными осями, по формулам:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\,,$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F},\ \cos\beta = \frac{F_y}{F},\ \cos\gamma = \frac{F_z}{F}.$$

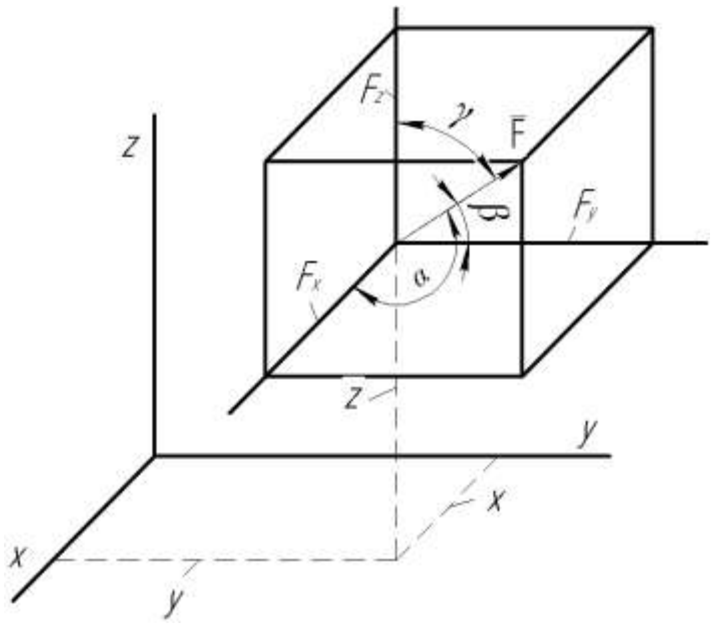


Рисунок 1.12 – Схема к аналитическому заданию силы

Проекция главного вектора сил на ось равна алгебраической сумме проекций этих сил на ту же ось, т. е.

$$R_x = \sum F_{kx}\,,\ R_y = \sum F_{ky}\,,\ R_z = \sum F_{kz}\,.$$

Тогда силы можно сложить аналитически, зная их проекции, по формулам:

$$R = \sqrt{\left(\sum F_{kx}\right)^2 + \left(\sum F_{ky}\right)^2 + \left(\sum F_{kz}\right)^2}\,,$$

$$\cos\alpha = \frac{\sum F_{kx}}{R}\,,\ \cos\beta = \frac{\sum F_{ky}}{R}\,,\ \cos\gamma = \frac{\sum F_{kz}}{R}\,.$$

1.5 Условия равновесия системы сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к телу, необходимо, чтобы их равнодействующая была равна 0. Аналитически это условие имеет вид:

$$\sum F_{kx} = 0\,,\ \sum F_{ky} = 0\,,\ \sum F_{kz} = 0\,.$$

Следовательно, они представляют условия равновесия системы сходящихся сил.

1.6 Момент силы относительно точки

Моментом силы $\overline{F}$ относительно центра O называется приложенный в центре O вектор $\overline{m}_o(\overline{F})$, модуль которого равен произведению модуля F силы на ее плечо h и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и силу, в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки (рис. 1.13).

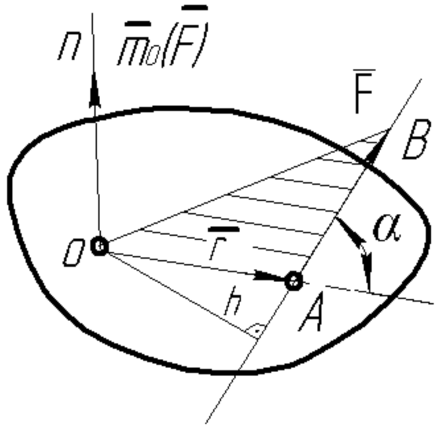


Рисунок 1.13 – Схема к определению момента силы относительно центра: h - плечо силы; n - нормаль к плоскости OAB; $\bar{r}$ - радиус-вектор

Модуль момента силы $\overline{F}$ относительно центра O представляется в виде:

$$\left|m_o\left(\overline{F}\right)\right| = F \cdot h = 2S_{OAB}$$

(здесь S_{OAB} - площадь треугольника OAB).

Момент силы F относительно центра O равен векторному произведению радиус-вектора $\bar{r}$, проведенного из центра O в точку А, на саму силу, т. е.

$$\overline{m}_o(F) = \bar{r} \times \overline{F} .$$

1.7 Пара сил и её момент

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис. 1.14).

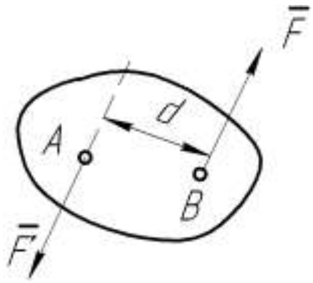


Рисунок 1.14 – Пара сил: d - плечо пары

Плоскость, проходящая через линии действия пары сил, называется плоскостью действия пары.

Моментом пары сил называется вектор $\overline{m}$, модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки (рис. 1.15).

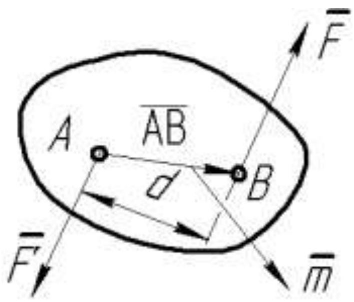


Рисунок 1.15 – Определение момента пары сил

С другой стороны

$$\overline{m}_A(\overline{F}) = \overline{AB} \times \overline{F},$$

$$m_A(\overline{F}) = d \cdot F.$$

Также $\overline{m}_A(\overline{F})$ перпендикулярен плоскости пары, следовательно $\overline{m} = \overline{AB} \times \overline{F}$.

1.8 Алгебраический момент

Когда все силы системы лежат в одной плоскости, их моменты относительно любого центра O, находящегося в той же плоскости, перпендикулярны этой плоскости. Тогда направления моментов можно отличить, не прибегая к векторной символике, т. е. можно рассмотреть как алгебраическую величину. Условимся такой момент называть алгебраическим.

Таким образом, алгебраический момент силы $\overline{F}$ относительно центра O равен произведению модуля силы на ее плечо, взятому соответствующим знаком:

$$m_O(\overline{F}) = \pm Fh.$$

При этом в правой системе координат момент считается положительным, когда сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, и отрицательным – когда по ходу часовой стрелки, т. е. $m_O(\overline{P}) = h_1 \cdot P$, $m_O(\overline{Q}) = -h_2 \cdot Q$ (рис. 1.16).

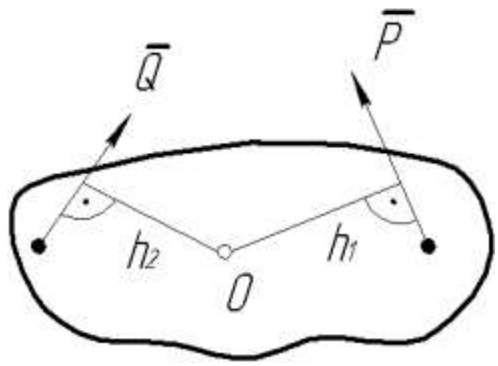


Рисунок 1.16 – Схема к определению алгебраического момента

Аналогично алгебраический момент пары сил равен произведению модуля одной из сил F пары на плечо d пары, взятому соответствующим знаком:

$$m = \pm Fd .$$

1.9 Условия равновесия произвольной системы сил в векторной форме

Силу $\overline{F}$, приложенную к телу, можно переносить из одной точки в любую другую точку тела (не изменяя оказываемого ею действия), прибавляя при этом пару с моментом $\overline{m}$, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится (рис. 1.17).

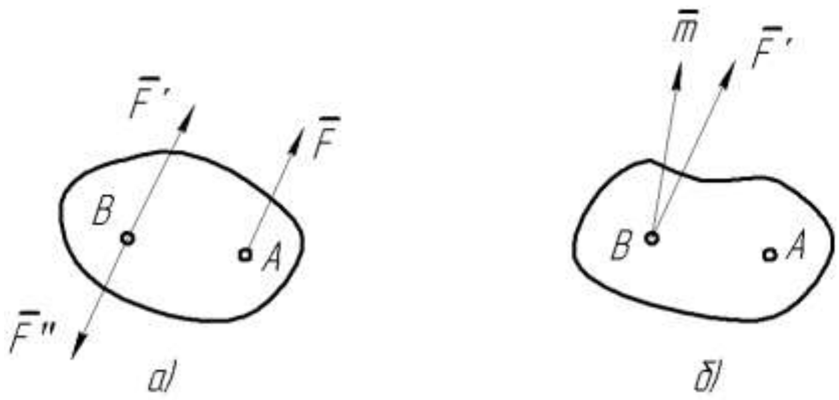


Рисунок 1.17 – Схема переноса силы $\overline{F}$ в центр B в начале (*а*) и конце (*б*):
$\overline{F}' = \overline{F}$, $\overline{F}'' = -\overline{F}$, $\overline{m} = \overline{m}_B(\overline{F})$

Полученная система трех сил (рис. 1.17, *а*) представляет собой силу $\overline{F}'$ и пару $\overline{F}$, $\overline{F}''$ с моментом $\overline{m} = m_B(\overline{F})$.

Любая система сил, действующих на тело, при приведении к произвольно выбранному центру O заменяется силой, равной главному вектору системы сил и приложенной в центре приведения O, и одной парой с моментом $\overline{M}_o$, равным главному моменту системы сил относительно центра O (рис. 1.18).

Главный вектор системы сил

$$\overline{R} = \overline{F}_1' + \overline{F}_2' + \ldots + \overline{F}_n' = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n = \sum \overline{F}_k .$$

Главный момент системы сил относительно центра O

$$M_O = \overline{m}_1 + \overline{m}_2 + \ldots + \overline{m}_n = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k)$$

(здесь $\overline{m}_1 = \overline{m}_O(\overline{F}_1), \ldots, \overline{m}_n = \overline{m}_O(\overline{F}_n)$).

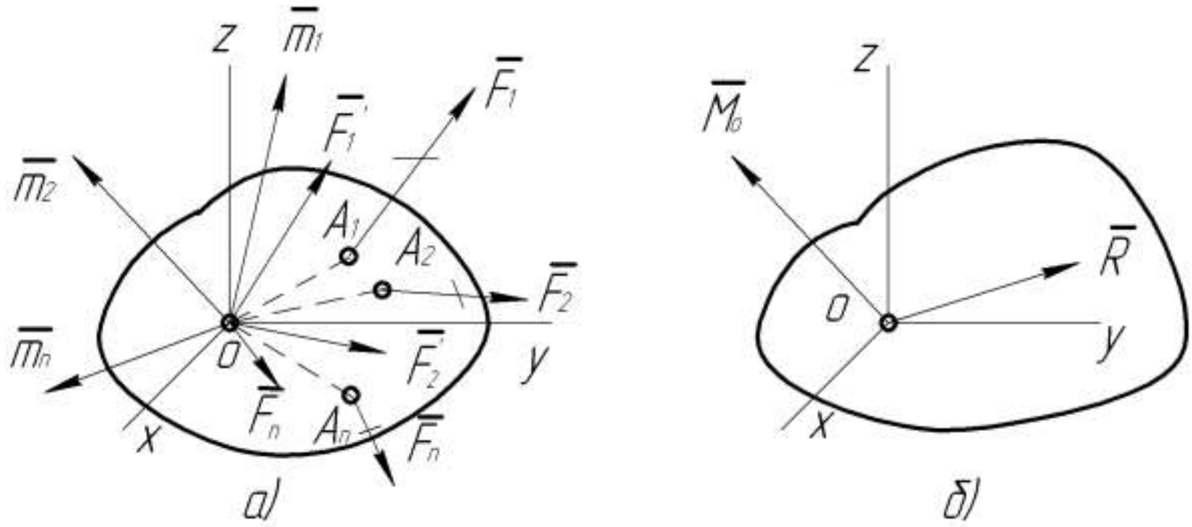


Рисунок 1.18 – Схема приведения системы сил к данному центру в начале (а) и конце (б)

Для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор системы сил и главный момент ее относительно любого центра были равны 0, т. е. чтобы выполнялись условия:

$$\overline{R} = 0\,,\ \overline{M}_O = 0\,.$$

1.10 Теорема Вариньона

Если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра O равен сумме моментов сил системы относительно того же центра, т. е.

$$\overline{m}_O(\overline{R}) = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k)\,.$$

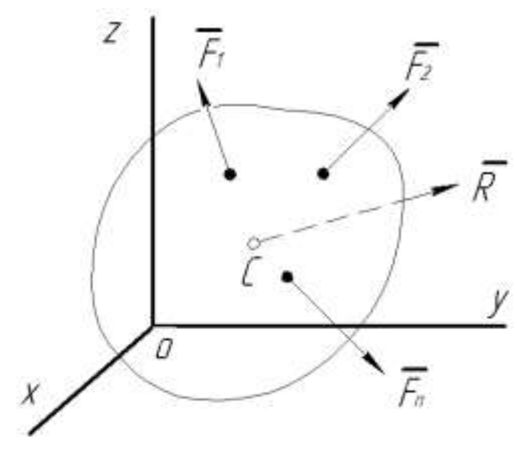


Рисунок 1.19 – Схема к теореме Вариньона

Теорема Вариньона в проекциях на оси декартовой системы координат примет вид:

$$m_X(\overline{R}) = \sum m_X(\overline{F}_k),$$

$$m_Y(\overline{R}) = \sum m_Y(\overline{F}_k),$$

$$m_Z(\overline{R}) = \sum m_Z(\overline{F}_k),$$

где $m_X(\overline{R})$, $m_Y(\overline{R})$, $m_Z(\overline{R})$ - моменты равнодействующей $\overline{R}$ относительно осей x, y, z соответственно;

$\sum m_X(\overline{F}_K)$, $\sum m_Y(\overline{F}_K)$, $\sum m_Z(\overline{F}_K)$ - алгебраические суммы моментов сил системы относительно осей x, y, z соответственно.

1.11 Условия равновесия плоской системы сил

Необходимые и достаточные условия равновесия любой системы сил даются равенствами $\overline{R} = 0$ и $\overline{M}_O = 0$. Так как вектор $\overline{R}$ равен нулю, когда равны нулю его проекции R_x, R_y и R_Z, то для равновесия плоской системы должны выполняться равенства $R_x = 0$, $R_y = 0$ и $M_O = 0$, где в данном случае M_O - алгебраический момент, а O - любая точка в плоскости действия сил. Предыдущие равенства будут выполнены, когда действующие силы удовлетворяют условиям:

$$\sum F_{kx} = 0, \ \sum F_{ky} = 0, \ \sum m_O(\overline{F}_k) = 0.$$

Таким образом, для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и алгебраическая сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

Уравнения равновесия, в зависимости от условий задачи и расположения заданных сил, иногда целесообразно составлять в виде двух уравнений моментов и одного уравнения проекций (координатная ось x не перпендикулярна AB):

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0, \ \sum m_B(\overline{F}_k) = 0, \ \sum F_{kx} = 0,$$

или трех уравнений моментов относительно трех точек координатной плоскости (*A*, *B* и *C* не лежат на одной прямой):

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0, \; \sum m_B(\overline{F}_k) = 0, \; \sum m_C(\overline{F}_k) = 0 .$$

1.12 Равновесие системы тел. Расчет ферм

Конструкции, состоящие из нескольких тел, соединенных какими-нибудь связями, рассмотрим как систему тел.

Связи, соединяющие части данной конструкции, будем называть внутренними. Связи, скрепляющие конструкцию с телами, в нее не входящими, будем называть внешними.

Если после отбрасывания внешних связей конструкция остается жесткой, то для нее задача статики решается как для абсолютно твердого тела.

Если после отбрасывания внешних связей система теряет свою жесткость, то поступают следующим образом. На основании принципа отвердевания составляются для всей системы уравнения равновесия (рис. 1.20). Потом рассматривают равновесие какой-нибудь одной или нескольких частей конструкции.

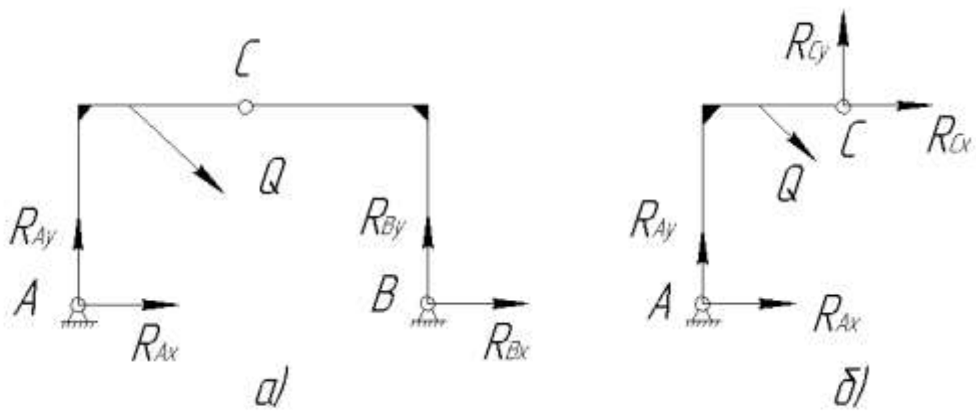


Рисунок 1.20 – Схема к рассмотрению равновесия системы тел: а – всей системы; б – части конструкции

К системе тел относится ферма.

Фермой называется жесткая конструкция из стержней, соединенных на концах шарнирами. Стержни фермы работают только на растяжение или сжатие.

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях. Опорные реакции можно найти, рассматривая ферму как твердое тело. Усилия в стержнях определяются методом вырезания узлов или методом Риттера.

Метод вырезания узлов сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов (рис. 1.21).

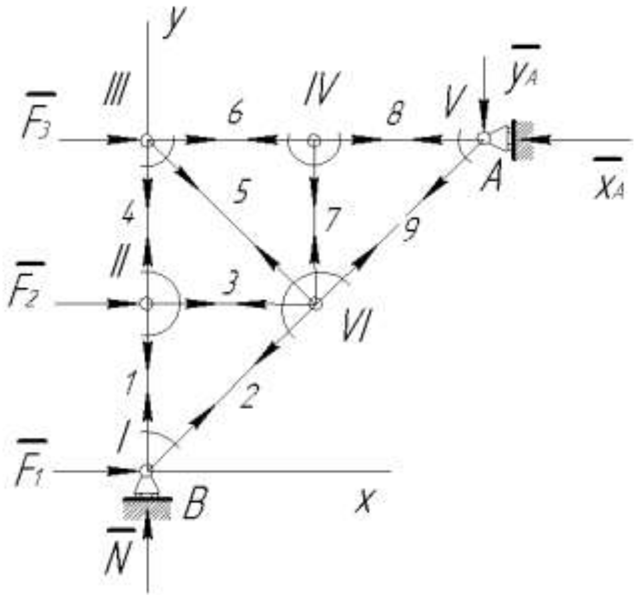


Рисунок 1.21 – Схема к расчету фермы методом вырезания узлов

Метод Риттера заключается в том, что ферму разделяют на две части сечением, проходящим через три стержня, в которых требуется определить усилия, и рассматривают равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов. Затем составляют уравнения равновесия.

1.13 Момент силы относительно оси

Момент силы $\overline{F}$ относительно оси z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси z, взятому относительно точки O_1 пересечения оси с этой плоскостью (рис. 1.22), т. е.

$$m_z(\overline{F}) = \pm F_{xy} \cdot h .$$

Момент силы $\overline{F}$ относительно оси z можно представить как проекцию момента силы F относительно центра O $\overline{m}_O(\overline{F})$ на ось z в виде:

$$m_z(\overline{F}) = \left[m_O(\overline{F})\right]_z = m_O(\overline{F})\cos\gamma .$$

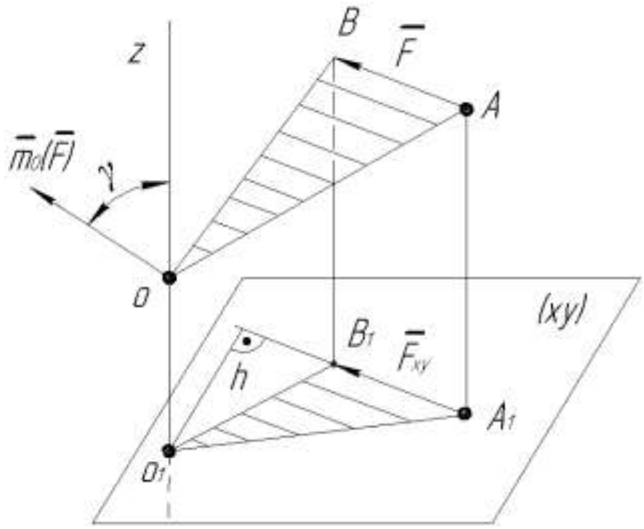


Рисунок 1.22 – Схема к определению момента силы относительно оси

Момент силы относительно оси z будет иметь знак плюс, когда с положительного конца оси z поворот виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак минус – когда по ходу часовой стрелки.

В целях вычисления моментов силы относительно координатных осей разложим силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F}_x$, $\overline{F}_y$, $\overline{F}_z$ (рис. 1.23).

Согласно теореме Вариньона

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k) .$$

Если обе части векторного равенства спроектировать на ось oz, то получим

$$m_z(\bar{F}) = \sum m_z(\bar{F}_k).$$

Тогда для $\bar{F}$, $\bar{F}_x$, $\bar{F}_y$ и $\bar{F}_z$ получим

$$m_z(\bar{F}) = m_z(\bar{F}_x) + m_z(\bar{F}_y) + m_z(\bar{F}_z).$$

Или согласно рис. 1.23

$$m_z(F) = xF_y - yF_x.$$

Аналогично относительно координатных осей ox и oy получим

$$m_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y,$$

$$m_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z.$$

Поскольку $m_x(\bar{F})$, $m_y(\bar{F})$ и $m_z(\bar{F})$ являются одновременно проекциями вектора $\bar{m}_O(\bar{F})$ на координатные оси, то с помощью их можно найти модуль момента $\bar{m}_O(\bar{F})$ по формуле:

$$m_O(\bar{F}) = \sqrt{\left[m_x(\bar{F})\right]^2 + \left[m_y(\bar{F})\right]^2 + \left[m_z(\bar{F})\right]^2}.$$

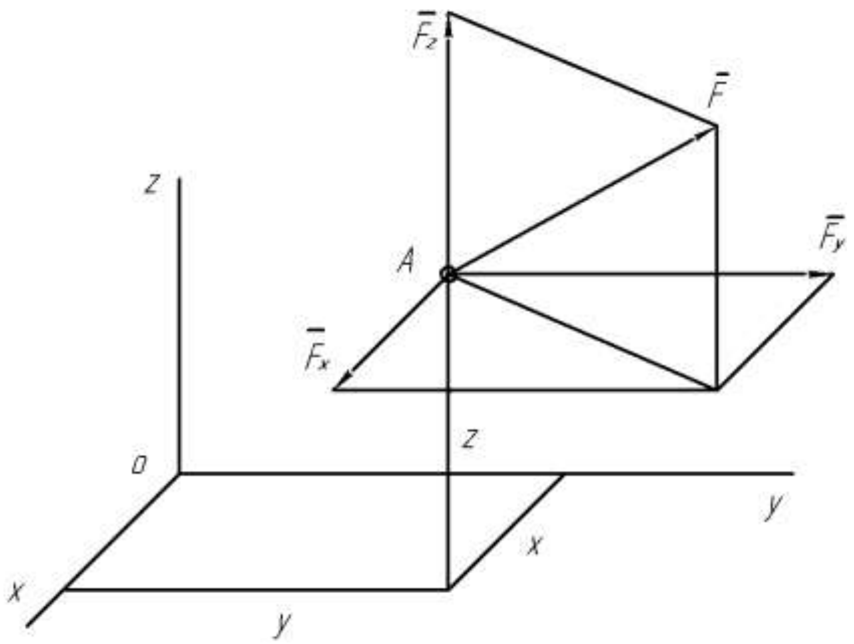


Рисунок 1.23 – Схема к определению моментов силы относительно координатных осей

1.14 Условия равновесия пространственной системы сил

Как уже известно, главный вектор $\overline{R}$ и главный момент $\overline{M}_O$ системы сил определяются равенствами:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k ,$$

$$\overline{M}_O = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k) .$$

Обозначим проекции векторов $\overline{R}$ и $\overline{M}_O$ на координатные оси:

$$R_x ,\ R_y ,\ R_z ,$$

$$M_x ,\ M_y ,\ M_z .$$

Согласно теореме о проекциях суммы векторов:

$$R_x = \sum F_{kx} ,\ R_y = \sum F_{ky} ,\ R_z = \sum F_{kz} ,$$

$$M_x = \sum m_x(\overline{F}_k) ,\ M_y = \sum m_y(\overline{F}_k) ,\ M_z = \sum m_z(\overline{F}_k) .$$

Тогда главный вектор и главный момент системы сил представляются в аналитическом виде:

$$R = \sqrt{\left(\sum F_{kx}\right)^2 + \left(\sum F_{ky}\right)^2 + \left(\sum F_{kz}\right)^2} ,\ M_O = \sqrt{\left[\sum m_x(\overline{F}_k)\right]^2 + \left[\sum m_y(\overline{F}_k)\right]^2 + \left[\sum m_z(\overline{F}_k)\right]^2} .$$

Необходимые и достаточные условия равновесия любой системы сил выражаются равенствами $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_O = 0$. Но векторы $\overline{R}$ и $\overline{M}_O$ равны нулю только тогда, когда $R_x = R_y = R_z = 0$ и $M_x = M_y = M_z = 0$, т. е. когда действующие силы будут удовлетворять условиям:

$$\sum F_{kx} = 0 ,\ \sum F_{ky} = 0 ,\ \sum F_{kz} = 0 ,$$

$$\sum m_x(\overline{F}_k) = 0 ,\ \sum m_y(\overline{F}_k) = 0 ,\ \sum m_z(\overline{F}_k) = 0 .$$

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю.

1.15 Координаты центра тяжести тела

Для тел, размеры которых очень малы по сравнению с Земным радиусом, силы тяжести, действующие на частицы тела, можно считать параллельными друг другу и сохраняющими для каждой частицы постоянное значение при любых поворотах тела.

Равнодействующую сил P_k, действующих на частицы, обозначим $\overline{P}$ (рис. 1.24) и назовем силой тяжести тела. Используя полученные выше формулы, определим координаты центра тяжести тела:

$$x_c = \frac{\sum P_k x_k}{P},\ y_c = \frac{\sum P_k y_k}{P},\ z_c = \frac{\sum P_k z_k}{P}.$$

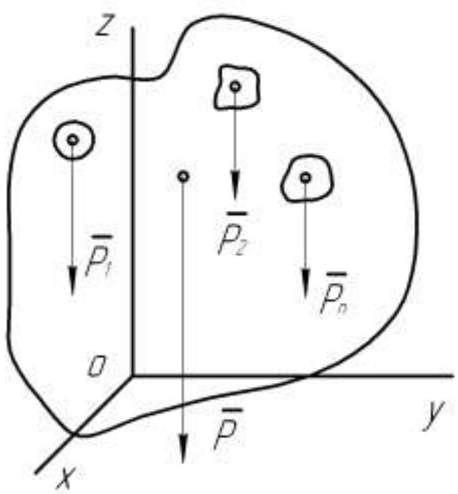


Рисунок 1.24 – Силы тяжести, действующие на твердое тело

Для однородного тела вес P_k любой его части пропорционален объему V_k этой части: $P_k = \gamma V_k$, а вес P всего тела пропорционален объему V этого тела, т. е. $P = \gamma V$, где γ - вес единицы объема.

Подставив эти значения P и P_k в предыдущие формулы, заметим, что во всех суммах γ как общий множитель выносится за скобки и сокращается с γ в знаменателе. В результате получим:

$$x_c = \frac{1}{V}\sum V_k x_k,\ y_c = \frac{1}{V}\sum V_k y_k,\ z_c = \frac{1}{V}\sum V_k z_k.$$

Путем аналогичных рассуждений легко найти координаты центра тяжести однородной пластины:

$$x_c = \frac{1}{S}\sum S_k x_k\ ,\ y_c = \frac{1}{S}\sum S_k y_k\ ,\ z_c = \frac{1}{S}\sum S_k z_k\ ,$$

где S - площадь всей пластины; S_k - площади ее частей.

Точно также получаются формулы для координат центра тяжести линии:

$$x_c = \frac{1}{L}\sum \ell_k x_k\ ,\ y_c = \frac{1}{L}\sum \ell_k y_k\ ,\ z_c = \frac{1}{L}\sum \ell_k z_k\ ,$$

где L - длина всей линии; ℓ_k - длины ее частей.

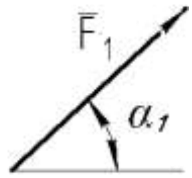
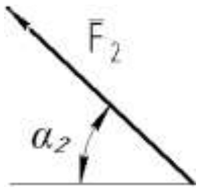
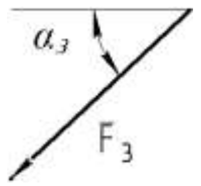
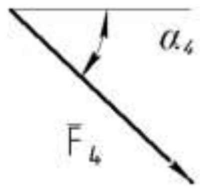
2 СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ 1

Ферма, состоящая из жесткого угольника и двух стержней, расположенная в вертикальной плоскости (рис. 2.0 – 2.9), закреплена в точке *A* шарнирно, в точке *B* прикреплена к невесомому стержню с шарнирами на концах или к шарнирной опоре на катках.

В точке *C* к ферме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом *P=25 кН*. На угольник действуют пара сил с моментом *M=100 кН·м*, сосредоточенные силы, равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью *q=20 кН/м* или распределенная по линейному закону с максимальной интенсивностью q_m*=100 кН/м* силы. Значения, направления и точки приложения сосредоточенных сил указаны в таблице 2.1 (если точка приложения силы, указанной в таблице 2.1, не представлена на рисунке, то следует ею пренебрегать).

Определить реакции связей в точках *A* и *B*, усилия в стержнях 1 и 2. При окончательных расчетах принять *a=0,5м*.

Таблица 2.1 – Значения, направления и точки приложения сосредоточенных сил к заданию 1

Силы								
	F_1=10 кН		F_2=20 кН		F_3=30 кН		F_4=40 кН	
Номер условия*	Точка прило-жения	α_1, град	Точка прило-жения	α_2, град	Точка прило-жения	α_3, град	Точка прило-жения	α_4, град
0	*H*	30	-	-	-	-	*K*	60
1	-	-	*D*	15	*E*	60	-	-
2	*K*	75	-	-	-	-	*E*	30
3	-	-	*K*	60	*H*	30	-	-
4	*D*	30	-	-	-	-	*E*	60
5	-	-	*H*	30	-	-	*D*	75
6	*E*	60	-	-	*K*	15	-	-
7	-	-	*D*	60	-	-	*H*	15
8	*H*	60	-	-	*D*	30	-	-
9	-	-	*E*	75	*K*	30	-	-

*Студент выбирает номер условия в таблице по последней цифре шифра зачетной книжки, а номер рисунка на стр. 25-29 по – предпоследней.

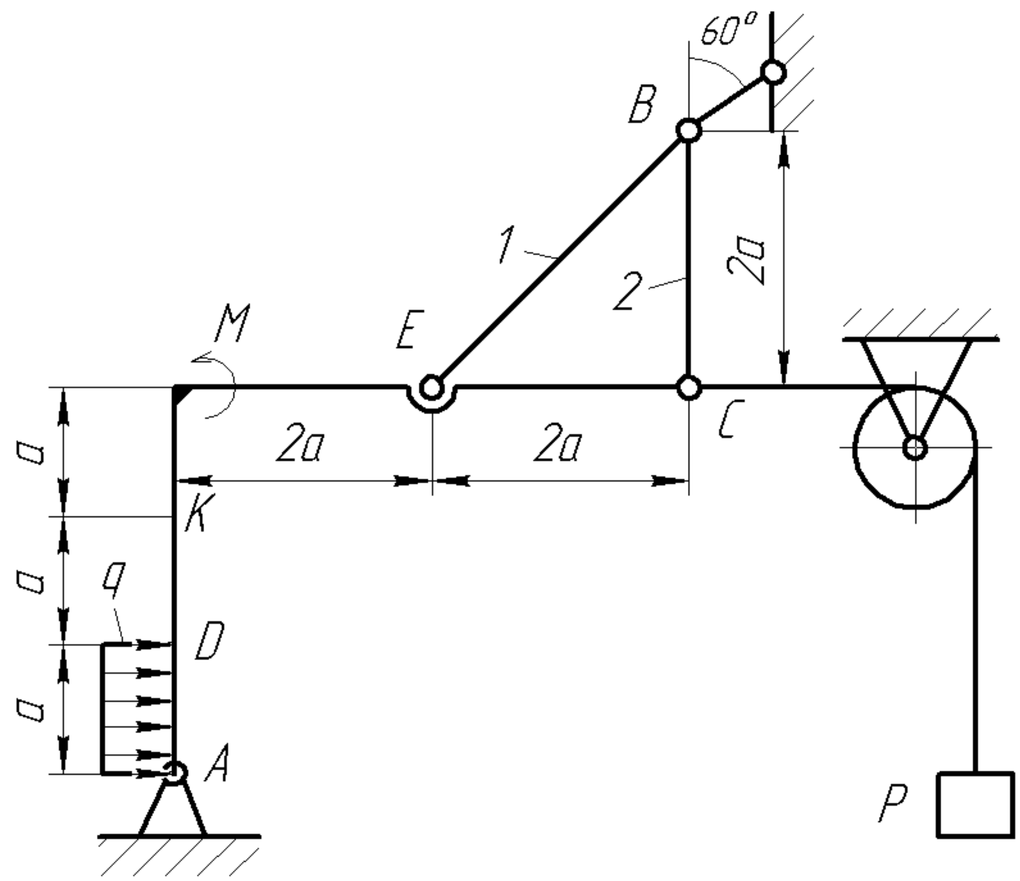


Рисунок 2.0

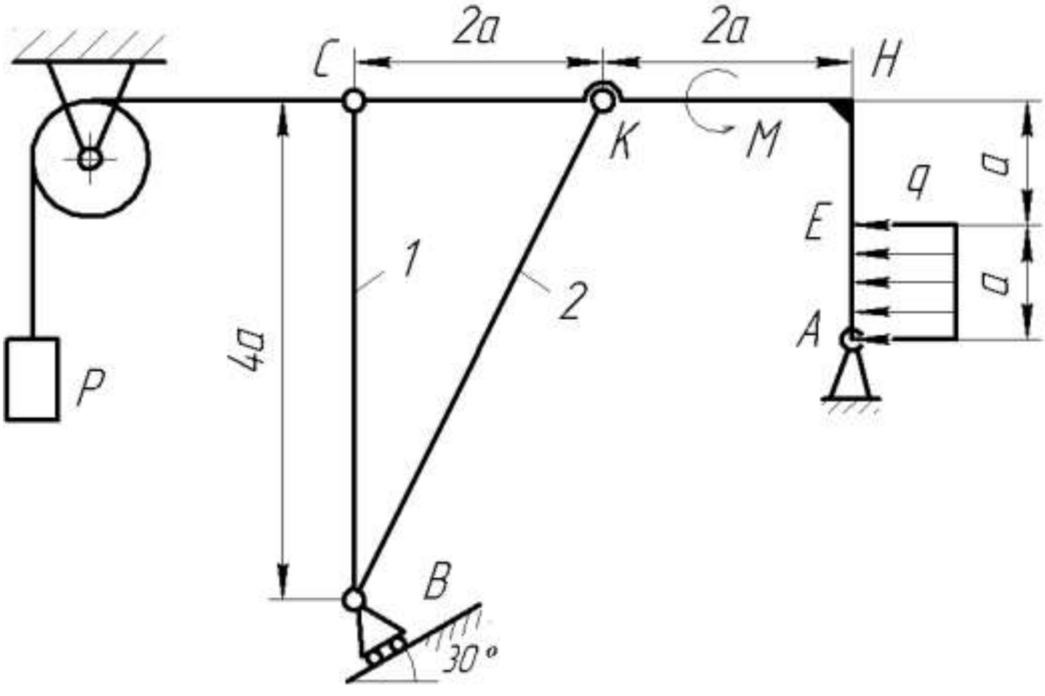


Рисунок 2.1

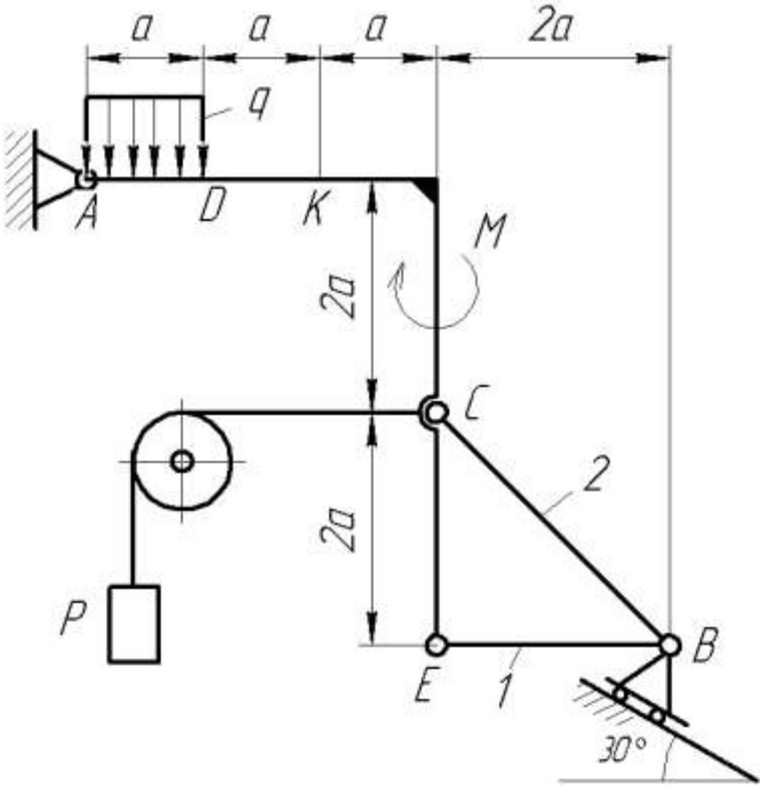


Рисунок 2.2

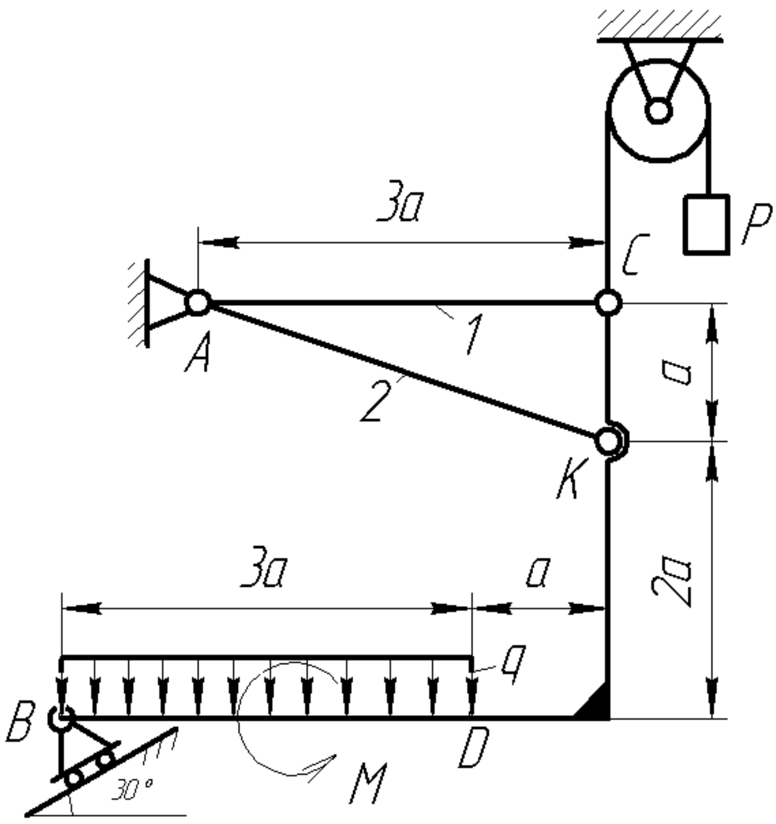


Рисунок 2.3

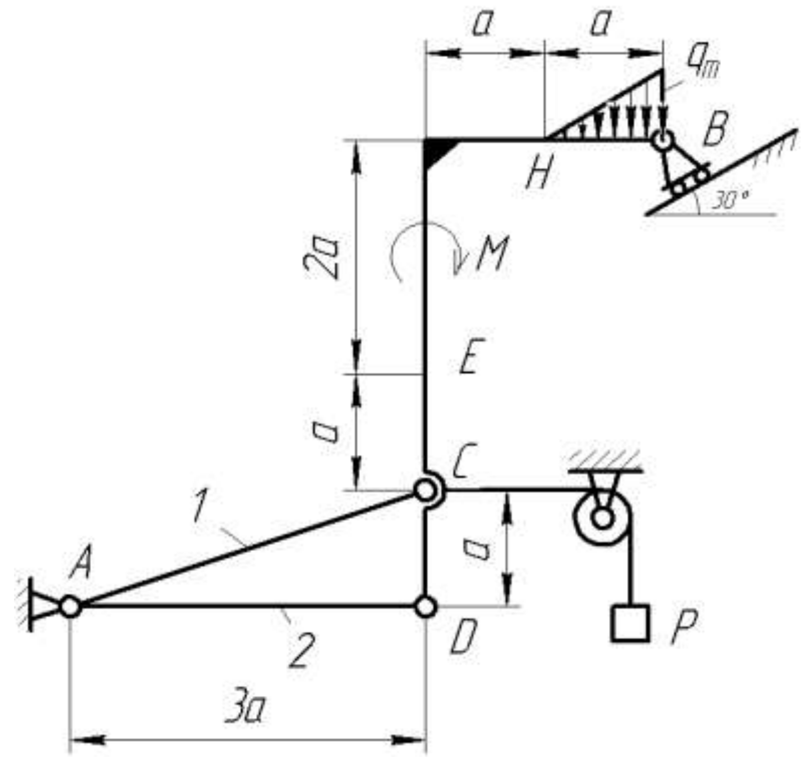


Рисунок 2.4

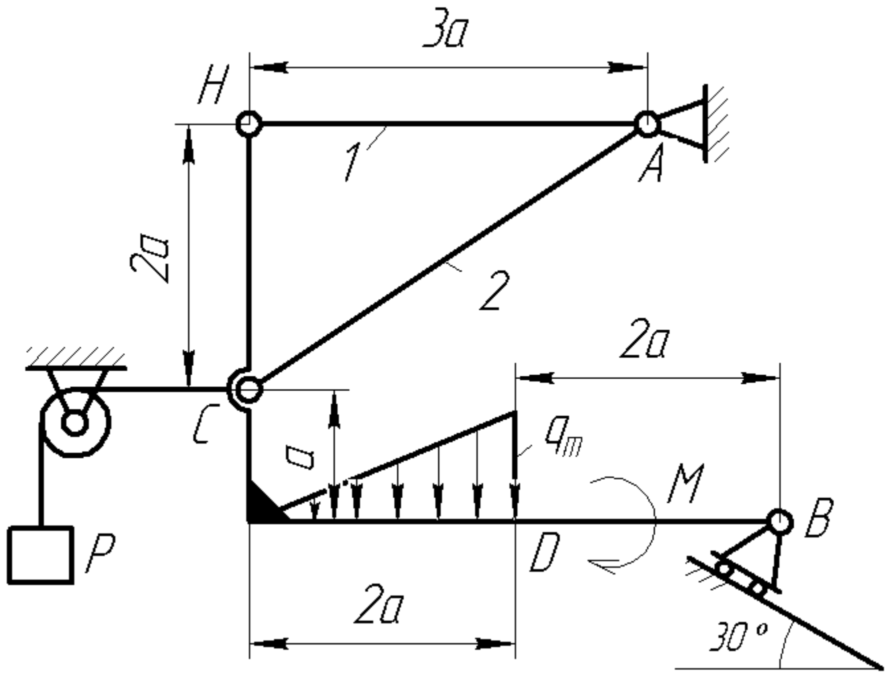


Рисунок 2.5

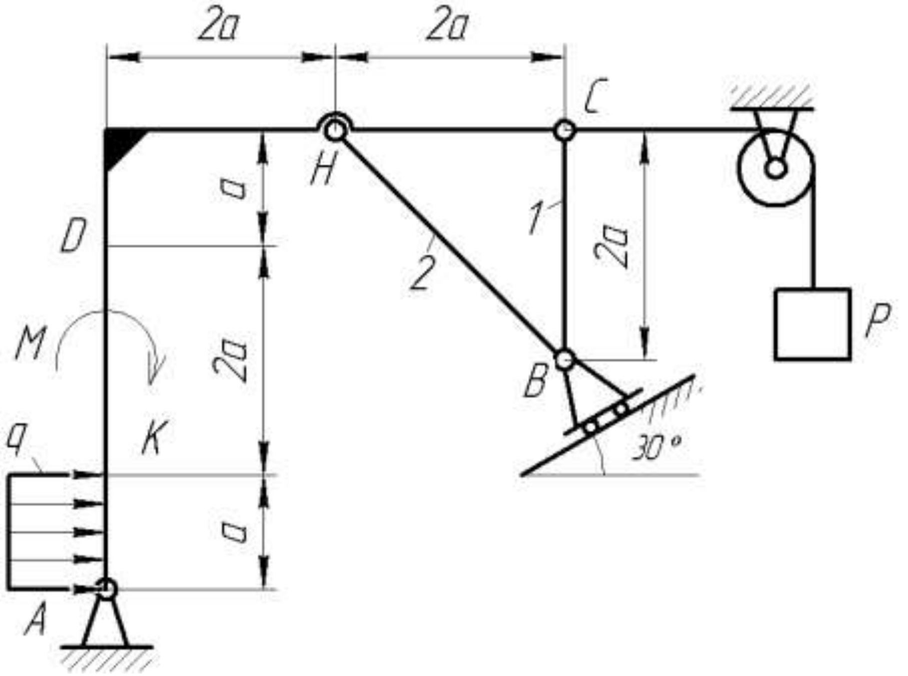


Рисунок 2.6

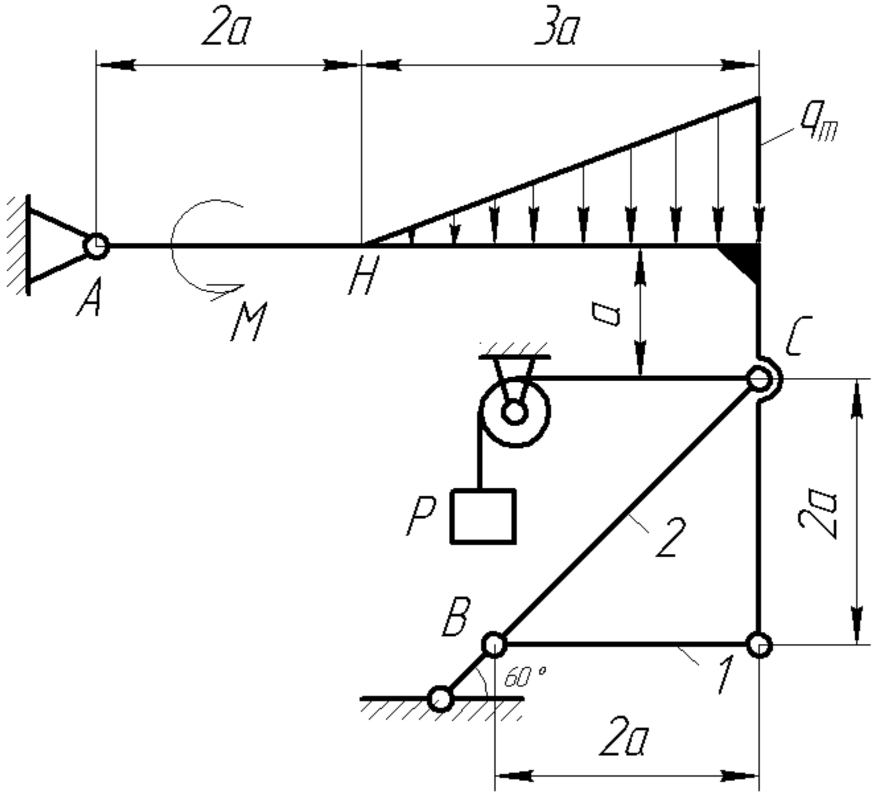


Рисунок 2.7

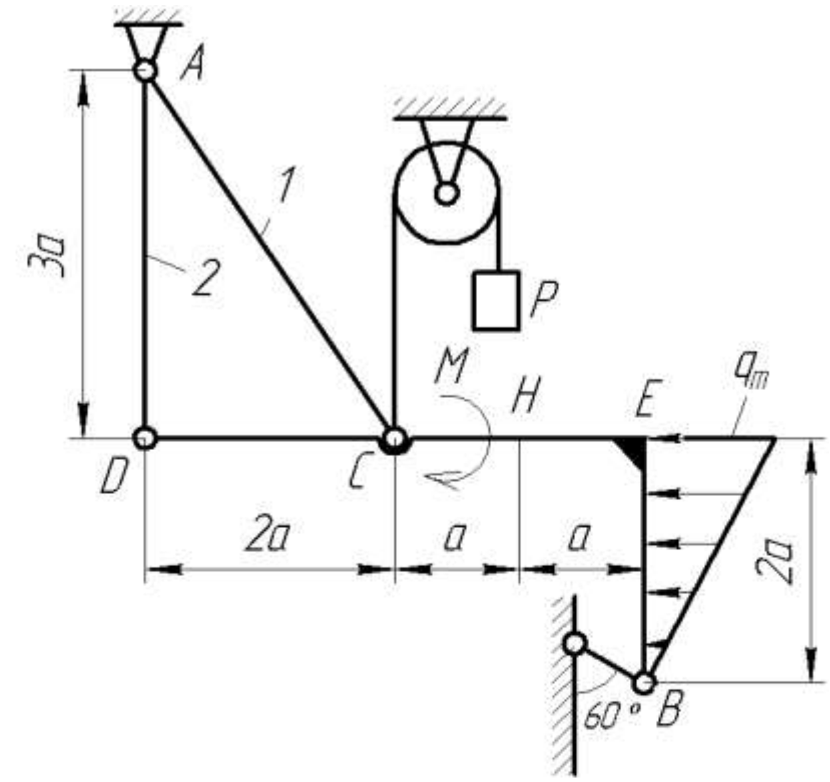


Рисунок 2.8

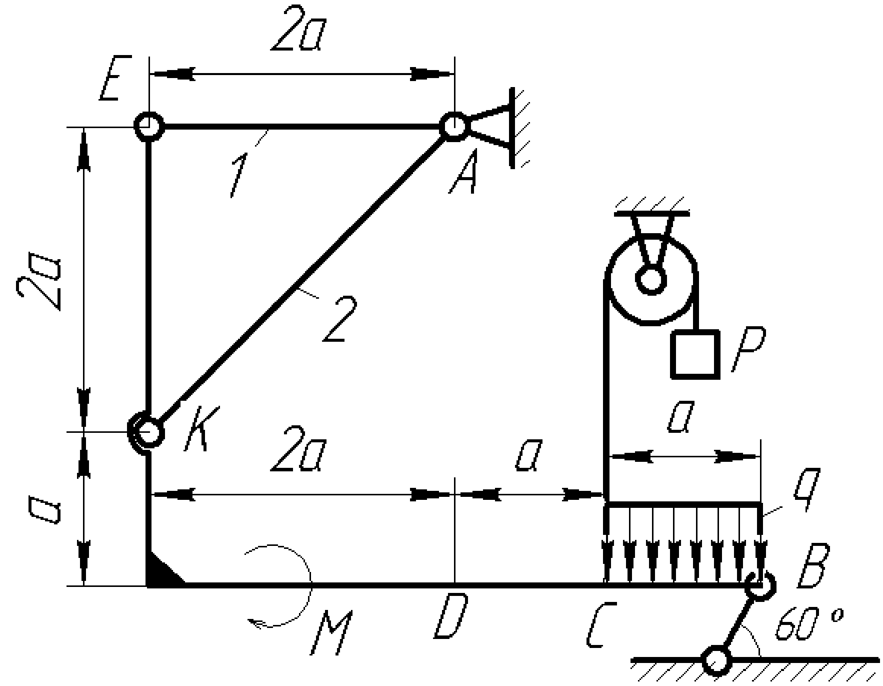


Рисунок 2.9

2.1 Предварительные указания к выполнению задания 1

Задание 1 направлено на рассмотрение равновесий сходящейся и произвольной в плоскости систем сил. Однако выполнение этого задания требует предварительного углубленного изучения ряда других тем: проекции сил на осях, связи и их статические реакции, разложение сил на заданные направления, момент силы относительно точки, момент пары сил, теорема Вариньона и т.д. Поэтому выполнение задания необходимо начать с ознакомления с материалами раздела 1.

При выполнении задания необходимо учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержит меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия нескольких сил. При вычислении момента силы $\overline{F}$ часто удобно разложить её на составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_o(\overline{F}) = m_o(\overline{F}') + m_o(\overline{F}'')$.

2.2 Пример выполнения задания 1

Пример. Ферма, состоящая из жесткого угольника *ADC* и двух стержней *AB* и *CB*, расположенная в вертикальной плоскости (рис. 2.10), имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: $F=25$ *кН*, $\alpha=60^o$, $P=18$ *кН*, $\gamma=75^o$, $M=50$ *кН·м*, $\beta=30^o$, $q=20$ *кН/м*, $a=0{,}5$ *м*. Определить: реакции в опорах *A* и *B*, усилия в стержнях *AB* и *BC*, вызываемые действующими нагрузками.

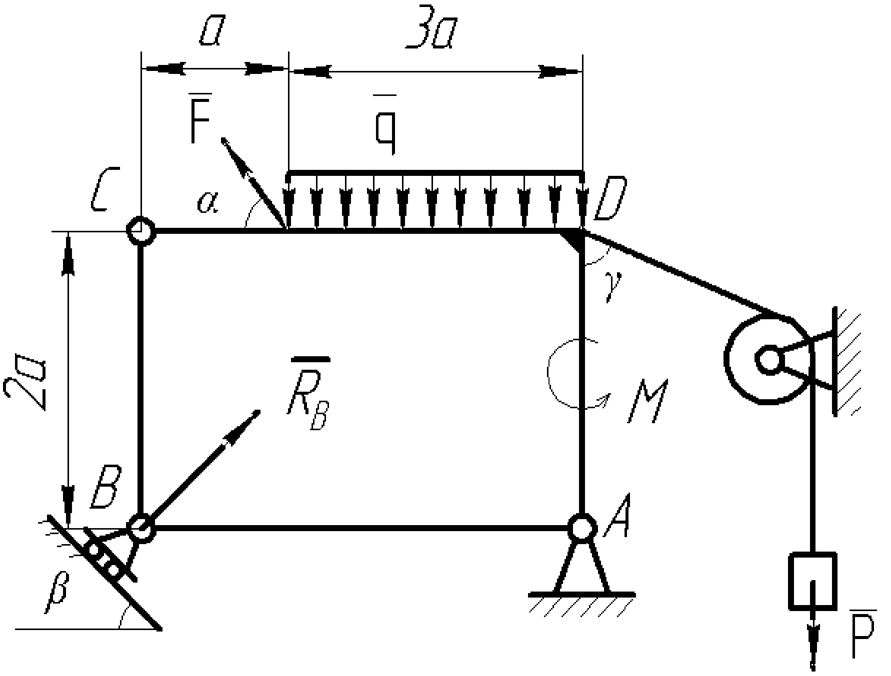


Рисунок 2.10 – Схема фермы к примеру выполнения задания 1

Решение:

1. Рассмотрим равновесие фермы. Разместим ферму в декартовой системе координат *XY*, отбросим связи и изобразим вместо них на нем кроме действующих силовых факторов реакции связей (см. рис. 2.11). Здесь *T*=*P*.

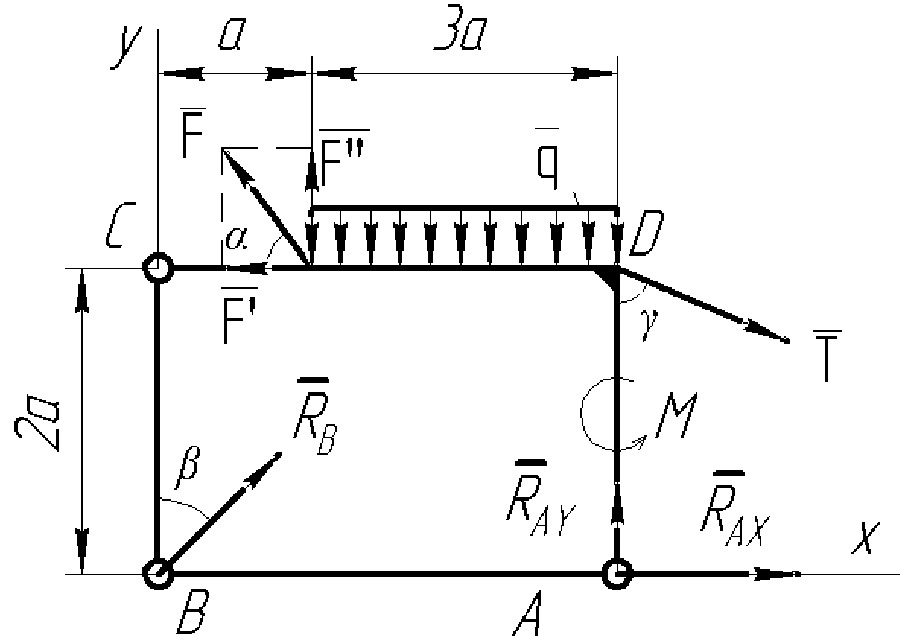


Рисунок 2.11 – Расчетная схема к примеру выполнения задания 1

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\bar{F}$ относительно точки A воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу $\bar{F}$ на составляющие $\bar{F}'$, $\bar{F}''$ ($\bar{F}' = F\cos\alpha$, $\bar{F}'' = F\sin\alpha$) и учтем, что $m_A(\bar{F}) = m_A(\bar{F}') + m_A(\bar{F}'')$. Таким же образом поступим силой $\bar{T}$.

Тогда получим:

$\sum F_{KX} = 0$, $R_{AX} + R_B \sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0$,

$\sum F_{KY} = 0$, $R_{AY} + R_B \cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma - q3a = 0$,

$\sum m_A(\bar{F}_K) = 0$,

$$M - R_B\cos\beta\cdot 4a + F\cos\alpha\cdot 2a - F\sin\alpha\cdot 3a - T\sin\gamma\cdot 2a + 9qa^2/2 = 0.$$

Откуда

$$R_B = \frac{M + F\cos\alpha\cdot 2a - F\sin\alpha\cdot 3a - T\sin\gamma\cdot 2a + 9qa^2/2}{4a\cdot\cos\beta} = \frac{50 + 25\cdot\cos 60^0\cdot 2\cdot 0,5 -}{}$$

$$\frac{-25\cdot\sin 60^0\cdot 3\cdot 0,5 - 18\cdot\sin 75^0\cdot 2\cdot 0,5 + 9\cdot 20\cdot 0,5^2/2}{4\cdot 0,5\cdot\cos 30^0} = 20,3\text{кН},$$

$$R_{AX} = -R_B\sin\beta + F\cos\alpha - T\sin\gamma = -20,3\sin 30^0 + 25\cos 60^0 - 18\sin 75^0 = -2,04\text{кН},$$

$$R_{AY} = T\cos\gamma + q3a - R_B\cos\beta - F\sin\alpha = 18\cos 75^0 + 20\cdot 3\cdot 0,5 - 20,3\cos 30^0 -$$
$$-25\sin 60^0 = -4,57\text{кН}.$$

Отрицательные знаки при R_{AX} и R_{AY} показывают, что они направлены противоположно показанным на рис. 2.11.

3. Для определения усилий в стержнях AB и BC условно вырежем узел B и рассмотрим его равновесие (рис. 2.12).

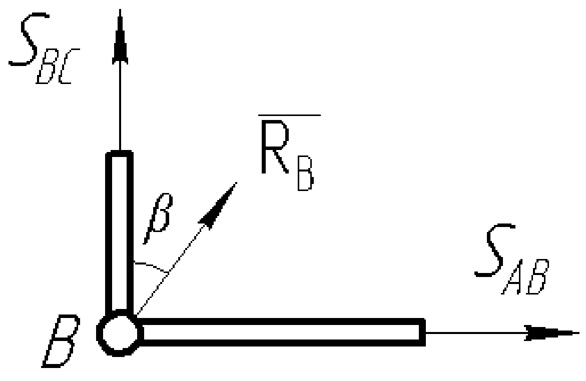


Рисунок 2.12 – Схема нагружения узла B

Составляя уравнения равновесия системы сходящихся сил в узле *B*, получим:

$\sum F_{KX} = 0$, $S_{AB} + R_B \sin\beta = 0$,

$\sum F_{KY} = 0$, $S_{BC} + R_B \cos\beta = 0$.

Откуда

$S_{AB} = -R_B \sin\beta = -20{,}3\sin 30^0 = -10{,}15 кН$,

$S_{BC} = -R_B \cos\beta = -20{,}3\cos 30^0 = -17{,}58 кН$.

Отрицательные знаки при S_{AB} и S_{BC} свидетельствуют о том, что стержни *AB* и *BC* находятся в сжатом состоянии.

3 СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ 2

Жесткая пространственная рама весом *3кН*, изготовленная из однородного прутка, закреплена сферическим шарниром в точке *A*, цилиндрическим шарниром в точке *B* и невесомым стержнем 1 (рис. 3.0 – 3.7) или же двумя цилиндрическими шарнирами в точках *A* и *B* и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (рис. 3.8, 3.9); все невесомые стержни прикреплены к рамам и неподвижным опорам шарнирами.

Размеры рамы указаны на рисунках.

На раму действуют две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. 3.1. Точки приложения сил (*D, E, H, K*) находятся в углах или в серединах сторон рамы.

Определить координаты центра тяжести рамы, реакции связей в опорах *A* и *B* и реакцию невесомого стержня (стержней).

При подсчетах принять *a=0,6м*.

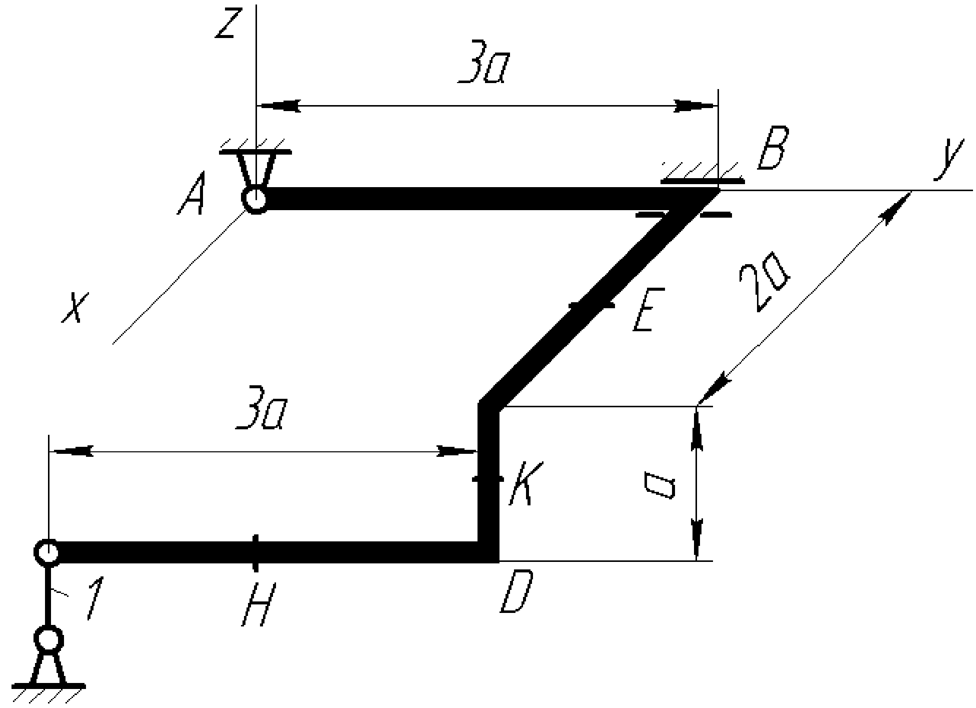


Рисунок 3.0

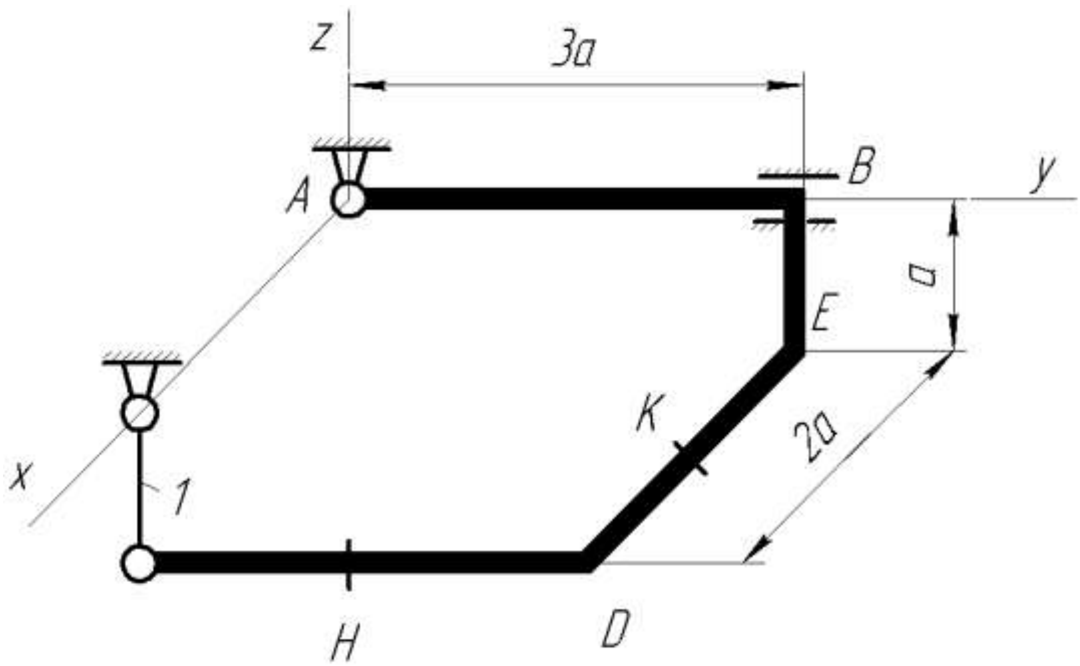


Рисунок 3.1

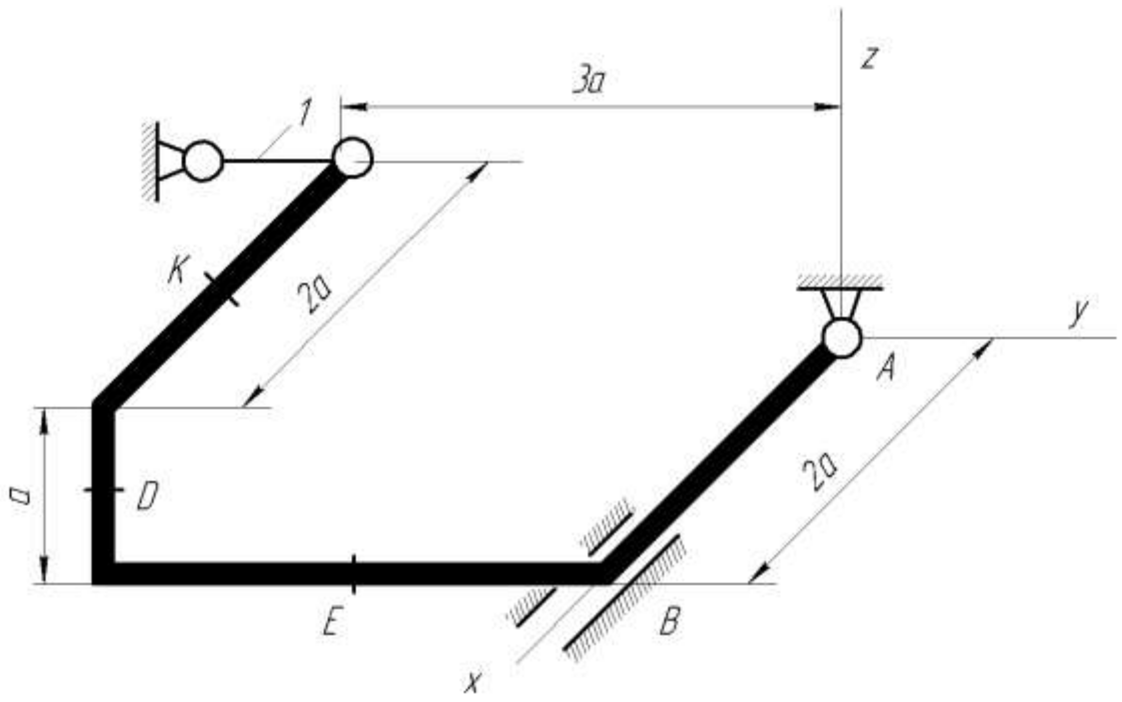


Рисунок 3.2

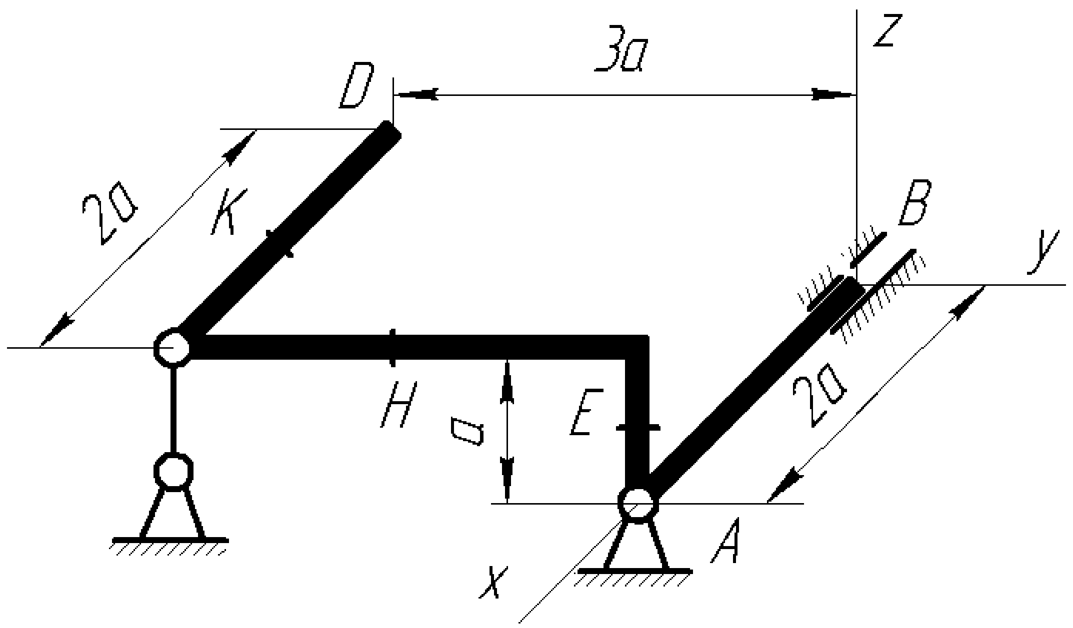


Рисунок 3.3

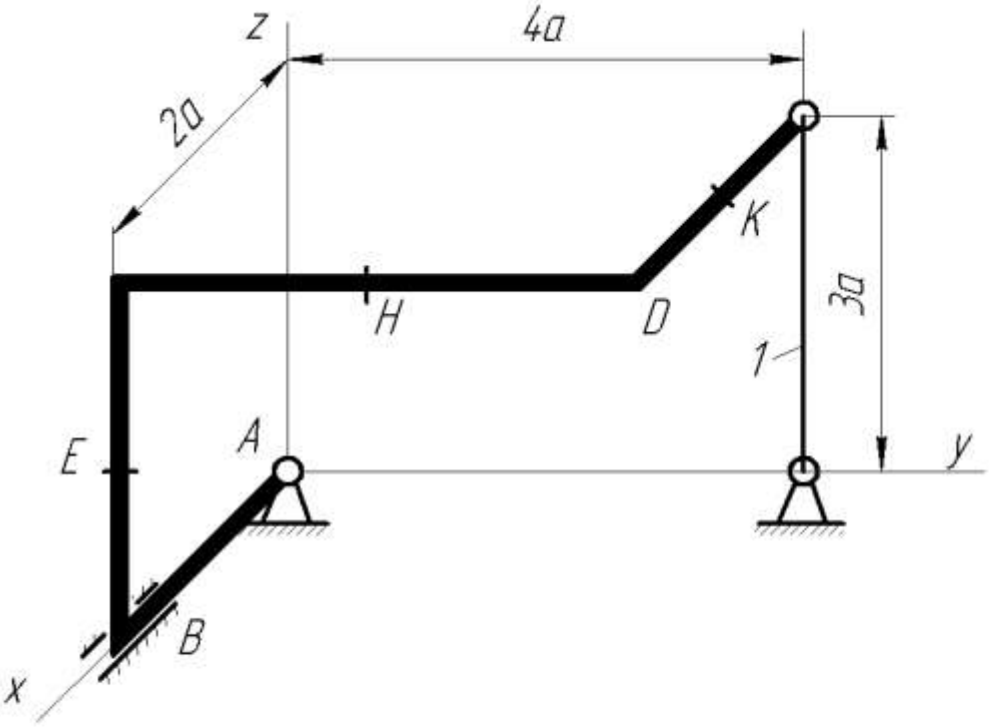


Рисунок 3.4

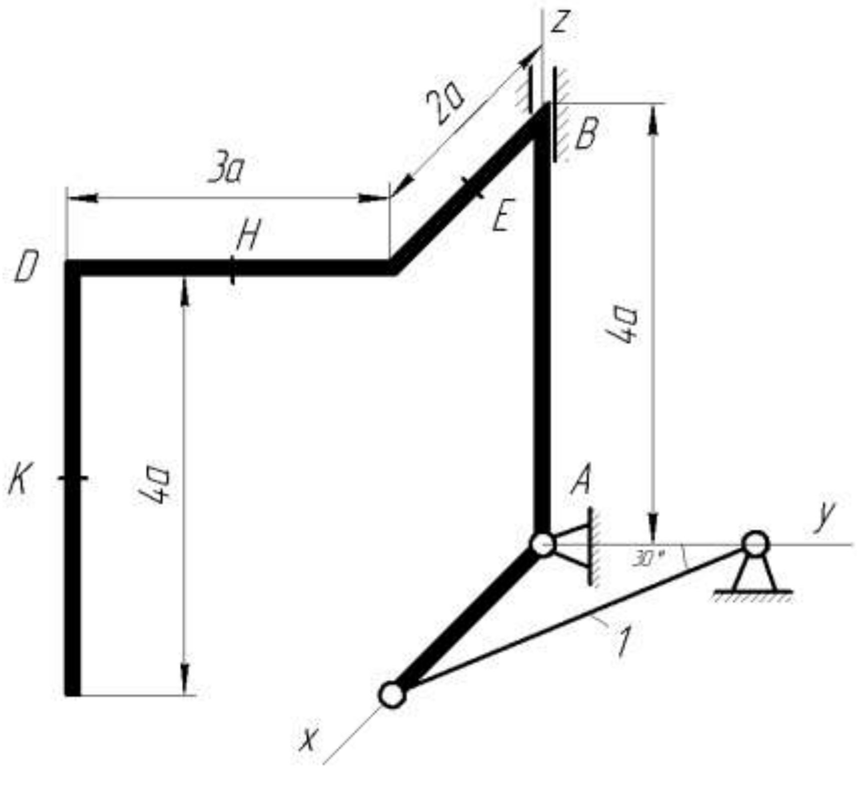


Рисунок 3.5

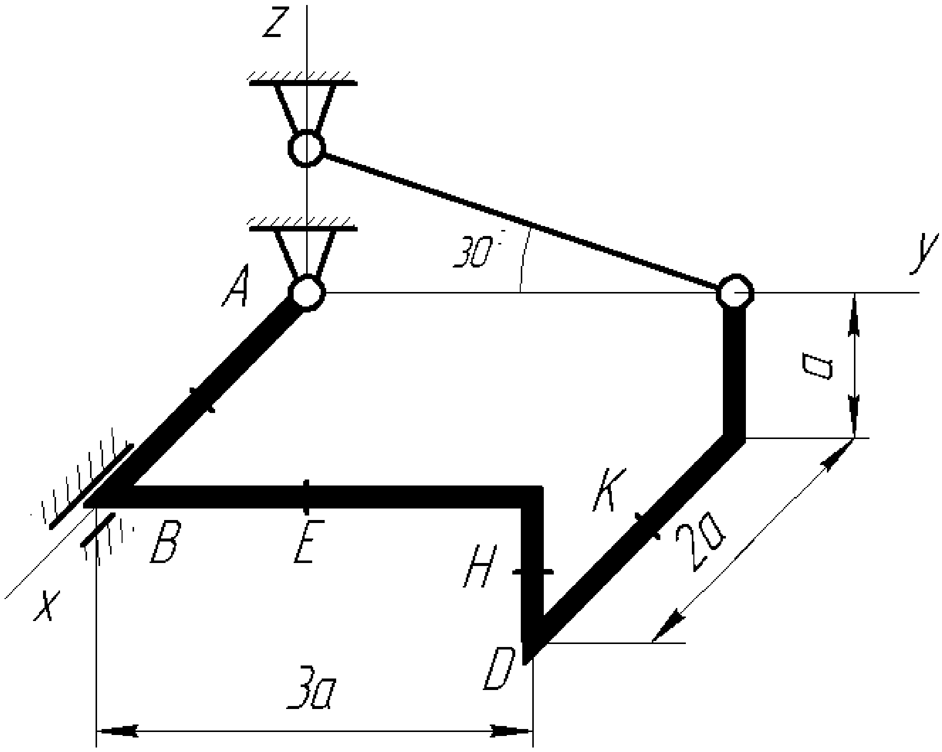


Рисунок 3.6

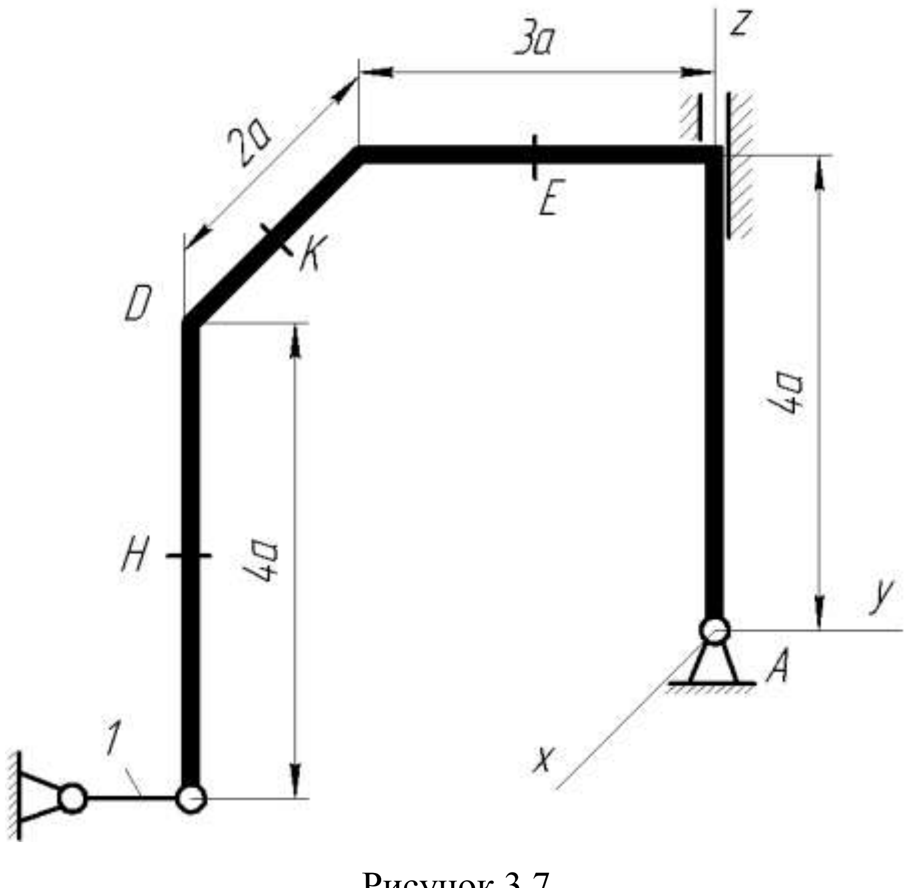


Рисунок 3.7

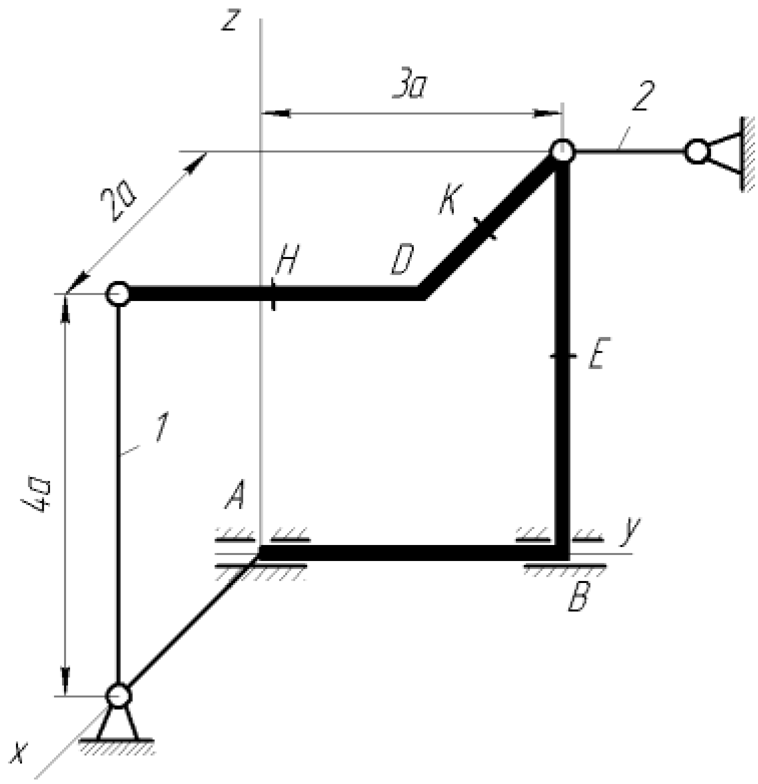


Рисунок 3.8

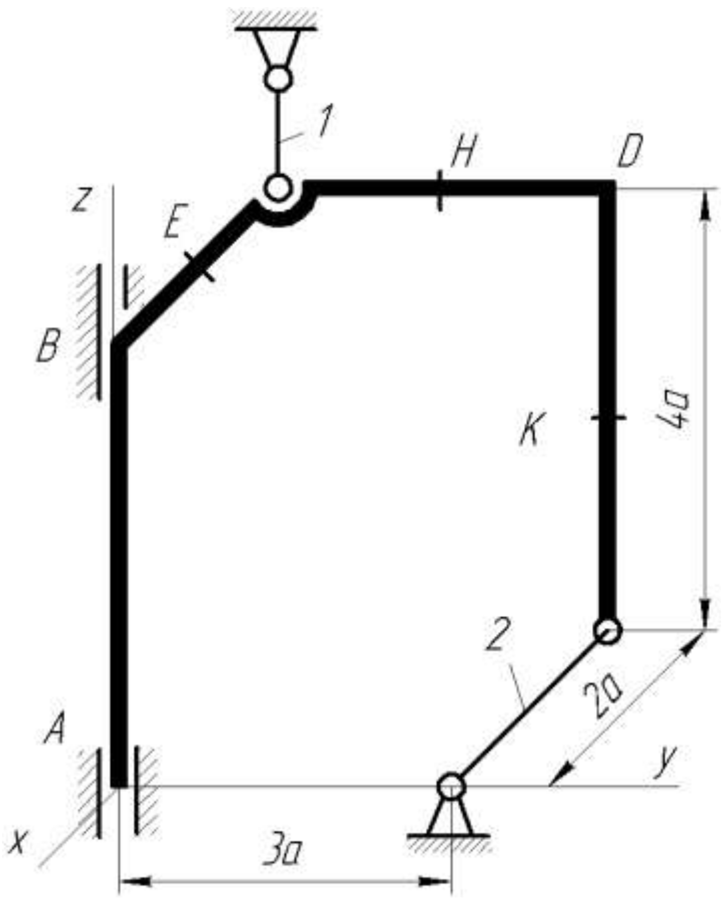
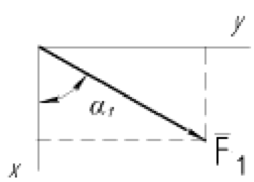
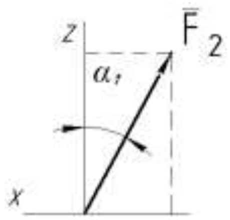
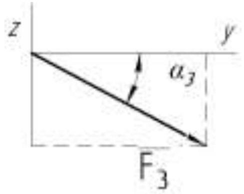
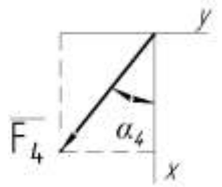


Рисунок 3.9

Таблица 3.1 – Значения, направления и точки приложения сосредоточенных сил к заданию 2

Силы								
	F_1=6 кН		F_2=8 кН		F_3=10 кН		F_4=12 кН	
Номер условия*	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
0	*E*	60	*H*	30	-	-	-	-
1	-	-	*D*	60	*E*	30	-	-
2	-	-	-	-	*K*	60	*E*	30
3	*K*	30	-	-	*D*	0	-	-
4	-	-	*E*	30	-	-	*D*	60
5	*H*	0	*K*	60	-	-	-	75
6	-	-	*H*	90	*D*	30	-	-
7	-	-	-	-	*H*	60	*K*	90
8	*D*	30	-	-	*K*	0	-	-
9	-	-	*D*	90	-	-	*H*	30

*Студент выбирает номер условия в таблице по последней цифре шифра зачетной книжки, а номер рисунка на стр. 34-38 по – предпоследней.

3.1 Предварительные указания к выполнению задания 2

Задача – на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При вычислении момента силы $\overline{F}$ часто удобно разложить ее на две составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, параллельные координатным осям (или на три); тогда, по теореме Вариньона, $m_x(\overline{F}) = m_x(\overline{F}') + m_x(\overline{F}'')$ и т.д.

3.2 Пример выполнения задания 2

Пример. Жесткая пространственная рама весом *P* (рис. 3.10) закреплена сферическим шарниром в точке *A*, цилиндрическим в точке *B* и невесомым стержнем *DD'*. На раму в плоскости, параллельной *XZ*, в точке *H* действует сила $\overline{F}$.

Дано: P=*3 кН, F=8 кН, α=60*^{0}*, EK=0,8 м, AB=1,2 м, BE=0,4 м, EH=0,4 м*. Определить: реакции опор *A*, *B* и стержня *DD'*.

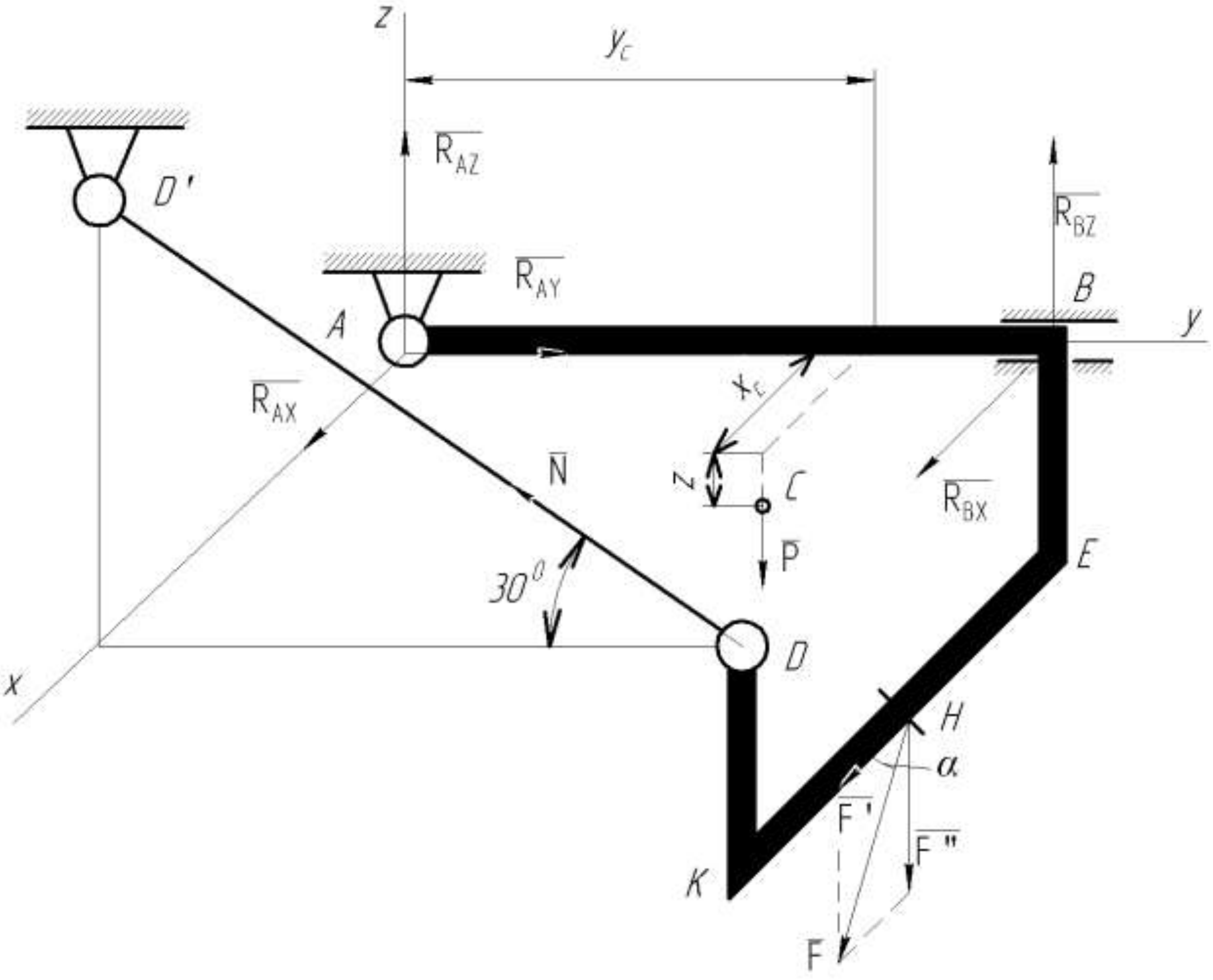


Рисунок 3.10 – Расчетная схема к заданию 2

Решение.

1. Определяем положение центра тяжести пространственной рамы:

$$x_c = \frac{\sum \ell_\kappa x_\kappa}{L} = \frac{0,8 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,8}{1,2 + 0,4 + 0,8 + 0,4} = 0,23 м;$$

$$y_c = \frac{\sum \ell_к y_к}{L} = \frac{1{,}2\cdot 0{,}6 + 0{,}4\cdot 1{,}2 + 0{,}8\cdot 1{,}2 + 0{,}4\cdot 1{,}2}{1{,}2 + 0{,}4 + 0{,}8 + 0{,}4} = 0{,}94\,м;$$

$$z_c = \frac{\sum \ell_к z_к}{L} = \frac{-0{,}4\cdot 0{,}2 - 0{,}8\cdot 0{,}4 - 0{,}4\cdot 0{,}2}{1{,}2 + 0{,}4 + 0{,}8 + 0{,}4} = -0{,}17\,м.$$

2. Далее рассмотрим равновесие рамы. Для этого в центре тяжести *C* разместим силу тяжести $\overline{P}$, в опорах *A*, *B* и невесомом стержне *DD'* изобразим реакции связей. При этом реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие R_{AX}, R_{AY}, R_{AZ}, цилиндрического – на две составляющие R_{BX} и R_{BZ} (в плоскости, перпендикулярной оси шарнира); реакцию $\overline{N}$ стержня направляем вдоль стержня от D к D', предполагая, что он растянут.

3. Для определения неизвестных реакций составим шесть уравнений равновесия действующей на раму пространственной системы сил:

$$\sum F_{KX} = 0,\quad R_{AX} + R_{BX} + F\cos 60^0 = 0; \tag{1}$$
$$\sum F_{KY} = 0,\quad R_{AY} - N\cos 30^0 = 0; \tag{2}$$
$$\sum F_{KZ} = 0,\quad R_{AZ} + R_{BZ} - P + N\sin 30^0 - F\sin 60^0 = 0; \tag{3}$$
$$\sum m_X(\overline{F}_K) = 0,\quad -P\cdot y_c + R_{BZ}\cdot AB - F\sin 60^0\cdot AB + N\sin 30^0\cdot AB = 0; \tag{4}$$
$$\sum m_Y(\overline{F}_K) = 0,\quad P\cdot x_c + F\sin 60^0\cdot EH - N\sin 30^0\cdot EK = 0; \tag{5}$$
$$\sum m_Z(\overline{F}_K) = 0,\quad -R_{BX}\cdot AB - F\cos 60^0\cdot AB - N\cos 30^0\cdot EK = 0. \tag{6}$$

Откуда

$$N = \frac{P\cdot x_c + F\sin 60^0\cdot EH}{EK\cdot\sin 30^0} = \frac{3\cdot 0{,}23 + 8\cdot 0{,}86603\cdot 0{,}4}{0{,}8\cdot 0{,}5} = 8{,}65\,кН;$$

$$R_{AY} = N\cos 30^0 = 8{,}65\cdot 0{,}86603 = 7{,}49\,кН;$$

$$R_{BZ} = \frac{P\cdot y_c + F\cdot\sin 60^0\cdot AB - N\sin 30^0\cdot AB}{AB} =$$
$$= \frac{3\cdot 0{,}94 + 8\cdot 0{,}86603\cdot 1{,}2 - 8{,}65\cdot 0{,}5\cdot 1{,}2}{1{,}2} = 4{,}95\,кН;$$

$$R_{BX} = \frac{-F\cos 60^0\cdot AB - N\cos 30^0\cdot EK}{AB} = \frac{8\cdot 0{,}5\cdot 1{,}2 - 8{,}65\cdot 0{,}86603\cdot 0{,}8}{1{,}2} = -0{,}99\,кН;$$

$$R_{AX} = -R_{BX} - F\cos 60^0 = 0{,}99 - 8\cdot 0{,}5 = -3{,}01\,кН;$$

$$R_{AZ} = F\sin 60^0 + P - R_{BZ} - N\sin 30^0 = 8\cdot 0{,}86603 + 3 - 4{,}95 - 8{,}65\cdot 0{,}5 = 0{,}65\,кН.$$

Ответ: $R_{AX} = -3{,}01 кН$; $R_{AY} = 7{,}49 кН$; $R_{AZ} = 0{,}65 кН$; $R_{BX} = -0{,}99 кН$; $R_{BZ} = 4{,}95 кН$; $N = 8{,}65 кН$.

Знаки «минус» указывают, что реакции R_{AX} и R_{BX} направлены противоположно показанным на рис. 3.10.

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЗАЩИТЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

1. Что является мерой механического взаимодействия материальных тел друг с другом?
2. Какие силы называются сосредоточенными?
3. Какие силы называются распределенными?
4. Чем характеризуется плоская распределенная сила?
5. Как определяются равнодействующие распределенных сил?
6. Что называется проекцией силы на ось?
7. Может ли проекция силы на ось быть отрицательной?
8. При каком расположении силы её проекция на ось равна нулю?
9. Что называется связью?
10. Какие существуют виды связей?
11. Какие две силы уравновешиваются?
12. Что такое равнодействующая?
13. Как сложить две сходящиеся силы?
14. Как разложить силу на составляющие?
15. Каковы условия равновесия системы сходящихся сил?
16. Чему равен момент силы относительно точки?
17. Что такое плечо силы?
18. Что называется парой сил?
19. Чему равен момент пары сил?
20. Что такое центр приведения?
21. Как можно перенести силу, не меняя её действия на тело?

22. Чем заменяют систему сил при приведении её к данному центру?

23. Что называется главным вектором системы сил? Главным моментом?

24. Какова сущность теоремы Вариньона?

25. Какая система сил называется плоской?

26. Какой алгебраический момент считается положительным, а какой отрицательным?

27. Когда момент силы относительно точки равен нулю?

28. Каковы аналитические условия равновесия плоской системы сил?

29. Сколько существует форм условий равновесия плоской системы сил?

30. Какие условия нужно соблюдать при составлении уравнений равновесия?

31. Что называется фермой?

32. Какие существуют аналитические методы определения усилий в стержнях фермы?

33. В чем состоит метод вырезания узлов?

34. В чем состоит метод Риттера?

35. Как определяется момент силы относительно оси?

36. Какова теорема Вариньона для моментов силы относительно оси?

37. Как определяются моменты силы относительно координатных осей?

38. Каковы аналитические условия равновесия пространственной системы сил?

39. Что называется центром параллельных сил?

40. Что называется центром тяжести?

41. Какие существуют методы определения центра тяжести различных фигур?

Оглавление

Подписано в печать ________ 2014г. Формат 60×84/16

Усл. печ. л. _____ Тираж 200 экз. Заказ _______

Отпечатано с оригинал-макета

ФГБОУ ВПО ЧГСХА

428003, г.Чебоксары, ул. К.Маркса, 29