МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ ЗАОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет электроэнергетики и технического сервиса

Кафедра природообустройства и водопользования

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

студентам 1, 2 курсов по направлениям подготовки бакалавров:
35.03.06 – «Агроинженерия»
Профили – электрооборудование и электротехнологии;
электротехнические информационные системы в электроэнергетике АПК;
инженерные системы водоснабжения и водоотведения в сельском хозяйстве;
технические системы а агробизнесе;
технический сервис в АПК
23.03.03 – «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»
Профиль – автомобильный сервис

Москва 2018

Составители: доцент Лычкин В.Н., старший преподаватель Капитонова В.А.

УДК 517. (076)

Высшая математика: Методические указания по изучению дисциплины/ Рос. гос. аграр. заоч. ун-т; Сост. Лычкин В.Н., Капитонова В.А. М., 2018. стр. 25

Предназначены для студентов 1 и 2 курсов

Утверждены методической комиссией факультета электроэнергетики и технического сервиса

Рецензенты: д.т.н., профессор Славкин В.И.; к.т.н., доцент Липа О.А. (ФГБОУ ВО РГАЗУ)

Раздел 1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Методические указания по дисциплине «Высшая математика» составлены в соответствии с требованиями Федерального Государственного образовательного стандарта высшего образования (ФГОС ВО 3+) по направлениям подготовки бакалавров 35.03.06 – «Агроинженерия» (утверждено приказом Минобрнауки РФ от 20.10.2015 № 1172) ; 23.03.03 – «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» (утверждено приказом Минобрнауки РФ от 06.03.2015 № 161) и рабочими учебными планами, утвержденными Ученым советом РГАЗУ 24 июня 2015 г.

1. 1. Цели и задачи дисциплины

Целью математического образования является развитие навыков математического мышления; навыков использования математических методов и основ математического моделирования; математической культуры у обучающегося.

Ему необходимо в достаточной степени владеть как классическими , так и современными математическими методами анализа задач, возникающих в его практической деятельности, использовать возможности вычислительной техники, уметь выбирать наиболее подходящие комбинации известных методов, знать их сравнительные характеристики.

Для выработки у современных специалистов с высшим образованием необходимой *математической культуры* необходимо *решение следующих задач*:

1.Обеспечение высокого уровня фундаментальной математической подготовки студентов.

2. Выработки у студентов умения проводить логический и качественный анализ социально-экономических задач управления на основе построения математических моделей на базе различных средств информационного обеспечения.

3. Умение использовать методы современной математики, необходимые для работы по выбранной специальности.

4. Умение специалиста самостоятельно продолжить свое математическое.

В результате изучения дисциплины выпускник должен:

1) обладать следующими **общекультурными компетенциями (ОК)**:

владением культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке целей и выбору путей ее достижения, умение логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь (ОК-1);

способностью находить организационно-управленческие решения в нестандартных ситуациях и готовность нести за них ответственность (ОК-3);

умением применять методы и средства познания, обучения и самоконтроля для интеллектуального развития, повышения культурного уровня, профессиональной компетенции, сохранения своего здоровья, нравственного и физического самосовершенствования (ОК-6);

обладать следующими **общепрофессиональными компетенцими(ОПК)**:

способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий с учетом основных требований информационной безопасности (ОПК-1);

способностью использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОПК-2);

обладать следующими **профессиональными компетенциями (ПК)**:

способностью собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-1);

способностью использовать математические методы обработки, анализа и синтеза результатов профессиональных исследований (ПК-3).

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: основные понятия и методы математического анализа, теории дифференциальных уравнений, элементов теории функций комплексной переменной.

Уметь: использовать математический аппарат для обработки технической и экономической информации и анализа данных.

Владеть: методами построения математических моделей типовых профессиональных задач.

1. 2. Библиографический список

Основной

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для бакалавров /В.Е. Гмурман.– 12 – е изд. – М: Юрайт: Высш. шк., 2012. – 479 с.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики: Учеб.пособие для вузов /В.Е. Гмурман. – 11 – е изд., перераб. и доп. – М: Высш. шк.: Юрайт, 2013. – 404 с.

3. Лычкин В.Н. Высшая математика: Учебное пособие.– М.: ФГБОУ ВПО РГАЗУ, 2011.

4. Лычкин В.Н. Математический анализ в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. /В.Н. Лычкин, В.А. Капитонова.–М.: ФГБОУ ВПО РГАЗУ, 2013.

Дополнительный

5. Демидович Б.П.,Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов. /Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев.– М.: Астрель; «АСТ», 2007.

6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1 и 2. /Н.С. Пискунов. –М.: Наука (любое издание).

1. 3. Распределение учебного времени по модулям (разделам) и темам дисциплины

Таблица 1

№ п.п.	Наименование модулей и тем дисциплины	Всего, ч	В том числе, ч			Рекомендуемая литература
			Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа	
1	2	3	4	5	6	7
1	Модуль 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии	32 (32)	- (-)	2 (-)	30 (32)	3,4
2	Модуль 2. Введение в математический анализ	34 (32)	2 (-)	2 (2)	30 (30)	3,4,5
3	Модуль 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной	66 (66)	2 (2)	4 (4)	60 (60)	3,4,5
4	Модуль 4. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций	56 (56)	2 (2)	4 (2)	50 (52)	3,4,5
5	Модуль 5. Элементы высшей алгебры	20 (20)	- (-)	- (-)	20 (20)	3,4
6	Модуль 6. Неопределенный интеграл	56 (56)	2 (2)	4 (2)	50 (52)	3,4,5
7	Модуль 7. Определенный интеграл	34 (34)	2 (-)	2 (2)	30 (32)	3,4,5
8	Модуль 8. Функции многих независимых переменных	22 (22)	- (-)	2 (2)	20 (20)	3,4,5
9	Модуль 9. Кратные и криволинейные интегралы	34 (34)	2 (-)	2 (-)	30 (34)	3,4,5
10	Модуль 10. Дифференциальные уравнения первого порядка	24 (24)	2 (2)	2 (2)	20 (20)	3,4,5
11	Модуль 11. Дифференциальные уравнения высших порядков	24 (24)	2 (2)	2 (2)	20 (20)	3,4,5
12	Модуль 12. Числовые и функциональные ряды	34 (34)	2 (-)	2 (-)	30 (34)	3,4,5
13	Модуль 13. Теория вероятностей	38 (38)	2 (2)	2 (-)	34 (36)	1,2,4
14	Модуль 14. Основные понятия математической статистики	30 (30)	- (-)	- (-)	30 (30)	1,2,4
Итого		504 (504)	20 (12)	30 (18)	454 (474)	

Примечание: в скобках указаны часы для студентов с сокращенным сроком обучения.

Раздел 2. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНЫХ МОДУЛЕЙ ДИСЦИПЛИНЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ИЗУЧЕНИЮ

2. 1. Модуль 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.

2. 1. 1. Содержание модуля.

Те м а 1. 1. *Аналитическая геометрия на плоскости*.

Уравнения линий на плоскости. Различные формы уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.
Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола, Их геометрические свойства и уравнения.

Т е м а 1. 2. *Элементы линейной алгебры*.

Определители второго и третьего порядков, их свойства. Алгебраические дополнения и миноры. Определители n-го порядка. Вычисление определителя его разложением по строке (столбцу).
Системы двух и трех линейных уравнений. Матричная запись системы линейных уравнений. Правило Крамера. Система линейных уравнений с n неизвестными. Метод Гаусса. Матрицы, действия над ними. Обратная матрица.

Т е м а 1. 3. *Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии в пространстве.*

Системы координат на прямой, плоскости и в пространстве. Пространства R^2 и R^3. Векторы. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов и его свойства. Длина вектора и угол между двумя векторами в координатной форме. Условие ортогональности двух векторов. Механический смысл скалярного произведения.
Векторное произведение двух векторов, его свойства. Условие коллинеарности двух векторов. Геометрический смысл определителя 2-го порядка. Простейшие приложения векторного произведения в науке и технике.
Смешанное произведение трех векторов. Его геометрический смысл.
Уравнения плоскости и прямой в пространстве. Угол между плоскостями. Угол между прямой и плоскостью.
Уравнение поверхности в пространстве. Цилиндрические поверхности. Сфера. Конус. Эллипсоид. Гиперболоиды. Параболоиды. Полярные координаты на плоскости. Цилиндрические и сферические координаты в пространстве.

2. 1. 2. Методические указания по его изучению.

После изучения по учебнику [3] теоретического материала (главы 1,2), разберите решение задач **Примеров 1- 4**.

Пример 1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(−4; 8), *B*(5; −4), *C*(10; 6). Найти: 1) длину стороны *AB*; 2) уравнения сторон *AB* и *AC* и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол *A* в радианах; 4) уравнение высоты *CD* и ее длину; 5) систему линейных неравенств, определяющих треугольник *ABC*.

Решение. 1). Расстояние *d* между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Подставив в эту формулу координаты точек *A* и *B*, получаем

$$AB = \sqrt{[5-(-4)]^2 + (-4-8)^2} = 15\ .$$

2). Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Подставив в эту формулу координаты точек A и B, получаем:

(AB): $\frac{x-(-4)}{5-(-4)}=\frac{y-8}{-4-8}$, $\frac{x+4}{9}=\frac{y-8}{-12}$, $\frac{x+4}{3}=\frac{y-8}{-4}$, $4x+3y-8=0$.

Отсюда $y=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$ и $k_{AB}=-\frac{4}{3}$.

(AC): $\frac{x-(-4)}{10-(-4)}=\frac{y-8}{6-8}$, $\frac{x+4}{14}=\frac{y-8}{-2}$, $\frac{x+4}{7}=\frac{y-8}{-1}$, $x+7y-52=0$,

$y=-\frac{1}{7}x+\frac{52}{7}$. Откуда $k_{AC}=-\frac{1}{7}$.

3). Угол α между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых равны k_1 и k_2, определяется по формуле

$$tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Подставив в эту формулу $k_1=k_{AB}=-\frac{4}{3}$, $k_2=k_{AC}=-\frac{1}{7}$, имеем

$$tgA=\left|\frac{-\frac{1}{7}-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}\right|=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{21}}=1.$$

Тогда $\angle A=arctg1=45^\circ=0{,}79$ рад.

4). Так как высота CD перпендикулярна стороне AB, то угловые коэффициенты этих прямых обратны по величине и противоположны по знаку, то есть $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{-\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1;y_1)$ в заданном угловым коэффициентом $к$ направлении, имеет вид

$$y-y_1=k(x-x_1)$$

Подставим в эту формулу координаты точки C и $k_{CD}=\frac{3}{4}$, получим уравнение высоты CD:

$$y-6=\frac{3}{4}(x-10) \text{ или } 3x-4y-6=0.$$

Расстояние d от точки $M_1(x_1;y_1)$ до прямой, заданной уравнением $Ax+By+C=0$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Отсюда

$$CD = \frac{|4 \cdot 10 + 3 \cdot 6 - 8|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 10.$$

5). Множество точек треугольника ABC есть пересечение трех полуплоскостей, первая из которых ограничена прямой AB и содержит точку C, вторая ограничена прямой BC и содержит точку A, а третья ограничена прямой AC и содержит точку B.

Для получения неравенства, определяющего полуплоскость, ограниченную прямой AB и содержащую точку C, подставим в уравнение прямой AB координаты точки C: $4 \cdot 10 + 3 \cdot 6 - 8 = 50 > 0$. Поэтому искомое неравенство имеет вид $4x + 3y - 8 \geq 0$.

Для составления неравенства, определяющего полуплоскость, ограниченную прямой BC и содержащую точку A, составим уравнение прямой BC:

$$\frac{x-5}{10-5} = \frac{y-(-4)}{6-(-4)}, \quad \frac{x-5}{5} = \frac{y+4}{10}, \quad \frac{x-5}{1} = \frac{y+4}{2}, \quad 2x - y - 14 = 0.$$

Подставив в последнее уравнение координаты точки A, имеем $2 \cdot (-4) - 8 - 14 = -30 < 0$. Искомое неравенство есть $2x - y - 14 \leq 0$.

Подобным образом составляем неравенство,определяющее полуплоскость, ограниченную прямой AC и содержащую точку B : $x + 7y - 52 \leq 0$.

Итак, множество точек треугольника ABC определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 4x + 3y - 8 \geq 0 \\ 2x - y - 14 \leq 0 \\ x + 7y - 52 \leq 0 \end{cases}.$$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}.$$

Решение. Вычислим определитель Δ системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, данная система имеет единственное решение. Вычисляем определители Δx_1, Δx_2, Δx_3 .

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -7 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 14\ ; \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 28\ ; \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -42\ .$$

По формулам Крамера имеем:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1\ ; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2\ ; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-42}{14} = -3\,.$$

Ответ: (1; 2; −3).

Пример 3. Данную систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

записать в матричной форме и решить с помощью обратной матрицы.

Решение. Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

С учетом этих обозначений данная система уравнений принимает следующую матричную форму:

$$A \cdot X = H. \qquad (1)$$

Если матрица A – невырожденная (ее определитель отличен от нуля),то она имеет обратную матрицу A^{-1}. Умножив обе части уравнения (1) на A^{-1}, получим:

$$A^{-1} A \cdot X = A^{-1} \cdot H.$$

Но $A^{-1} \cdot A = E$ (E – единичная матрица), а $EX = X$, поэтому

$$X = A^{-1} \cdot H. \qquad (2)$$

Равенство (2) называется *матричной* записью решения системы линейных уравнений. Для нахождения решения системы уравнений необходимо вычислить обратную матрицу A^{-1}.

Пусть имеем невырожденную матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Тогда

$A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где A_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3) – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A, равное произведению $(-1)^{i+j}$ на минор (определитель) второго порядка, полученный из определителя матрицы A вычеркиванием i – ой строки и j – го столбца.

Вычислим определитель $\Delta(A)$:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

Так как $\Delta(A) \neq 0$, матрица A имеет обратную матрицу A^{-1} . Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$A_{21} = 3,\ A_{22} = 1,\ A_{23} = -1,\ A_{31} = -1,\ A_{32} = 3,\ A_{33} = 7.$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

По формуле (2) имеем:

$$X = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_1 = 3$; $x_2 = 0$; $x_3 = -2$.

Пример 4. Даны точки $A(-2; 0; -2)$, $B(2; 4; -4)$, $C(0; 11; -12)$, $D(-2; 2; -1)$. Требуется: 1) записать векторы $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{AD}$ в системе орт и найти модули этих векторов; 2) найти угол между векторами $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{AC}$; 3) найти площадь треугольника ABC; 4) найти объем пирамиды $ABCD$.

Решение. 1). Если даны точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\boldsymbol{M_1M_2}$ в системе орт $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ (единичные векторы, направления которых совпадают с положительным направлением координатных осей) имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}. \qquad (1)$$

Подставив в (1) координаты точек A и B, получим

$$\boldsymbol{AB} = [2 - (-2)]\boldsymbol{i} + (4 - 0)\boldsymbol{j} + [-4 - (-2)]\boldsymbol{k} = 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

Подобным образом находим $\boldsymbol{AC} = 2\boldsymbol{i} + 11\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{AD} = 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

Модуль вектора $\boldsymbol{M_1M_2}$, определяемый в координатной форме выражением (1), находится по формуле

$$|\boldsymbol{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \qquad (2)$$

Подставив в формулу (2) координаты векторов $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{AD}$, имеем:

$$|\boldsymbol{AB}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = 6\,,\ \ |\boldsymbol{AC}| = 15,\ \ |\boldsymbol{AD}| = \sqrt{5}\,.$$

2). Косинус угла α, образованного векторами $\boldsymbol{a} = a_x\,\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j} + a_z\,\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = b_x\,\boldsymbol{i} + b_y\,\boldsymbol{j} + b_z\,\boldsymbol{k}$, равен скалярному произведению этих векторов, деленному на произведение их модулей, то есть определяется формулой

$$\cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}\,. \qquad (3)$$

Подставляя в формулу (3) координаты векторов $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{AC}$, получим

$$\cos\alpha = \frac{4\cdot 2 + 4\cdot 11 + (-2)\cdot(-10)}{6\cdot 15} = \frac{72}{90} = 0{,}8 \ \text{ и } \ \alpha \approx 36^\circ 52'\,.$$

3). Известно, что модуль вектора, равного векторному произведению двух векторов, равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Тогда площадь треугольника ABC равна половине модуля векторного произведения векторов $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{AC}$, то есть

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\,|\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}|.$$

Тогда

$$\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 4 & -2 \\ 2 & 11 & -10 \end{vmatrix} = -18\boldsymbol{i} + 36\boldsymbol{j} + 36\boldsymbol{k}\,,$$

$$|\ \boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}\ | = \sqrt{(-18)^2 + 36^2 + 36^2} = 54,\ \ S_{\Delta ABC} = 27 \text{ кв. ед.}$$

4). Объем V пирамиды $ABCD$ равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{AD}$, то есть равен одной шестой абсолютной величины смешанного произведения этой тройки векторов, то есть

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}\right)\cdot \boldsymbol{AD}\right| = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 2 & 11 & -10 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 108 = 18 \text{ куб. ед.}$$

2. 1. 3. Вопросы для самоконтроля.

Те м а 1. 1. *Аналитическая геометрия на плоскости*.

1. Что называется прямоугольной системой координат на плоскости?
2. Чему равны ординаты точек, лежащих на оси Ox ?
3. Чему равны абсциссы точек, лежащих на оси Oy ?
4. Напишите формулу для вычисления расстояния между двумя точками на плоскости.
5. Напишите формулы для вычисления координат точки, делящей отрезок в данном отношении.

6. Напишите формулы для определения координат точки, делящей отрезок пополам.
7. Что называется уравнением линии на плоскости?
8. Напишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
9. Что называется угловым коэффициентом прямой, каков его геометрический смысл?
10. Чему равен угловой коэффициент прямой, параллельной оси Ox ?
11. Напишите формулу для вычисления угла между двумя прямыми.
12. Сформулируйте условие параллельности двух прямых.
13. Сформулируйте условие перпендикулярности двух прямых.
14. Напишите уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
15. Напишите уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
16. Напишите общее уравнение прямой.
17. Как найти угловой коэффициент прямой, если дано ее общее уравнение?
18. Как найти координаты точек пересечения двух прямых, если даны их уравнения?
19. Какие линии называются кривыми второго порядка?
20. Напишите уравнение окружности с центром в данной точке.
21. Напишите уравнение окружности с центром в начале координат.
22. Что называется эллипсом? Напишите каноническое уравнение эллипса.
23. Что называется эксцентриситетом эллипса?
24. Дайте определение гиперболы. Напишите каноническое уравнение гиперболы.
25. Что называется эксцентриситетом гиперболы?
26. Что называется асимптотой гиперболы? Напишите уравнения асимптот гиперболы.
27. Что называется параболой? Напишите каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox; относительно оси Oy.
28. Какой вектор называется вектором нормали к плоскости?
29. Напишите уравнение плоскости, определяемой точкой, лежащей на ней, и вектором нормали.
30. Напишите общее уравнение плоскости.
31. Напишите уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
32. Напишите формулу для определения расстояния от точки до плоскости.
33. Что называется направляющим вектором прямой в пространстве?
34. Напишите канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через две данные точки.

Т е м а 1. 2. *Элементы линейной алгебры*.

1. Что называется определителем второго порядка?

2. Что называется определителем третьего порядка?
3. Назовите свойства определителей.
4. Что называется минором элемента определителя?
5. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
6. Назовите способы вычисления определителей.
7. Что называется матрицей?
8. Какая матрица называется единичной?
9. Что называется определителем матрицы?
10. Какая матрица называется невырожденной?
11. Как сложить две матрицы?
12. Как умножить матрицу на число?
13. В каком случае возможно перемножить две матрицы?
14. Что называется произведением двух матриц?
15. Всегда ли для произведения двух матриц справедлив переместительный закон умножения? Приведите примеры.
16. Какая матрица называется обратной данной матрице?
17. Как находится матрица, обратная данной?
18. Какое уравнение называется линейным?
19. Что называется системой линейных уравнений?
20. Что называется решением системы линейных уравнений?
21. Назовите правило Крамера решения системы n линейных уравнений с n неизвестными. В каком случае оно применимо?
22. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
23. При каком условии система линейных уравнений имеет единственное решение?

Т е м а 1. 3. *Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии в пространстве.*

1. Какая величина называется скалярной?
2. Что называется вектором?
3. Что называется модулем вектора?
4. Какие векторы называются коллинеарными?
5. Какие векторы называются равными?
6. Как построить вектор, равный сумме двух или более векторов?
7. Как построить вектор, равный разности двух векторов?
8. Как умножить вектор на число?
9. Какой вектор называется единичным?
10. Какие векторы называются линейно независимыми?
11. Что называется базисом?
12. Что называется координатами вектора?
13. По какому правилу производится сложение векторов, заданных в координатной форме?
14. Как определить модуль вектора, заданного своими координатами?
15. Что называется скалярным произведением векторов?

16. Каков физический смысл скалярного произведения?
17. В каком случае скалярное произведение выражается положительным числом? Отрицательным числом?
18. Назовите свойства скалярного произведения векторов.
19. Чему равно попарное скалярное произведение одноименных ортов?
20. Чему равно скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами?
21. По какой формуле находится проекция одного вектора на другой?
22. Сформулируйте условие перпендикулярности двух векторов.
23. Дайте определение векторного произведения двух векторов.
24. Перечислите свойства векторного произведения.
25. Как вычислить векторное произведение двух векторов, заданных своими координатами?
26. Какие векторы называются компланарными?
27. Дайте определение смешанного произведения трех векторов.
28. Перечислите свойства смешанного произведения.
29. Как вычислить смешанное произведение трех векторов, заданных своими координатами?
30. Приведите условие компланарности трех векторов.
31. Как вычислить объем четырехгранной пирамиды по координатам ее вершин.

2. 1. 4. Задания для самостоятельной работы

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и составляющей с осью Ox угол 45°.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(4; 3)$ и $B(16; -6)$.

3. Найти длину высоты BD в треугольнике с вершинами $A(-3; 0)$, $B(2; 5)$, $C(3; 2)$.

В задачах 4, 5 вычислить определители:

4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

6. Решить систему уравнений двумя способами: 1) при помощи определителей (по формулам Крамера); 2) с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = -7 \\ x - 3y - z = -2 \end{cases}$$

7. Дан вектор $\boldsymbol{AB} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Определить координаты точки B, если $A(-2; 1; 0)$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку

M_o (2; 3; -1) параллельно плоскости $5x-3y+2z-10=0$.

2. 2. Модуль 2. Введение в математический анализ.

2. 2. 1. Содержание модуля.

Множество вещественных чисел. Функция. Область ее определения. Способы задания. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Сложные и обратные функции. Числовая последовательность и ее предел. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.

Предел функции в точке и в бесконечности. Первый и второй замечательные пределы. Свойства пределов функции. Бесконечно малые величины. Их свойства. Сравнение бесконечно малых.

Непрерывность функции в точке и на интервале. Точки разрыва функции. Непрерывность основных элементарных функций. Свойства функции непрерывных на отрезке.

2. 2. 2. Методические указания по его изучению.

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение задач **Примера 5** и задач 43, 46, 48, 67, 78, 108 из [4].

Пример 5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+x-15}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+6}{3x^3+12x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$; *г*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arcsin\,2x}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+5}\right)^{6x-1}$.

а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+x-15}$.

Решение. При $x=-3$ числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, обращаются в нуль, то есть имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Для ее устранения разложим числитель и знаменатель дроби на произведение линейных множителей и сократим дробь:

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{2x^2+x-15}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(2x-5)}=\lim_{x\to-3}\frac{x-1}{2x-5}=\frac{4}{11}.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+6}{3x^3+12x-1}$.

Решение. При стремлении x к бесконечности получаем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.Для устранения подобной неопределенности дробной рацио-

нальной функции следует числитель и знаменатель дроби разделить на x^n, где n – наивысшая степень многочленов числителя и знаменателя дроби.

Деля числитель и знаменатель данной дроби на x^3 и применяя теоремы о пределах и свойства бесконечно малых функций, имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+6}{3x^3+12x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}}{3+\frac{12}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{0-0+0}{3+0-0}=0.$$

в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$.

Решение. При $x = -3$ получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель дроби на выражения, им сопряженные, то есть на произведение $\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)$.

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{\left(x^2+7-7+3x\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(x+3-x^2+9\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x(x+3)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{(x+3)(4-x)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{(4-x)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=0.$$

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arcsin2x}{x}$.

Решение. *Пусть arcsin2x = y.* Тогда $2x = siny$, $y \to 0$ при $x \to 0$.

Тогда $$\lim_{x\to0}\frac{arcsin2x}{x}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\frac{1}{2}sin\,y}=2\cdot\lim_{y\to0}\frac{1}{\frac{sin\,y}{y}}=2\cdot\frac{1}{1}=2.$$

Здесь применялась формула первого замечательного предела

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1 .$$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+5}\right)^{6x-1}$.

Решение. При $x\to\infty$ выражение, стоящее под знаком предела, есть неопределенность вида 1^{∞}. Представим это выражение в виде суммы единицы и бесконечно малой при $x\to\infty$ величины:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+5}\right)^{6x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5-3}{3x+5}\right)^{6x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3x+5}\right)^{6x-1}.$$

Обозначим $\dfrac{-3}{3x+5}=\dfrac{1}{y}$. Отсюда $-3y=3x+5$; $3x=-3y-5$;

$6x-1=2(-3y-5)-1=-6y-11$. Если $x\to\infty$, то $y\to -\infty$.

Таким образом, искомый предел имеет вид:

$$\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-6y-11}=\lim_{y\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-6}\cdot\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-11}=e^{-6}\cdot 1^{-11}=\frac{1}{e^{6}}.$$

Здесь применялась формула второго замечательного предела

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e .$$

2. 2. 3. Вопросы для самоконтроля.

1. Какая величина называется постоянной? переменной?
2. Что называется функцией одной независимой переменной?
3. Что называется областью существования (определения) функции?
4. Назовите способы задания функции.
5. Какая функция называется явной? неявной?
6. Какая функция называется возрастающей? убывающей?
7. Какая функция называется четной? нечетной?
8. Какая функция называется периодической?
9. Какая функция называется элементарной?
10. Какие функции называются основными элементарными функциями?
11. Какая функция называется сложной?
12. Что называется интервалом знакопостоянства функции?
13. Какие функции называются взаимно обратными? Как построить график обратной функции по графику данной функции в системе декартовых координат?
14. Что называется числовой последовательностью?
15. Что называется пределом числовой последовательности?

16. Сформулируйте определение предела функции.

17. Сформулируйте теоремы о пределах функций.

18. Какая функция называется бесконечно малой? бесконечно большой? Какова зависимость между ними?

19. Перечислите свойства бесконечно малых функций.

20. Напишите формулы первого и второго замечательных пределов.

21. Какие логарифмы называются натуральными?

22. Сформулируйте определения односторонних пределов функции в точке.

23. Какая функция называется непрерывной в точке? на интервале?

24. Какая точка называется точкой разрыва первого рода? второго рода?

25. Перечислите свойства непрерывных на отрезке функций.

2. 2. 4. Задания для самостоятельной работы

В задачах 1 – 6 вычислить пределы.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x+4}$. 2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+x-15}$. 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+6}{3x^3+12x-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{3x}$. 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{2x}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x-1}$.

2. 3. Модуль 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

2. 3. 1. Содержание модуля.

Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной. Ее геометрический и механический смысл. Правила дифференцирования функций. Производные основных элементарных функций. Производная сложной и обратной функции. Производные высших порядков.

Дифференциал функции, его геометрический смысл. Инвариантность формы дифференциала. Дифференцирование функций, заданных параметриче ски. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

Правило Лопиталя.Точки экстремума функции. Теорема Ферма. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

2. 3. 2. Методические указания по его изучению.

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение задач **Примеров 6, 7** и задач 120, 124, 133, 138 из [4].

Для справок приведем правила и формулы дифференцирования основных элементарных функций.

1. $(u+v)' = u'+v'$. 2. $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$.

3. $(C\cdot u)' = C\cdot u'$. $C - const$. 4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$.

5. Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

6. $C' = 0$

7. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$.

8. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.

9. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.

10. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$.

11. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$.

12. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$.

13. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$.

14. $\left(tgu\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$.

15. $\left(ctgu\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

16. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

17. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

18. $\left(arctgu\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

19. $\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Если $u = x$, то $u' = 1$.

Пример 6. Найти производные данных функций:

а) $y = e^{\sin^3 x}$; б) $y = \left(3^{arctg\sqrt{x}} + 2\right)^4$. *в)* $y = (x+4)^{\sin x}$;

г) $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$; *д)* $y = (\cos 2x)^{tg\,2x}$.

а) $y = e^{\sin^3 x}$.

Решение. Применяем правило дифференцирования сложной функции и табличные формулы:

$$y' = e^{\sin^3 x} \cdot \left(\sin^3 x\right)' = e^{\sin^3 x} \cdot 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3e^{\sin^3 x} \cdot \sin^2 x \cdot \cos x.$$

б) $y = \left(3^{arctg\sqrt{x}} + 2\right)^4$.

Решение. Последовательно применяем правило дифференцирования сложной функции:

$$y' = 4\left(3^{arctg\sqrt{x}} + 2\right)^3 \cdot \left(3^{arctg\sqrt{x}} + 2\right)' =$$

$$= 4\left(3^{arctg\sqrt{x}} + 2\right)^3 \cdot 3^{arctg\sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot \left(arctg\sqrt{x}\right)' =$$

$$= 4\left(3^{arctg\sqrt{x}} + 2\right)^3 \cdot 3^{arctg\sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= \frac{2\left(3^{arctg\sqrt{x}} + 2\right)^3 \cdot 3^{arctg\sqrt{x}} \cdot \ln 3}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

в) $y=(x+4)^{sin\,x}$.

Решение . Логарифмируем данную функцию: $ln\,y=sin\,x\cdot ln(x+4)$.

Дифференцируем обе части последнего равенства:

$$\frac{y'}{y}=cos\,x\cdot ln(x+4)+\frac{sin\,x}{x+4}.$$

Отсюда

$$y'=y\cdot\left[cos\,x\cdot ln(x+4)+\frac{sin\,x}{x+4}\right]=(x+4)^{sin\,x}\cdot\left[cos\,x\cdot ln(x+4)+\frac{sin\,x}{x+4}\right].$$

г) $x^3+ln\,y-x^2e^y=0$.

Решение . Данная функция задана в неявной форме. Дифференцируя по x обе части уравнения, имеем

$$3x^2+\frac{y'}{y}-2xe^y-x^2e^y\,y'=0.$$

Отсюда

$$y'\left(\frac{1}{y}-x^2e^y\right)=2xe^y-3x^2;\qquad y'=\frac{\left(2xe^y-3x^2\right)y}{1-x^2ye^y}.$$

д) $y=(cos\,2x)^{tg\,2x}$.

Решение . Прологарифмируем по основанию e обе части данного равенства:

$$ln\,y=tg2x\cdot ln\,cos\,2x.$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по переменной x, считая здесь y функцией от x :

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{2}{cos^2\,2x}ln\,cos\,2x+tg2x\cdot\frac{-2\,sin\,2x}{cos\,2x},$$

$\frac{y'}{y}=\frac{2}{cos^2\,2x}\left(ln\,cos\,2x-sin^2\,2x\right)$, откуда

$$y'=\frac{2}{cos^2\,2x}(cos\,2x)^{tg2x}\left(ln\,cos\,2x-sin^2\,2x\right).$$

Пример 7. Найти дифференциал функции $y=sin^3\,5x$.

Решение. . *Дифференциалом dy* функции $y=f(x)$ в точке x называется главная, линейная относительно Δx часть $y'\Delta x$ приращения Δy функции, то есть $dy=y'\cdot\Delta x$.Так как $dx=\Delta x$, то $dy=y'\cdot dx$

Исходя из определения дифференциала, имеем:

$$dy=y'\cdot dx=\left(sin^3\,5x\right)'\cdot dx=3\,sin^2\,5x\cdot cos\,5x\cdot 5\cdot dx=15\,sin^2\,5x\cdot cos\,5x\cdot dx.$$

2. 3. 3. Вопросы для самоконтроля.

1. Что называется производной функции?
2. Каков геометрический, физический смысл производной?
3. Какая функция называется дифференцируемой в точке? на интервале?
4. Как взаимосвязаны непрерывность и дифференцируемость функции в точке?
5. Напишите правила дифференцирования функций.
6. Напишите формулы дифференцирования основных элементарных функций.
7. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.
8. Сформулируйте определение дифференциала функции.
9. Перечислите свойства дифференциала функции.
10. Каков геометрический смысл дифференциала функции?

2. 3. 4. Задания для самостоятельной работы

В задачах 1 – 3 найти производные указанных функций.

1. $y = x^4 + \frac{1}{x^3} - \sqrt[5]{x} + 4$. 2. $y = e^{sin^3 x}$. 3. $y = \left(3^{arctg\sqrt{x}} + 2\right)^4$.

4. Найти дифференциал функции $y = sin^3 5x$.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{sin 3x}$, используя правило Лопиталя.

2. 4. Модуль 4. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций.

2. 4. 1. Содержание модуля.

Условия монотонности функций. Экстремумы функции, необходимое условие. Достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

Исследование выпуклости графика функции. Точки перегиба. **А**симптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения ее графика. Уравнение касательной к кривой в данной точке.

2. 4. 2. Методические указания по его изучению.

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение задач 194, 209, 213, 229, 244 из [4].

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение **Примеров 8 – 10** и задач 194, 209, 213, 229, 244 из [4].

Пример 8. Напишите уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 + 1$ в точке с абсциссой $x_o = 2$.

Решение. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_o(x_o; y_o)$ имеет вид

$$\boldsymbol{y - y_o = y'(x_o)(x - x_o)}. \qquad (1)$$

Нормаль (прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной) определяется уравнением

$$\boldsymbol{y - y_o = -\frac{1}{y'(x_o)}(x - x_o)}. \qquad (2)$$

Определим ординату y_O точки касания:

$$y_O = 2^2 + 1 = 5.$$

Найдем значение производной функции в точке касания:

$$y' = 2x; \qquad y'(x_O) = 4.$$

По формуле (1) находим уравнение касательной:

$$y - 5 = 4(x - 2); \qquad 4x - y - 3 = 0.$$

Используя формулу (2), находим уравнение нормали:

$$y - 5 = -\frac{1}{4}(x - 2); \qquad x + 4y - 22 = 0.$$

Пример 9. Исследовать функцию $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение. Исследование функции и построение ее графика проведем по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функции на непрерывность.
3. Исследовать функцию на четность, нечетность.
4. Найти интервалы возрастания и убывания функции и точки ее экстремума.
5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки его перегиба.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Используя результаты пунктов 1 – 6 построить график функции. Для уточнения вида кривой можно найти дополнительные точки графика (например, точки его пересечения с осями координат).

Реализуем указанную схему.

1. Функция определена при всех значениях аргумента x, кроме $x = 1$.

2. Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на своей области определения, то есть на интервалах $(-\infty; 1)$ и $(1; \infty)$. В точке $x = 1$ функция терпит разрыв второго рода.

3. Для установления четности или нечетности функции проверим выполнимость равенств $f(-x) = f(x)$ (тогда $f(x)$ – четная функция) или $f(-x) = -f(x)$ (для нечетной функции) для любых x и $-x$ из области определения функции:

$$f(-x) = \frac{-2x-1}{(-x-1)^2}; \quad -f(x) = -\frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

Следовательно, $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то есть данная функция не является ни четной, ни нечетной (функция общего вида).

4. Для исследования функции на экстремум найдем ее первую производную:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - (2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{x}{(x-1)^3}.$$

$y' = 0$ при $x = 0$ и y' − не существует при $x = 1$. Тем самым имеем две критические точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Но точка $x_2 = 1$ не принадлежит области определения функции, экстремума в ней быть не может.

Разобьем числовую ось на три интервала: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; \infty)$ (рис.1).

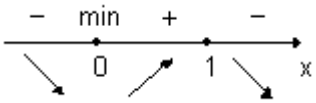

Рис. 1

В первом и третьем интервалах первая производная отрицательна, здесь функция убывает, во втором интервале – положительна и данная функция возрастает. При переходе через точку $x = 0$ первая производная меняет свой знак с минуса на плюс, поэтому в этой точке функция имеет минимум: $y_{min} = y(0) = -1$. Значит $A(0; -1)$ – точка минимума.

На рис. 1 знаками $+$, $-$ указаны интервалы знакопостоянства производной y', а стрелками – возрастание и убывание исследуемой функции.

5. Для определения точек перегиба графика функции и интервалов выпуклости и вогнутости кривой найдем вторую производную:

$$y'' = -\frac{(x-1)^3 - x\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2x+1}{(x-1)^4}.$$

$y'' = 0$ при $x = -\frac{1}{2}$ и y'' − не существует при $x = 1$. Разобьем числовую ось на три интервала: $(-\infty; -0{,}5)$, $(-0{,}5; 1)$, $(1; \infty)$ (рис. 2).

На первом интервале вторая производная отрицательна и дуга кривой выпукла; на втором и третьем интервалах $y'' > 0$, тем самым график является вогнутым.

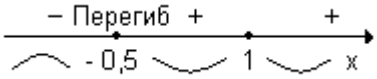

Рис. 2

При переходе через точку $x = -0{,}5$ вторая производная меняет свой знак, поэтому $x = -0{,}5$ − абсцисса точки перегиба.

Следовательно, $B\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$ − точка перегиба графика функции.

6. $x = 1$ − точка разрыва функции, причем $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty$.

Поэтому прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика. Для определения уравнения наклонной асимптоты $y = \kappa x + b$ воспользуемся формулами $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - kx\right]$.

Тогда

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2 x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{(x-1)^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2(x-1)} = 0.$$

При вычислении последнего предела использовалось правило Лопиталя.

Значит, прямая $y = 0$ (ось Ox) есть горизонтальная асимптота графика исследуемой функции, представленного на рис. 3.

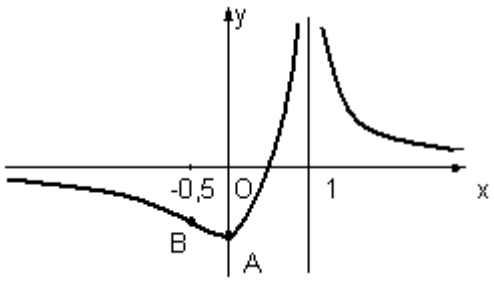

Рис. 3

Пример 10. Сечение оросительного канала имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон пропускная способность канала будет наибольшей?

Решение.

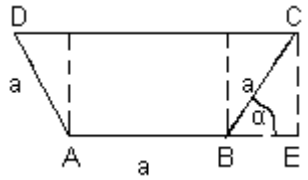

Рис. 4

Пропускная способность канала зависит от площади его поперечного сечения: чем больше площадь трапеции, тем большее количество воды проходит по каналу. Изобразим сечение канала (рис. 4)

Обозначим $AB=BC=AD= a$. Найдем площадь S трапеции $ABCD$:

$$S = \frac{AB + CD}{2} \cdot CE = \frac{a + a + 2a\cos\alpha}{2} \cdot a\sin\alpha = a^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha.$$

По смыслу задачи угол α изменяется от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$. Решение задачи сводится к нахождению наибольшего значения функции $S = S(\alpha)$ на отрезке

$[0;\frac{\pi}{2}]$.

Найдем критические точки функции S, принадлежащие интервалу $(0;\ \frac{\pi}{2})$:

$$S' = a^2\left[-\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)\cos\alpha\right] = a^2\left(-1+\cos^2\alpha+\cos\alpha+\cos^2\alpha\right) =$$

$= a^2\left(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1\right) = 0.$ Отсюда $\cos\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha_2 = -1$ и $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_2 = \pi$.

Найдем значения функции S в точке $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ и на концах отрезка $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$S(\alpha_1) = S\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \approx 1{,}28a^2;\ S(0) = 0;\ S\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2.$$

Итак, площадь сечения канала будет наибольшей, если угол наклона боковой стороны равен 60° (в этом случае верхнее основание трапеции в два раза больше нижнего).

2. 4. 3. Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулируйте теорему Ролля. Каков ее геометрический смысл?
2. Сформулируйте теорему Лагранжа. Каков ее геометрический смысл?
3. Сформулируйте достаточные признаки возрастания и убывания функции.
4. Какие точки называются стационарными точками функции?
5. Какие точки называются критическими точками функции?
6. Дайте определения максимума, минимума функции.
7. Что называется экстремумом функции?
8. Назовите необходимое условие экстремума функции.
9. Назовите достаточные признаки экстремума функции.
10. Какая кривая называется выпуклой? вогнутой?
11. Что называется точкой перегиба кривой?
12. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой?
13. Сформулируйте достаточный признак существования точки перегиба кривой.
14. Что называется асимптотой кривой?
15. Как найти вертикальные асимптоты кривой?
16. Как найти наклонные асимптоты кривой?
17. Назовите схему исследования функции и построения ее графика.
18. В каких случаях применяется правило Лопиталя при вычислении пределов?

2. 4. 4. Задания для самостоятельной работы

1. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$y = x^3 + 3x^2 + 3x$.

2. Исследовать на экстремум функцию $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$

3. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 + \dfrac{9x^2}{2} - 5$.

4. Открытый сверху резервуар с квадратным дном должен вмещать 108 литров воды. Каковы должны быть размеры резервуара, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала?

5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривой $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

6. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{1}{2x^2 + x - 1}$.

7. Исследовать функцию $y = \dfrac{2x - 1}{(x - 1)^2}$ и построить ее график.

2. 6. Модуль 6. Неопределенный интеграл.

Тема 6. 1. Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных интегралов. Интегрирование заменой переменной и по частям.

Тема 6. 2. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

2. 6. 2. Методические указания по его изучению.

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение **Примеров 11 – 13** и задач 304, 307, 330, 345, 357 из [4].

Для справок приведем следующую таблицу основных неопределенных интегралов.

(I) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$.

(II) $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C$.

(III) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\, a} + C$.

(IV) $\int e^x dx = e^x + C$.

(V) $\int sin\, x dx = -cos\, x + C$.

(VI) $\int \cos x dx = \sin x + C$.

(VII) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

(VIII) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

(IX) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

(X) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$.

(XI) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

(XII) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$.

(XIII) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$,

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

Пример 11. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int x^2 e^{x^3+2} dx$; *б*) $\int \sin^2 x \cos x dx$; *в*) $\int \frac{x^5 - 2x^2 + 3}{(x-2)^2} dx$.

а) $\int x^2 e^{x^3+2} dx$.

Решение. Чтобы данный интеграл привести к табличному, положим $x^3 + 2 = t$. Тогда $3x^2 dx = dt$ и $x^2 dx = \frac{1}{3} dt$.

Имеем

$$\int x^2 e^{x^3+2} dx = \int e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3+2} + C.$$

б) $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Решение. Для вычисления интеграла введем подстановку $\sin x = t$. Имеем $\cos x dx = dt$.

Тогда

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

в) $\int \frac{x^5 - 2x^2 + 3}{(x-2)^2} dx$.

Решение. Под знаком интеграла имеем неправильную рациональную дробь (числитель – многочлен пятой степени, знаменатель – второй). Разделив многочлен $P(x)=x^5-2x^2+3$ на $Q(x)=x^2-4x+4$, в частном получим $S(x)=x^3+4x^2+12x+30$ и в остатке $R(x)=72x-117$.

Тогда

$$\frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}=x^3+4x^2+12x+30+\frac{72x-117}{(x-2)^2}.$$

Правильную рациональную дробь $\frac{72x-117}{(x-2)^2}$ представим в виде следующей суммы элементарных дробей:

$$\frac{72x-117}{(x-2)^2}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}.$$

После приведения в последнем равенстве к общему знаменателю получаем тождество

$$72x-117=A_1(x-2)+A_2;\quad 72x-117=A_1x-2A_1+A_2.$$

Имеем $\begin{cases} A_1=72 \\ -2A_1+A_2=-117 \end{cases}$, отсюда $A_1=72$, $A_2=27$.

Следовательно,

$$\frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}=x^3+4x^2+12x+30+\frac{72}{x-2}+\frac{27}{(x-2)^2} \quad \text{и}$$

$$\int\frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}dx=\int\left[x^3+4x^2+12x+30+\frac{72}{x-2}+27(x-2)^{-2}\right]dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+6x^2+30x+72ln|x-2|-\frac{27}{x-2}+C.$$

Пример 12. Вычислить интегралы:

а) $\int\frac{dx}{3x^2+4x-7}$; *б)* $\int\frac{x+3}{2x^2-5x+1}dx$; *в)* $\int\frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$.

а) $\int\frac{dx}{3x^2+4x-7}$.

Решение. Выделяем в знаменателе дроби полный квадрат и применяем формулу (XI).

$$\int\frac{dx}{3x^2+4x-7}=\int\frac{3dx}{9x^2+12x-21}=\int\frac{3dx}{9x^2+12x+4-25}=$$

$$=\int\frac{d(3x+2)}{(3x+2)^2-5^2}=\frac{1}{10}ln\left|\frac{3x+2-5}{3x+2+5}\right|+C=\frac{1}{10}ln\left|\frac{3x-3}{3x+7}\right|+C.$$

б) $\int \frac{x+3}{2x^2-5x+1}dx$.

Решение. Выделим в числителе дроби производную ее знаменателя, то есть выражение $4x-5$, преобразуем дробь, применяем формулы (II) и (XI).

$$\int \frac{x+3}{2x^2-5x+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x-5+17}{2x^2-5x+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+1}dx + \frac{17}{4}\int \frac{dx}{2x^2-5x+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d\left(2x^2-5x+1\right)}{2x^2-5x+1} + \frac{17}{8}\int \frac{dx}{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}ln\left|2x^2-5x+1\right| +$$

$$+\frac{17}{8}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{17}{16}} = \frac{1}{4}ln\left|2x^2-5x+1\right| + \frac{17}{8}\cdot\frac{2}{\sqrt{17}}ln\left|\frac{x-\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}}{x-\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4}ln\left|2x^2-5x+1\right| + \frac{\sqrt{17}}{4}ln\left|\frac{4x-5-\sqrt{17}}{4x-5+\sqrt{17}}\right| + C.$$

в) $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$.

Решение. Выделим в числителе дроби производную трехчлена $1-x-x^2$, то есть $-1-2x$, преобразуем подынтегральную дробь, применяем формулы (I) и (IX).

$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx = -\int \frac{-2x-1+9}{\sqrt{1-x-x^2}}dx = -\int \frac{-2x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx - 9\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} =$$

$$= -\int \left(1-x-x^2\right)^{1/2} d\left(1-x-x^2\right) - 9\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = -2\sqrt{1-x-x^2} -$$

$$-9arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + \text{C} = -2\sqrt{1-x-x^2} - 9arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + \text{C}.$$

Пример 13. Вычислить интегралы:

а) $\int arccos\,x dx$; *б*) $\int x^2 sin\,x dx$.

Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int \boldsymbol{u\cdot dv = uv - \int v\cdot du}.$$

а) $\int arccos\, x dx$.

Решение. Положим $u = àrccosx$; $dv = dx$. Тогда $du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $v = x$.

По формуле интегрирования по частям получаем:

$$\int arccos\, x dx = x\, arccos\, x + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\, arccos\, x - \frac{1}{2}\int \left(1-x^2\right)^{-1/2} d\left(1-x^2\right) =$$

$$= x\, arccos\, x - \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-x^2\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = xarccocx - \sqrt{1-x^2} + C.$$

б) $\int x^2 \sin x dx$.

Решение. Пусть $u = x^2$, $dv = sinxdx$, тогда $du = 2xdx$, $v = \int sin\, x dx = -cos\, x$

По приведенной выше формуле имеем:

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) 2x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx.$$

Последний интеграл вычислим этим же способом, положив
$u = x$, $dv = cosxdx$, откуда $du = dx$, $v = sinx$.
Тогда

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x.$$

Имеем

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

2. 6. 3. Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулируйте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом от данной функции?
3. Каков геометрический смысл неопределенного интеграла?
4. Перечислите свойства неопределенного интеграла.
5. Напишите формулы таблицы основных интегралов.
6. В чем сущность метода замены переменной при вычислении неопределенных интегралов?
7. Напишите формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле.
8. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить при помощи метода интегрирования по частям.
9. Изложите правило разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.
10. Изложите методы интегрирования простейших рациональных дробей.

2. 6. 4. Задания для самостоятельной работы

Вычислить неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{2\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 2. $\int e^x \sqrt{1+e^x} dx$. 3. $\int \frac{3x^2 dx}{x^6-25}$.

4. $\int \frac{dx}{x^2+4x+4}$. 5. $\int \frac{dx}{3x^2+4x-7}$. 6. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$.

7. $\int x^2 \sin x dx$. 8. $\int \ln x dx$. 9. $\int \frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2} dx$

2. 7. Модуль 7. Определенный интеграл.

2. 7. 1. Содержание модуля.

Тема 7. 1.Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов. Методы вычисления определенного интеграла по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.

Тема 7. 2. Приложение определенного интеграла.

2. 7. 2. Методические указания по его изучению.

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение **Примеров 13 – 16** и задач 436, 448, 468, 480, 491, 503 из [4].

Пример 13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 4x, \quad y = x + 4.$$

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения данной параболы и прямой (рис. 5):

$$x^2 + 4x = x + 4, \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = 1.$$

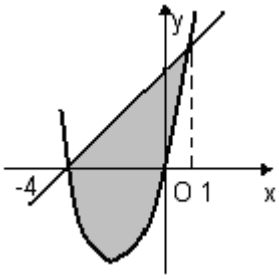

Рис. 5

Имеем

$$S = \int_{-4}^{1} (x + 4 - x^2 - 4x)dx = \int_{-4}^{1} (4 - x^2 - 3x)dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-4}^{1} = 4 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 16 - \frac{64}{3} + 24 = 20\frac{5}{6}.$$

Пример 14. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* одной полуволны синусоиды $y = \sin x$.

Решение. Если криволинейная трапеция ,ограниченная сверху кривой

$y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, вращается вокруг оси Ox, то объем V тела вращения равен

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx.$$

Имеем:

$$V = \pi\int_0^{\pi} sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1 - cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Пример15. Найти площадь поверхности эллипсоида, образованного вращением вокруг оси Ox эллипса $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Решение. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ кривая $y = f(x)$ вращается вокруг оси Ox, то площадь S поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}dx.$$

Из уравнения эллипса находим $y = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$, откуда $y' = \frac{-x}{2\sqrt{4 - x^2}}$. По формуле (1) имеем

$$S = 2\pi\int_{-2}^{2}\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}\cdot\sqrt{1 + \frac{x^2}{4(4 - x^2)}}dx = \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{16 - 3x^2}dx = \pi\int_0^2\sqrt{16 - 3x^2}dx.$$

Для вычисления последнего интеграла применим подстановку $x = \frac{4}{\sqrt{3}}sin t$, откуда $dx = \frac{4}{\sqrt{3}}cos t dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; $t = \frac{\pi}{3}$ при $x = 2$.

Тогда

$$S = \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{16 - 16sin^2 t}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}cos t dt = \frac{16\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}cos^2 t dt = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1 + cos 2t)dt =$$

$$= \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left[t + \frac{1}{2}sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Пример 16. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^3$, $x = 4$.

Решение. Координаты центра тяжести $(x_c; y_c)$ однородной криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, определяются по формулам

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b xydx\ ; \qquad (1) \qquad\qquad y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2dx \qquad (2),$$

где S – площадь криволинейной трапеции.

Данная фигура (рис. 6) симметрична относительно оси Ox.

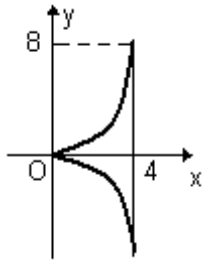

Рис. 6

Ее центр тяжести находится на этой оси, поэтому $y_c = 0$.

Найдем площадь S фигуры:

$$S = 2\int_0^4 \sqrt{x^3}\,dx = \frac{4}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{128}{5}.$$

По формуле (1) имеем

$$x_c = \frac{\int_0^4 x\sqrt{x^3}\,dx}{\frac{128}{5}} = \frac{5}{128}\int_0^4 x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{5}{448}\left[x^{\frac{7}{2}}\right]_0^4 = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}.$$

Итак, точка $C(1\frac{3}{7};0)$ − центр тяжести данной фигуры.

2. 7. 3. Вопросы для самоконтроля.

1. Назовите задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Напишите интегральную сумму для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.
3. Что называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$?
4. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
5. Перечислите свойства определенного интеграла.
6. Чему равна производная от определенного интеграла с переменным верхним пределом интегрирования?
7. Напишите формулу Ньютона – Лейбница.
8. Напишите формулу замены переменной в определенном интеграле.
9. Чему равен интеграл $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, если $y = f(x)$ есть четная функция? нечетная функция?

10. Напишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.

11. Сформулируйте определение несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования.

12. Сформулируйте определение несобственного интеграла от разрывной функции.

13. В каком случае несобственный интеграл называется сходящимся? расходящимся?

14. Как вычисляется площадь плоской фигуры в прямоугольной системе координат с помощью определенного интеграла?

15. Напишите формулы для вычисления объемов тел, образованных вращением плоской фигуры вокруг оси Ox ; оси Oy.

2. 7. 4. Задания для самостоятельной работы

Вычислить определенные интегралы.

1. $\int\limits_{2}^{3} 3x^2 dx$. 2. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$. 3. $\int\limits_{-1}^{1} \left(x\cos x - \sqrt[3]{x} + 3x^2\right)dx$

4. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$. 5. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2+2x-8}$. 6. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

2. 8. Модуль 8. Функции многих независимых переменных.

2. 8. 1. Содержание модуля.

Тема 8. 1. Функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции. Непрерывность. Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Неявные функции. Теоремы существования. Дифференцирование неявных функций.

Тема 8. 2. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия. Метод наименьших квадратов. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Примеры применений при поиске оптимальных решений.

2. 8. 2. Методические указания по его изучению.

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение **Примера 17** и задач 561, 566, 571, 613, 614 из [4].

Пример 17. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 6x - 2x^2 + y^3 + 9xy - 42.$$

Решение. Применим достаточный признак экстремума функции двух независимых переменных, состоящий в следующем.

Пусть $P_0(x_0, y_0)$ - критическая точка функции $z = f(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные первого и второго порядков.
Обозначим $[z''_{xx}]_{P_0} = A$, $[z''_{xy}]_{P_0} = B$, $[z''_{yy}]_{P_0} = C$ и составим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Если $\Delta > 0$, то P_0 есть точка экстремума, причем при $A > 0$ – минимума, при $A < 0$ – максимума.

Если $\Delta < 0$, в точке P_0 экстремума нет.

При $\Delta = 0$ – требуется дополнительное исследование.

Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, каждую из них приравняем к нулю и решаем полученную систему уравнений:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6 - 4x + 9y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 9x.$$

Решение системы уравнений $\begin{cases} 6 - 4x + 9y = 0 \\ 3y^2 + 9x = 0 \end{cases}$ дает $x_1 = -12$, $y_1 = -6$, $x_2 = -\frac{3}{16}$, $y_2 = -\frac{3}{4}$.

Следовательно, данная функция имеет две критические точки:

$P_1(-12, -6)$, $P_2\left(-\frac{3}{16}, -\frac{3}{4}\right)$.

Найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = -4, \quad z''_{xy} = 9, \quad z''_{yy} = 6y.$$

Для точки P_1 имеем $A = -4$, $B = 9$, $C = -36$, $\Delta = 63$. Так $\Delta > 0$ и $A < 0$, то в точке $P_1(-12, -6)$ данная функция имеет максимум: $z_{max} = z(-12, -6) = 30$.

Для точки P_2 имеем $A = -4$, $B = 9$, $C = -4{,}5$, $\Delta = -63$. Так как $\Delta < 0$, то в этой точке экстремума нет.

2. 8. 3. Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулируйте определение функции двух, трех и большего числа независимых переменных.
2. Что называется областью определения функции двух независимых переменных?
3. Каково геометрическое изображение функции двух переменных?
4. Сформулируйте определение предела функции двух переменных.
5. Что называется частным и полным приращениями функции двух переменных?
6. Какая функция двух переменных называется непрерывной в точке? в области?

7. Сформулируйте определение частных производных первого порядка функции двух независимых переменных. Каков их геометрический смысл?

8. Что называется полным дифференциалом функции двух переменных?

9. Как найти частные производные второго порядка функции двух переменных?

10. Что называется экстремумом функции двух независимых переменных?

11. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции двух переменных.

12. Сформулируйте достаточный признак экстремума функции двух переменных.

2. 8. 4. Задания для самостоятельной работы

В задачах 1 – 4 найти частные производные первого порядка указанных функций:

1. $z = e^{x^2 - y^3}$. 2. $z = xe^{-xy}$. 3. $z = x^2 \ln y + 5x - arctg\, y$.

4. $z = arctg \dfrac{y}{x}$.

В задачах 5 – 7 найти частные производные второго порядка указанных функций.

5. $z = \dfrac{x^2}{1 - 2y}$. 6. $z = ln\left(x^2 + y\right)$. 7. $z = sin^2(ax + by)$.

В задачах 8 – 10 исследовать на экстремум следующие функции:

8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

9. $z = x^2 + y^2 + 9x - 6y - xy + 20$.

10. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

2. 9. Модуль 9. Кратные и криволинейные интегралы.

2. 9. 1. Содержание модуля.

Тема 9. 1.Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла (в частности, задача о вычислении объема цилиндрического тела). Двойной интеграл; его определение. Формулировка теоремы о существовании двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Теорема о среднем значении.

Вычисление двойного интеграла по прямоугольной и произвольной областям сведением к повторному интегралу. Перемена порядка интегрирования в повторном интеграле. Переход в двойном интеграле к полярным координатам.

Геометрические и физические приложения двойного интеграла: вычисление объемов тел и площадей, массы плоских фигур, моментов инерции и статистических моментов, координат центра тяжести плоских фигур.

Тема 9. 2. Понятие о тройном интеграле. Задача о вычислении работы переменной силы. Определение криволинейного интеграла по координатам. Его

простейшие свойства. Вычисление криволинейного интеграла путем сведения его к определенному интегралу. Криволинейный интеграл по дуге. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования (плоский случай). Нахождение функции двух переменных по ее полному дифференциалу. Интеграл по поверхности. Понятие о потоке векторного поля. Дивергенция. Формула Остроградского-Гаусса.

2. 9. 2. Методические указания по его изучению.

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение **Примеров 18 – 20** и задач 777, 781, 790, 801, 816, 836 из [4].

Пример 18. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1, x=2, y=\frac{1}{x}, y=x$.

Решение. Изобразим область интегрирования D (рис.7).

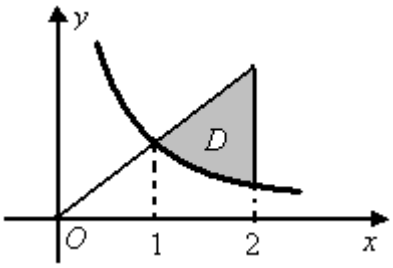

Рис. 7

Она ограничена снизу гиперболой $y=\frac{1}{x}$, сверху прямой $y = x$, справа – прямой $x = 2$.

Для любой точки этой области $1 \le x \le 2$, а ординаты y этих точек изменяются от $y=\frac{1}{x}$ до $y = x$.

Поэтому

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=\int\limits_1^2 x^2\left[\frac{y^{-1}}{-1}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}dx=-\int\limits_1^2 x^2\left[\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}dx=$$

$$=-\int\limits_1^2 x^2\left(\frac{1}{x}-x\right)dx=-\int\limits_1^2\left(x-x^3\right)dx=-\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_1^2=-\left(2-4-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=2\frac{1}{4}.$$

Пример 19. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, где область D ограничена окружностью $x^2+y^2=1$.

Решение. Запишем уравнение данной окружности в полярной системе координат. Так как $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, то $r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=1$, $r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=1$, $r^2=1$, $r=1$.

Для данной области D угол φ меняется от 0 до 2π, а полярный радиус r изменяется от 0 до 1. Тогда

$$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 re^{r^2}dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(e-1)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}(e-1)\cdot 2\pi = \pi(e-1).$$

Пример 20. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x - 1$ и прямой $y = x - 1$ (рис.8).

Решение.

Пусть областью D плоскости xOy является материальная пластинка, масса которой распределяется с поверхностной плотностью $\rho = f(x,y)$. Тогда масса M этой пластинки вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{M = \iint_D f(x,y)dxdy} \qquad (1)$$

Координаты точки $C(x_c, y_c)$, являющейся центром тяжести этой пластинки, определяются по формулам

$$\boldsymbol{x_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D f(x,y)xdxdy}{M}}, \qquad \boldsymbol{y_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D f(x,y)ydxdy}{M}}. \qquad (2)$$

Если поверхностная плотность ρ постоянна (пластинка однородна), то из формул (2) следует:

$$\boldsymbol{x_c = \frac{\iint_D xdxdy}{S}}, \quad \boldsymbol{y_c = \frac{\iint_D ydxdy}{S}}, \qquad (3)$$

где S – площадь области D.

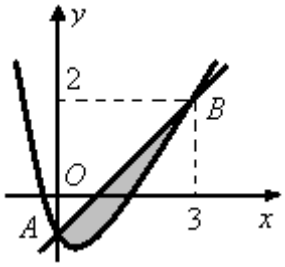

Рис. 8

Вычислим площадь S данной фигуры с помощью двойного интеграла: $S = \iint_D dxdy$.

Парабола и прямая пересекаются в точках $A(0, -1)$ и $B(3,2)$.Область D определятся неравенствами $0 \le x \le 3$, $x^2 - 2x - 1 \le y \le x - 1$.

Тогда

$$S = \int_0^3 dx \int_{x^2-2x-1}^{x-1} dy = \int_0^3 (x - 1 - x^2 + 2x + 1)dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 4{,}5.$$

Вычислим статические моменты M_x и M_y пластинки относительно осей Ox и Oy:

$$M_x = \iint\limits_D ydxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-2x-1}^{x-1} ydy = \int\limits_0^3 dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2-2x-1}^{x-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \left(4x^3 - x^4 - x^2 - 6x - 2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^4 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 - 2x\right]_0^3 = -4\frac{13}{15}.$$

$$M_y = \iint\limits_D xdxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-2x-1}^{x-1} xdy = \int\limits_0^3 xdx[y]_{x^2-2x-1}^{x-1} = \int\limits_0^3 \left(-x^3 + 3x^2\right)dx = 6{,}75$$

Следовательно, $x_c = \frac{6{,}75}{4{,}5} = 1{,}5$, $y_c = -\frac{4\frac{13}{15}}{4{,}5} = -1\frac{11}{135}$ и точка $C\left(1\frac{1}{2}, -1\frac{11}{135}\right)$– центр тяжести данной фигуры.

2. 9. 3. Вопросы для самоконтроля.

1. Что называется двойным интегралом от функции двух переменных по данной области?
2. Дайте геометрическое толкование двойного интеграла.
3. Перечислите свойства двойного интеграла.
4. Укажите способы вычисления двойного интеграла в прямоугольной системе координат.
5. Как вычисляется двойной интеграл в полярной системе координат?
6. Напишите формулы для вычисления координат центра тяжести плоских фигур с помощью двойного интеграла.
7. Дайте определение тройного интеграла.
8. Как вычисляется тройной интеграл в прямоугольной системе координат?
9. Как вычисляется тройной интеграл в цилиндрической системе координат?
10. Напишите формулы для вычисления координат центра тяжести тела с помощью тройного интеграла.
11. Что называется криволинейным интегралом по координатам?
12. Перечислите свойства криволинейного интеграла.
13. Укажите способы вычисления криволинейного интеграла.

14. Напишите формулу Грина.

15. Сформулируйте условия независимости криволинейного интеграла по координатам от пути интегрирования.

16. Изложите способ нахождения функции двух переменных по ее полному дифференциалу.

2. 9. 4. Задания для самостоятельной работы.

1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x^2 + y^2 + 2)dxdy$, если область D есть прямоугольник, ограниченный прямыми *x=2, x=4, y=0, y=3.*

Ответ: 86.

В задачах 2, 3 вычислить двойные интегралы.

2. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 (12 - 4x - 3y)dy$. 3. $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$.

4. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интграл $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy$, где область D ограничена прямыми $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ и дугой окружности $x^2 + y^2 = 4$, лежащей в первой четверти.

5. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - 3x^2$ и осью Ox.

2. 10. Модуль 10. Дифференциальные уравнения первого порядка.

2. 10. 1. Содержание модуля.

Тема 10. 1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Понятие об общем и частном решении. Интегральные кривые. Начальные условия

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения; линейные дифференциальные уравнения.

Формулировка теоремы о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка. Понятие об особом решении.

Дифференциальное уравнение семейства плоских кривых, зависящих от одного параметра. Задача об ортогональных траекториях. Поле направлений дифференциального уравнения. Изоклины. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка (способ Эйлера).

2. 10. 2. Методические указания по его изучению.

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение **Примера 21** и задач 636, 658, 667, 673 из [4].

Пример 21. Решить уравнение $y'x\ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $x\ln x$:

$y' - \dfrac{y}{x\,ln\,x} = 3x^2\,ln\,x$, убеждаемся, что оно – линейное. Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$ и уравнение преобразуется к виду

$u'v + uv' - \dfrac{uv}{x\,ln\,x} = 3x^2\,ln\,x$ или $u'v + u\left(v' - \dfrac{v}{x\,ln\,x}\right) = 3x^2\,ln\,x$.

Так как искомая функция представима в виде произведения двух вспомогательных функций u и v, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем в качестве v какой-либо частный интеграл уравнения

$$v' - \frac{v}{x\,ln\,x} = 0. \qquad (1)$$

Тогда для отыскания функции u имеем уравнение

$$u'v = 3x^2\,ln\,x. \qquad (2)$$

Получаем два уравнения с разделяющимися переменными.

Решаем первое уравнение:

$\dfrac{dv}{v} - \dfrac{dx}{x\,ln\,x} = 0$, $\int\dfrac{dv}{v} - \int\dfrac{d(ln\,x)}{ln\,x} = 0$, $ln|v| - ln|ln\,x| = 0$, $ln\left|\dfrac{v}{ln\,x}\right| = 0$, $\dfrac{v}{ln\,x} = 1$, $v = ln\,x$.

Подставим $v = ln\,x$ в уравнение (2) и решим его:

$$u'\,ln\,x = 3x^2\,ln\,x,\ \frac{du}{dx} = 3x^2,\ \int du = \int 3x^2 dx + C,\ u = x^3 + C.$$

Следовательно, $y = (x^3 + C)\,ln\,x$ - общее решение данного уравнения.

2. 10. 3. Вопросы для самоконтроля.

1. Что называется дифференциальным уравнением?
2. Что называется порядком дифференциального уравнения?
3. Что называется общим решением дифференциального уравнения первого порядка?
4. Что называется частным решением дифференциального уравнения
5. Каков геометрический смысл частного решения дифференциального уравнения первого порядка?
6. Приведите примеры дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.
7. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным? уравнением Бернулли? Укажите способ их решения.

2. 10. 4. Задания для самостоятельной работы.

В задачах 1 – 3 найти общие интегралы следующих уравнений.

1. $\left(1 + y^2\right)dx + y\left(1 + x^2\right)dy = 0$. 2. $xyy' = 1 - x^2$.

3. $y'\,cos\,x - (y + 1)\,sin\,x = 0$.

В задачах 4, 5 найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

4. $xy' + y = x + 1; \quad y(2) = 3.$ 5. $y' - ytgx = \dfrac{1}{cos\,x}; \quad y(0) = 0.$

2. 11. Модуль 11. Дифференциальные уравнения высших порядков.

2. 11. 1. Содержание модуля.

Тема 11. 1. Понятие о дифференциальных уравнениях высших порядков, Общее и частное решения. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Свойства их решений. Линейно-независимые решения. Структура общего решения.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Запись общего решения в зависимости от корней характеристического уравнения.

Тема 11. 2. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Теорема наложения. Метод вариации произвольных постоянных. Отыскание частных решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае специальных правых частей уравнения (многочлен, Ae^{kx}, $Acosnx+Bsinnx$,).

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами высших порядков. Системы линейных дифференциальных уравнений постоянными коэффициентами, простейшие приемы решения.

2. 11. 2. Методические указания по его изучению.

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение **Примеров 22 – 24** и задач 702, 703, 714, 716 из [4].

Пример 22. Найти частное решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 6, y'(0) = 10$.

Решение. Для нахождения общего решения данного однородного уравнения составляем характеристическое уравнение $\kappa^2 - 4\kappa + 3 = 0$, имеющее корнями числа $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 3$.

Общим решением данного уравнения является функция

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Используя начальные условия, определяем значения постоянных C_1 и C_2. Подставляя в общее решение заданные значения $x = 0, y = 6$ (первое начальное условие), получим $6 = C_1 + C_2$.

Дифференцируя общее решение уравнения, имеем $y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$ и подставляя в полученное выражение $x = 0, y = 10$ (второе начальное условие), получаем второе уравнение с неизвестными C_1 и C_2:

$10 = C_1 + 3C_2$.

Решая полученную систему уравнений

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6 \\ C_1 + 3C_2 = 10 \end{cases}$, находим $C_1 = 4,\ C_2 = 2$.

Подставляя значения $C_1 = 4$ и $C_2 = 2$ в общее решение уравнения, получим искомое частное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y = 4e^x + 2e^{3x}$.

Пример 23. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 6x^2$.

Решение. Находим общее решение однородного уравнения $y'' + y' - 2y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 + k - 2 = 0$ имеет корни $k_1 = -2$, $k_2 = 1$. Тогда $y_{одн} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$.

Найдем частное решение $\bar{y}$ данного неоднородного уравнения. Его правая часть есть функция $f(x) = 6x^2$. Так число 0 не является корнем характеристического уравнения, $\bar{y}$ есть многочлен второй степени, то есть $\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$. Отсюда находим $\bar{y}' = 2Ax + B$, $\bar{y}'' = 2A$ и, подставляя $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в данное уравнение, получаем тождество

$$2A + 2Ax + B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C \equiv 6x^2 \text{ или}$$

$$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + 2A + B - 2C \equiv 6x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства (только при этом условии оно будет тождеством) получаем систему уравнений

$\begin{cases} -2A = 6 \\ 2A - 2B = 0 \\ 2A + B - 2C = 0 \end{cases}$, из которой находим $A = -3$, $B = -3$, $C = -4{,}5$.

Следовательно, $\bar{y} = -3x^2 - 3x - 4{,}5$ и искомым общим решением дан ного неоднородного уравнения является

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 3x^2 - 3x - 4{,}5.$$

Пример 24. Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = 9e^{-2x} + 2x - 4$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет равные корни $k_1 = k_2 = 1$, поэтому $y_{одн} = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Правая часть данного уравнения есть сумма показательной функции $9e^{-2x}$ и многочлена первой степени $2x - 4$. Так числа -2 и 0 не являются корнями характеристического уравнения, то $\bar{y} = Ae^{-2x} + Bx + C$.

Подставляя $\bar{y}$, $\bar{y}' = -2Ae^{-2x} + B$, $\bar{y}'' = 4Ae^{-2x}$ в данное уравнение, имеем:

$$4Ae^{-2x} + 4Ae^{-2x} - 2B + Ae^{-2x} + Bx + C \equiv 9e^{-2x} + 2x - 4.$$

Приравнивая коэффициенты подобных членов обеих частей этого тождества, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 9A = 9 \\ B = 2 \\ -2B + C = -4 \end{cases}$$, откуда $A = 1$, $B = 2$, $C = 0$.

Следовательно, $\bar{y} = e^{-2x} + 2x$ и общим решением данного уравнения является функция $y = C_1e^x + C_2xe^x + e^{-2x} + 2x$.

Используя начальные условия, определим значения постоянных C_1 и C_2. Так как $y(0) = 1$, то $C_1+1=1$, $C_1=0$.

Находим производную $y' = C_1e^x + C_2e^x + C_2xe^x - 2e^{-2x} + 2$.

Тогда $C_1 + C_2 - 2 + 2 = 1$, $C_1 + C_2 = 1$, $C_2 = 1$.

Итак, $y = xe^x + e^{-2x} + 2x$ − искомое частное решение.

2. 11. 3. Вопросы для самоконтроля.

1. Какое уравнение называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка?
2. Какое уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка?
3. Какое уравнение называется характеристическим для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка?
4. Какой вид имеет общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка в зависимости от дискриминанта характеристического уравнения?
5. Как найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
6. Какой вид имеет частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если его правая часть есть многочлен? показательная функция? тригонометрическая функция? комбинация этих функций?
7. Назовите способ решения линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами порядка выше второго.

2. 11. 4. Задания для самостоятельной работы.

В задачах 1 – 3 найти общее решение данных уравнений:

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$. 2. $y'' + 4y' + 4y = 0$. 3. $y'' - 3y' - 4y = 0$.

В задачах 4 – 6 найти общее решение данных уравнений.

4. $y'' - y' - 6y = 12x^2 - 2x + 1$.

5. $y'' - 7y' + 10y = 4e^{3x}$.

6. $y'' + 9y = 12cos3x + 18sin3x$.

2. 11. 2. Методические указания по его изучению.

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение задач 702, 703, 714, 716 из [4].

2. 12. Модуль 12. Числовые и функциональные ряды.

2. 12. 1. Содержание модуля.

Тема 12. 1.Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Ряды с комплексными членами, методы исследования на сходимость.

Тема 12. 2. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Свойства степенных рядов.

Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям.

Тема 12. 3. Тригонометрическая система функций. Ряд Фурье. Разложение функции в ряд Фурье. Формулировка условий разложимости в случае равномерной сходимости. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье, его свойства и применение.

2. 12. 2. Методические указания по его изучению.

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение **Примеров 25 – 29** и 869, 872, 874, 899, 911, 943, 950 из [4].

Пример 25. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Решение. Применим признак Даламбера.

Если в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует предел при $n \to \infty$ отношения последующего члена ряда к предыдущему, то есть $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то при $q < 1$ ряд сходится, при $q > 1$ - расходится. При $q = 1$ требуется дополнительное исследование (применение других признаков сходимости).

В задаче $u_n = \frac{n^2}{2^n}$; $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$;

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n (n+1)^2}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Так $q = \frac{1}{2} < 1$, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 26. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n5^n}$.

Решение. Члены данного знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине: $\frac{1}{5}>\frac{1}{2\cdot 5^2}>\frac{1}{3\cdot 5^3}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n5^n}=0$.

По признаку Лейбница ряд сходится.

Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, также сходится по признаку Даламбера:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 5^n}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5(n+1)}=\frac{1}{5}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

Пример 27 . Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^n+5^n}$.

Решение. Находим радиус сходимости данного степенного ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\left(3^{n+1}+5^{n+1}\right)}{\left(3^n+5^n\right)2^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1\right]}{5^n\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{n}+1\right]}=\frac{5}{2}.$$

Следовательно, $\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ – интервал сходимости данного ряда.

Исследуем границы найденного интервала.

При $x=\frac{5}{2}$ получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n+5^n}$. Так как

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{3^n+5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{5^n\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right]}=1$, то для этого ряда не выполняется необходимый признак сходимости, поэтому он расходится.

При $x=-\frac{5}{2}$ получаем числовой расходящийся знакочередующийся ряд (для него не выполняется признак Лейбница).

Следовательно, областью сходимости данного ряда является открытый интервал $\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$.

Пример 28. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T=2\pi$ функцию

$$f(x)=\begin{cases}\pi & при \quad -\pi\le x\le 0\\ \pi-x & при \quad 0<x\le\pi\end{cases}.$$

Решение. *Рядом Фурье* для функции $f(x)$ (периодической с периодом 2π) называется тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \qquad (1)$$

коэффициенты которого (*коэффициенты Фурье*) находятся по следующим формулам:

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx},\ n=0,1,2,..., \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx}\ ,\ \ n=1,2,3,... \qquad (3)$$

Данная функция удовлетворяет условиям теоремы о разложимости в ряд Фурье. Вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\pi dx+\int_{0}^{\pi}(\pi-x)dx\right]=\frac{1}{\pi}\left\{[\pi x]_{-\pi}^{0}-\left[\frac{(\pi-x)^2}{2}\right]_0^{\pi}\right\}=\frac{1}{\pi}\left(\pi^2+\frac{\pi^2}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\pi\cos nx dx+\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos nx dx\right]=\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos nx dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos nx dx.$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям.

Пусть $u=\pi-x$, $dv=\cos nx dx$. Тогда $du=-dx$, $v=\frac{\sin nx}{n}$.

Имеем $a_n=\frac{1}{\pi}\left\{\left[(\pi-x)\cdot\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right\}=-\frac{1}{n^2\pi}\left[\cos nx\right]_0^{\pi}=$

$$= \frac{1}{n^2\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2}{n^2\pi}\sin^2\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \frac{2}{n^2\pi} & при\ n-нечетном \\ 0 & при\ n-четном \end{cases}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\pi\sin nx dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\sin nx dx\right] = -\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\sin nx dx =$$

$$= -\frac{1}{n}(1-\cos n\pi) + \frac{1}{\pi}\left[(x-\pi)\frac{\cos nx}{n} - \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n}(1-\cos n\pi) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\cos n\pi =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{n} & при\ n-нечетном \\ \frac{1}{n} & при\ n-четном \end{cases}.$$

Итак, разложение данной функции в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \left(-\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right).$$

Пример 29. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 0\ при -2 \le x < 0 \\ x\ при\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$, периодическую с периодом $T = 4$.

Решение. Если функция $f(x)$ - периодическая с периодом $T = 2l$, то коэффициенты ряда Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{4}$$

определяются по формулам:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx}; \tag{5}$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx}. \tag{6}$$

По формулам (5) и (6) находим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{2} x dx\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right] = \frac{1}{2}\left[x\cdot\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n^2\pi^2}{4}}\right] =$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}(cos\,\pi x-1)=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi^2} & при\ n\ нечетном\\ 0 & при\ n\ четном\end{cases}.$$

$$b_n=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}0\cdot sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_{0}^{2}x\,sin\frac{n\pi x}{2}dx\right]=\frac{1}{2}\left[-x\cdot\frac{cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}+\frac{sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n^2\pi^2}{2}}\right]_0^2=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}cos\,n\pi$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу (4), получим следующее разложение данной функции в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left(cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^2}cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}cos\frac{5\pi x}{2}+...\right)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}sin\frac{3\pi x}{2}-\frac{1}{4}sin\frac{4\pi x}{2}+...\right).$$

2. 12. 3. Вопросы для самоконтроля.

1. Что называется числовым рядом?
2. Что называется n – ой частичной суммой числового ряда?
3. Что называется суммой числового ряда?
4. В чем состоит необходимый признак сходимости числового ряда?
5. Сформулируйте достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами, основанные на сравнении рядов.
6. Сформулируйте признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами.
7. В чем заключается интегральный признак Коши сходимости рядов с положительными членами?
8. Какой ряд называется гармоническим? Выполняется ли для него необходимый признак сходимости? Сходится ли гармонический ряд?
9. Какой ряд называется знакочередующимся?
10. Сформулируйте признак Лейбница о сходимости знакочередующегося ряда.
11. Сформулируйте правило оценки остатка знакочередующегося ряда.
12. Какой ряд называется абсолютно сходящимся?
13. Какой ряд называется условно сходящимся?
14. Назовите свойства абсолютно сходящихся рядов.
15. Какой ряд называется функциональным?
16. Что называется областью сходимости функционального ряда?
17. Какой ряд называется степенным?
18. Сформулируйте теорему Абеля о сходимости степенного ряда.

19. Как найти область сходимости степенного ряда?

20. Сформулируйте теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании степенных рядов.

21. Какой степенной ряд называется рядом Тейлора данной функции.

22. Как определяются коэффициенты ряда Тейлора?

23. Напишите формулу остаточного члена ряда Тейлора.

24. Назовите необходимый и достаточный признаки разложения функции в ряд Тейлора.

25. Какой степенной ряд называется рядом Маклорена ?

26. Как определяются коэффициенты ряда Маклорена?

27. Напишите разложения в ряд Маклорена функций e^x, $sinx$, $cosx$, $ln(1 + x)$.

28. Какой ряд называется тригонометрическим рядом Фурье?

29. Сформулируйте условия разложимости функции в ряд Фурье.

30. Напишите формулы коэффициентов Фурье для периодической функции с периодом 2π.

31. Напишите формулы коэффициентов Фурье для четных и нечетных периодических функций с периодом 2π.

32. Напишите формулы коэффициентов Фурье для функций с произвольным периодом.

33. Изложите способ разложения в ряд Фурье функций, заданных на полупериоде.

2. 12. 4. Задания для самостоятельной работы.

В задачах 1 – 5 исследовать сходимость числовых рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(3n-1)(2n+2)}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(3n+1)}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$.

6. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,3^n}$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2\pi$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} x & при \quad -\pi \le x \le 0 \\ 0 & при \quad 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

2. 13. Модуль 13. Теория вероятностей.

2. 13. 1. Содержание модуля.

Тема 13. 1. *Основные понятия и теоремы.* Предмет теории вероятностей. Классификация событий. Пространство элементарных событий. Алгебра собы-

тий. Понятие случайного события. Относительные частоты. Закон устойчивости относительных частот. Классическое и геометрическое определение вероятности. Определение условной вероятности. Независимость событий. Теорема о полной вероятности. Формулы Байеса. Последовательность независимых испытаний, схема Бернулли. Предельные теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона.

Тема 13. 2. Дискретные и непрерывные случайные величины.
Дискретные случайные величины. Ряд распределения. Функция распределения, ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Непрерывные случайные величины. Функция распределения, плотности распределения, их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

Тема 13. 3. Законы распределения случайных величин.

Нормальное распределение, его свойства. Понятие о различных формах закона больших чисел. Теоремы Бернулли и Чебышева. Центральная предельная теорема Ляпунова.

2. 13. 2. Методические указания по его изучению.

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение **Примеров 30 – 34** и задач 110, 119, 176, 210 из [2].

Пример 30. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех семян.

Решение. Пусть событие *A* – из четырех семян взойдут не менее трех; событие *B* – из четырех семян взойдут три семени; событие *C* – из четырех семян взойдут четыре семени.

По теореме сложения вероятностей имеем $P(A)=P(B)+P(C)$.

Вероятности $P(B)$ и $P(C)$ вычислим по формуле Бернулли

$$\boldsymbol{P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}},$$

где $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ – число сочетаний из n элементов по $к$;

$q=1-p$ – вероятность наступления события $\overline{A}$.

$$P(B)=P_4(3)=C_4^3p^3q=\frac{4!}{3!\cdot(4-3)!}\cdot 0{,}9^3\cdot(1-0{,}9)=0{,}2916;$$

$$P(C)=P_4(4)=C_4^4p^4q^0=0{,}9^4=0{,}6561.$$

Искомая вероятность $P(A)=0{,}2916+0{,}6561=0{,}9477$.

Пример 31. Рабочий за смену изготовил 625 деталей. Вероятность того, что деталь окажется первосортной, равна 0,64. Какова вероятность того, что деталей первого сорта будет 370 штук?

Решение. По условию задачи n = 625, $к$ = 370, p = 0,64, q = 0,36.

Так как $n = 625$ – велико, то для вычисления $P_{625}(370)$ воспользуемся формулой Лапласа $\boldsymbol{P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)}$,

где функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция вероятностей и $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Здесь n, p, q имеют тот же смысл, что и в формуле Бернулли.

Найдем значение x, определяемое данными задачи:

$$x = \frac{370 - 625 \cdot 0{,}64}{\sqrt{625 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}36}} = -\frac{30}{12} = -2{,}5.$$

По таблице Приложений находим $\varphi(-2{,}5) = \varphi(2{,}5) = 0{,}0175$.

Искомая вероятность $P_{625}(370) \approx \frac{1}{12} \cdot 0{,}0175 \approx 0{,}0015$.

Пример 32. Вероятность того, что зерно заражено вредителями, равна 0,002. Найти вероятность того, что из 2000 зерен окажется не более двух зараженных зерен.

Решение. Пусть событие A – в выборке из 2000 зерен окажется не более двух зараженных зерен. Это событие состоит из трех событий: 1) из 2000 зерен зараженных окажется 2 зерна; 2) из 2000 зерен зараженных окажется 1 зерно; 3) из 2000 зерен зараженных зерен не будет. По теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна

$$P(A) = P_{2000}(2) + P_{2000}(1) + P_{2000}(0).$$

Так как $n = 2000$ велико, а вероятность наступления события в каждом из n независимых испытаний мала, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A в этих n испытаниях наступит ровно $к$ раз, вычисляется по формуле Пуассона

$$\boldsymbol{P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}},$$

где $\lambda = np$, $e \approx 2{,}7$.

Применяют эту формулу в тех случаях, когда параметр $\lambda = np \le 10$. При этом, чем больше число n и меньше число p, тем точнее результат, определяемый по формуле Пуассона.

В нашем случае $n = 2000$, $p = 0{,}002$. Тогда $\lambda = np = 2000 \cdot 0{,}002 = 4$. Вероятности $P_{2000}(2)$, $P_{2000}(1)$, $P_{2000}(0)$ вычислим по формуле Пуассона:

$$P_{2000}(2) \approx \frac{e^{-4} \cdot 4^2}{2!} = \frac{8}{e^4} \approx 0{,}147;$$

$$P_{2000}(1) \approx \frac{e^{-4} \cdot 4^1}{1!} = \frac{4}{e^4} \approx 0{,}073;$$

$$P_{2000}(0) \approx \frac{e^{-4} \cdot 4^0}{0!} = \frac{1}{e^4} \approx 0{,}018.$$

Следовательно, $P(A) \approx 0{,}147 + 0{,}073 + 0{,}018 = 0{,}238$.

Пример 33. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	40	42	41	44
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Найти: 1) математическое ожидание $M(X)$; 2) дисперсию $D(X)$; 3) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. 1) $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4 =$

$= 40 \cdot 0{,}1 + 42 \cdot 0{,}3 + 41 \cdot 0{,}2 + 44 \cdot 0{,}4 = 42{,}4.$

2) По формуле $\boldsymbol{D(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{k=1}^{n} [x_k - M(X)]^2 \cdot p_k}$

имеем:

$D(X) = (40 - 42{,}4)^2 \cdot 0{,}1 + (42 - 42{,}4)^2 \cdot 0{,}3 + (41 - 42{,}4)^2 \cdot 0{,}2 + (44 - 42{,}4)^2 \cdot 0{,}4 =$

$= 2{,}04.$

Дисперсию $D(X)$ можно вычислить другим способом, исходя из ее следующего свойства: дисперсия $D(X)$ равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания $M(X)$, то есть $\boldsymbol{D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2}$.

Для вычисления $M(X^2)$ составим закон распределения величины X^2:

X^2	40^2	42^2	41^2	44^2
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Тогда $M(X^2) = 40^2 \cdot 0{,}1 + 42^2 \cdot 0{,}3 + 41^2 \cdot 0{,}2 + 44^2 \cdot 0{,}4 = 1799{,}8$ и

$D(X) = 1799{,}8 - 42{,}4^2 = 2{,}04.$

3) $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2{,}04} \approx 1{,}43.$

Пример 34. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ \dfrac{x}{2} & при \quad 0 < x \le 2, \\ 1 & при. \quad x > 2 \end{cases}.$$

Найти: 1) вероятность попадания случайной величины X в интервал

(0,5; 1,5); 2) дифференциальную функцию распределения $f(x)$; 3) математическое ожидание $M(X)$; 4) дисперсию $D(X)$.

Решение. 1). Искомая вероятность равна приращению интегральной функции на заданном интервале:

$$P(0{,}5 < X < 1{,}5) = F(1{,}5) - F(0{,}5) = \frac{1{,}5}{2} - \frac{0{,}5}{2} = 0{,}5.$$

2). Найдем дифференциальную функцию распределения $f(x)$ по формуле $\boldsymbol{f(x) = F'(x)}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ \frac{1}{2} & при\, 0 < x \le 2, \\ 0 & при \quad x > 2 \end{cases}.$$

3) Математическое ожидание случайной величины X находим по формуле $\boldsymbol{M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx}$:

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^2 = 1.$$

4) Дисперсию $D(X)$ определим по формуле

$$\boldsymbol{D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)dx}:$$

$$D(X) = \int_0^2 (x-1)^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left.\frac{(x-1)^3}{3}\right|_0^2 = \frac{1}{3}.$$

2. 13. 3. Вопросы для самоконтроля.

1. Что называется случайным событием? Приведите примеры случайных событий.
2. Какие события называются противоположными?несовместимыми?
3. Что называется относительной частотой появления случайного события?
4. Сформулируйте статистическое определение вероятности наступления случайного события.
5. Сформулируйте классическое определение вероятности наступления случайного события.
6. Перечислите свойства вероятностей.
7. Что называется условной вероятностью события?
8. Сформулируйте теоремы умножения и сложения вероятностей.
9. Напишите формулу полной вероятности.

10. Как найти наивероятнейшее число наступлений события при повторных испытаниях?

11. Напишите формулу Бернулли.

12. Сформулируйте локальную и интегральную теоремы Лапласа.

13. Сформулируйте теорему Пуассона.

14. Какие случайные величины называются дискретными? Приведите примеры.

15. Что называется законом распределения дискретной случайной величины?

16. Как задается закон распределения дискретной случайной величины?

17. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины? Как его вычислить?

18. Что называется дисперсией дискретной случайной величины? Как ее вычислить?

19. Что называется средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины? Как его вычислить?

20. Какие случайные величины называются непрерывными? Приведите примеры.

21. Дайте определения: интегральной функции распределения; дифференциальной функции распределения. Перечислите свойства этих функций.

22. Как вычисляются математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины?

23. Напишите дифференциальную функцию для нормального закона распределения.

24. Напишите формулу для определения вероятности попадания значений нормально распределенной случайной величины в заданный интер –
вал.

25.Сформулируйте правило «трех сигм».

26. Назовите сущность закона больших чисел.

27. Напишите неравенство Чебышева.

28. Сформулируйте теорему Чебышева.

29. Сформулируйте теорему Бернулли.

2. 13. 4. Задания для самостоятельной работы.

1. В студенческой группе 5 отличников, 12 четверочников, 8 троечников. К доске произвольно вызывается студент. Какова вероятность того, что это четверочник ?

2. В ящике 10 пронумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 10 ?

3. Точка взята наудачу внутри круга радиуса R. Найти вероятность того, что эта точка окажется от центра круга на расстоянии r ($r < R$).

4. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найти вероятность одновременного поражения цели всеми стрелками.

5. Вероятность того, что деталь прошла проверку ОТК равна 0,8. Найти вероятность того, что среди пяти случайно отобранных деталей проверенных окажется не менее четырех деталей.

6. Семья предполагает иметь 5 детей. Какова вероятность того, что будет три девочки и два мальчика, если рождение девочки и мальчика равновероятны?

7. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз.

8. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной следующим законом распределения:

X	- 4	6	10
P	0,2	0,3	0,5

2. 14. Модуль 14. Основные понятия математической статистики.

2. 14. 1. Содержание модуля.

Тема 14. 1. Основные понятия математической статистики.

Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

Статистические оценки генеральной средней и доли. Погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Определение дополнительного объема выборки. Понятие о критериях согласия. Проверка гипотез о равенстве долей и средних.

Тема 14. 2. Функциональная зависимость и регрессия. Кривые регрессии, их свойства. Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки. Определение параметров линейной регрессии методом наименьших квадратов.

Определение параметров нелинейных уравнений регрессии методом наименьших квадратов непосредственно и с помощью линеаризующих замен переменных.

Оценка параметров многомерных линейных функций регрессии. Совокупный и частный коэффициенты множественной корреляции, свойства и оценки.

2. 14. 2. Методические указания по его изучению.

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение **Примеров 35, 36** и задач 439, 443, 460, 535 из [2].

Пример 35. Для определения средней урожайности сахарной свеклы в хозяйстве на площади 1000 га была определена ее урожайность на 100 га. Результаты выборочного обследования представлены следующим распределением:

Урожайность, ц / га	23-25	25-27	27-29	29-31	31-33	33-35	35-37
Площадь, га	3	10	6	16	16	30	20

Найти: 1) величину, которую можно принять за среднюю урожайность на всем массиве; 2) величину, которую следует принять за среднее квадратическое отклонение урожайности на всем массиве; 3) доверительный интервал, в котором с вероятностью 0,95 заключена средняя урожайность на всем массиве.

Решение. 1) В качестве приближенного значения средней урожайности на всем массиве принимаем среднюю арифметическую данного в условии распределения, то есть выборочную среднюю:

$$\bar{x} \approx \bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \text{ . Здесь } n = n_1 + n_2 + ... + n_k .$$

За значение признака нужно принять середины интервалов.
Получим:

$$\bar{x}_в = \frac{24\cdot 3 + 26\cdot 10 + 28\cdot 6 + 30\cdot 16 + 32\cdot 15 + 34\cdot 30 + 36\cdot 20}{100} = \frac{3200}{100} = 32 .$$

Значит, приближенное значение средней урожайности на всем массиве будет $\tilde{o} \approx 32$ ц.

2) Для оценки дисперсии генеральной совокупности применяем формулу

$$\sigma^2 \approx S_n{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 n_i}{n-1} \quad ; \quad n = n_1 + n_2 + ... + n_k .$$

$$S_n{}^2 = \frac{1}{99}[3(24-32)^2 + 10(26-32)^2 + 6(28-32)^2 + 16(30-32)^2 +$$
$$+ 15(32-32)^2 + 30(34-32)^2 + 20(36-32)^2] =$$
$$= \frac{1}{99}(192 + 360 + 96 + 64 + 0 + 120 + 320) = \frac{1}{99}\cdot 1152 = 11{,}64.$$

Значит, приближенное значение дисперсии на всем массиве будет $\sigma^2 \approx 11{,}64$, отсюда среднее квадратическое отклонение урожайности на всем массиве равно

$$S \approx \sqrt{11{,}64} \approx 3{,}4 .$$

Найдем среднее квадратическое отклонение выборочной средней по формуле

$$\bar{\sigma}_x \approx \bar{S}_x = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \quad .$$

Получаем $\bar{\sigma}_x \approx \frac{3{,}4}{\sqrt{100}} = 0{,}34$ ц.

Итак, оценка средней урожайности сахарной свеклы на всем массиве равна 32 ц со средней квадратической ошибкой 0,34 ц. Оценка среднего квадратического отклонения урожайности на всем массиве равна 3,4 ц.

3) Для вычисления доверительного интервала воспользуемся равенством

$$P\left(\bar{x}_в - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma,$$

согласно которому можно утверждать, что с надежностью γ доверительный интервал $\left(\bar{x}_в - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}};\quad \bar{x}_в + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестное математическое ожидание, точность оценки $\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$.

Поскольку $n = 100 > 30$, пользуемся нормальным распределением. Значит,

$$P\left(\bar{x}_в - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t_\gamma) = \gamma.$$

Из равенства $2\Phi(t_\gamma) = 0{,}95$ следует $\Phi(t_\gamma) = 0{,}475$ и по таблице 2 Приложений находим $t_\gamma = 1{,}96$. Следовательно, точность оценки

$$\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 3{,}4}{\sqrt{100}} \approx 0{,}67.$$

Концы доверительного интервала $\bar{x}_в - \delta = 32 - 0{,}67 = 31{,}33$ и $\bar{x}_в + \delta = 32 + 0{,}67 = 32{,}67$.

Таким образом, с вероятностью 0,95 средняя урожайность сахарной свеклы на всем массиве заключена в границах от 31,33 ц до 32,67 ц.

Пример 36. Были проведены измерения общей длины ствола в см (*X*) и длины его части без ветвей (*У*) десяти молодых сосен. Результаты этого измерения представлены в следующей таблице

X	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
У	14	18	19	20	23	23	24	26	29	34

Вычислить выборочный коэффициент корреляции и найти выборочное уравнение прямой регрессии *У* на *X*.

Решение. Выборочный коэффициент корреляции вычислим по формуле

$$r_в = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_в)(y_i - \bar{y}_в)}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x}_в)^2} \cdot \sqrt{\sum (y_i - \bar{y}_в)^2}}.$$

Для вычисления величин, входящих в эту формулу, составим вспомогательную таблицу, в которой результаты измерений записаны столбцами. Внизу каждого из этих столбцов вычислены суммы для нахождения средних $\bar{x}_в$ и $\bar{y}_в$. Далее расположены столбцы, в которых вычисляются разности $x_i - \bar{x}_в$ и $y_i - \bar{y}_в$, их квадраты и произведения. Значения этих суммируются, чтобы полу-

чить величины, необходимые для подстановки в формулу. Отметим, что суммы в столбцах, в которых вычислены разности
$x_i - \bar{x}_в$ и $y_i - \bar{y}_в$ будут всегда равны нулю.

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}_в$	$(x_i - \bar{x}_в)^2$	$y_i - \bar{y}_в$	$(y_i - \bar{y}_в)^2$	$(x_i - \bar{x}_в)(y_i - \bar{y}_в)$
25	14	- 45	2025	- 9	81	405
35	18	- 35	1225	- 5	25	175
45	19	- 25	625	- 4	16	100
55	20	-15	225	- 3	9	45
65	23	- 5	25	0	0	0
75	23	5	25	0	0	0
85	24	15	225	1	1	15
95	26	25	626	3	9	75
105	29	35	1225	6	36	210
115	34	45	2025	11	121	495
700	230	0	8250	0	298	1520

Находим средние $\bar{x}_в$ и $\bar{y}_в$:

$$\bar{x}_в = \frac{700}{10} = 70; \qquad \bar{y}_в = \frac{230}{10} = 23.$$

Из таблицы имеем

$$\sum (x_i - \bar{x}_в)(y_i - \bar{y}_в) = 1520, \ \sum (x_i - \bar{x}_в)^2 = 8250, \ \sum (y_i - \bar{y}_в)^2 = 298.$$

Подставляя эти значения в формулу для вычисления коэффициента корреляции, получим

$$r_в = \frac{1520}{\sqrt{8250} \cdot \sqrt{298}} \approx 0{,}97.$$

Таким образом, у выбранных сосен имеет место очень сильная корреляция между общей длиной ствола и длиной его части без ветвей.

Далее найдем выборочное уравнение прямой регрессии *У* на *X*. Это уравнение имеет вид $\boldsymbol{y - \bar{y}_в = r_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}_в)}$.

За приближенные значения $\sigma_{\tilde{o}}$ и $\sigma_{\acute{o}}$ принимают соответственно

$$\boldsymbol{\sigma_x \approx \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2}} \quad ; \qquad \boldsymbol{\sigma_y \approx \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_в)^2}} \ .$$

Тогда

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_в)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2}} = \sqrt{\frac{298}{8250}} \approx \sqrt{0{,}0361} \approx 0{,}19.$$

Подставляя в выборочное уравнение прямой регрессии *У* на *X*

$\bar{x}_в = 70$; $\bar{y}_в = 23$; $r_в = 0{,}97$; $\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0{,}19$, получим

$$y - 23 = 0{,}97 \cdot 0{,}19(x - 70) \quad \text{или} \quad y - 23 = 0{,}18x - 12{,}6.$$

Окончательно, $y = 0{,}18x + 10{,}4$ - искомое уравнение прямой регрессии *У* на *X*.

2. 14. 3. Вопросы для самоконтроля.

1. Что понимается под генеральной совокупностью?
2. Что такое выборка?
3. Как получают повторную и бесповторную выборку?
4. Что такое частота появления варианта в выборке?
5. Как получают относительную частоту появления варианта в выборке?
6. Как получают вариационный ряд распределения?
7. Как построить полигоны частот и относительных частот?
8. Как построить гистограммы частот и относительных частот?
9. Что такое генеральная и выборочная средняя? Как они вычисляются?
10. Что такое генеральная и выборочная дисперсия? Как они вычисляются?
11. Какую величину принимают за среднюю генеральной совокупности?
12. Какую величину принимают за дисперсию генеральной совокупности?
13. Как вычисляется среднее квадратическое отклонениие средней выборки?
14. Что понимают под доверительным интервалом и доверительной вероятностью?
15. Как вычислить доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины в случае, когда среднее квадратическое отклонение известно; когда среднее квадратическое отклонение неизвестно?
16. Дайте определение корреляционной зависимости.
17. Какая корреляционная зависимость называется линейной?
18. Дайте определение выборочного коэффициента корреляции и перечислите его свойства.
19. Запишите выборочные уравнения прямых регрессий.
20. В чем суть метода наименьших квадратов для определения параметров линии регрессии?

Раздел 3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

3. 1. Методические указания по выполнению контрольных работ

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа, состоящая из изучения материала, чтения учебника, решения задач, выполнения контрольной работы. В период лабораторно-экзаменационной сессии для студентов проводятся лекции и практические занятия, носящие обзорный характер.

При изучении учебника следует воспроизводить на бумаге в форме конспекта основные моменты рассматриваемого вопроса программы, обращая особое внимание на определение основных понятий курса высшей математики, формулировки теорем, формулы.

Работа над учебником должна сопровождаться решением задач.

В соответствии с действующим учебным планом студенты изучают курс математики в течение ***первых двух лет при сроке обучения 5 лет*** и на ***первом курсе при сокращенном сроке обучения*** и выполняют на каждом курсе по одной контрольной работе.

При выполнении контрольной работы следует руководствоваться следующими указаниями:

1.Контрольная работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть написаны фамилия и инициалы студента, его шифр, дата отсылки работы в институт, домашний адрес.

2.Задачи контрольной работы следует располагать в порядке возрастания их номеров. Перед решением каждой задачи нужно полностью переписать ее условие. На каждой странице тетради нужно оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых теорем и формул. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами (желательно на миллиметровой бумаге).Объяснения к решению задачи должны соответствовать обозначениям, приведенным на чертежах.

4. Контрольная работа должна выполняться ***самостоятельно***, в противном случае студент лишается возможности проверить степень своей подготовленности по изучаемой дисциплине.

5. Получив из университета прорецензированную работу, студент должен исправить отмеченные преподавателем ошибки и недочеты. Если работа не зачтена, то в кратчайший срок следует выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом и первоначально выполненную работу.

6. В межсессионный период или во время лабораторно-экзаменационной сессии студент должен пройти на кафедре высшей математики собеседование по зачтенной контрольной работе.

7. Студент выполняет **вариант контрольной работы, совпадающий с последней цифрой его учебного шифра.**

При **сроке обучения 5лет** математика изучается на первом и втором курсах, на каждом курсе выполняется одна контрольная работа. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (1, 3, 5, 7, 9) , то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 2. Если же предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное (2, 4, 6, 8) или ноль, то номера задач даны в таблице 3.

При **сокращенном сроке обучения** математика изучается на первом курсе и выполняется одна контрольная работа. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (1, 3, 5, 7, 9) , то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 4. Если же предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное (2, 4, 6, 8) или ноль, то номера задач даны в таблице 5.

Таблица 2

Номер варианта	Номера задач для контрольной работы № 1 (первый курс)								
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	Номера задач для контрольной работы № 2 (второй курс)								
1	91	101	111	121	131	141	151	161	171
2	92	102	112	122	132	142	152	162	172
3	93	103	113	123	133	143	153	163	173
4	94	104	114	124	134	144	154	164	174
5	95	105	115	125	135	145	155	165	175
6	96	106	116	126	136	146	156	166	176
7	97	107	117	127	137	147	157	167	177
8	98	108	118	128	138	148	158	168	178
9	99	109	119	129	139	149	159	169	179
0	100	110	120	130	140	150	160	170	180

Таблица 3

Номер варианта	Номера задач для контрольной работы № 1 (первый курс)								
1	2	13	24	35	46	57	68	79	90
2	3	14	25	36	47	58	69	80	81
3	4	15	26	37	48	59	70	71	82
4	5	16	27	38	49	60	61	72	83
5	6	17	28	39	50	51	62	73	84
6	7	18	29	40	41	52	63	74	85
7	8	19	30	31	42	53	64	75	86
8	9	20	21	32	43	54	65	76	87
9	10	11	22	33	44	55	66	77	88
0	1	12	23	34	45	56	67	78	89
	Номера задач для контрольной работы № 2 (второй курс)								
1	92	103	114	125	136	147	158	169	180
2	93	104	115	126	137	148	159	170	171
3	94	105	116	127	138	149	160	161	172
4	95	106	117	128	139	150	151	162	173
5	96	107	118	129	140	141	152	163	174
6	97	108	119	130	131	142	153	164	175
7	98	109	120	121	132	143	154	165	176
8	99	110	111	122	133	144	155	166	177
9	100	101	112	123	134	145	156	167	178
0	91	102	113	124	135	146	157	168	179

Таблица 4

Номер варианта	Номера задач для контрольной работы								
1	1	21	41	51	71	101	111	121	151
2	2	22	42	52	72	102	112	122	152
3	3	23	43	53	73	103	113	123	153
4	4	24	44	54	74	104	114	124	154
5	5	25	45	55	75	105	115	125	155
6	6	26	46	56	76	106	116	126	156
7	7	27	47	57	77	107	117	127	157
8	8	28	48	58	78	108	118	128	158
9	9	29	49	59	79	109	119	129	159
0	10	30	50	60	80	110	120	130	160

Таблица 5

Номер варианта	Номера задач для контрольной работы								
1	2	23	44	55	76	107	118	129	160
2	3	24	45	56	77	108	119	130	151
3	4	25	46	57	78	109	120	121	152
4	5	26	47	58	79	110	111	122	153
5	6	27	48	59	80	101	112	123	154
6	7	28	49	60	71	102	113	124	155
7	8	29	50	51	72	103	114	125	156
8	9	30	41	52	73	104	115	126	157
9	10	21	42	53	74	105	116	127	158
0	1	22	43	54	75	106	117	128	159

3. 2. Задания для контрольных работ

В задачах **1 – 10** даны вершины треугольника *ABC*.
Найти: 1) длину стороны *AB*; 2) уравнения сторон *AB* и *AC* и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол *A* в радианах; 4) уравнение высоты *CD* и ее длину; 5) систему линейных неравенств, определяющих треугольник *ABC*.

1. $A\,(0;\,3)$, $B\,(12;\,-6)$, $C\,(10;\,8)$.
2. $A\,(-8;\,4)$, $B\,(4;\,-5)$, $C\,(2;\,9)$.
3. $A\,(-2;\,2)$, $B\,(10;\,-7)$, $C\,(8;\,7)$.
4. $A\,(-5;\,0)$, $B\,(7;\,9)$, $C\,(5;\,-5)$.
5. $A\,(-7;\,0)$, $B\,(5;\,11)$, $C\,(3;\,-3)$.
6. $A\,(-5;\,-3)$, $B\,(7;\,6)$, $C\,(5;\,-8)$.
7. $A\,(-6;\,-2)$, $B\,(6;\,7)$, $C\,(4;\,-7)$.
8. $A\,(-8;\,-4)$, $B\,(4;\,5)$, $C\,(2;\,-9)$.
9. $A\,(0;\,-1)$, $B\,(12;\,8)$, $C\,(10;\,-6)$.
10. $A\,(-6;\,1)$, $B\,(6;\,10)$, $C\,(4;\,-4)$.

В задачах **11 – 20** решить систему уравнений двумя способами:
1) при помощи определителей (по формулам Крамера);
2) с помощью обратной матрицы.

11. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \end{cases}$.

12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -7 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$.

14. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$.

15. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$. **16.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -9 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$.

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$. **18.** $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases}$.

19. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$. **20.** $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$.

В задачах **21 – 30** даны координаты точек *A*, *B*, *C*, *D*.
Требуется: 1) записать векторы ***AB***, ***AC***, ***AD*** в системе орт и найти модули этих векторов; 2) найти величину угла между векторами ***AB*** и ***AC***;
3) найти площадь треугольника *ABC*; 4) найти объем пирамиды *ABCD*.

21. *A* (1; 1; 3) , *B* (–4; 0; 3) , *C* (–1; 5; 7) , *D* (–2; –2; 9).
22. *A* (2; 2; 1) , *B* (–3; 1; 1) , *C* (0; 6; 5) , *D* (–1; –1; 7).
23. *A* (–2; –1; 4) , *B* (–7; –2; 4) , *C* (–4; 3; 8) , *D* (–5; –4; 10).
24. *A* (5; –1; 5) , *B* (0; –2; 5) , *C* (3; 3; 9) , *D* (2; –4; 11).
25. *A* (6; 2; –2) , *B* (1; 1; –2) , *C* (4; 6; 2) , *D* (3; –1; 4).
26. *A* (–1; 3; 6) , *B* (–6; 2; 6) , *C* (–3; 7; 10) , *D* (–4; 0; 12).
27. *A* (1; 3; 3) , *B* (2; 1; 5) , *C* (12; 5; 13) , *D* (–1; 3; 7).
28. *A* (4; 1; 1) , *B* (5; –1; 3) , *C* (15; 3; 11) , *D* (2; 1; 5).
29. *A* (–3; 2;– 2) , *B* (–2; 0; 0) , *C* (8; 4; 8) , *D* (–5; 2; 2).
30. *A* (5; 1; 2) , *B* (6; –1; 4) , *C* (16; 3; 12) , *D* (3; 1; 6).

В задачах **31 – 40** вычислить указанные пределы.

31. *а*) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+3x+1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-3x-2x^2}{x^3-4x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{tg4x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$.

32. *а*) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-5x+2}{4x^2-7x-2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+1}{4x^2-5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x\cdot ctg2x\right)$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x-2}$.

33. *а*) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{8+2x-x^2}{x^2-16}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x+3}{x^3+2x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg3x}{x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 4} (x-3)^{\frac{2}{x-4}}$.

34. *а)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg 2x}$; *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x+3}$.

35. *а)* $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{(x-7)^2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{3x}$; *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-2}\right)^{2x}$.

36. *а)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{5x^2+4x-1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-x^2}{4x^2-5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin 3x}$; *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}$.

37. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3}{4x^3+5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(tg 2x\cdot ctg 5x)$; *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{2x+1}$.

38. *а)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^3+1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{2x+2}$.

39. *а)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2-4}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-2x}{3x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{arctg 2x}$; *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-2}\right)^{3x}$.

40. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$; *г)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{6x-4}$.

В задачах **41 – 50** найти производные данных функций.

41. *а)* $y=x\arccos\dfrac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$; *б)* $y=e^{x\ln^2 x}$;

в) $y=1+xe^y$.

42. *а)* $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{a}$; *б)* $y=e^{\sqrt{x+1}}$;

в) $y^3+e^{xy}=0$.

43. *а)* $y=ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$; *б)* $y=x10^{\sqrt{x}}$;

в) $xy+e^y=0$.

44. *а)* $y=xtgx+ln\cos x+e^{5x}$; *б)* $y=e^{x-arcsinx}$;

в) $x^3y^3-2xy+3=0$.

45. *а)* $y=ln\frac{x^2}{x+1}+3x\sqrt[3]{x}$; *б)* $y=2^{arctgx-x^2}$;

в) $x^2y^2-\cos x=0$.

46. *а)* $y=x^2+x\,arcsin\,x+\sqrt{1-x^2}$; *б)* $y=2^{arcsin\frac{1}{x}}$;

в) $cos(xy)-2x=0$.

47. *а)* $y=ln\frac{(x-1)^2}{x+2}+3\sqrt[3]{x^2}$; *б)* $y=2^{\frac{4}{sinx}}$;

в) $\frac{x}{y}+xy-2=0$.

48. *а)* $y=ln\frac{x^2}{x-1}+4x\sqrt[4]{x}$; *б)* $y=\left(e^{sinx}+3x\right)^3$;

в) $5x^2y^2-7y+4=0$.

49. *а)* $y=x^3(3ln\,x-1)-\frac{x+1}{e^x}$; *б)* $y=\left(5^{tg2x}+3\right)^4$;

в) $x^3y^3-2xy+1=0$.

50. *а)* $y=ln\frac{(x+1)^2}{x+3}+3x\sqrt[3]{x}$; *б)* $y=5^{arcsinx^2}$;

в) $x^2+xy+y^2=3$.

В задачах **51 – 60** исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики. Исследование функции рекомендуется проводить по следующей схеме: 1) найти область определения функции; 2) исследовать функцию на непрерывность; 3) определить, является ли данная функция четной, нечетной; 4) найти интервалы возрастания и убывания функции и точки ее экстремума; 5) найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции; 6) найти асимптоты графика функции.

51. $y=\dfrac{4x}{(x-1)^2}$. **52.** $y=\dfrac{4x}{e^x}$. **53.** $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

54. $y=\dfrac{1}{x^2-9}$. **55.** $y=ln\left(x^2-6x+10\right)$. **56.** $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

57. $y=2x\,ln\,x$. **58.** $y=\dfrac{ln\,x}{\sqrt{x}}$. **59.** $y=\dfrac{e^x}{x}$.

60. $y=\dfrac{4\,ln\,x}{x}$.

61. Каковы радиус основания R и высота H открытого цилиндрического бака данного объема V, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество листового металла?

62. Найти наибольший объем цилиндра, полная поверхность которого равна S.

63. Найти наибольший объем конуса, образующая которого равна l.

64. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

65. Сумма двух положительных чисел равна a. Каковы эти числа, если сумма их кубов будет наименьшей?

66. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

67. На параболе $y=x^2$ найти точку, наименее удаленную от прямой $y=2x-4$.

68. Из всех прямоугольников, вписанных в круг радиуса R, найти тот, который имеет наибольшую площадь.

69. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного сверху полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

70. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в эллипс $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

В задачах **71 – 80** вычислить неопределенные интегралы.

71. *а*) $\int e^{x^2+3}xdx$; *б*) $\int \dfrac{x^3}{x^2-4}dx$;

в) $\int \dfrac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$; *г*) $\int x\,sin\,2xdx$.

72. *а*) $\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{4-x^3}}$; *б*) $\int \dfrac{x^3-1}{x^2-2x-3}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$; г) $\int ln\,x dx$.

73. а) $\int \frac{sec^2 x dx}{tg^2 x-9}$; б) $\int \frac{x^3+1}{x^2-7x+10}dx$;

в) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx$; г) $\int xe^{-4x}dx$.

74. а) $\int \frac{e^{2x}dx}{4+e^{2x}}$; б) $\int \frac{x^3-4}{x^2+5x+6}dx$;

в) $\int \frac{x-1}{x^2+6x+25}dx$; г) $\int arcsin 2x dx$.

75. а) $\int sin\,x cos^2 x dx$; б) $\int \frac{x^3+2}{x^2+2x+4}dx$;

в) $\int \frac{3x-1}{2x^2-4x+3}dx$; г) $\int x^3 ln\,x dx$.

76. а) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-3}}$; б) $\int \frac{x^3-2}{x^2-4x+3}dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$; г) $\int arccos 5x dx$.

77. а) $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}dx}{\sqrt{2x-1}}$; б) $\int \frac{x^3}{x^2+4x-5}dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$; г) $\int \frac{ln\,x dx}{x^2}$.

78. а) $\int x\left(x^2+4\right)^9 dx$; б) $\int \frac{x^3-5}{x^2+4x+8}dx$;

в) $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}dx$; г) $\int xe^{-4x}dx$.

79. а) $\int \frac{dx}{x\left(ln^2 x+1\right)}$; б) $\int \frac{x^3+7}{x^2-5x+6}dx$;

в) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-10x+29}}dx$; г) $\int arctg 5x dx$.

80. а) $\int \frac{sin\,x dx}{2+cos\,x}$; б) $\int \frac{x^3+2}{x^2-7x+6}dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 5}}$; *г*) $\int x^4 \ln x dx$.

81. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $y = 3x - 1$.

82. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4$; $x = 0$; $y = 0$; $y = 3$.

83. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$.

84. Найти длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{2} - 1$, отсеченной осью Ox.

85. Найти координаты центра тяжести полуэллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, расположенного над осью Ox.

86. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной дугой синусоиды $y = \sin x$ и отрезком оси Ox от $x = 0$ до $x = \pi$.

87. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y^2 = x + 4$ от $x = -4$ до $x = 2$.

88. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox одной полуволны синусоиды $y = \sin x$.

89. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox астроиды $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$.

90. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ и прямой $y = x - 3$.

В задачах **91 – 100** функцию $z = f(x, y)$ исследовать на экстремум.

91. $z = x^3 - 9xy - 3y^2 - 9y + 5$.

92. $z = 9x^2 + 3x + 9xy - y^3 + 2$.

93. $z = -2x^3 + 6xy + y^2 - 8y + 28$.

94. $z = -8x^2 + x + 2y^3 - 6xy + 2{,}25$.

95. $z = -2x^3 + 6xy + 5y^2 - 4y - 2$.

96. $z = 4x^2 - 6xy + 2y^3 - 2x - 5$.

97. $z = x^3 - 6xy - 2y^2 + 8y - 14$.

98. $z = 4x^2 - 6xy + x + 2y^3 + 5$.

99. $z = x^2 - 6xy + 2y^3 + 4x - 10$.

100. $z = 2x^2 + 3xy + 3y^3 + 9x + 5$.

В задачах **101 – 110** с помощью двойного интеграла вычислить координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной заданными линиями (поверхностную плотность считать равной единице).

101. $y^2 = x + 7$, $y^2 = -\frac{1}{2}x - 2$.

102. $y^2 = -x - 2$, $y^2 = -\frac{1}{3}x + 2$.

103. $y^2 = x - 3$, $y^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

104. $y = x^2 - 7$, $y = -2x^2 - 4$.

105. $y = -x^2 - 2$, $y = -3x^2 + 6$.

106. $y = x^2 + 3$, $y = 2x^2 - 1$.

107. $y = -x^2 + 5$, $y = -2x^2 + 6$.

108. $y = \frac{1}{9}x^2 - 3$, $y = x^2 - 11$.

109. $y^2 = 2x - 2$, $y^2 = -x + 7$.

110. $y^2 = -16x + 33$, $y^2 = x - 1$.

В задачах **111 – 120** найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка.

111. $xy' - y = -ln\,x$.

112. $y'x\,ln\,x - y = 3x^3\,ln^2\,x$.

113. $2xy' + y = 2x^3$.

114. $y' - y = e^x$.

115. $xy' - y = x^3$.

116. $xy' - y = -2\,ln\,x$.

117. $x^3y' + 3x^2y = 2$.

118. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

119. $xy' + y = x + 1$.

120. $y' - y\,cos\,x = -sin\,2x$.

В задачах **121 – 130** найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

121. $y'' - 4y' + 3y = 2e^{3x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$.

122. $y'' + 4y' = 4cos\,2x - 12sin\,2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

123. $y'' - 5y' + 6y = e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

124. $y'' + 2y' + 5y = 5x^2 + 9x + 9$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

125. $y'' - 2y' + y = 2e^x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 5$.

126. $y'' + 9y = 6cos\,3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

127. $y'' + 2y' = 8x^3 + 12x^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

128. $y'' + y = -2sin\,x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

129. $y'' - 5y' + 4y = 4x^3 - 15x^2 + 6x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 4$.

130. $y'' - 4y' - 5y = -9xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

В задачах **131 – 140** дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n x^n}{b^n \sqrt[3]{n+1}}$. При заданных значениях a и b написать первые три члена ряда, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

131. $a = 2$, $b = 3$. **132.** $a = 3$, $b = 5$. **133.** $a = 4$, $b = 7$.

134. $a = 5$, $b = 9$. **135.** $a = 7$, $b = 6$. **136.** $a = 2$, $b = 5$.

137. $a = 3$, $b = 2$. **138.** $a = 4$, $b = 3$. **139.** $a = 5$, $b = 2$.

140. $a = 6$, $b = 4$.

В задачах **141 – 145** данную функцию в указанном интервале разложить в ряд Фурье по косинусам.

141. $f(x) = \pi - x$ *в интервале* $(0, \pi)$.

142. $f(x) = x$ *в интервале* $(0, 2)$.

143. $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ *в интервале* $(0, \pi)$.

144. $f(x) = x - 1$ *в интервале* $(0, 1)$.

145. $f(x) = 3x + 1$ *в интервале* $(0, \pi)$.

В задачах **146 – 150** данную функцию в указанном интервале разложить в ряд Фурье по синусам.

146. $f(x) = \pi x$ *в интервале* $(0, \pi)$.

147. $f(x) = 2x - 1$ *в интервале* $(0, 1)$.

148. $f(x) = x + 1$ *в интервале* $(0, 3)$.

149. $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ *в интервале* $(0, \pi)$.

150. $f(x) = \pi - 2x$ *в интервале* $(0, \pi)$.

151. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Производится 4 выстрела. Найти вероятность того, что цель будет поражена : *а*) три раза; *б*) не более двух раз.

152. Вероятность всхожести пшеницы равна 0,8. Какова вероятность того, что из пяти семян взойдет не менее трех?

153. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Написать закон распределения вероятностей попаданий в цель при пяти выстрелах и построить многоугольник распределения вероятностей.

154. Всхожесть семян пшеницы составляет 90%. Определить наиболее вероятное число всходов из 200 посеянных семян.

155. Семена пшеницы содержат 0,2% сорняков. Найти вероятность того, что в 1000 семян будет 6 семян сорняков.

В задачах **156 – 160** дана вероятность p того, что семя злака про-

растет. Найти вероятность того, что из n посеянных семян прорастет $к$ семян.

156. $n=900$, $p=0{,}36$, $k=340$.

157. $n=225$, $p=0{,}64$, $k=158$.

158. $n=250$, $p=0{,}81$, $k=200$.

159. $n=100$, $p=0{,}9$, $k=95$.

160. $n=400$, $p=0{,}8$, $k=330$.

В задачах **161 – 170** задан закон распределения случайной величины X (в первой строке даны возможные значения величины X, во второй строке указаны вероятности p этих возможных значений). Найти:

1) математическое ожидание $M(X)$; 2) дисперсию $D(X)$;

3) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

161.	X	8	10	12	22	24	30
	P	0,3	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1
162.	X	10	15	20	25	30	35
	P	0,4	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1
163.	X	16	21	25	32	40	50
	P	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2
164.	X	10	15	18	24	29	35
	P	0,2	0,1	0,2	0,2	0,1	0,2
165.	X	12	14	20	23	28	30
	P	0,1	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1
166.	X	6	10	18	20	25	30
	P	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,4
167.	X	10	14	16	18	20	25
	P	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1
168.	X	6	10	16	20	26	30
	P	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1	0,1
169.	X	8	12	16	21	25	30
	P	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1
170.	X	9	13	18	22	28	30
	P	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2

В задачах **171 – 180** случайная величина X задана интегральной функцией распределения $F(x)$. Найти: 1) вероятность того, что в результате испытания X примет значения, принадлежащие заданному интервалу $(\alpha;\beta)$; 2) дифференциальную функцию распределения $f(x)$; 3) математическое ожидание $M(X)$; 4) дисперсию $D(X)$.

171.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ x^4 & при \quad 0<x\le 1, \\ 1 & при. \quad x>1 \end{cases} \qquad \alpha=\frac{1}{4}; \quad \beta=\frac{3}{4}.$$

172.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{9} & при \;\; 0<x\le 3, \\ 1 & при. \quad x>3 \end{cases} \qquad \alpha=1; \quad \beta=2 \;.$$

173.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{25} & при \;\; 0<x\le 5, \\ 1 & при. \quad x>5 \end{cases} \qquad \alpha=1; \quad \beta=4 \;.$$

174.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ 4x^2 & при \;\; 0<x\le 0{,}5, \\ 1 & при. \quad x>0{,}5 \end{cases} \qquad \alpha=\frac{1}{4}; \quad \beta=\frac{1}{2} \;.$$

175.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ x^2 & при \;\; 0<x\le 1, \\ 1 & при. \quad x>1 \end{cases} \qquad \alpha=\frac{1}{4}; \quad \beta=\frac{3}{4} \;.$$

176.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ x^3 & при \;\; 0<x\le 1, \\ 1 & при. \quad x>1 \end{cases} \qquad \alpha=\frac{1}{3}; \quad \beta=\frac{2}{3} \;.$$

177.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ 9x^2 & при \;\; 0<x\le \frac{1}{3}, \\ 1 & при. \quad x>\frac{1}{3} \end{cases} \qquad \alpha=\frac{1}{9}; \quad \beta=\frac{2}{9} \;.$$

178.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ 16x^2 & при \;\; 0<x\le 0{,}25, \\ 1 & при. \quad x>0{,}25 \end{cases} \qquad \alpha=\frac{1}{8}; \quad \beta=\frac{1}{4} \;.$$

179.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{36} & при \;\; 0<x\le 6, \\ 1 & при. \quad x>6 \end{cases} \qquad \alpha=2; \quad \beta=5 \;.$$

180.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ 25x^2 & при \quad 0 < x \le 0{,}2, \\ 1 & при. \quad x > 0{,}2 \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}04; \quad \beta = 0{,}1 \ .$$

Приложения

Таблица 6

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 7

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441

Продолжение таблицы 7

x	$\Phi(x)$		x	$\Phi(x)$		x	$\Phi(x)$		x	$\Phi(x)$
1,60	0,4452		1,85	0,4678		2,20	0,4861		2,70	0,4965
1,61	0,4463		1,86	0,4686		2,22	0,4868		2,72	0,4967
1,62	0,4474		1,87	0,4693		2,24	0,4875		2,74	0,4969
1,63	0,4484		1,88	0,4699		2,26	0,4881		2,76	0,4971
1,64	0,4495		1,89	0,4706		2,28	0,4887		2,78	0,4973
1,65	0,4505		1,90	0,4713		2,30	0,4893		2,80	0,4974
1,66	0,4515		1,91	0,4719		2,32	0,4898		2,82	0,4976
1,67	0,4525		1,92	0,4726		2,34	0,4904		2,84	0,4977
1,68	0,4535		1,93	0,4732		2,36	0,4909		2,86	0,4979
1,69	0,4545		1,94	0,4738		2,38	0,4913		2,88	0,4980
1,70	0,4554		1,95	0,4744		2,40	0,4918		2,90	0,4981
1,71	0,4564		1,96	0,4750		2,42	0,4922		2,92	0,4982
1,72	0,4573		1,97	0,4756		2,44	0,4927		2,94	0,4984
1,73	0,4582		1,98	0,4761		2,46	0,4931		2,96	0,4985
1,74	0,4591		1,99	0,4767		2,48	0,4934		2,98	0,4986
1,75	0,4599		2,00	0,4772		2,50	0,4938		3,00	0,49865
1,76	0,4608		2,02	0,4783		2,52	0,4941		3,20	0,49931
1,77	0,4616		2,04	0,4793		2,54	0,4945		3,40	0,49966
1,78	0,4625		2,06	0,4803		2,56	0,4948		3,60	0,49984
1,79	0,4633		2,08	0,4812		2,58	0,4951		3,80	0,49993
1,80	0,4641		2,10	0,4821		2,60	0,4953		4,00	0,49997
1,81	0,4649		2,12	0,4830		2,62	0,4956		4,50	0,49999
1,82	0,4656		2,14	0,4838		2,64	0,4959		5,00	0,499999
1,83	0,4664		2,16	0,4846		2,66	0,4961		∞	0,5
1,84	0,4671		2,18	0,4854		2,68	0,4963			

Таблица 8

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	56	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица 9

Таблица значений $q = q(\gamma,n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1.37	2.67	5.64	20	0.37	0.58	0.88
6	1.09	2.01	3.88	25	0.32	0.49	0.73
7	0.92	1.62	2.98	30	0.28	0.43	0.63
8	0.80	1.38	2.42	35	0.26	0.38	0.56
9	0.71	1.20	2.06	40	0.24	0.35	0.50
10	0.65	1.08	1.80	45	0.22	0.32	0.46
11	0.59	0.98	1.60	50	0.21	0.30	0.43
12	0.55	0.90	1.45	56	0.188	0.269	0.38
13	0.52	0.83	1.33	70	0.174	0.245	0.34
14	0.48	0.78	1.23	80	0.61	0.226	0.31
15	0.46	0.73	1.15	90	0.51	0.211	0.29
16	0.44	0.70	1.07	100	0.143	0.198	0.27
17	0.42	0.66	0.01	150	0.115	0.160	0.211
18	0.40	0.63	0.96	200	0.099	0.136	0.185
19	0.39	0.60	0.92	250	0.089	0.120	0.162

Оглавление