Практическое занятие 3 по дисциплине «Методы математического моделирования» на тему: Задачи размещения

В процессе занятия студент должен:

1. Научиться формулировать задачи в терминах теории графов.
2. Ознакомиться с алгоритмами решения задач размещения.
3. Уметь формулировать другие родственные задачи.
4. Выполнить задания в письменной форме.

В практической деятельности постоянно возникают задачи «наилучшего» размещения оборудования (или средств обслуживания) в сетях или графах. В частности, если граф представляет сеть дорог и вершины соответствуют отдельным районам, то можно поставить задачу оптимального размещения больниц, полицейских участков, пожарных частей и многих других крайне необходимых предприятий и служб. В таких случаях критерий оптимальности может состоять в минимизации расстояния (или времени проезда) от пункта обслуживания до самой отдалённой вершины графа, т.е. в оптимизации «наихудшего варианта». В более общей задаче требуется разместить несколько таких пунктов обслуживания. При этом самая отдалённая вершина графа должна находиться, по крайней мере, от одного пункта обслуживания на минимально возможном расстоянии. К таким задачам относятся задачи размещения аварийных служб, и поэтому объективным требованием здесь является минимизация наибольшего расстояния от произвольной вершины графа до ближайшего к ней пункта обслуживания. Задачи такого типа называются *минимаксными задачами* размещения. Места размещения пунктов обслуживания, полученные при решении таких задач, называются *центрами* графа.

В некоторых задачах размещения лучше всего было бы минимизировать сумму всех расстояний от вершин графа до центра обслуживания (если предполагать, что ищется место для размещения только одного пункта обслуживания). Такой критерий является наиболее подходящим, например, в задаче о размещении склада в сети дорог, где вершины представляют потребителей, обслуживаемых этим складом, или в задаче размещения телефонных станций в телефонной сети, где вершины представляют абонентов. Задачи такого типа вообще относятся к минисуммным задачам размещения, хотя целевая функция является часто не просто суммой расстояний, а суммой различных функций от расстояний. Места размещения пунктов обслуживания, полученные в результате решения минисуммной задачи, называются *медианами* графа.

Математическая структура задачи размещения определяется конфигурацией области допустимых точек и способом оценки качества размещения. Ограничимся такими задачами размещения, которые являются не очень сложными с математической точки зрения.

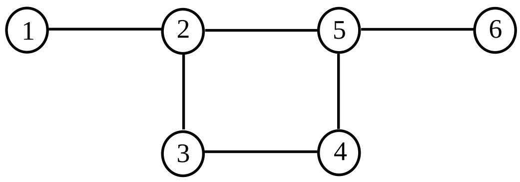

Рис.1. Граф, все рёбра которого имеют длину, равную единице

Рассмотрим несколько примеров, встречающихся на практике задач размещения.

1. Размещение поста МЧС. Администрация округа решила построить новый пост МЧС, который должен обслуживать все шесть городов округа. Этот пост должен располагаться возле какой-либо из автомагистралей, но так, чтобы минимизировать расстояние до наиболее отдалённого от неё города. Если автомагистраль округа изображается ребром графа, то задача размещения пожарного поста становится задачей такого размещения точки на ребре графа, при котором минимизируется расстояние вдоль рёбер (автомагистралей) от этой точки до наиболее удалённой вершины графа (города). Рассмотрим граф, представленный на рис. 20. Если в качестве точки размещения выбрать вершину 3, то наиболее отдалённой от вершины 3 является вершина 6. Расстояние от вершины 3 до вершины 6 равно трём единицам. Более удачным является выбор вершины 2, которая отдалена от любой вершины графа не более чем на две единицы. Ещё более удачным является выбор в качестве точки размещения средней точки ребра (2, 5). Эта точка отдалена от вершин 1, 3, 4, 6, на 1,5 ед.

2. Новая почта. Пусть в этом округе нужно разместить здание новой почты так, чтобы сумма расстояний от почты до каждого города округа была минимальной. Размещение почты в средней точке ребра (2, 5) дало бы суммарное расстояние, равное $1{,}5+0{,}5+1{,}5+1{,}5+0{,}5+1{,}5=7$ ед., так как расстояние от средней точки ребра (2, 5) до вершин 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно равно 1,5; 0,5; 1,5; 1,5; 0,5; 1,5 ед.

В примерах 1 и 2 по существу рассмотрены одинаковые задачи. Они отличаются только критерием оценки качества размещения. В примере 1 минимизируется максимальное расстояние; а в примере 2 – сумма расстояний. Точка размещения, выбранная в соответствии с первым критерием, т.е. точка, в которой минимизируется максимальное расстояние до всех вершин графа, называется ***центром***. Точка, выбранная в соответствии со вторым критерием, т.е. точка, в которой минимизируется сумма расстояний до всех вершин графа, называется ***медианой***.

3. Станция помощи водителям. Пусть в этом же округе необходимо разместить станцию эвакуаторов для оказания помощи водителям, попавшим в аварию на какой-либо из автомагистралей округа. Пусть критерием качества размещения станции будет минимум максимального расстояния, которое эвакуатор должен преодолеть до возможного места аварии. В этом случае вместо максимального расстояния до всех вершин графа (см. пример 1) должно рассматриваться максимальное суммарное расстояние до всех точек каждого ребра сети.

4. Телефонная станция. Пусть для размещения телефонной станции должно быть выбрано место либо в одной из вершин сети, либо вдоль какой-либо автомагистрали. Место размещения телефонной станции следует выбрать так, чтобы минимизировалась суммарная протяжённость всех телефонных линий, которые будут проложены между станцией и шестью городами. Усложним задачу, считая, что города имеют различную численность населения и количество требуемых линий между станцией и каждым из городов находится в пределах от 1 до m. Заметим, что если для соединения каждого города с телефонной станцией требуется только одна линия, то сформулированная задача имеет математическую структуру, аналогичную структуре задачи примера 2. Однако теперь следует точнее учесть численность населения определённых городов и влияние на выбор места размещения станции в более густонаселённых городах.

Задачи поиска центра

Центр – это любая вершина v, такая, что расстояние от неё до наиболее удалённой вершины минимально. Центр отыскивается как один из элементов матрицы расстояний D, значение d_{ij} которой определяет кратчайшее расстояние от вершины v_i к вершине v_j. Элементы матрицы D могут быть вычислены с помощью алгоритма Флойда. Максимальное расстояние от вершины v_i до любой вершины графа является элементом i-й строки матрицы D, имеющим максимальное значение. Центром является произвольная вершина v, которой соответствует строка матрицы D, содержащая элемент с наименьшим максимальным значением.

Найдём центр для графа G (рис. 21).

С помощью алгоритма Флойда получим матрицу D кратчайших расстояний между всеми парами вершин.

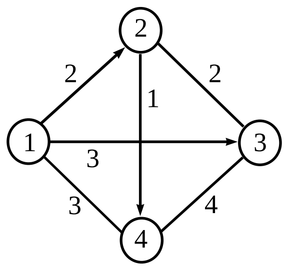

Рис. 21. Сеть G

$$D = \begin{array}{c|cccc|c|} & 1 & 2 & 3 & 4 & \max \\ \hline 1 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 0 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Откуда $\min\{3, 4, 6, 5\} = 3$ и достигается он для максимального значения первой строки. Следовательно, вершина 1 является центром графа, а расстояние от вершины 1 до наиболее отдалённой вершины графа равно трём.

Главный центр – это такая вершина v, что расстояние от вершины v до наиболее удалённой точки на дугах графа минимально. ***Абсолютный центр*** – это любая точка на дуге такая, что расстояние от неё до наиболее отдалённой вершины графа минимально. ***Главный абсолютный центр*** – это любая точка на дуге графа, что расстояние от неё до максимально отдалённой точки на дуге минимально.

Например, для сети на рис. 21 главным и абсолютным центром является вершина 1. Наиболее удалённая от вершины 1 точка лежит на дуге (3, 4) и расстояние от вершины 1 до этой точки равно 5.

Методы нахождения различных центров изложены, например, в [29, 33].

Медиана – это такая вершина сети, что сумма расстояний от неё до всех остальных вершин графа минимальна. Найдём медиану для графа, изображённого на рис. 21. С помощью алгоритма Флойда получим матрицу D кратчайших расстояний между всеми парами вершин.

$$D = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 & 4 & \Sigma \\ \hline 1 & 0 & 2 & 3 & 3 & 8 \\ \hline 2 & 4 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ \hline 3 & 6 & 2 & 0 & 3 & 11 \\ \hline 4 & 3 & 5 & 4 & 0 & 12 \\ \hline \end{array}$$

Следовательно, вершина 2 является медианой этой сети. Сумма расстояний от вершины 2 ко всем остальным вершинам равна 7.

Главная медиана – это такая вершина v, что сумма расстояний от v до каждой из дуг минимальна. Под расстоянием от вершины до дуги понимается максимальное расстояние от вершины до точек на этой дуге. Например, для сети G на рис. 21 главной медианой является вершина 1.

Абсолютная медиана – это такая точка на дуге, что сумма расстояний от неё до всех вершин графа минимальна. Можно доказать, что в любом графе всегда существует вершина, являющаяся абсолютной медианой. Таким образом, любая медиана является также абсолютной медианой, и поэтому для её отыскания не требуется никаких новых методов.

Главная абсолютная медиана – это такая точка на дуге графа, что сумма расстояний от неё до всех дуг минимальна. В качестве расстояния от некоторой точки до дуги принимается максимальное из расстояний от данной точки до всех точек рассматриваемой дуги. Можно доказать, что если для неориентированного ребра (a,b) выполняется неравенство, что разность суммы расстояний от вершин a до каждой из дуг сети G и суммы расстояний от вершины b до каждой из дуг сети G по абсолютной величине больше $\frac{d(a,b)+d(b,a)}{2}$, то ни одна из внутренних точек этой дуги не может быть главной абсолютной медианой. Например, половинная точка на дуге (2, 5) является главной абсолютной медианой сети на рис. 20, суммарное расстояние этой точки от всех дуг графа равно 8,5.

Взвешенное размещение. Ранее при решении задачи размещения предполагалось, что каждая вершина и каждая дуга графа имеют одинаковый вес. Однако на практике встречаются ситуации, когда целесообразно приписать вершинам сети различные веса и умножать расстояние до вершины на вес этой вершины. Существуют также ситуации, в которых следует умножать расстояние до дуги на вес дуги, например, если дуги представляют участки автомагистрали, которые должны быть обслужены станцией аварийного обслуживания. Каждому участку автомагистрали следовало бы приписать вес, соответствующий интенсивности движения по нему транспорта. Методы решения задач размещения, рассмотренные ранее, могут быть обобщены для нахождения решения задач размещения при наличии весов вершин и дуг, т.е. задач нахождения взвешенного центра. Для этого достаточно помножить каждое из расстояний (т.е. каждое расстояние вершина – вершина, вершина – дуга, точка – вершина, точка – дуга) на соответствующий вес, приписанный вершине или дуге, до которых измеряется расстояние. Если вместо исходных невзвешенных использовать взвешенные расстояния, то с помощью методов, рассмотренных ранее, будут получаться соответствующие решения задач взвешенных размещений.

1. Кратные центры и кратные медианы. Пусть условия задачи позволяют выбрать место размещения нескольких пунктов обслуживания. Тогда каждая вершина (или дуга) должна быть поставлена в соответствие ближайшему к ней пункту обслуживания. Решение таких задач размещения значительно усложняется тем, что оно включает две стадии: 1) разбиение множества вершин (или дуг) на подмножества и 2) выбор наилучшего размещения для всех элементов каждого из подмножеств вершин (или дуг).

2. Размещение аварийных служб и пунктов обслуживания. Рассмотрим задачу обслуживания нескольких жилых районов или населённых пунктов (связанных между собой дорожной сетью) одним пунктом обслуживания (например, одной больницей или одним полицейским участком). По некоторым причинам (например, наличие людских ресурсов) пункт обслуживания должен быть размещён в одном из этих районов, а не в произвольной точке какой-либо дороги. Пусть «длины» c_{ij} дуг сети G (вершины которого соответствуют районам, а дуги – дорогам) образуют матрицу времён проезда между районами. Эта матрица необязательно симметрическая, т.е., вообще говоря, $c_{ij} \neq c_{ji}$.

В случае размещения полицейского участка или пожарного депо интересуются временем, необходимым для проезда в наиболее отдалённый из этих районов. Следовательно, задача размещения полицейского участка (или пожарного депо) состоит в минимизации этого времени. Задача становится более реалистичной, если каждой вершине графа приписывается вес w_i, представляющий вероятность потребности данного района в соответствующем обслуживании. Эти веса, например, могут быть пропорциональны численности населения каждого района. Вершина, которая минимизирует время проезда до самого отдалённого района, является одним из центров сети.

3. Размещение нескольких пунктов обслуживания. Часто имеет место ситуация, когда одного пункта обслуживания недостаточно, поскольку он не в состоянии обслужить все поступающие вызовы, и тогда возникает задача о наилучшем размещении нескольких таких пунктов обслуживания. Эту задачу можно сформулировать так.

Найти наименьшее число пожарных депо (например) и такое их размещение, чтобы расстояние от каждого жилого района до ближайшего к нему пожарного депо не превышало наперёд заданной величины. Если число пожарных депо известно, то требуется разместить их так, чтобы расстояние от любого района до ближайшего к нему депо было минимально возможным.

4. Выбор места для склада. Рассмотрим задачу снабжения ряда потребителей товарами, поступающими с одного склада. Потребителей можно объединить в группы так, чтобы каждую группу обслуживало целое число грузовиков. Машина выезжает со склада, обслуживает некоторую группу потребителей и возвращается на склад. Группы потребителей можно представить вершинами графа, а сеть дорог – его дугами. На практике каждой группе потребителей присваивается вес w_i, представляющий её «важность» (например, w_i может быть числом, пропорциональным годовому потреблению или частоте, с которой транспорт должен объезжать эту группу потребителей, чтобы удовлетворить их потребности). В этом случае задача состоит в определении такого места для склада, чтобы общее расстояние, проходимое транспортом, было бы минимально возможным. Если матрица расстояний $D(G)$ задаёт расстояния в километрах, то требуемым местом расположения склада будет такая вершина v_i графа, для которой сумма внешних $\sum\limits_{v_j \in V} w_j \cdot d(v_i, v_j)$ и внутренних $\sum\limits_{v_j \in V} w_j \cdot d(v_j, v_i)$ передаточных чисел будет наименьшей.

Пример 5. Руководители сети магазинов «Утконос» решили в одном из действующих магазинов создать склад для хранения овощной продукции. Так как оборудование для склада дорого стоит, то у фирмы нет возможности оборудовать несколько складов. Размещение склада в одном из помещений действующего магазина также объясняется экономией финансовых средств (не придется платить за аренду помещения). Требуется определить оптимальное место для склада, которое будет обеспечивать минимальные затраты на доставку овощей, хранящихся на складе, в другие магазины торговой сети. Кроме того, в одном из этих магазинов было решено разместить дежурную аварийную службу, в обязанности которой входили бы выезды в другие магазины при возникновении чрезвычайных ситуаций (пожар, нарушения в работе канализации, перебоя в подаче тепла или электричества и т.д.). Поэтому следует также и для аварийной службы выбрать «наилучшее» место.

Решение. На рис. 22 приведена сеть, на которой магазины изображены вершинами, две вершины (магазина) v_i и v_j соединены ребром при наличии прямой дороги между ними, цифры на рёбрах – это длина пути между магазинами.

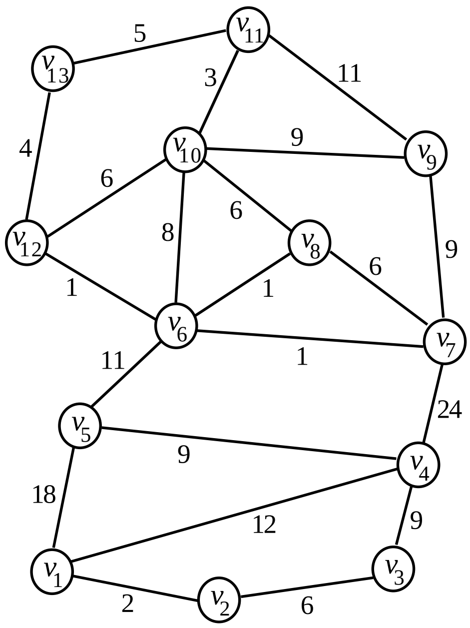

Рис. 22. Сеть магазинов «Утконос»

С помощью алгоритмов для нахождения кратчайших расстояний между каждой парой вершин сети найдём матрицу кратчайших расстояний.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	Σ
v_1	0	2	8	12	18	29	26	32	35	37	40	41	**45**	325
v_2	2	0	6	14	20	31	39	45	**48**	39	42	43	47	376
v_3	8	6	0	9	18	29	33	39	42	37	40	41	**45**	347
v_4	12	14	9	0	9	20	24	30	33	28	31	32	**36**	278
v_5	18	20	18	9	0	11	**30**	27	28	19	22	23	27	252
v_6	29	**31**	29	20	11	0	19	16	17	8	11	12	16	219
v_7	26	**39**	33	24	30	19	0	6	9	12	15	18	18	249
v_8	32	**45**	39	30	27	16	6	0	15	6	9	12	14	251
v_9	35	**48**	42	33	28	17	9	15	0	9	11	15	16	279
v_{10}	37	**39**	37	28	19	8	12	6	9	0	3	6	8	**212**
v_{11}	40	**42**	40	31	22	11	15	9	11	3	0	9	5	238

v_{12}	41	**43**	41	32	23	12	18	12	15	6	9	0	4	256
v_{13}	45	**47**	45	36	27	16	18	14	16	8	5	4	0	281

Найдём сумму всех элементов каждой строки матрицы кратчайших расстояний. Самая маленькая сумма, равная 212, в строке матрице, соответствующей вершине v_{10}. Следовательно, наиболее подходящим местом для расположения склада является вершина v_{10} (или 10-й магазин).

Затем, во всех строках матрицы ищем и выделяем самые большие числа в строке, если таких чисел несколько, то выбираем любое из них. В нашей таблице такие числа подчёркнуты. Выбираем из этих чисел самое маленькое. В какой строчке будет находиться самое маленькое число, в таком магазине следует расположить дежурную аварийную службу магазинов. В нашей таблице это число 30 и находится оно в строчке, соответствующей вершине v_5, следовательно, дежурную аварийную службу лучше всего расположить в пятом магазине.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}
v_1	0	2	8	12	18	29	26	32	35	37	40	41	**45**
v_2	2	0	6	14	20	31	39	45	**48**	39	42	43	47
v_3	8	6	0	9	18	29	33	39	42	37	40	41	**45**
v_4	12	14	9	0	9	20	24	30	33	28	31	32	**36**
v_5	18	20	18	9	0	11	**30**	27	28	19	22	23	27
v_6	29	**31**	29	20	11	0	19	16	17	8	11	12	16
v_7	26	**39**	33	24	30	19	0	6	9	12	15	18	18
v_8	32	**45**	39	30	27	16	6	0	15	6	9	12	14
v_9	35	**48**	42	33	28	17	9	15	0	9	11	15	16
v_{10}	37	**39**	37	28	19	8	12	6	9	0	3	6	8
v_{11}	40	**42**	40	31	22	11	15	9	11	3	0	9	5
v_{12}	41	**43**	41	32	23	12	18	12	15	6	9	0	4
v_{13}	45	**47**	45	36	27	16	18	14	16	8	5	4	0

Задачи для самостоятельного решения.

1. Дана матрица кратчайших расстояний между каждой парой вершин сети.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	0	1	5	3	5
B	1	0	5	3	4
C	5	5	0	2	1
D	3	3	2	0	1
E	5	4	1	1	0

Найти наилучшее место для размещения станции экстренной помощи или склада.

2. Дана матрица кратчайших расстояний между каждой парой вершин сети:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	0	2	1	3	5
B	2	0	1	5	3
C	1	1	0	4	4
D	3	5	4	0	3
E	5	3	4	3	0

Найти наилучшее место для размещения станции экстренной помощи или склада.