Практическое занятие 1 по дисциплине «Методы математического моделирования» на тему: Задача китайского почтальона и эйлеровы циклы.

В процессе занятия студент должен:

1. Научиться формулировать задачи в терминах теории графов.
2. Ознакомиться с алгоритмами решения задачи китайского почтальона.
3. Уметь формулировать другие родственные задачи.
4. Выполнить задания в письменной форме.

Эйлеровы циклы и задача китайского почтальона

Если дан неориентированный связный граф G, то ***эйлеров цикл*** (эйлерова цепь) – это такой цикл (цепь), который проходит ровно один раз по каждому ребру.

Очевидно, не все графы имеют эйлеровы циклы (см., например, граф на рис. 1), но если эйлеров цикл существует, то это означает, что, следуя вдоль этого цикла, можно нарисовать граф на бумаге, не отрывая от неё карандаша. Граф на рис. 2 имеет следующий эйлеров цикл (начиная с вершины x_1): $a_1a_2a_3a_4a_{15}a_{14}a_{13}a_{12}a_{11}a_{16}a_{17}a_{10}a_9a_8a_5a_7a_6$. Направление движения по каждому ребру показано на рис. 2 стрелками.

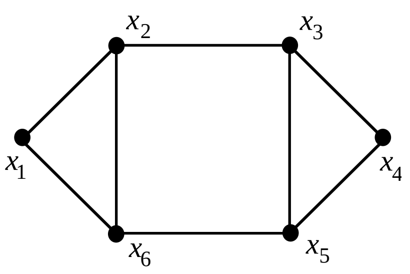


Рис.1. Граф без эйлерова цикла

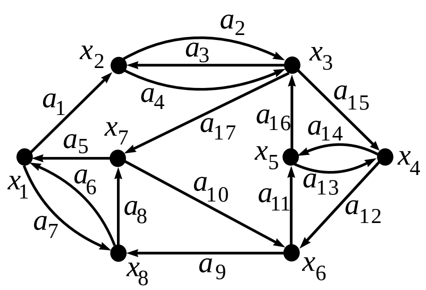
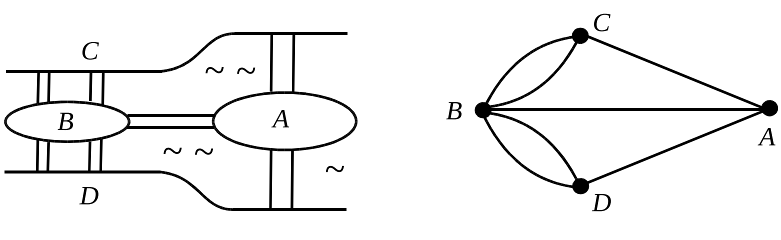


Рис.2. Эйлеров граф

Эйлер первым в своей знаменитой задаче о кёнигсбергских мостах рассмотрел вопрос о существовании таких циклов в графах.

Кёнигсберг был расположен на обоих берегах реки Преголя и на двух островах этой реки. Берега реки и два острова соединены семью мостами, как показано на карте (рис. 3,*а*).



А ***б***

Рис.3. Карта Кёнигсберга (*а*), эквивалентный граф (*б*)

Вопрос, поставленный в 1736 г., состоит в том, можно ли, начав с некоторой точки, совершить прогулку и вернуться в исходную точку, пройдя по каждому мосту ровно один раз. Если каждый берег реки и острова́ считать вершиной графа, а каждый мост – ребром, то карту (см. рис.3,*а*) можно представить в виде графа, изображённого на рис.3,*б*, и ответ на поставленный вопрос зависит теперь от существования эйлерова цикла в этом графе. Эйлер установил, что указанный граф не содержит эйлерова цикла, и этот результат ознаменовал рождение теории графов. Основная теорема о существовании эйлеровых циклов формулируется так.

Теорема (Эйлер). Связный неориентированный граф G содержит эйлеров цикл (эйлерову цепь) тогда и только тогда, когда число вершин нечётной степени равно 0 (0 или 2).

Эйлеровым графом называется неориентированный граф, в котором существует цикл, проходящий ровно один раз по каждому из рёбер графа.

Алгоритм Флёри. Пусть G – эйлеров граф. Тогда следующая процедура всегда возможна и приводит к эйлеровой цепи графа G: выйдя из произвольной вершины, идём по рёбрам графа произвольным образом, соблюдая лишь следующие правила:

а) стираем рёбра по мере их прохождения, а также изолированные вершины (т.е. вершины, не инцидентные никакому ребру), которые при этом образуются;

б) на каждом шаге идём по мосту (т.е. ребру, удаление которого увеличивает число компонент связности) только тогда, когда нет других возможностей.

Некоторые родственные задачи

Сразу же вспоминается ряд вопросов, связанных с тем, имеется ли в неориентированном графе эйлеров цикл. Например:

1. Каково наименьшее число цепей или циклов необходимо для того, чтобы каждое ребро графа G содержалось точно в одной цепи или в одном цикле? Очевидно, что если G имеет эйлерову цепь или эйлеров цикл, то ответом будет число один.

2. Рёбрам графа G приписаны положительные веса. Требуется найти цикл, проходящий через каждое ребро графа G по крайней мере один раз и такой, что для него общий вес (а именно сумма величин $n_j \cdot w(a_j)$, где число n_j показывает, сколько раз проходилось ребро a_j, а $w(a_j)$ – вес ребра a_j) минимален. Очевидно, что если G содержит эйлеров цикл, то любой такой цикл будет оптимальным, так как каждое ребро проходится только один раз и вес этого цикла равен тогда $\sum_{j=1}^{m} w(a_j)$.

Сформулированная задача 2 называется ***задачей китайского почтальона***, и её решение имеет много потенциальных приложений.

1. Сбор мусора. Допустим, что определённый район города обслуживается единственной машиной для сбора домашнего мусора. Рёбра графа G представляют дороги, а вершины – пересечения дорог. Величина $w(a_j)$ – вес ребра a_j будет соответствовать длине дороги. Тогда проблема сбора мусора в данном районе сводится к нахождению цикла в графе G, проходящего по каждому ребру G по крайней мере один раз. Требуется найти цикл с наименьшим километражем. В действительности ёмкость машины и продолжительность рабочего дня накладывают ограничения на число улиц, которые может обслужить одна машина за день. То, что действительно может требоваться, – это нахождение не отдельного цикла, а некоторого числа Q циклов, обслуживаемых по одному в день, скажем, за период в Q дней.

2. Доставка молока или почты. При доставке молока или почты возникают ещё две задачи, когда требуется определить маршрут, проходящий хотя бы один раз по каждой из улиц. Здесь задача состоит в нахождении маршрута, минимизирующего общий километраж (или время, или стоимость и т.д.).

3. Проверка электрических, телефонных или железнодорожных линий. Проблема инспектирования распределённых систем (лишь некоторые из которых названы выше) связана с непременным требованием проверки всех «компонент».

Другие приложения могут быть связаны с разбрасыванием смеси песка и соли на главных дорогах зимой для предотвращения обледенения, с наилучшим методом работы автоматических вентиляционных устройств, с уборкой помещений и коридоров в больших учреждениях и даже с наилучшим маршрутом осмотра музея.

Алгоритм для задачи китайского почтальона

Рассмотрим неориентированный граф $G=(V,E)$. Среди вершин из V некоторые вершины (скажем, из множества V^+) будут иметь чётные степени, а остальные (из множества $V^- = V \setminus V^+$) – нечётные степени. Далее сумма степеней d_i всех вершин $v_i \in V$ равна удвоенному числу рёбер в E (так как каждое ребро добавляет по единице к степеням двух его концевых вершин) и поэтому равна чётному числу $2m$. Следовательно, $\sum_{v_i \in V} d_i = \sum_{v_i \in V^+} d_i + \sum_{v_i \in V^-} d_i = 2m$, и так как сумма $\sum_{v_i \in V^+} d_i$ чётна, то сумма $\sum_{v_i \in V^-} d_i$ также чётна. Но все d_i в последней сумме нечётны, значит число $|V^-|$ вершин нечётной степени чётно.

Пусть M – множество таких цепей (скажем, μ_{ij}) в $G=(V,E)$ между концевыми вершинами v_i и v_j, $v_i, v_j \in V$, что никакие две цепи не имеют одинаковых конечных вершин, т.е. цепи соединяют различные пары вершин из V^- и покрывают все вершины множества V^-. Число цепей μ_{ij}
в M равно $\frac{1}{2}|V^-|$, а как было показано выше, $|V^-|$ всегда чётно, следовательно, это число всегда целое, если, конечно, оно определено. Предположим теперь, что все рёбра, образующие цепь, добавлены к G в качестве искусственной параллельной цепи, причём эти ребра остаются в графе G. Это означает прежде всего, что все рёбра из G, образующие цепь μ_{ij}, теперь удвоены. Так поступаем с каждой цепью $\mu_{ij} \in M$, и полученный граф обозначим через $G^-(M)$. Поскольку некоторые рёбра из графа G могут входить более чем в одну цепь μ_{ij}, некоторые рёбра из $G^-(M)$ могут быть (после того как добавлены все «новые» цепи μ_{ij}) утроены, учетверены и т.д.

Теорема. Для любого цикла, проходящего по графу G, можно выбрать множество M, для которого граф $G^{-}(M)$ имеет эйлеров цикл, соответствующий первоначально взятому циклу в графе G. Это соответствие таково, что если цикл проходит по ребру (v_i, v_j) из G l раз, то в $G^{-}(M)$ существует l рёбер (одно реальное и $l-1$ искусственных) между v_i и v_j, каждое из которых проходится ровно один раз эйлеровым циклом из $G^{-}(M)$. Справедливо и обратное утверждение.

Доказательство. Если цикл проходит по графу G, то по крайней мере одно ребро, инцидентное каждой вершине v_i нечётной степени, должно проходиться дважды. (Ребро, проходимое дважды, можно рассматривать как два параллельных ребра – одно реальное и одно искусственное – и каждое из них проходится один раз.) Пусть это ребро (v_i, v_k). В случае нечётности степени d_k вершины v_k графа G добавление искусственного ребра прежде всего сделает d_k чётным, и значит только ребро (v_i, v_k) нужно будет проходить дважды, если ограничиться рассмотрением лишь вершин v_i и v_k.
В случае когда d_k чётно, добавление искусственного ребра сделает d_k нечётным, а второе ребро, выходящее из v_k, должно быть пройдено дважды (т.е. добавляется еще одно искусственное ребро). Такая ситуация сохраняется до тех пор, пока не встретится вершина нечётной степени, о чём говорилось выше. Следовательно, чтобы удовлетворить условию возвращения в вершину v_i, нужно дважды пройти всю цепь из v_i в некоторую другую вершину нечётной степени v_r, принадлежащую множеству V^{-}. Это автоматически приводит к выполнению условия прохождения вершины v_r. Аналогично обстоит дело для всех других вершин v_i из V^{-}. Это значит, что всё множество M цепей из G, определённое выше, должно проходиться дважды, и так как отсюда вытекает, что каждое ребро из $G^{-}(M)$ должно проходиться один раз, то теорема доказана.

Алгоритм решения задачи китайского почтальона непосредственно следует из доказанной теоремы, так как всё, что для этого необходимо, состоит в нахождении множества цепей M^{*} (цепного паросочетания для множества вершин нечётной степени), дающего наименьший дополнительный вес. Цикл наименьшего веса, проходящий по G, будет иметь вес, равный сумме весов всех рёбер из G плюс сумма весов рёбер в цепях из M^{*}. Это то же самое, что и сумма весов всех рёбер – реальных и искусственных – графа $G^{-}(M^{*})$.

Описание алгоритма решения задачи китайского почтальона

Шаг 1. Пусть $C = (c_{ij})$ – матрица весов рёбер графа G. Используя алгоритм решения задачи о кратчайшем пути (см. подразд. 11.3), образуем $(|V^{-}| \times |V^{-}|)$-матрицу $D = (d_{ij})$, где d_{ij} – длина кратчайшего пути, идущего из некоторой вершины $v_i \in V^{-}$ в другую вершину $v_j \in V^{-}$.

Шаг 2. В полном графе на множестве вершин V^{-} найдём наибольшее паросочетание M^{*} с минимальным весом (в соответствии с матрицей весов D). Это можно сделать эффективно с помощью венгерского алгоритма решения задачи о назначениях из (см. гл. 5).

Шаг 3. Если вершина v_α сочетается с вершиной v_β, то определим цепь $\mu_{\alpha\beta}$ наименьшего веса (из v_α в v_β), соответствующую весу $d_{\alpha\beta}$, совершая шаг 1. Добавим искусственные рёбра в G, соответствующие рёбрам из $\mu_{\alpha\beta}$, и проделаем это для всех других цепей из множества M^*, в результате чего получится граф $G^-(M^*)$.

Шаг 4. Сумма весов всех рёбер графа $G^-(M^*)$, найденная с использованием матрицы $C=(c_{ij})$ (вес искусственного ребра берётся равным весу параллельного ему реального ребра), равна минимальному весу цикла, проходящего по G. При этом число прохождений цикла по ребру (v_i, v_j) равно общему числу параллельных рёбер между $v_i \in V^-$ и $v_j \in V^-$ в $G^-(M^*)$.

Следует заметить, что поскольку на шаге 2 используем паросочетание минимального веса, никакие два кратчайших пути μ_{ij} и μ_{pq} при таком паросочетании (скажем, идущие из i в j и из p в q) не могут иметь общего ребра. Если бы они имели общее ребро (a,b), как показано на рис.4, то паросочетание вершин i и q (использующее подцепи от i к b и от b к q) и паросочетание вершин p и j (использующее подцепи от p к a и от a к j) давало бы общее паросочетание веса, меньшего, чем вес первоначального паросочетания, что противоречит предположению о минимальности исходного паросочетания. Следовательно, граф $G^-(M^*)$ не должен содержать более двух параллельных рёбер между любыми двумя вершинами, т.е. оптимальный цикл не проходит ни по какому ребру графа G более чем два раза.

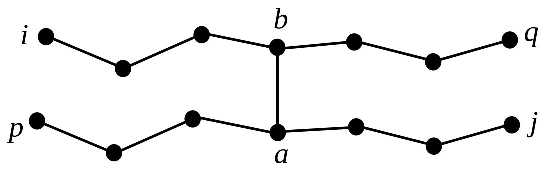


Рис.4. Цепи μ_{ij} и μ_{pq}, имеющие общее ребро (a,b)

Пример 1. Рассмотрим сеть G (рис.5), имеющую 12 вершин и 22 ребра, веса которых указаны у каждого ребра. Задача состоит в нахождении цикла, проходящего по каждому ребру G по крайней мере один раз и имеющего минимальный вес.

Решение. Множество вершин нечётной степени этого графа есть {1, 3, 4, 6, 8, 9}.

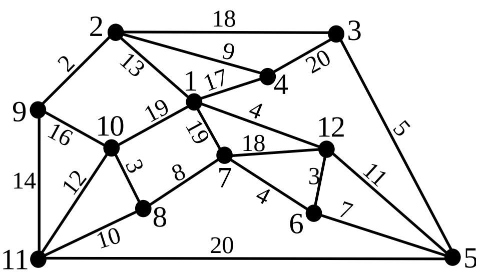


Рис.5. Сеть G

Используя алгоритм нахождения кратчайшего пути Дейкстры, найдём матрицу D кратчайших расстояний между каждой парой вершин с нечётными степенями (шаг 1).

$D=$

	1	3	4	6	8	9
1	–	19	17	7	19	15
3	19	–	20	12	24	20
4	17	20	–	24	20	11
6	7	12	24	–	12	22
8	19	24	20	12	–	19
9	15	20	11	22	19	–

На шаге 2 в полном графе на шести вершинах находим наибольшее паросочетание минимального веса. Таковым среди пятнадцати наибольших паросочетаний полного графа является паросочетание (1; 6), (3; 8), (9; 4) веса 42. Соединяем вершины 1 и 6 цепью 1–12–6 с искусственными рёбрами общей длиной 7, вершины 3 и 8 цепью 3–5–6–7–8 с искусственными рёбрами общей длиной 14 и вершины 4 и 9 цепью 4–2–9 с искусственными рёбрами общей длиной 11.

Граф $G^{-}(M^{*})$, получившийся после выполнения шага 3, изображён на рис.6; пунктиром показаны искусственные рёбра.

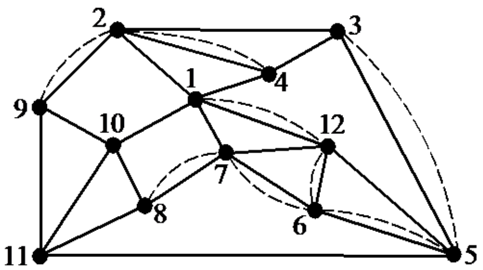


Рис.6. Граф $G^{-}(M^{*})$

Из рис.6 видно, что оптимальный цикл в графе G проходит через рёбра (9, 2), (2, 4), (3, 5), (5, 6), (1, 12), (12, 6), (7, 6) и (8, 7) дважды, а через все остальные рёбра – один раз. Вес этого цикла равен 294.

Как только построен граф $G^{-}(M^{*})$, то могут быть сразу же найдены по алгоритму Флёри эйлеров цикл этого графа и соответствующий оптимальный маршрут, проходящий по первоначальному графу G. Например, для графа на рис.6, один из таких эйлеровых циклов задаётся последовательностью вершин (начиная с вершины 1): 1, 4, 3, 5, 3, 2, 4, 2, 1, 12, 5, 6, 7, 8, 10, 1, 7, 6, 12, 6, 5, 11, 9, 2, 9, 10, 11, 8, 7, 12, 1.

Этот цикл является также соответствующим оптимальным циклом, проходящим по первоначальному графу (см. рис.5). Возможны также другие оптимальные циклы, проходящие рёбра графа в ином порядке. Однако все эти циклы будут проходить дважды по тому же множеству из восьми рёбер. Следовательно, как только определены те рёбра графа G, по которым оптимальный цикл проходит дважды, можно построить несколько таких циклов в графе G. ►

Пример 2. В интернет-магазин по продаже часов в течение недели поступают заказы, а в выходные дни магазин доставляет бесплатно заказы клиентам. Пусть карта заказов на неделю представлена на рис. 7. На ней магазин находится в вершине s, другие вершины – это перекрёстки, рёбра – улицы, цифры на рёбрах – длина улиц, $\times$ – места, куда следует доставить товар. Требуется выбрать оптимальный (кратчайший) маршрут доставки товара клиентам магазина.

Решение. Преобразуем карту заказов в сеть, в которой оставим только улицы, по которым необходимо проехать. Уберём все вершины степени 2 путём склеивания рёбер. Сеть, полученная после преобразования, изображена на рис. 8.

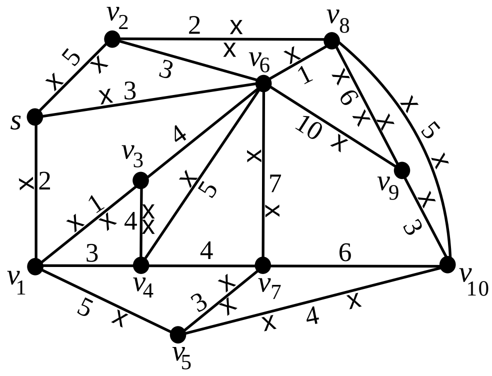


Рис.7. Карта заказов интернет-магазина

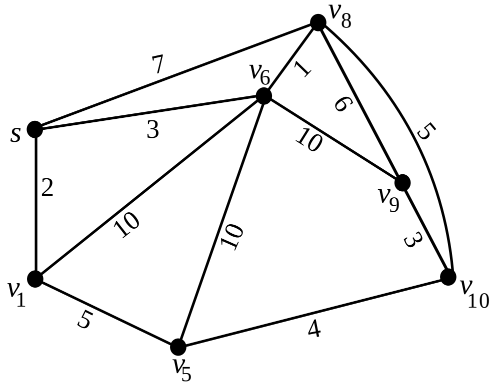


Рис.8. Сеть, полученная из карты на рис.7

С помощью алгоритмов нахождения кратчайших путей найдём матрицу D кратчайших путей между каждой парой вершин сети с нечётными степенями.

$D=$

	s	v_1	v_5	v_6	v_9	v_{10}
s	–	2	7	3	10	11
v_1	2	–	5	5	12	9
v_5	7	5	–	10	7	4
v_6	3	5	10	–	7	6
v_9	10	12	7	7	–	3
v_{10}	11	9	4	6	3	–

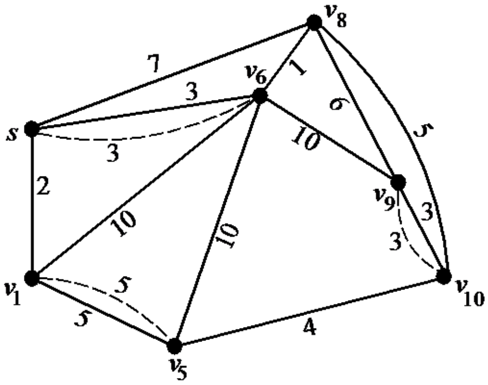


Рис.9. Сеть, превращённая в эйлерову с помощью паросочетания минимального веса

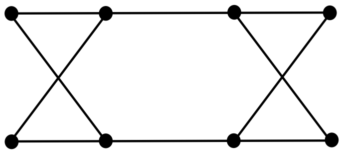
Теперь в полном графе на шести вершинах с матрицей весов D найдём среди 15 паросочетаний паросочетание минимального веса. Таковым является паросочетание веса 11: $(s,v_6),(v_1,v_5),(v_9,v_{10})$.

Добавляем искусственные рёбра вдоль кратчайших путей между концами рёбер паросочетания. Получаем эйлерову сеть (рис.9).

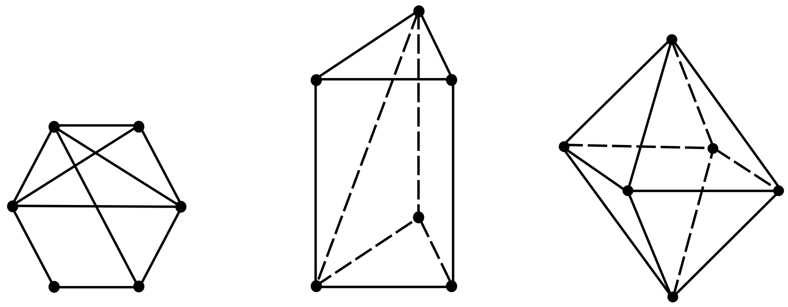
С помощью алгоритма Флёри в сети на рис.9 находим эйлеров цикл, который очевидно будет оптимальным маршрутом доставки товара клиентам. ►

Задачи для самостоятельного решения.

1. С помощью алгоритма Флёри найти эйлерову цепь в графе.

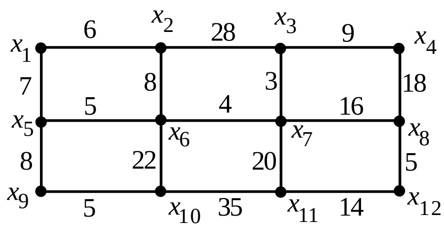


2. У какого из следующих графов существует эйлеров путь или цикл? Если существует, то построить его.



а) б) в)

3. Решить задачу китайского почтальона для взвешенного неориентированного графа G, изображённого на рисунке. (Воспользоваться алгоритмом Дейкстры для нахождения кратчайших путей между каждой парой вершин с нечётными степенями и решить задачу о наибольшем паросочетании минимального веса с помощью полного перебора.)



4. Найти оптимальный маршрут почтальона на графе.