Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашская государственная сельскохозяйственная академия»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

РАЗДЕЛ «КИНЕМАТИКА»

Учебно-методическое пособие и сборник заданий
к расчетно-графической работе

Чебоксары – 2017

УДК 531.8

ББК 22.21

Рецензенты: канд. техн. наук, доцент кафедры транспортно-технологических машин Чебоксарского института (филиала) Московского политехнического университета Федоров Д.И., канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры математики, физики и информационных технологий ФГБОУ ВО Чувашская государственная сельскохозяйственная академия Степанов А.В.

Теоретическая механика. Раздел «Кинематика». Учебно-методическое пособие и сборник заданий к расчетно-графической работе /Сост. И.С. Кручинкина. – Чебоксары: ФГБОУ ВО ЧГСХА, 2017. - 39с.

В пособии приведены задания к расчетно-графической работе по разделу теоретической механики «Кинематика», показаны примеры их выполнения. Кроме того, каждое задание сопровождается краткими теоретическими сведениями в виде методических рекомендаций к выполнению работы. В пособии представлены также вопросы для самопроверки при подготовке к публичной защите работы.

Оно предназначено для обеспечения самостоятельной работы студентов очного и заочного обучения при изучении курса теоретической механики по направлениям подготовки 35.03.06 - «Агроинженерия», 23.03.03 - «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 23.03.01 – «Технология транспортных процессов» и специальности 23.05.01 - «Наземные транспортно-технологические средства».

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом ФГБОУ ВО ЧГСХА, протокол №6 15.03.2018г.

Предисловие

Кинематика является одним из разделов теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, вне связи с силами, определяющими это движение.

Для успешного изучения названного раздела теоретической механики, первоначально студент должен обладать следующими математическими познаниями: уметь свободно дифференцировать функции одного переменного, строить их графики и уметь находить их экстремальные значения, а также быть знакомым с понятиями естественного трехгранника, кривизны кривой и радиуса кривизны; нужно обладать также основными сведениями по теории кривых второго порядка из аналитической геометрии.

Практические навыки в решении инженерных задач кинематики студент приобретает в большей степени самостоятельно при выполнении данной расчетно-графической работы. Однако для выполнения этих работ необходимо иметь соответствующие базовые знания кинематики, которые в краткой форме изложены ниже.

Выполнение заданий следует начать с разбора приведенных здесь тем, разобраться в их деталях, обращая внимание на их практическое приложение. Далее необходимо разобрать пример решения задачи и, выбрав свой вариант, приступать к решению. Заканчивая изучение данных тем раздела кинематики, нужно ответить на все контрольные вопросы для самопроверки.

Расчетно-графическую работу следует выполнять на листах А4, на обложке которой следует написать название раздела, вариант, свою фамилию и инициалы, курс, группу, направление.

При оформлении расчетно-графической работы следует обязательно оставлять поля, схемы чертить карандашом, линейкой и циркулем. Ход решения каждой задачи должен сопровождаться краткими пояснениями, т.е. должны быть указаны какие теоремы, формулы или уравнения применяются при решении данной задачи, единицы измерения у полученных величин. В противном случае задание не засчитывается.

Следует заметить, что задания для выполнения расчетно-графических работ тесно увязаны тематически с рабочими программами «Теоретическая механика» для направлений подготовки 35.03.06 - «Агроинженерия», 23.03.03 - «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 23.03.01 –«Технология транспортных процессов» и специальности 23.05.01 - «Наземные транспортно-технологические средства».

Пособие призвано формировать у студентов соответствующие компетенции, указанные в учебных планах названных направлений подготовки.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ

Задания выполняются студентами на основе полученных знаний по следующим основным темам раздела «Кинематики»:

- Кинематика материальной точки;
- Поступательное и вращательное движение твердого тела;
- Плоскопараллельное движение твердого тела;
- Сложное движение материальной точки и твердого тела.

Ниже вкратце изложены материалы названных тем.

1.1 Способы задания движения точки: векторный, координатный

Раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения точек или тел без учета их инертности и действующих на них сил, называется кинематикой. Изучение кинематики начнем с изучения движения точки.

Положение точки M в любой момент времени в системе отсчета $OXYZ$ (рис. 1.1) можно определить, задав ее радиус-вектор $\bar{r}$, проведенный из начала координат O.

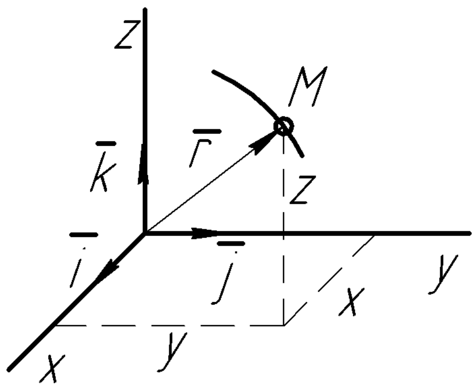

Рисунок 1.1 – Схема к заданию движения точки в векторной форме

При движении точки M вектор $\bar{r}$ будет изменяться с течением времени и по модулю и по направлению. Следовательно, $\bar{r}$ является вектором-функцией, зависящим от аргумента времени t

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$

Данное равенство определяет закон движения точки в векторной форме.

Аналитически вектор задается по проекциям на координатные оси. В декартовых координатах для вектора $\bar{r}$ будет:

$$r_x = x, \ r_y = y, \ r_z = z,$$

где x, y, z - декартовы координаты точки.

Тогда, если ввести единичные векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, получим:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Положение точки можно определять непосредственно ее координатам x, y, z, которые при движении точки будут изменяться с течением времени. Чтобы знать закон движения точки, надо знать значения координат точки для каждого момента времени, т. е. знать зависимости:

$$x = f_1(t), \ y = f_2(t), \ z = f_3(t).$$

Эти уравнения определяют закон движения точки при координатном способе задания движения.

1.2 Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения.

Скорость точки в данный момент времени t равна первой производной от радиус-вектора точки по времени. Скорость $\bar{\vartheta}$ направлена по касательной к траектории движения точки.

Проецируя вектор скорости $\bar{\vartheta} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$ на координатные оси получим:

$$\vartheta_x = \frac{dr_x}{dt}, \ \vartheta_y = \frac{dr_y}{dt}, \ \vartheta_z = \frac{dr_z}{dt}.$$

Или с учетом равенств $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$ находим проекции скорости точки на координатные оси:

$$\vartheta_x = \frac{dx}{dt},\ \vartheta_y = \frac{dy}{dt},\ \vartheta_z = \frac{dz}{dt}.$$

Таким образом, проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.

Зная проекции скорости, найдем ее модуль и направление по формулам:

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{\vartheta_x}{\vartheta},\ \cos\beta = \frac{\vartheta_y}{\vartheta},\ \cos\gamma = \frac{\vartheta_z}{\vartheta},$$

где α, β, γ - углы, которые вектор скорости образует с координатными осями (рис. 1.2).

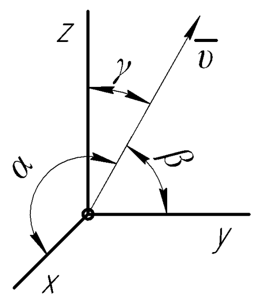

Рисунок 1.2 – Схема к определению направления вектора скорости $\bar{\vartheta}$

Вектор ускорения точки $\bar{a} = \frac{d\bar{\vartheta}}{dt}$. Отсюда, проецируя данное равенство на координатные оси, получим:

$$a_x = \frac{d\vartheta_x}{dt},\ a_y = \frac{d\vartheta_y}{dt},\ a_z = \frac{d\vartheta_z}{dt}.$$

Или

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Зная проекции ускорения, найдем его модуль и направление по формулам:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a},\ \cos\beta_1 = \frac{a_y}{a},\ \cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a},$$

где α_1, β_1, γ_1 - углы, которые вектор $\bar{a}$ образует с координатными осями.

1.3 Скорость и ускорения точки вращающегося твердого тела

Определим скорость точки M твердого тела, находящегося на расстоянии h от оси вращения.

При вращении тела точка M будет описывать окружность радиуса h. Если за время dt проходит элементарный поворот тела $d\varphi$, то точка M совершит путь $dS = h \cdot d\varphi$. Тогда численное значение скорости точки

$$\vartheta = \frac{dS}{dt} = \frac{h \cdot d\varphi}{dt} = h\omega .$$

Таким образом, численное значение скорости точки вращающегося твердого тела равно произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

Направлена скорость ϑ по касательной к описываемой точкой окружности (рис. 1.3).

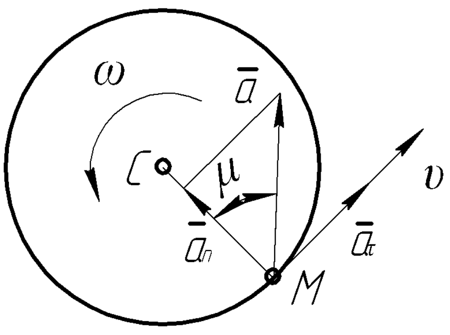

Рисунок 1.3 – Скорость и ускорения точки вращающегося тела

Для нахождения ускорения точки M воспользуемся формулами $a_\tau = d\vartheta/dt$, $a_n = \vartheta^2/\rho$, полученными для криволинейного движения точки. В нашем случае $\rho = h$. С учетом равенства $\vartheta = h\omega$ и подставляя h вместо ρ получим:

$$a_\tau = \frac{d(h\omega)}{dt} = \frac{h \cdot d\omega}{dt} = h\varepsilon , \; a_n = \frac{h^2\omega^2}{h} = h\omega^2 .$$

Касательная составляющая $\bar{a}_\tau$ ускорения направлена по касательной к траектории (в сторону движения при ускоренном вращении тела и в обратную сторону – при замедленном), нормальная составляющая $\bar{a}_n$ всегда направлена по радиусу к оси вращения (см. рис. 1.3). Тогда полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ .$$

1.4 Определение траектории и скорости точки тела, совершающего плоскопараллельное движение

Траектория точки M плоского тела определяется в параметрическом виде в соответствии с рис. 1.4 уравнениями:

$$x = x_A + в\cos(\varphi + \alpha)\,,\ \ y = y_A + в\sin(\varphi + \alpha),$$

где x_A, y_A, φ - известные по предыдущим уравнениям функции времени t;

$в$ - длина отрезка *AM*.

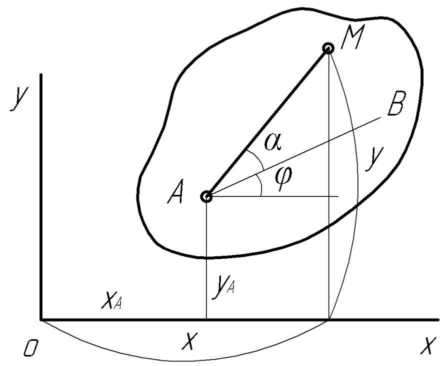

Рисунок 1.4 – Схема к определению траектории точки M плоского тела

Положение точки M фигуры определяется по отношению к осям координат oxy радиус-вектором $\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{r}'$ (рис. 1.5).

Вектор $\bar{r}_A$ определяет положение полюса A, вектор $\bar{r}'$ - положение точки M относительно осей координат $x'Ay'$. После дифференцирования данного векторного равенства $\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{r}'$ получим:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt}\,.$$

Или $\quad \bar{\vartheta}_M = \bar{\vartheta}_A + \bar{\vartheta}_{MA}$.

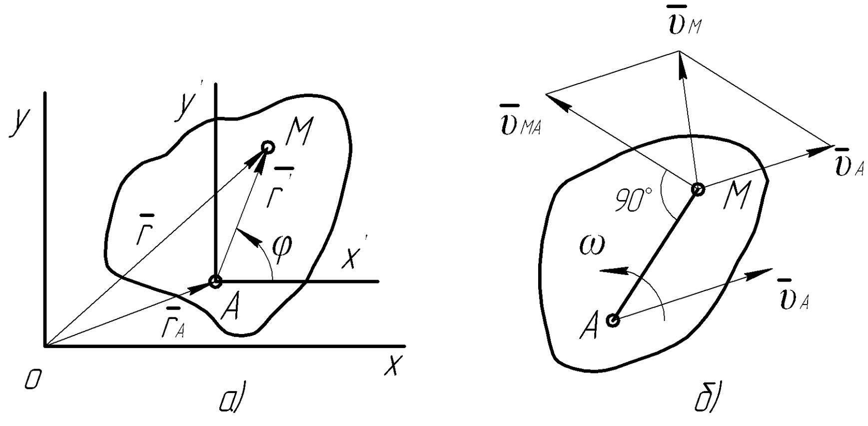

Рисунок 1.5 – Схема к определению скорости точки M плоского тела: $а$ – радиус-векторы; $б$ – скорости движения

При этом скорость $\bar{\vartheta}_{MA}$, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A, будет:

$$\vartheta_{MA} = \omega \cdot MA \; \left(\bar{\vartheta}_{MA} \perp \overline{MA} \right),$$

где ω - угловая скорость фигуры.

Таким образом, скорость любой точки M тела, совершающего плоскопараллельное движение, геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и скорости, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.

1.5 Теорема о проекциях скоростей двух точек тела. Мгновенный центр скоростей.

Проекции скоростей двух точек твердого тела, совершающегося плоскопараллельное движение, на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу (рис. 1.6).

Доказательство:

Пусть точки A и B являются точками плоской фигуры. Принимая точку A за полюс, получим:

$$\overline{\vartheta}_B = \overline{\vartheta}_A + \overline{\vartheta}_{BA}.$$

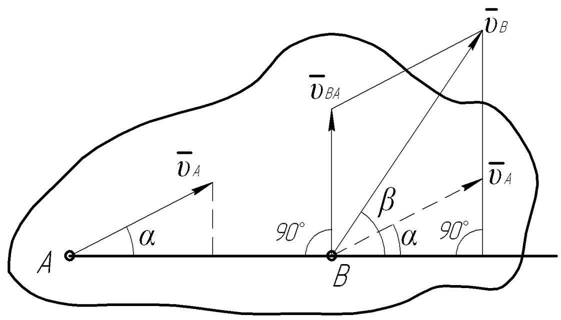

Рисунок 1.6 – Проекции скоростей двух точек тела, совершающего плоскопараллельное движение

Проектируя обе части равенства на ось AB, и учитывая, что вектор $\overline{\vartheta}_{BA}$ перпендикулярен AB, находим

$$\vartheta_B \cos\beta = \vartheta_A \cos\alpha.$$

Точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна 0, называется мгновенным центром скоростей.

Мгновенный центр скоростей P находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к скоростям этих точек (рис. 1.7).

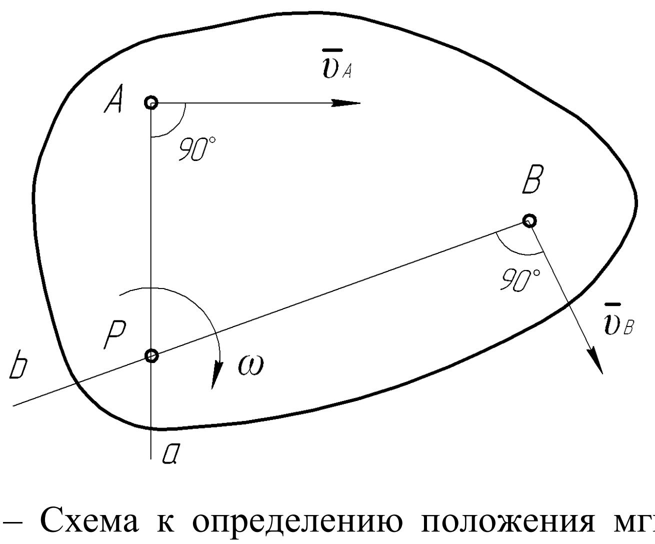

Рисунок 1.7 – Схема к определению положения мгновенного центра скоростей

В самом деле, если допустить, что $\vartheta_P \neq 0$, то по теореме о проекциях скоростей вектор $\overline{\vartheta}_P$ должен быть одновременно перпендикулярным Aa и $B\text{в}$ (см. рис. 1.7), что не возможно.

Если взять в момент времени t точку P за полюс то

$$\overline{\vartheta}_A = \overline{\vartheta}_P + \overline{\vartheta}_{AP} = \overline{\vartheta}_{AP}, \; \overline{\vartheta}_B = \overline{\vartheta}_P + \overline{\vartheta}_{BP} = \overline{\vartheta}_{BP}$$

(здесь $\vartheta_P = 0$).

Или

$$\vartheta_A = \vartheta_{AP} = \omega \cdot PA(\overline{\vartheta}_A \perp PA), \; \vartheta_B = \vartheta_{BP} = \omega \cdot PB(\overline{\vartheta}_B \perp PB) \text{ и т. д.}$$

Таким образом, скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

1.6 Ускорение точки тела при плоскопараллельном движении

Положение точки M по отношению к осям координат oxy, как было сказано выше, определяется радиус-вектором

$$\bar{r} = \bar{r}_A + \bar{r}'.$$

Тогда

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\bar{r}'}{dt^2}.$$

Или

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}.$$

Значение $\bar{a}_{MA}$, как ускорение точки вращающегося тела, определяется по формулам:

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \; tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

где ω и ε - угловая скорость и угловое ускорение фигуры, а μ - угол между вектором $\bar{a}_{MA}$ и отрезком MA (рис. 1.8).

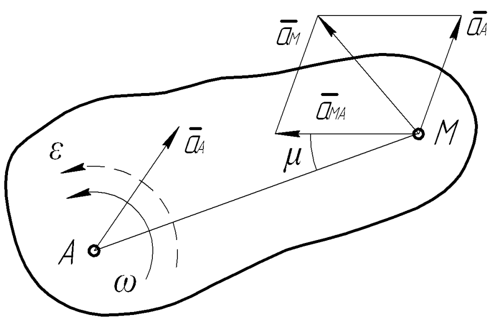

Рисунок 1.8 – Определение ускорения точки тела при плоскопараллельном движении

Таким образом, ускорение любой точки M тела, совершающего плоскопараллельное движение, геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс и ускорение, которое точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.

Заменим $\overline{a}_{MA}$ касательным и нормальным ускорениями (рис. 1.9) и получим:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA}^{\tau} + \overline{a}_{MA}^{n}$$

(здесь $a_{MA}^{\tau} = AM \cdot \varepsilon$, $a_{MA}^{n} = AM \cdot \omega^2$).

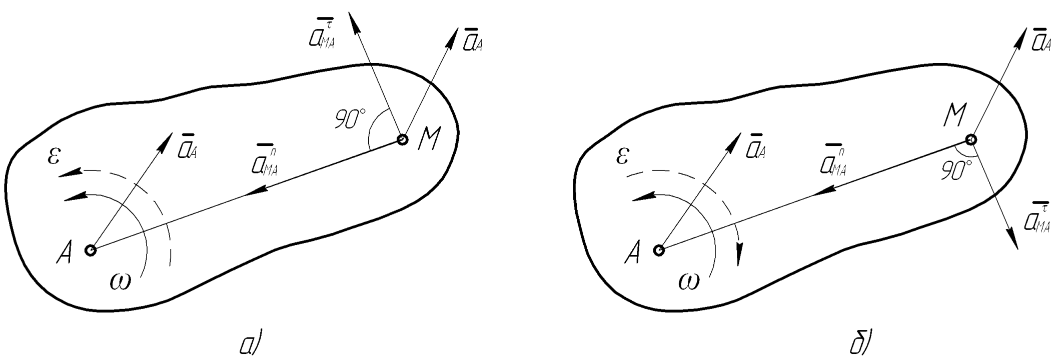

Рисунок 1.9 – Направления ускорений в точке M при ускоренном (а) и замедленном (б) движениях плоской фигуры

Если полюс A движется не прямолинейно, то его ускорение можно тоже представить как сумму касательной $\overline{a}_A^{\tau}$ и нормальной $\overline{a}_A^{n}$ составляющих, тогда

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A^{n} + \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_{MA}^{\tau} + \overline{a}_{MA}^{n}.$$

1.7 Относительное, переносное и абсолютное движение точки. Скорости и ускорения точки при сложном движении

Рассмотрим точку M, движущуюся по отношению к подвижной системе отсчета $oxyz$, которая в свою очередь как-то движется относительно другой системы отсчета $o_1x_1y_1z_1$, которую называем основной или условно неподвижной (рис. 1.10).

Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижной системе отсчета, называется относительным движением. Траектория AB, описываемая точкой в относительном движении, называется относительной траекторией. Скорость точки M по отношению к осям $oxyz$ называется относительной скоростью, а ускорение – относительным ускорением.

Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $oxyz$ по отношению к неподвижной системе $o_1x_1y_1z_1$, является для точки M переносным движением. Скорость той неизменно связанной с подвижными осями $oxyz$ точки m, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M, называется переносной скоростью точки M в этот момент, а ускорение этой точки m - переносным ускорением точки M.

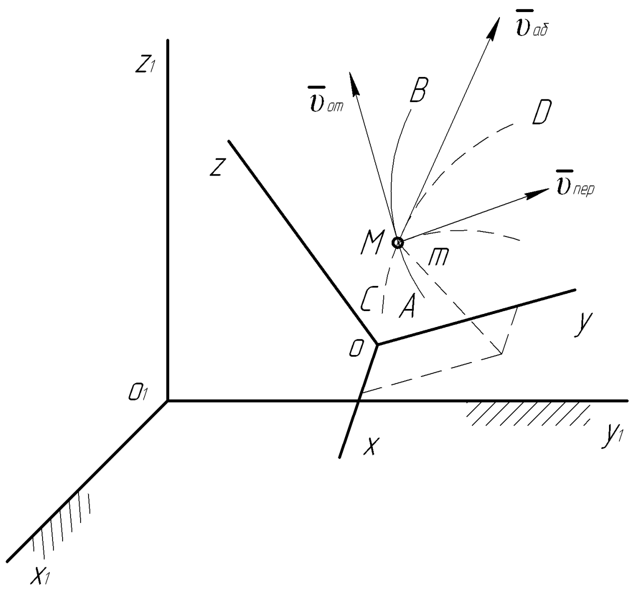

Рисунок 1.10 – Сложное движение точки

Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета $o_1x_1y_1z_1$, называется абсолютным. Траектория CD этого движения называется абсолютной траекторией, скорость – абсолютной скоростью и ускорение – абсолютным ускорением.

1.8 Теорема о сложении скоростей

Рассмотрим сложное движение точки M.

Пусть эта точка совершает за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ вдоль траектории AB относительное перемещение, определяемое вектором $\overline{MM'}$ (рис. 1.11).

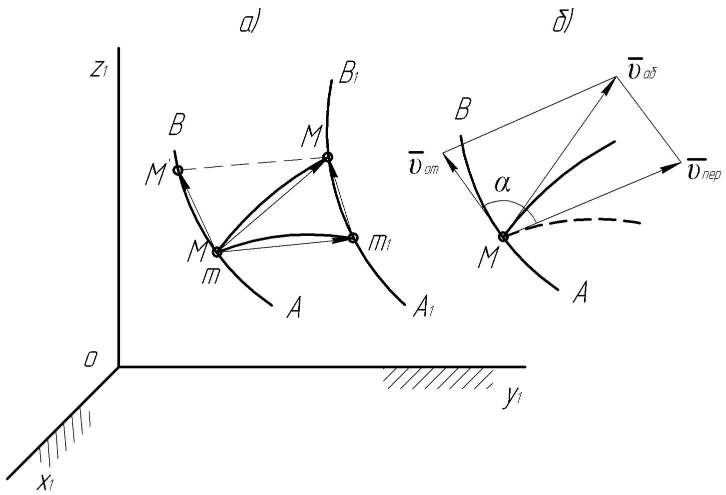

Рисунок 1.11 – Схема к сложению скоростей при сложном движении точки: a – векторы перемещения; $б$ – скорости перемещения

Сама кривая AB, двигаясь вместе с подвижными осями xyz (на рис. не показаны), перейдут за это же время в какое-то новое положение A_1B_1. Одновременно та точка m кривой АВ, с которой в момент времени t совпадает точка M, совершит переносное перемещение $\overline{mm_1} = \overline{Mm_1}$ В результате точка M придет в положение M_1 и совершит за время Δt абсолютное перемещение $\overline{MM_1}$.

Из векторного треугольника Mm_1M_1 имеем

$$\overline{MM_1} = \overline{Mm_1} + \overline{m_1M_1}.$$

Деля обе части этого равенства на Δt и переходя к пределу, получим:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{Mm_1}}{\Delta t}\right) + \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{m_1M_1}}{\Delta t}\right).$$

Но, по определению,

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}\right) = \overline{\vartheta}_{аб},\quad \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{Mm_1}}{\Delta t}\right) = \overline{\vartheta}_{пер}.$$

Что касается последнего слагаемого, то, так как при $\Delta t \to 0$ кривая A_1B_1 стремится к совпадению с кривой AB, в пределе

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{m_1M_1}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}\right) = \overline{\vartheta}_{от}.$$

В результате находим, что

$$\overline{\vartheta}_{аб} = \overline{\vartheta}_{от} + \overline{\vartheta}_{пер}. \tag{1.1}$$

Направлены векторы $\overline{\vartheta}_{аб}$, $\overline{\vartheta}_{от}$, $\overline{\vartheta}_{пер}$ по касательным к соответствующим траекториям (рис. 1.11, б).

Таким образом, при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

1.9 Теорема Кориолиса о сложении ускорений

Найдем зависимость между относительным, переносным и абсолютным ускорениями точки. Из равенства (1.1) получим

$$\overline{a}_{аб} = \frac{d\overline{\vartheta}_{аб}}{dt} = \frac{d\overline{\vartheta}_{от}}{dt} + \frac{d\overline{\vartheta}_{пер}}{dt}.$$

Здесь производные определяют изменение каждого из векторов при абсолютном движении. Эти изменения слагаются в общем случае из изменений при относительном и переносном движениях. Отметим изменения при относительном движении индексом «1», а при переносном движении – индексом «2». Тогда

$$\bar{a}_{аб} = \frac{\left(d\bar{\vartheta}_{от}\right)_1}{dt} + \frac{\left(d\bar{\vartheta}_{от}\right)_2}{dt} + \frac{\left(d\bar{\vartheta}_{пер}\right)_1}{dt} + \frac{\left(d\bar{\vartheta}_{пер}\right)_2}{dt}.$$

Или

$$\vec{a}_{аб} = \bar{a}_{от} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор},$$

где

$$\bar{a}_{кор} = \frac{\left(d\bar{\vartheta}_{от}\right)_2}{dt} + \frac{\left(d\bar{\vartheta}_{пер}\right)_1}{dt}. \qquad (1.2)$$

Величина $\bar{a}_{кор}$, характеризующая изменение относительной скорости точки при переносном движении и переносной скорости точки при ее относительном движении, называется поворотным или кориолисовым ускорением точки.

Вычислим $\bar{a}_{кор}$ по частям в соответствии с формулой (1.2), рассматривая переносное движение как слагающееся из поступательного движения вместе с некоторым полюсом и вращения вокруг этого полюса с угловой скоростью $\bar{\omega}$.

Начнем с определения $\left(d\bar{\vartheta}_{от}\right)_2/dt$. При рассматриваемом переносном движении вектор $\bar{\vartheta}_{от}$ переместится вместе с кривой AB поступательно в положение m_1b (рис. 1.12) и одновременно повернется вокруг точки m_1 до положения $\overline{m_1в_1}$.

В результате вектор $\bar{\vartheta}_{от}$ получит в переносном движении приращение $\left(d\bar{\vartheta}_{от}\right)_2 = \overline{bb_1} = \bar{\vartheta}_B \cdot dt$ (здесь $\bar{\vartheta}_B$ - скорость, с которой перемещается точка b при повороте вектора $m_1b = \bar{\vartheta}_{от}$ вокруг точки m_1. Так как этот поворот происходит с угловой скоростью $\bar{\omega}$, то $\bar{\vartheta}_B = \bar{\omega} \times \bar{\vartheta}_{от}$. В результате получим $\left(d\bar{\vartheta}_{от}\right)_2 = \bar{\vartheta}_B \cdot dt = \bar{\omega} \times \bar{\vartheta}_{от} dt$ и

$$\frac{\left(d\vartheta_{от}\right)_2}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{\vartheta}_{от}. \qquad (1.3)$$

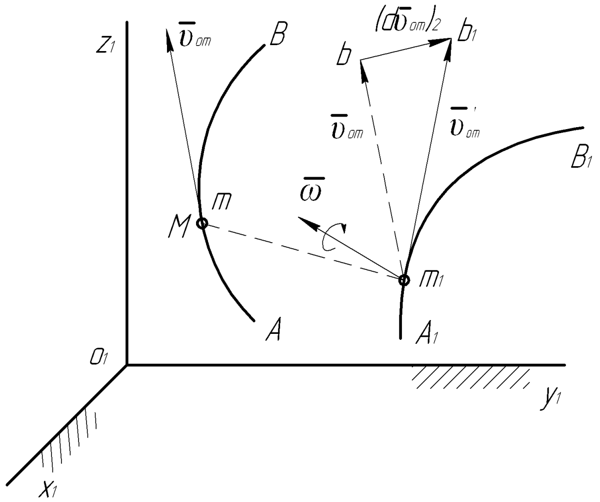

Рисунок 1.12 –Определение изменения относительной скорости при переносном движении

Теперь определим $\left(d\overline{\vartheta}_{пер}\right)_1 / dt$. Скорость $\overline{\vartheta}_{пер}$ равна скорости той неизменно связанной с подвижными осями точки m кривой AB, с которой в данный момент времени совпадает точка M (рис. 1.13).

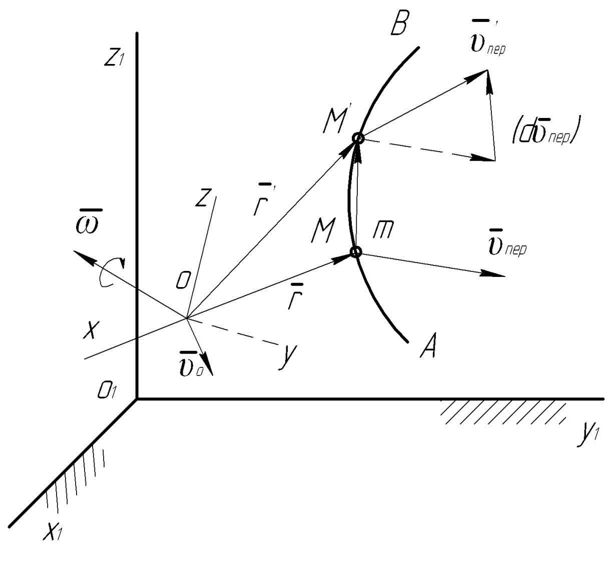

Рисунок 1.13 – Определение изменения относительной скорости при переносном движении

Определим переносную скорость в точке M, приняв точку O за полюс:

$$\overline{\vartheta}_{пер} = \overline{\vartheta}_O + \overline{\vartheta}_{MO} = \overline{\vartheta}_O + \overline{\omega} \times \overline{r}.$$

Совершив за промежуток времени dt относительное перемещение $MM' = \overline{\vartheta}_{om} \cdot dt$, точка придет в положение M', для которого

$$\vartheta'_{nep} = \overline{\vartheta}_O + \overline{\omega} \times \overline{r}' = \overline{\vartheta}_O + \overline{\omega} \times \left(\overline{r} + \overline{MM'}\right).$$

При этом вектор $\overline{\vartheta}_{nep}$ получает приращение

$$\left(d\overline{\vartheta}_{nep}\right)_1 = \overline{\vartheta}'_{nep} - \overline{\vartheta}_{nep} = \overline{\omega} \times \overline{MM'} = \overline{\omega} \times \overline{\vartheta}_{om} dt\ .$$

Откуда

$$\frac{\left(d\overline{\vartheta}_{nep}\right)}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{\vartheta}_{om}\,. \qquad (1.4)$$

Подставляя величины (1.3) и (1.4) в равенство (1.2), получим

$$\overline{a}_{\kappa op} = 2\left(\overline{\omega} \times \overline{\vartheta}_{om}\right).$$

Таким образом, кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости на относительную скорость точки.

Модуль кориолисова ускорения

$$a_{\kappa op} = 2\omega\vartheta_{om}\sin\alpha\ ,$$

где α - угол между векторами $\overline{\omega}$ и $\overline{\vartheta}_{om}$.

Направлен вектор $\overline{a}_{\kappa op}$ перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\vartheta}_{om}$, в ту сторону, откуда видно кратчайшее совмещение $\overline{\omega}$ с $\overline{\vartheta}_{om}$ происходящим против хода часовой стрелки (рис. 1.14).

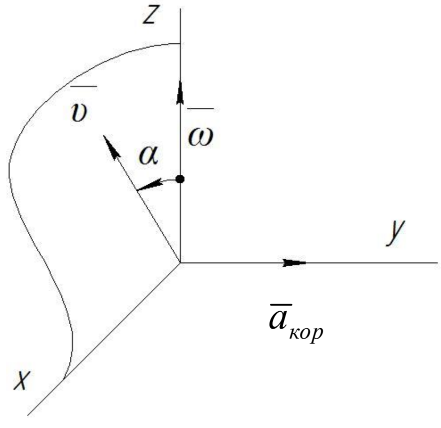

Рисунок 1.14 – Схема к определению направления вектора кориолисова ускорения

2 СОДЕРЖАНИЕ ПЕРВОГО ЗАДАНИЯ

Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения

Найти уравнение траектории, численные значения скорости, полное, касательное и нормальное ускорения точки для момента времени $t = t_1(c)$, если движение этой точки задано:

а) уравнениями в декартовых координатах $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$.

б) векторным способом задания координат $\bar{r} = f_3(t)$.

Исходные данные приведены в табл. 2.1 и 2.2. Координаты x и y указаны в *м*.

Таблица 2.1

№ строки*	$f_1(t)$	$f_2(t)$
0	$9t$	$8t^2$
1	$2t^3$	$3t^2$
2	$12t-3$	$6t^2$
3	$4t^2+1$	$2t$
4	$3t$	$2t^2$
5	$4-3t$	$2t^3$
6	$3t^2$	$2-t$
7	t	$5t^2$
8	$6t$	$4t^2$
9	$4t$	t^2

Таблица 2.2

№ строки*	$f_3(t)$	t_1, c
0	$2t^3\bar{i} - 4t\bar{j}$	1
1	$4t^2\bar{i} - 5t^2\bar{j}$	2
2	$(2t-1)\bar{i} + 2{,}5t^2\bar{j}$	2
3	$8t\bar{i} + 2t^2\bar{j}$	3
4	$3t^3\bar{i} + t^2\bar{j}$	4
5	$5t\bar{i} - 2t^2\bar{j}$	1
6	$2t^2\bar{i} - 3t\bar{j}$	1
7	$4t\bar{i} + t^2\bar{j}$	3
8	$2t^2\bar{i} + 3t^2\bar{j}$	3
9	$t^2\bar{i} - 2t\bar{j}$	1

*Студент выбирает номер условия в таблице 2.1 по предпоследней цифре шифра зачетной книжки, а в табл. 2.2 – по последней.

Пример выполнения первого задания. Дано: $t_1 = 1c$ а) $x = 2t$;

$y = 8t^2 + 2$;

б) $\overline{r} = 6t^2\overline{i} + 2t\overline{j}$.

Определить уравнение траектории точки, υ, a_τ и a_n .

Решение:

1. Для уравнений (а).

Уравнения движения (а) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (а).

Получаем

$$y = 2x^2 + 2 .$$

Дифференцируя по времени уравнения движения (а) найдем проекции скорости и ускорения точки:

$$\upsilon_x = \dot{x} = 2м/c\ ;\ a_x = \ddot{x} = 0\ ;$$

$$\upsilon_y = \dot{y} = 16t\ ;\ a_y = \ddot{y} = 16м/c^2 .$$

По найденным проекциям определяются модуль скорости при $t = 1c$:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{2^2 + (16\cdot 1)^2} = 16{,}1м/c$$

и модуль ускорения точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0^2 + 16^2} = 16м/c^2 .$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}\right)}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{2^2 + \left(16t\right)^2}\right)}{dt} =$$

$$= \frac{256t}{\sqrt{4 + 256t^2}} = \frac{256\cdot 1}{\sqrt{4 + 256\cdot 1^2}} = 15{,}9м/c^2.$$

Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho} ,$$

так как радиус кривизны ρ не известен, то воспользуемся другой формулой для определения нормального ускорения:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{16^2 - 15{,}9^2} = 1{,}8 м/с^2.$$

2. Для уравнений (б).

Из векторного уравнения выпишем координатные уравнения:

$$x = 6t^2;\ y = 2t.$$

По алгоритму решения с уравнениями (а) найдем уравнение траектории точки для уравнения (б):

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}x},$$

проекции скорости и ускорения

$$\upsilon_x = \dot{x} = 12t;\ a_x = 12 м/с^2;$$

$$\upsilon_y = \dot{y} = 2 м/с;\ a_y = 0,$$

модуль скорости и ускорения

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{(12\cdot 1)^2 + 2^2} = 12{,}2 м/с,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{12^2 + 0^2} = 12 м/с^2,$$

модуль касательного и нормального ускорения точки

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}\right)}{dt} = \frac{144t}{\sqrt{144t^2 + 4}} = \frac{144\cdot 1}{\sqrt{144\cdot 1^2 + 4}} = 11{,}8 м/с^2,$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{12^2 - 11{,}8^2} = 2{,}2 м/с^2.$$

3 СОДЕРЖАНИЕ ВТОРОГО ЗАДАНИЯ

Кинематический анализ плоского механизма

Кривошип *OA* кривошипно-шатунного механизма *OAB* вращается с угловым ускорением ε_{OA}, имеет в данный момент угловую скорость ω_{OA}. Шатун *AB* соединен шарнирно с кривошипом в точке *A*, а другим концом с ползуном, точка *B* которого перемещается по горизонтальной прямой. Определить угловую скорость и угловое ускорение шатуна АВ, а также ускорение точки *B*.

Исходные данные приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

№ строки*	АВ, м	$\omega_{OA}, рад/с$	$OA, м$	$\varepsilon_{OA}, рад/с^2$
0	75	5	35	10
1	45	2	25	2
2	55	2	25	4
3	30	1	10	6
4	60	1	20	8
5	80	3	35	1
6	20	4	25	2
7	75	3	20	5
8	30	5	10	8
9	60	1	30	6

*Студент выбирает номер строки условия в таблице по предпоследней цифре шифра зачетной книжки, а номер рисунка на страницах 24 - 25 – по последней.

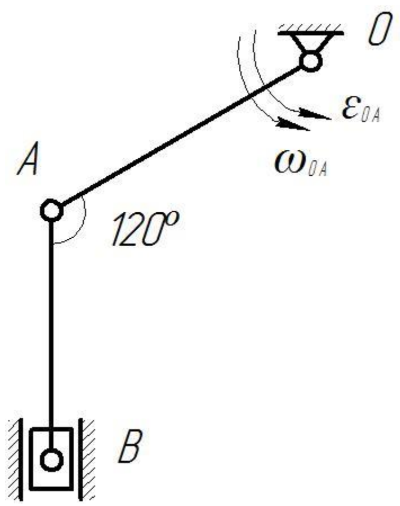

Рисунок 3.0

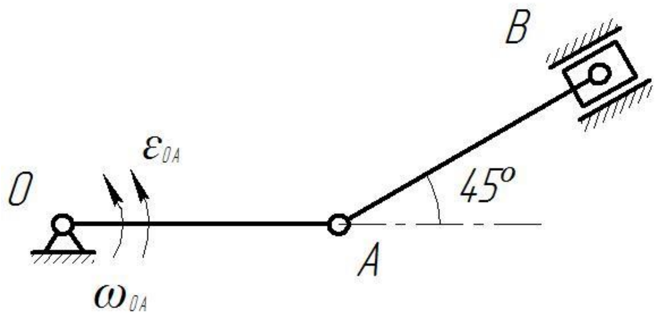

Рисунок 3.1

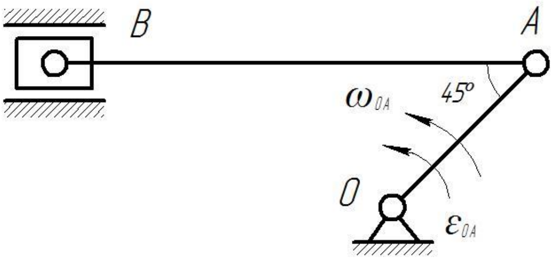

Рисунок 3.2

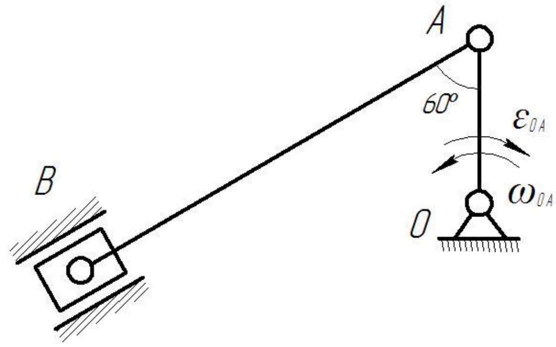

Рисунок 3.3

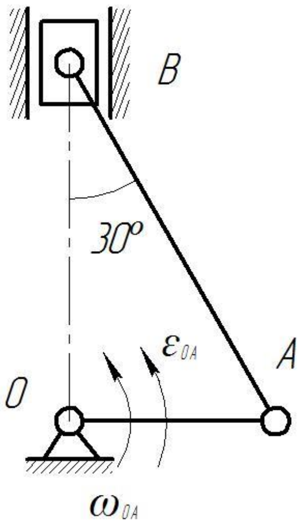

Рисунок 3.4

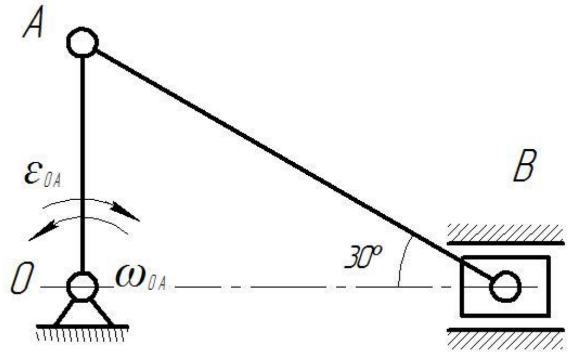

Рисунок 3.5

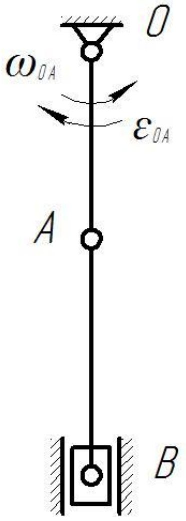

Рисунок 3.6

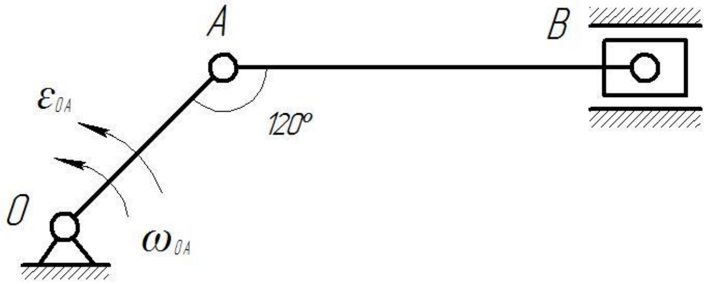

Рисунок 3.7

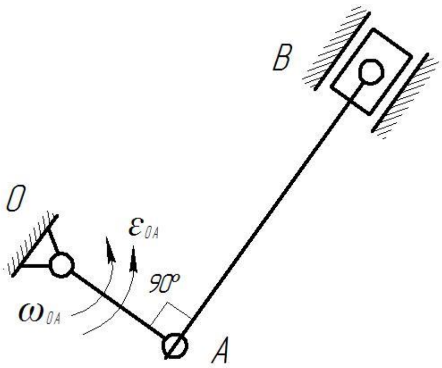

Рисунок 3.8

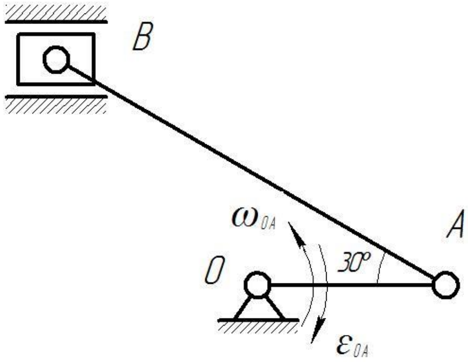

Рисунок 3.9

Пример выполнения второго задания. Дано: $AB = 10м$, $\omega_{OA} = 2рад/с$,

$OA = 10м$, $\varepsilon_{OA} = 6рад/с^2$.

Определить ω_{AB}, ε_{AB}, a_B.

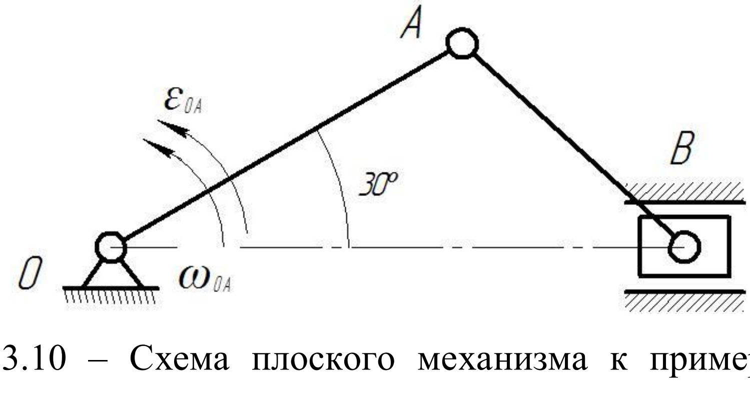

Рисунок 3.10 – Схема плоского механизма к примеру выполнения второго задания

Решение:

1. Определение угловой скорости звена.

Скорость точки *A* перпендикулярна кривошипу *OA* и равна

$$\upsilon_A = OA \cdot \omega_{OA} = 10 \cdot 2 = 20 м/с.$$

Скорость ползуна *B* направлена по горизонтали.

Мгновенный центр скоростей P_{AB} шатуна *AB* находятся в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек *A* и *B* к их скоростям.

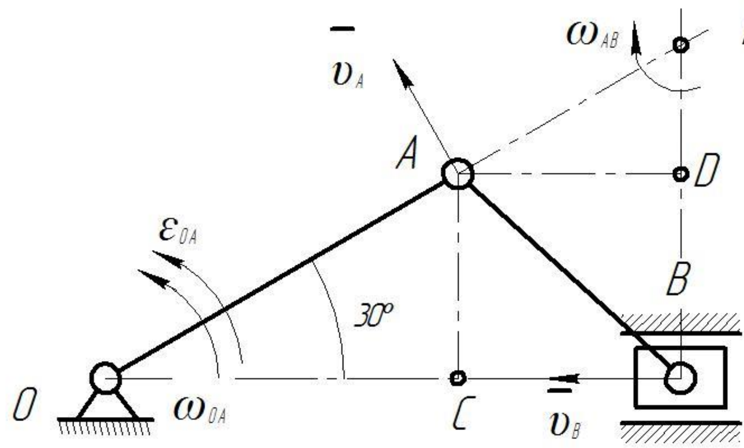

Рисунок 3.11 – Расчетная схема к примеру выполнения второго задания

Угловая скорость звена *AB*

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{AP_{AB}}.$$

Для нахождения AP_{AB} обозначим на рис. 3.11 точки *C* и *D*.

Из прямоугольного треугольника *ACO* получим

$$AC = OA \cdot \sin 30° = 10 \cdot 0,5 = 5 м.$$

Из прямоугольного треугольника *ACB* по теореме Пифагора

$$CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8,66 м.$$

Из прямоугольного треугольника ADP_{AB}

$$AP_{AB} = \frac{AD}{\cos 30°}.$$

Подставляя AD=CB получим

$$AP_{AB} = \frac{CB}{\cos 30°} = \frac{8,66}{0,866} = 10м.$$

Тогда

$$\omega_{AB} = \frac{20}{10} = 2 рад / с.$$

2. Определение ускорений точек и углового ускорения звена.

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{AB}^\tau + \bar{a}_{AB}^n, \tag{3.1}$$

где тангенциальное ускорение точки A

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 6 \cdot 10 = 60 м / с^2,$$

центростремительное ускорение точки A

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 10 = 40 м / с^2.$$

Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A

$$a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2^2 \cdot 10 = 40 м / с^2.$$

Вектор $\bar{a}_A^n$ направлен от A к O.

Вектор $\bar{a}_A^\tau$ перпендикулярен вектору $\bar{a}_A^n$ и направлен по направлению углового ускорения ε_{OA}.

Вектор $\bar{a}_{AB}^n$ направлен от B к A.

Что касается ускорения $\bar{a}_B$ точки B и вращательного ускорения $\bar{a}_{AB}^\tau$, то известны только линии действия этих векторов:

$\bar{a}_B$ – по горизонтали вдоль направляющих ползуна,

$\bar{a}_{AB}^\tau$ – перпендикулярно AB.

Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис. 3.12). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (3.1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора, принятому при расчете.

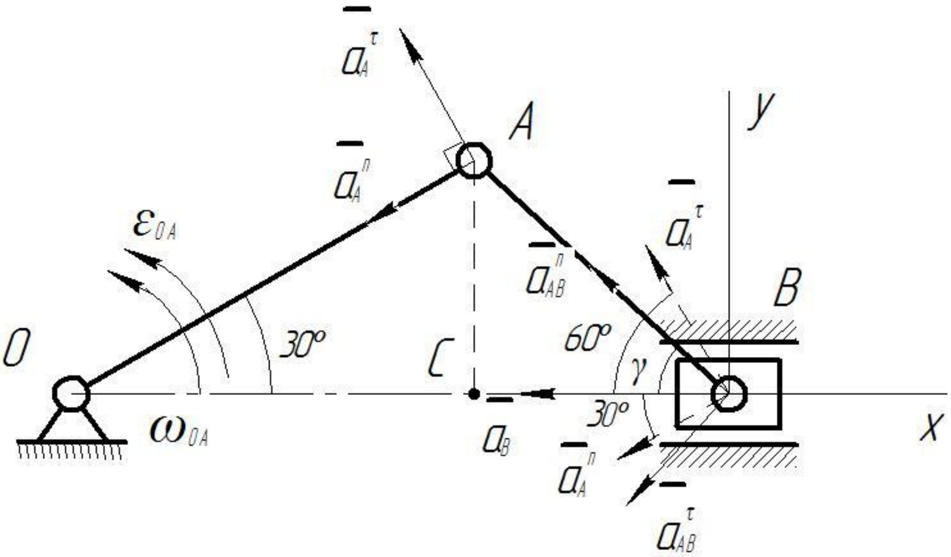

Рисунок 3.12 - Расчетная схема направлений ускорений к примеру выполнения второго задания

Выбрав направление осей *x* и *y*, получаем:

$$-a_B = -a_A^\tau \cdot \cos 60° - a_A^n \cdot \cos 30° - a_{AB}^n \cdot \cos\gamma - a_{AB}^\tau \cdot \sin\gamma\,; \tag{3.2}$$

$$0 = a_A^\tau \cdot \sin 60° - a_A^n \cdot \sin 30° + a_{AB}^n \cdot \sin\gamma - a_{AB}^\tau \cdot \cos\gamma\,, \tag{3.3}$$

где $\cos\gamma = \dfrac{CB}{AB} = \dfrac{8,66}{10} = 0,866$,

$\sin\gamma = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{5}{10} = 0,5$.

Из уравнения (3.3) получаем

$$a_{AB}^\tau = \frac{a_A^\tau \cdot \sin 60° - a_A^n \cdot \sin 30° + a_{AB}^n \cdot \sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{60 \cdot 0,866 - 40 \cdot 0,5 + 40 \cdot 0,5}{0,866} = 60 м/с^2 .$$

Направлено ускорение a_{AB}^τ, как показано на рис. 3.12.

Из уравнения (3.2) находим

$$\begin{aligned} a_B &= a_A^\tau \cdot \cos 60° + a_A^n \cdot \cos 30° + a_{AB}^n \cdot \cos\gamma + a_{AB}^\tau \cdot \sin\gamma = \\ &= 60 \cdot 0,5 + 40 \cdot 0,866 + 40 \cdot 0,866 - 10 \cdot 0,5 = 94,28 м/с^2 \end{aligned}.$$

Ускорение $\bar{a}_B$ направлено, как показано на рис. 3.12.

Угловое ускорение шатуна *AB* с учетом того, что здесь a_{AB}^τ – алгебраическая величина, определяется по формуле

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\left|a_{AB}^\tau\right|}{AB} = \frac{60}{10} = 6 рад/с^2 .$$

4 СОДЕРЖАНИЕ ТРЕТЬЕГО ЗАДАНИЯ

Сложное движение точки

Точка *M* движется относительно тела *D*. По заданным уравнениям относительного движения точки *M* и движения тела *D* определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* для момента времени $t = t_1$.

Исходные данные приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

№ строки*	Уравнение относительного движения точки М $OM = S(t),\ м$	Уравнение движения тела D $\varphi = \varphi(t),\ рад.$	$t_1,\ c$
0	$1 + \sin 2\pi t$	$4t + 1,6t^2$	1/8
1	$2\cos 2\pi t$	$0,5t^2$	3/8
2	$2,5\sin(\pi t / 3)$	$2t^2 - 0,5t$	4
3	$\sqrt{2}(t^2 + t)$	$0,2t^3 + t$	2
4	$0,25\pi t^2$	$2t^3 - 5t$	2
5	$2\sin \pi t$	$0,4t^2 + t$	5/3
6	$t + 0,1t^3$	$8t - t^2$	2
7	$2,1\sin \pi t$	$t - 0,5t^2$	1/3
8	$1,8\sin(\pi t / 4)$	$2t^3 - t^2$	2/3
9	$0,6t + 0,4t^3$	$t + 3t^2$	2

*Студент выбирает номер строки в таблице по предпоследней цифре шифра зачетной книжки, а номер рисунка на страницах 30 - 31 – по последней.

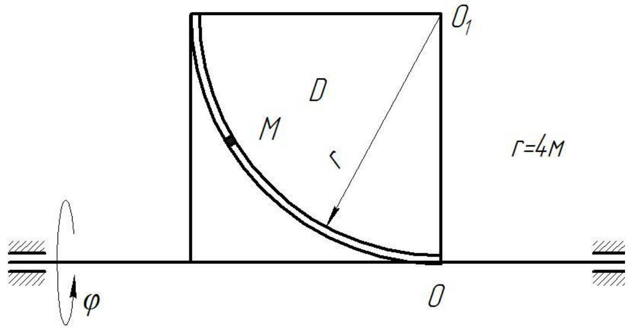

Рисунок 4.0

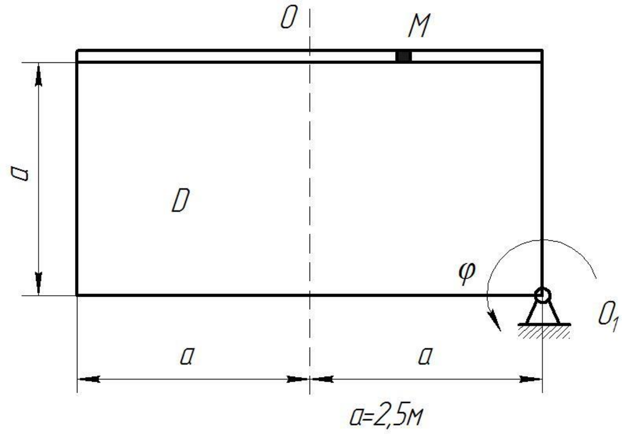

Рисунок 4.1

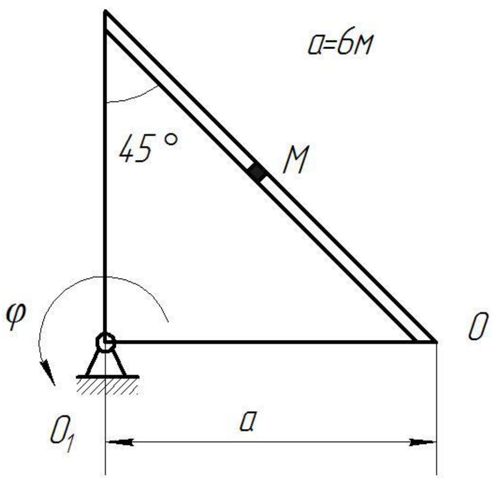

Рисунок 4.2

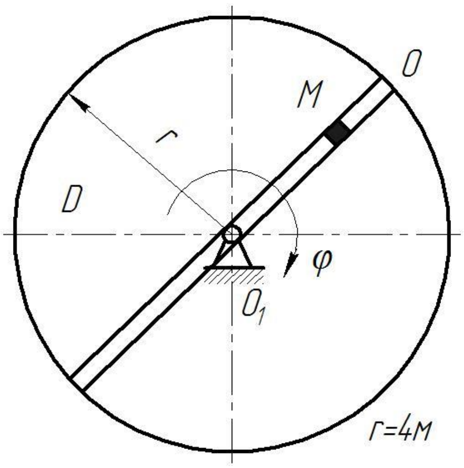

Рисунок 4.3

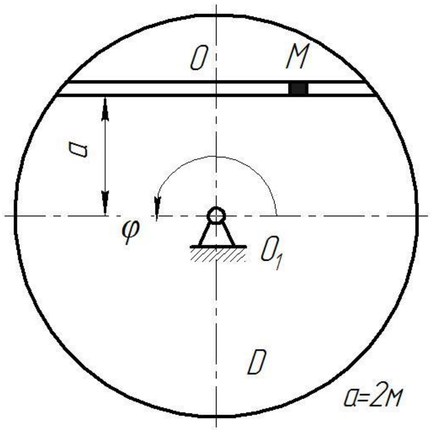

Рисунок 4.4

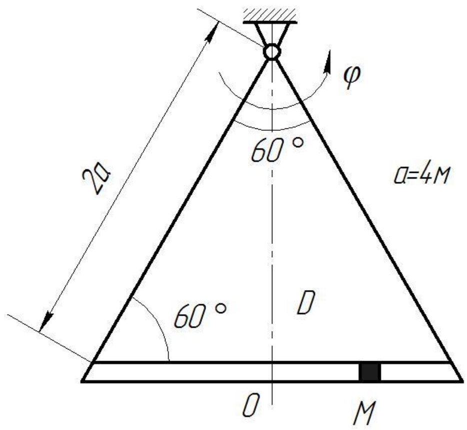

Рисунок 4.5

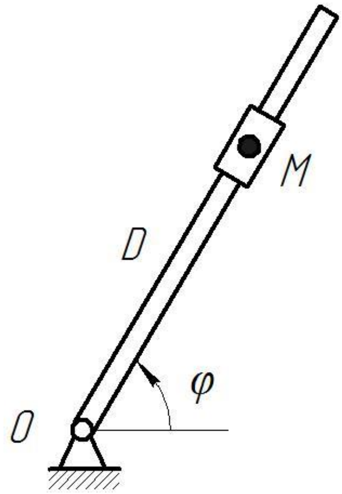

Рисунок 4.6

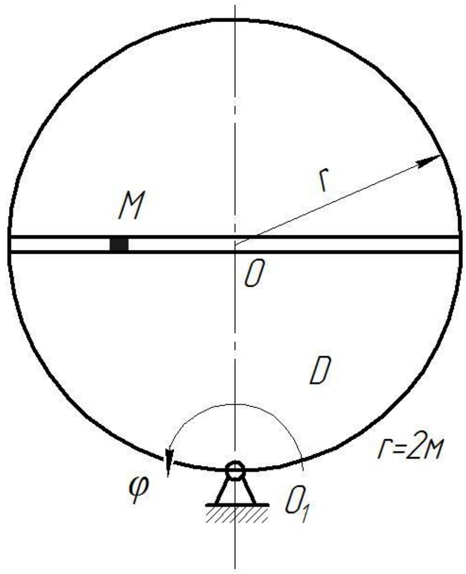

Рисунок 4.7

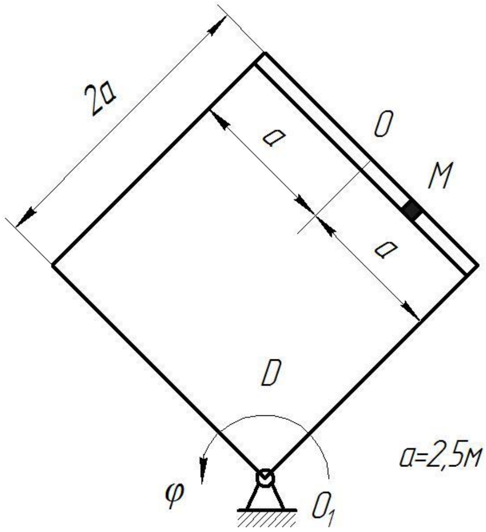

Рисунок 4.8

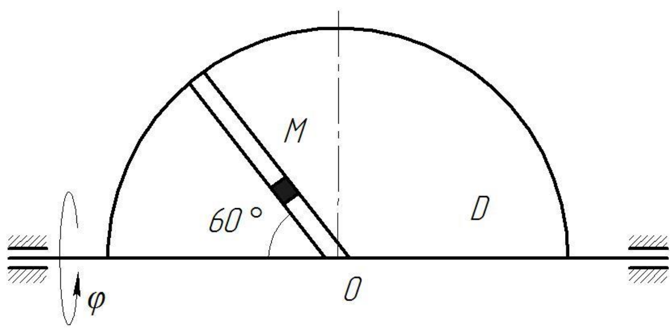

Рисунок 4.9

Пример выполнения третьего задания. Дано: $S = 0,6\left(t + 0,5t^2\right)$;

$\varphi = t^3 - 5t$; $t_1 = 2c$.

Определить $\vartheta_{аб}$, $a_{аб}$.

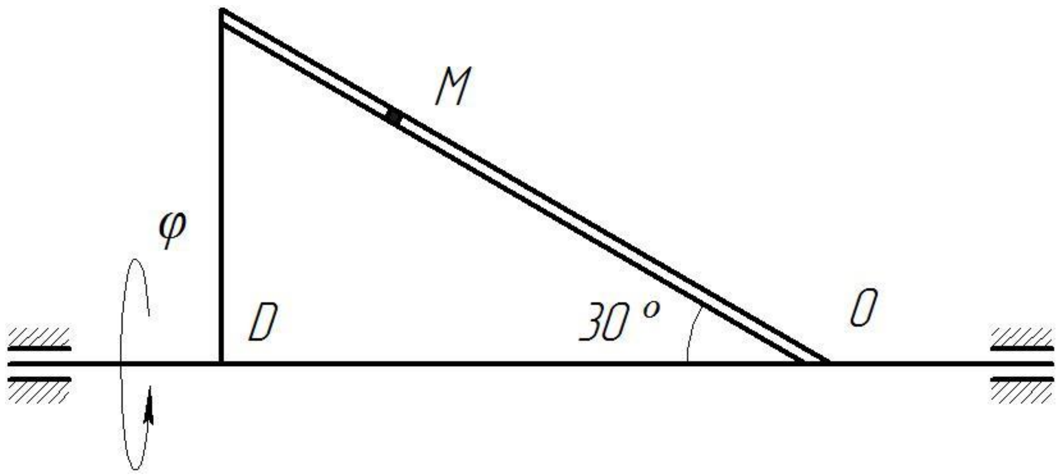

Рисунок 4.10 – Схема к примеру выполнения третьего задания

Решение:

1. Определение абсолютной скорости точки *M*.

Положение точки *M* на теле *D* определяется расстоянием $S = OM$.

При $t_1 = 2c$

$$OM = 0,6\left(2 + 0,5 \cdot 2^2\right) = 2,4м.$$

Абсолютную скорость точки М найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$\bar{\vartheta}_{аб} = \bar{\vartheta}_{от} + \bar{\vartheta}_{пер}.$$

Относительную скорость найдем по формуле:

$$\vartheta_{от} = \frac{dS}{dt} = 0,6 + 0,6t.$$

При $t_1 = 2c$

$$\vartheta_{от} = 0,6 + 0,6 \cdot 2 = 1,8м/с.$$

Относительная скорость направлена вдоль трубки в направлении от точки *O* к точке *M* (см. рис. 4.11).

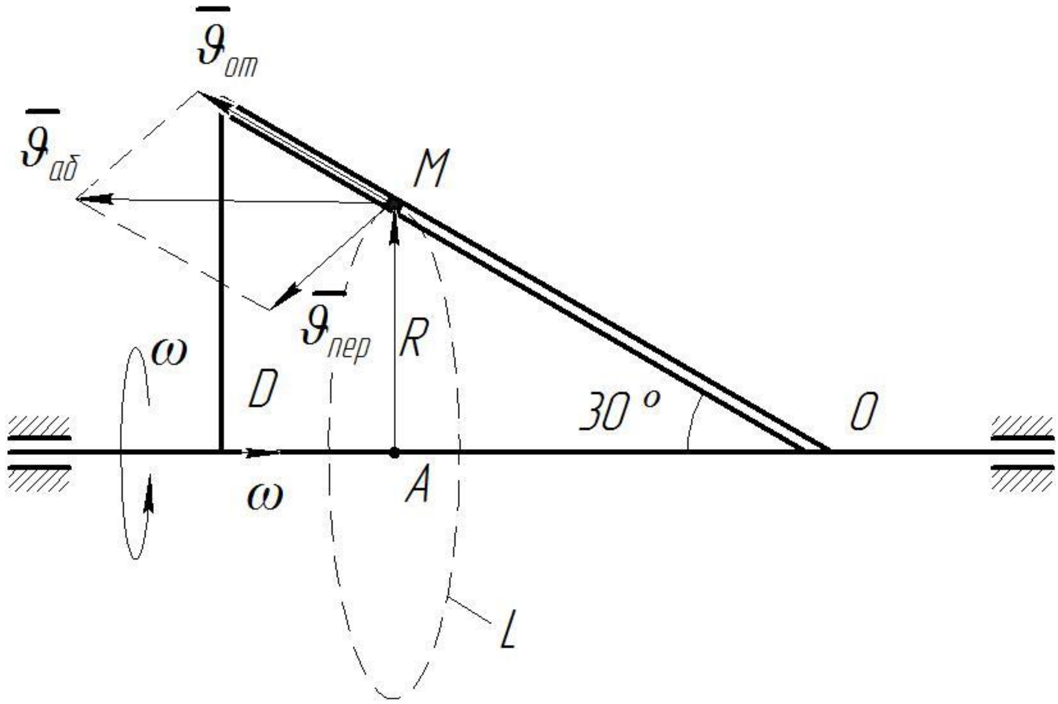

Рисунок 4.11 Расчетная схема с направлением скоростей к выполнению третьего задания

Переносную скорость определим по формуле:

$$\vartheta_{пер} = R \cdot \omega ,$$

где R – радиус окружности *L*, описываемой точкой тела, с которой в данный момент совпадает точка *M*;

ω – угловая скорость тела *D*.

Из треугольника *OAM* (см. рис. 4.11) находим:

$$R = OM \cdot \sin 30° = 1{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}9 м .$$

Угловую скорость находим по формуле:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3t^2 - 5 .$$

При $t_1 = 2c$

$$\omega = 3 \cdot 2^2 - 5 = 7 рад/с .$$

Положительный знак угловой скорости показывает, что вращение треугольника происходит по направлению отсчета угла φ .

Тогда

$$\vartheta_{пер} = 0,9 \cdot 7 = 6,3 м/с$$

Переносная скорость направлена по касательной к окружности L по направлению отсчета угла φ.

Так как $\bar{\vartheta}_{пер}$ и $\bar{\vartheta}_{от}$ взаимно перпендикулярны, то модуль абсолютной скорости точки M

$$\vartheta_{аб} = \sqrt{\vartheta_{от}^2 + \vartheta_{пер}^2} = \sqrt{1,8^2 + 6,3^2} = 6,55 \ м/с.$$

2. Определение абсолютного ускорения точки М.

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\bar{a}_{аб} = \bar{a}_{от} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}$$

или в развернутом виде

$$\bar{a}_{аб} = \bar{a}_{от}^{\tau} + \bar{a}_{от}^{n} + \bar{a}_{пер}^{в} + \bar{a}_{пер}^{ц} + \bar{a}_{кор}. \qquad (4.1)$$

где $\bar{a}_{от}^{\tau}$ – относительное касательное ускорение;

$\bar{a}_{от}^{n}$ – относительное нормальное ускорение;

$\bar{a}_{пер}^{в}$ а – переносное вращательное ускорение;

$\bar{a}_{пер}^{ц}$ – переносное центростремительное ускорение;

$\bar{a}_{кор}$ – кориолисова ускорение.

Относительное касательное ускорение найдем по формуле:

$$a_{от}^{\tau} = \frac{d^2S}{dt^2} = 0,6 \ м/с^2.$$

Положительный знак относительного касательного ускорения показывает, что вектор $\bar{a}_{от}^{\tau}$ направлен в сторону положительных значений S (см. рис 4.12).

Знаки $\vartheta_{от}$ и $a_{от}^{\tau}$ одинаковы, следовательно, относительное движение точки М ускоренное.

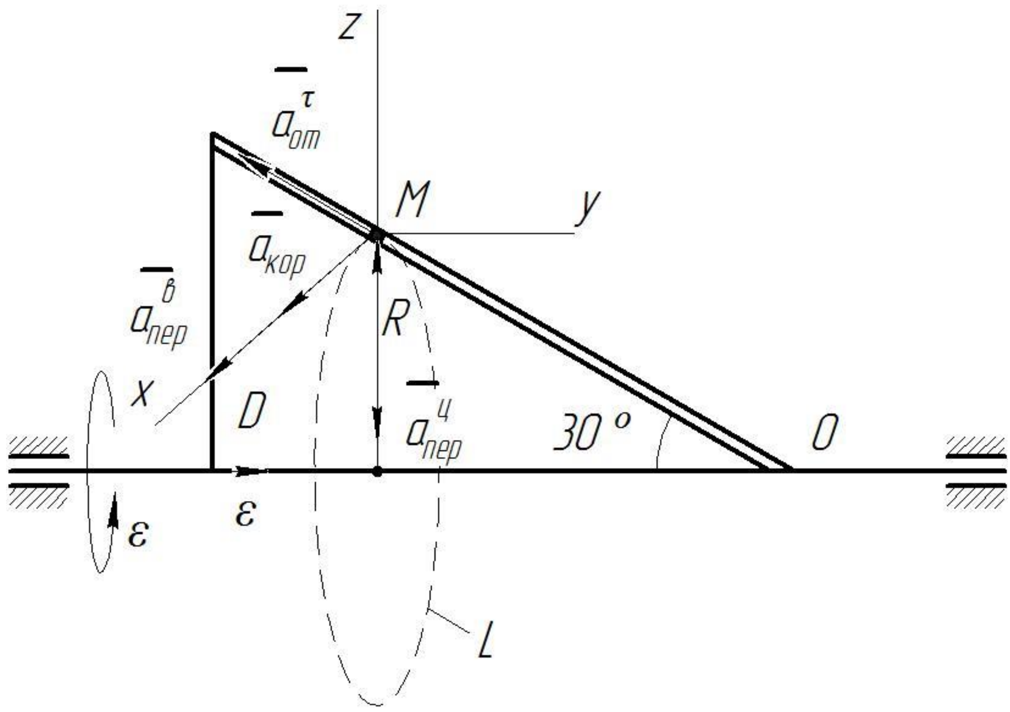

Рисунок 4.12 – Расчетная схема с направление ускорений к выполнению третьего задания

Относительное нормальное ускорение

$$a_{от}^{n} = \frac{\vartheta_{от}^{2}}{\rho} = 0,$$

так как траектория относительного движения – прямая ($\rho = \infty$).

Переносное вращательное ускорение найдем по формуле:

$$a_{пер}^{в} = R \cdot \varepsilon,$$

где ε – угловое ускорение тела *D*, равное

$$\varepsilon = \frac{d^{2}\varphi}{dt^{2}} = 6t.$$

При $t_1 = 2c$

$$\varepsilon = 6 \cdot 2 = 12 \ рад / c^{2}.$$

Знаки ε и ω одинаковы, следовательно, вращение тела *D* ускоренное, направление векторов ε и ω совпадают.

Тогда

$$a_{пер}^{в} = 0,9 \cdot 12 = 10,8 \ м/с^2.$$

Вектор $\bar{a}_{пер}^{в}$ направлен в ту же сторону, что и $\bar{\vartheta}_{пер}$.

Переносное центростремительное ускорение найдем по формуле:

$$a_{пер}^{ц} = R \cdot \omega^2 = 0,9 \cdot 7^2 = 44,1 \ м/с^2.$$

Вектор $\bar{a}_{пер}^{ц}$ направлен к центру окружности L.

Модуль кориолисова ускорения

$$a_{кор} = 2 \cdot \omega \cdot \vartheta_{от} \cdot \sin\left(\omega, \vartheta_{от}\right),$$

где $\sin\left(\omega, \vartheta_{от}\right) = \sin 30° = 0,5$.

С учетом найденных выше значений ω и $\vartheta_{от}$ получаем

$$a_{кор} = 2 \cdot 7 \cdot 1,8 \cdot 0,5 = 12,6 \ м/с^2.$$

Вектор $\bar{a}_{кор}$ направлен согласно правилу векторного произведения (см. рис. 1.14).

Модуль абсолютного ускорения точки M находим, спроектировав уравнение (4.1) на оси x, y, и z:

$$a_{аб\ x} = a_{пер}^{в} + a_{кор} = 10,8 + 12,6 = 23,4 \ м/с^2;$$

$$a_{аб\ y} = -a_{от}^{\tau} \cdot \cos 30° = -0,6 \cdot 0,866 = -0,52 \ м/с^2;$$

$$a_{аб\ z} = -a_{пер}^{ц} + a_{от}^{\tau} \cdot \sin 30° = -44,1 + 0,6 \cdot 0,5 = -43,8 \ м/с^2;$$

Тогда

$$a_{аб} = \sqrt{a_{аб\ x}^2 + a_{аб\ y}^2 + a_{аб\ z}^2} = \sqrt{23,4^2 + \left(-0,52\right)^2 + \left(-43,8\right)^2} = 49,66 \ м/с^2.$$

5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЗАЩИТЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

1. Какие существуют способы задания движения точки?
2. Напишите формулы определения скорости и ускорения точки при векторном способе задания движения.
3. Как определяются скорость и ускорение точки при координатном способе задания движения?
4. Как направлена скорость при криволинейном движении точки?
5. Напишите формулы для определения касательного и нормального ускорений при криволинейном движении точки.
6. Какое изменение скорости показывает касательное ускорение точки?
7. Какое движение материальной точки называется сложным?
8. Из каких составляющих состоит сложное движение?
9. Чему равняется абсолютная скорость точки при сложном движении?
10. Чему равняется абсолютное ускорение точки при сложном движении?
11. Что характеризует кориолисово ускорение?
12. Как определяется направление кориолисова ускорения?

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

РАЗДЕЛ «КИНЕМАТИКА»

Учебно-методическое пособие и сборник заданий

к расчетно-графической работе

(Сост. И.С. Кручинкина)

Учебно-методическое пособие

Формат 60 х 84/16. Бумага писчая. Печать оперативная.

Усл. печ. л. 3,4. Тираж 100 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Чувашская государственная сельскохозяйственная академия»

Отпечатано в полиграфическом отделе ФГБОУ ВО ЧГСХА , 428003, г.Чебоксары, ул.К.Маркса, 29.