**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНЕЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

**Раздел Теория вероятностей**

Теория вероятностей - раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений, наблюдаемых при массовых повторениях испытаний.

**Случайные события**

***Основные понятия.***

Под **испытанием (опытом)** понимается осуществление некоторого комплекса условий. **Событием** назовем всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Событие A в опыте называется **достоверным**, если при повторениях опыта оно всегда происходит.

Событие B в опыте называется **невозможным**, если при повторениях опыта оно никогда не происходит.

Событие в опыте называется **случайным**, если при повторениях опыта оно иногда происходит, иногда нет. Случайные события обозначаются А, В, С и т.д.

Два события называются **несовместными** (**совместными**), если появление одного из них исключает (не исключает) появление другого. Несколько событий в данном опыте называются **несовместными**, если они попарно несовместны. Несколько событий в опыте называются **совместными,** если совместны хотя бы

два из них.

События в опыте называются **равновозможными,** если условия их появления одинаковы и нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое.

**Полной группой событий** называется несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

**Пример 1** Опыт - бросание игральной кости; события :

А1 - выпадение одного очка,

А2 - выпадение двух очков,

А3 - выпадение трех очков,

А4 - выпадение четырех очков,

А5 - выпадение пяти очков,

А6 - выпадение шести очков,

В - выпадение четного числа очков,

С - выпадение более семи очков,

D - выпадение не менее трех очков,

E - выпадение не более шести.

Достоверное событие в данном опыте - E, невозможное событие - С, остальные события - случайные. Первые шесть событий А1, А2, А3, А4, А5, А6 не могут быть выражены через более простые события и их называют элементарными событиями (элементарными исходами). Кроме того, они образуют полную группу несовместных равновозможных событий. Событие В можно выразить через более простые события : либо наступит А2, либо наступит А4, либо А6; следовательно , элементарным событием событие В не является.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются **противоположными**. Противоположные события обозначаются А и  (не А).

**Пример 2**. Опыт - два выстрела по мишени; события: А - ни одного попадания, - хотя бы одно попадание.

**2.2 Алгебра событий**

**Суммой или объединением событий** А1, А2,..., Аn назовем событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

А1+А2+...+Аn=А1∪А2∪...∪Аn.

**Произведением или пересечением событий** А1, А2,..., Аn назовем событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

А1· А2·…·Аn =A1∩A2∩...∩An.

**Пример 3***.* Опыт - два выстрела по мишени. Событие Аi - попадание в мишень при i - м выстреле (i =1;2)*.*

Тогда событие В=А1+А2 - хотя бы одно попадание, событие С= 1+2 – хотя бы один промах, событие D= А1·А2 - попадание в цель дважды, Е= А1·2 + 1·А2 - ровно одно попадание.

**Частота события и ее свойства**

Если опыт воспроизведен n раз, а событие А произошло m раз, то **частотой** (**относительной частотой)** события А назовем Р\*(А)=, т.е. отношение числа испытаний, в которых появилось событие А, к числу всех испытаний.

***Свойства частоты.***

1) 0≤Р\*(А)≤ 1, так как 0≤m≤n, следовательно, 0 ≤  ≤ 1

2) частота достоверного события равна 1, так как m=n.

3) частота невозможного события равна 0, так как m=0.

4) Р\*(А+В)=Р\*(А)+Р\*(В)-Р\*(А·В).

**Условной частотой** события В относительно события А, обозначение Р\*(В/А), назовем частоту события В при условии, что событие А уже произошло, то есть это число равно отношению числа опытов NAB, в которых произошли события А и В одновременно, к числу опытов NA, в которых появилось событие А, то есть P\*(*B* / *A*) = 

5) Р\*(А·В)=Р\*(А)·Р\*(В/А).

Частота случайного события обладает **свойством устойчивости,** т.е. при увеличении числа опытов значения частоты события группируются около некоторого числа, характеризующего возможность появления данного события в данном опыте.

**Классическое определение вероятности события**

Исход опыта называется **благоприятным** событию А, если в результате опыта событие А свершилось. **Вероятностью** события A назовем число Р(А)=, где *m* – число благоприятных событию А исходов, *n* – число всех исходов в данном опыте.

**Пример 4.** Опыт- бросание игрального кубика. Событие А - выпадение числа очков, кратного 3. Пусть X – число очков, тогда все возможные исходы нашего опыта: (Х=1), (Х=2), (Х=3), (Х=4), (Х=5), (Х=6), равновозможны. Всего случаев n=6, благоприятных из них m=2, следовательно,

*P*(*A*) =  = .

**Элементы комбинаторики**

Имеется совокупность n объектов, назовем ее **генеральной совокупностью**. Из генеральной совокупности наудачу отбираем m объектов, эту отобранную совокупность назовем **выборкой**.

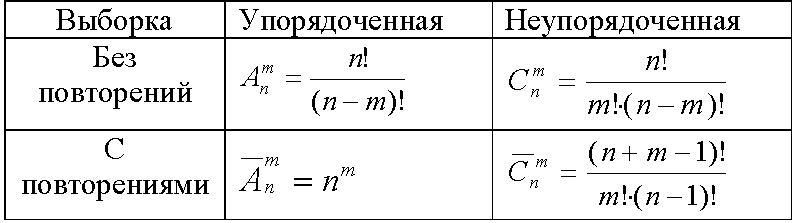
Выборка может быть **упорядоченной,** если порядок объектов (элементов) играет роль, и может быть **неупорядоченной,** если порядок элементов роли не играет.

Выборка может быть **без повторений**, если элементы повторяться не могут, и может быть **с повторениями,** если элементы в выборке повторяются.

Например, телефонный номер 260-61-51 - упорядоченная выборка с повторениями из десяти цифр по семи.

Упорядоченная выборка из n элементов по m называется **размещением,** неупорядоченная выборка из n элементов по m называется **сочетанием.** Число размещений и сочетаний c повторениями и без повторений из n элементов по m можно найти из следующей таблицы.

Таблица 1



**Пример 5**. Два счета из десяти выполнены с ошибками. Найти вероятность того, что из четырех взятых на проверку счетов один счет окажется с ошибками.

**Решение**.

Воспользуемся классической формулой Р(А)=, всего случаев , так как имеем дело с неупорядоченными выборками без повторений, благоприятных из них . Следовательно,



**Запомните**: 0!=1.

**Основные теоремы**

**Теорема 1. Теорема сложения вероятностей.**

Р(А1+А2+А3+...+Аn)=Р(А1)+Р(А2)+Р(А3)+...+Р(Аn) - Р(А1·А2) - Р(А1·А3) - … -Р(А1·Аn) - Р(А2·А3) - ... - P(An-1·An)+P(А1·А2·A3)+P(А1·А2·A4)+...+P(Аn-2·Аn-1·An)+...+ +(-1)n-1 P(A1·A2·...·An).

**Следствие 1**.

Если события А1, А2, ... ,Аn **несовместны,** то

Р(А1+А2+А3+...+Аn)=Р(А1)+Р(А2)+Р(А3)+...+Р(Аn).

**Следствие 2.**

Вероятность суммы двух любых событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения, то есть Р(А+В)=Р(А)+Р(В)–Р(А·В).

**Замечание.**

P(A) + P() = 1, откуда P() = 1−P(A).

**Теорема 2. Теорема умножения вероятностей.**

**Условной вероятностью** Р(*А*/*В*) события *А* относительно события В назовем вероятность события *А* при условии, что событие *В* уже произошло.

**Теорема умножения.**

Р(А1·А2·А3·...·Аn)=Р(А1)·Р(А2/А1)·Р(А3/А1·А2) ·...·Р(Аn/А1·А2·А3·...·Аn-1).

**Правило (теорема) умножения для двух событий**. Вероятность произведения двух любых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого относительно первого, то есть

Р(А·В)=Р(А)·Р(В/А)=Р(В)·Р(А/В).

Событие А называется **независимым** от события В, если условная вероятность события А относительно события Bравна безусловной вероятности события А, то есть Р(А/В)=Р(А). Нетрудно доказать, что если А не зависит от В, то и В не зависит от А.

**Следствие.** Если события А и В **независимы,** то Р(А·В)=Р(А)·Р(В).

**Пример 6**. Студент знает ответы на 20 из 25 вопросов. Какова вероятность того, что он ответит на два выбранных наудачу вопроса?

**Решение**.

Рассмотрим события: А- студент знает ответ на первый вопрос, В- студент знает ответ на второй вопрос. Найдем Р(А·В).

Р(А·В) = Р(А)·Р(В/А) = 

**Определение.** Несколько событий называют **независимыми** (или независимыми в совокупности), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Следовательно, если А1, А2, ... ,Аn независимы, то справедливо **правило умножения для независимых событий**

Р(А1·А2·А3·...·Аn)=P(A1)·P(A2)·P(A3)·...·P(An).

**Пример 7.** Два студента выполняют независимо друг от друга задание. Вероятность того, что задание будет выполнено первым студентом 0,6; для второго студента эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность того, что

• оба студента выполнят задание;

• только один из них выполнит задание;

• хотя бы один из них выполнит задание.

**Решение**.

События: А - задание выполнит первый студент, В - задание выполнит второй студент. По условию Р(А) = 0,6; Р(В)=0,8; следовательно, Р() = 1–0,6 = 0,4; P() = 1–0,8 = 0,2.

• Р(А·В) = /события А и В - независимые события / = Р(А)·Р(В) = 0,6·0,8 = 0,48.

• Р(А·+ ·B) = / A·и ·B - несовместные события /= Р(А·) + Р(·B) = Р(А)·Р() + Р()·Р(В) = 0,6·0,2 + 0,4·0,8 = 0,44.

• P(A+B)=/ А и В-совместные события /= Р(А)+Р(В)-Р(А·В)=0,6+0,8– –0,48=0,92.

**Теорема 3. Формула полной вероятности**

Пусть в результате опыта может появиться какое-либо из несовместных событий Н1, Н2,..., Нn, образующих полную группу. Событие А может появиться только вместе с одним из этих событий. События Н1, Н2,..., Нn называются **гипотезами.** Тогда вероятность события A равна P(A)=P(Hi)P(A/Hi).

Эта формула носит название формулы полной вероятности.

**Пример 8.** На стройку поступают блоки с трех баз, причем 50% с первой базы, 30% со второй базы, остальные с третьей базы. Вероятность того, что блок c первой базы бракованный - 0,09; со второй - 0,1; с третьей - 0,08. Найти вероятность того, что взятый наудачу на стройке блок окажется бракованным.

**Решение**.

Рассмотрим гипотезы:

Н1 -взятый наудачу блок поступил с первой базы,

Н2 -взятый наудачу блок поступил со второй базы,

Н3 -взятый наудачу блок поступил с третьей базы.

Тогда из условия Р(Н1)=50/100=0,5; Р(Н2)=30/100=0,3; Р(Н3)=(100-50-30)/100 = 0,2.

Событие А -взятый наудачу на стройке блок окажется бракованным.

По условию Р(А/Н1)=0,09; Р(А/Н2)=0,1; Р(А/Н3)=0,08.

Следовательно, по формуле полной вероятности

Р(А)=0,5·0,09+0,3·0,1+0,2·0,08=0,091.

**Теорема 4. Формула Байеса (теорема гипотез)**

Пусть в условиях предыдущей теоремы событие А наступило и мы нашли вероятность Р(А). Тогда вероятности гипотез в связи с появлением события А, т.е. найдем Р(Нi/А), равны  где i=1,2,...,n.

**Пример 9.** В предыдущем примере событие А наступило, т.е. взятый наудачу на стройке блок оказался бракованным. Определить вероятность того, что этот блок поступил со второй базы.

**Решение.**

.

**Теорема 5. Формула Бернулли**

Производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А наступает с постоянной вероятностью р. Вероятность того, что в этих n испытаниях событие А появится ровно m раз равно Pn(m)=.

**Пример 10**. Каждый из пяти независимо работающих элементов отказывает с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что откажут три элемента из пяти.

**Решение**.

Р5(3)= =10·0,064·0,36 ≈ 0,23.

**Случайные величины**

**Случайной величиной Х** в данном опыте называется переменная величина, которая в результате испытания примет одно из своих возможных значений, но какое именно до проведения опыта неизвестно.

Совокупность всех возможных значений случайной величины называется спектром. Спектр называется дискретным, если все возможные значения случайной величины образуют конечную или бесконечную последовательность, и называется непрерывным, если все значения случайной величины заполняют сплошь некоторый промежуток.

Например, Х - оценка на экзамене. Случайная величина Х имеет дискретный, т.к. ее возможные значения: 2; 3; 4; 5. Или Х - время безотказной работы двигателя. В этом случае случайная величина Х имеет непрерывный спектр, т.к. возможные значения Х заполняют сплошь некоторый промежуток времени [0;t], где t - момент отказа двигателя.

**Функция распределения случайной величины**

**Функцией распределения** F(x) случайной величины Х называется вероятность того, что случайная величина Х в результате испытания примет значение, меньшее х, т.е. ***F(x)=P(X<x).***

Из определения функции распределения следуют следующие **свойства F(x):**

1) область определения F(x) - интервал (- ∞;+∞),

2) 0 ≤ F(x) ≤1,

3) F(– ∞ )=0, так как P(X< – ∞ )=0,

4) F(+ ∞ )=1, так как P(X<+∞ )=1,

5) F(x) - неубывающая функция.

**Законом распределения** случайной величины Х называется любая ее вероятностная характеристика, из которой можно получить функцию распределения F(x).

**Вероятность попадания случайной величины в промежуток и в точку**

Если известна функция распределения F(x) случайной величины Х, то

P( α ≤ *Х* < β )=F(β)-F(α).

**Дискретная случайная величина**

Случайная величина Х называется **дискретной,** если ее спектр дискретный.

Законом распределения дискретной случайной величины Х является **ряд распределения**, т.е. перечисление всех возможных значений Х и их cоответствующих вероятностей:

**

рi=P(X=xi), где i=1;2;...;n;...

**Многоугольником распределения** назовем ломаную, соединяющую последовательно точки (х1;р1),(х2;р2),...,(хn;рn).

**Пример 10.** Среди шести элементов два изношенных. Составить ряд распределения случайной величины Х- числа изношенных элементов среди трех наудачу отобранных. Найти функцию распределения F(x) и построить ее график.

***Решение.***

Случайная величина Х может принимать значения: 0; 1; 2.



****

Условие нормировки: 0,2+0,6+0,2=1.

Найдем F(x).

Если x из (-∞;0], то F(x)=P(X<x)=0;

если x из (0;1], то F(x)=P(X<x)=P(X=0)=0,2;

если x из (1;2], то F(x)=P(X<x)=P(X=0)+P(X=1)=0,2+0,6=0,8;

если xиз (2;+ ∞ ), F(x)=P(X<x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0,2+0,6+0,2=1.

Следовательно,

****

****

**2.7.3 Непрерывная случайная величина**

Случайная величина Х называется **непрерывной,** если ее функция распределения F(x) непрерывна и имеет непрерывную производную везде, кроме, быть может, конечного числа точек. Из определения следует, что непрерывная случайная величина имеет **непрерывный спектр** (если случайная величина имеет непрерывный спектр, то из этого не следует, что она непрерывна). Если функция распределения F(x) на некоторых участках непрерывна, а в отдельных точках имеет разрывы, то случайная величина называется смешанной.

**Плотностью распределения (или плотностью вероятности)** непрерывной случайной величины X называется функция f(x) равная F’(x).

Отсюда следует, что



т.е. f(x) является **законом распределения** непрерывной случайной величины X.

**Свойства f(x)**:

• f(x)≥ 0, т.к. F(x)- неубывающая функция,

• 

• **Р(**α≤**X<**β**)=P(**α≤**X**≤β**)=Р(**α**<X**≤β**)=Р(**α**<x<**β**)=.**

**Пример 11.** Плотность вероятности непрерывной случайной величины X

****

Найти

• значение параметра *a* ;

• функцию распределения F(x);

• вероятность того, что в четырех независимых испытаниях случайная величина X хотя бы один раз попадет в промежуток (0;3).

**Решение.**

• Из условия нормировки **** следует

****, откуда . Итак



****

Если x из (-∞;2], то F(x)= ****=0;

если x из (2;4], то F(x)=****;

если xиз (4;+ ∞ ), F(x)= ****.

Следовательно,

****

• Р(0<X<3)= F(3)-F(0)=

**Основные числовые характеристики случайной величины**

Закон распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения. Однако при решении многих практических задач достаточно знать о случайной величине лишь характерные черты закона распределения, которые в сжатой форме выражают существенные особенности распределения.

О каждой случайной величине необходимо, прежде всего, знать ее **среднее значение**, около которого группируются возможные значения случайной величины, а также **число**, характеризующее **степень разбросанности** возможных значений относительно среднего значения случайной величины. Для более полного описания случайной величины используют и другие числовые характеристики.

**Математическое ожидание случайной величины**

**Математическим ожиданием** или средним значением **дискретной случайной** величины Х называется число



Если же **дискретная случайная** величина Х имеет n возможных значений, то



Таким образом, математическим ожиданием случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие вероятности этих значений.

**Математическим ожиданием непрерывной случайной** величины Х называется число



Если же возможные значения **непрерывной случайной** величины Х принадлежат лишь отрезку [ *a* **;**b], то

**

**Пример 12.** Непрерывная случайная величина Х задана плотностью вероятности.



Найти М[X].

**Решение**.



**Простейшие свойства математического ожидания.**

**Свойство** 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной, то есть М[C]=С.

**Свойство** 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, то есть М[СX]=СM[X].

**Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины**

**Дисперсией** случайной величины Х называется число, характеризующее степень разброса возможных значений случайной величины относительно ее математического ожидания, обозначаемое D[X] и равное D[X]=M[(X-M[X])2].

Следовательно, для **дискретной случайной** величины D[X] находят по формуле



*mx* – математическое ожидание M[X].

Для **непрерывной случайной** величины



**Средним квадратическим отклонением** случайной величины Х называется число σx **= **, где Dx=D[X].

Среднее квадратическое отклонение σx также характеризует степень отклонения возможных значений случайной величины относительно ее mx, но имеет размерность случайной величины.

**Простейшие свойства дисперсии.**

**Свойство** 1. Дисперсия **постоянной** величины равна нулю. D[C]=0

**Свойство** 2. **Постоянный множитель** можно выносить за знак дисперсии, возводя его при этом в квадрат, т.е. D[СX]=С2D[X].

**Свойство** 3. Dx=M[X2]-mx2.

**Пример 13.** Найти дисперсию случайной величины Х, имеющей следующий закон распределения



**Решение.**

Воспользуемся формулой Dx=M[X2]-mx2.

Найдем М[X]=(-3)·0,2+(-1)·0,5+2·0,3=-0,5;

M[X2]=(-3)2·0,2+(-1)2·0,5+22·0,3=3,5; следовательно,

Dx=3,5-(-0,5)2=3,5-0,25=3,25. Можно вычислить σx = ****= **** ≈ 1,80.

ЗАДАНИЯ

5. Рабочий обслуживает 3 станка, каждый из которых работает независимо друг от друга. Вероятность того, что станки потребуют ремонта равна соответственно: 0,4; 0,3; 0,2. Найти вероятность того, что придется ремонтировать все станки.

5. Фирма имеет три источника поставки комплектующих – фирмы А, В, С. На долю фирмы А приходится 50% общего объема поставок, В – 30% и С – 20%. Известно, что 10% поставляемых фирмой А деталей бракованные, фирмой В – 5% и фирмой С – 6%. Какова вероятность, что взятая наугад деталь будет бракованной?

1. Завод отправил на базу 10000 стандартных изделий. Среднее число поврежденных при транспортировке изделий составляет 0,02%. Найти вероятность того, что из 10000 изделий будет повреждено:

а) 3,

б) менее трех.

5. Студенту задается 3 вопроса. Вероятность ответа на каждый из них составляет 0,9. Записать закон распределение Х – числа ответов студента. Составить функцию распределения случайной величины F(x). Вычислить М(Х), Д(Х), σх.

5.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **xi** | 42 | 50 | 58 | 66 | 74 | 82 | 90 |
| **ni** | 4 | 17 | 55 | 12 | 7 | 3 | 2 |