

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Сибирский государственный индустриальный университет»

Кафедра электротехники и электрооборудования

РАСЧЁТ УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Методические указания
к выполнению расчётно-графической работы

Новокузнецк
2016

УДК 621.34 (075)

Р 24

Рецензент

Кандидат технических наук,
профессор кафедры автоматизированного электропривода
и промышленной электроники СибГИУ

П. Н. Кунин

Р 24. Расчёт установившихся процессов в линейных электрических цепях: метод. указ. / Сиб. гос. индустр. ун-т; сост.: В.С. Князев, М.В. Кипервассер. – Новокузнецк : СибГИУ, 2016. – 46с., ил.

Приведены варианты индивидуальных задач для выполнения контрольных работ по расчёту линейных электрических цепей, содержащих синусоидальные, трёхфазные и несинусоидальные источники. Излагается методика выполнения контрольных работ, приведены примеры расчёта линейных электрических цепей комплексным методом с синусоидальными и несинусоидальными источниками электрической энергии.

Предназначены для студентов электротехнических специальностей заочного обучения.

Каждая задача контрольной работы имеет 19 вариантов. Номер варианта задачи определяется суммой двух последних цифр зачетной книжки студента.

ЗАДАЧА 3

Электрической цепь (рисунок 3.1 – 3.4) нагружена на активное сопротивление нагрузки R_H . На вход цепи воздействует периодическое напряжение $u_1(t)$, заданное в виде графика (рисунок 3.5 – 3.12). Значения напряжения U_m , периода изменения T , параметров элементов схемы L , C и сопротивления R_H заданы (таблица 3.1).

Требуется:

1. Представить входное напряжение $u_1(t)$ в виде ряда Фурье до 5-й гармоники включительно, используя табличные разложения, приведённые в учебниках (справочниках).

2. Обозначив сопротивления элементов схемы в общем виде как R_H , $(j \cdot X_L^{(k)})$ и $(-j \cdot X_C^{(k)})$, вывести формулу для комплексной амплитуды напряжения на нагрузке $\dot{U}_{2m}^{(k)}$ через $\dot{U}_{1m}^{(k)}$ – амплитуду входного напряжения. Полученное выражение пригодно для каждой гармоники ряда Фурье, понимая под $X_L^{(k)}$ и $X_C^{(k)}$ сопротивления индуктивности и ёмкости для гармоники с номером k .

3. Используя формулу пункта 2, определить комплексную амплитуду напряжения на выходе (на нагрузке) для следующих гармоник ряда Фурье: для нулевой ($k = 0$), первой ($k = 1$) и третьей ($k = 3$) гармоник в схемах цепи № 3-3 и № 3-4; для первой ($k = 1$), третьей ($k = 3$) и пятой ($k = 5$) гармоник в схемах цепи №3-1 и №3-2.

4. Записать закон изменения напряжения на нагрузке (мгновенное значение напряжения) в виде ряда Фурье.

5. Построить друг под другом линейчатые спектры амплитуд входного $[u_1(t)]$ и выходного $[u_2(t)]$ напряжений.

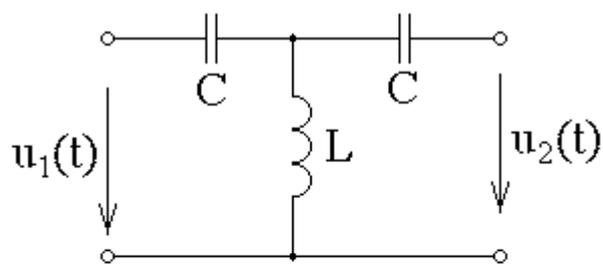


Рисунок 3-1

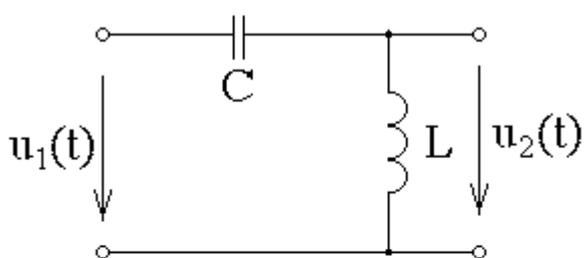


Рисунок 3-2

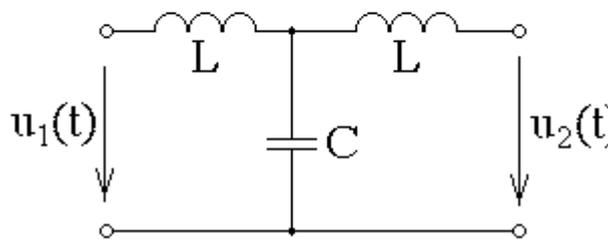


Рисунок 3-3

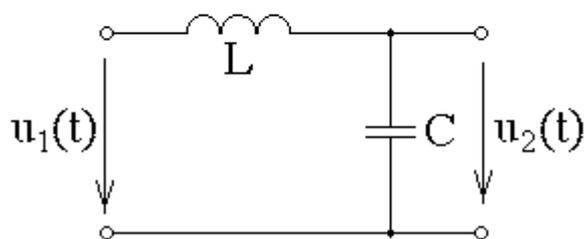


Рисунок 3-4

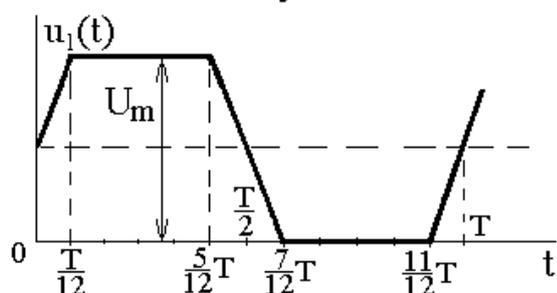


Рисунок 3-5

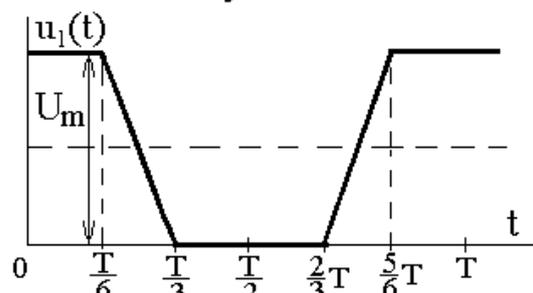


Рисунок 3-6

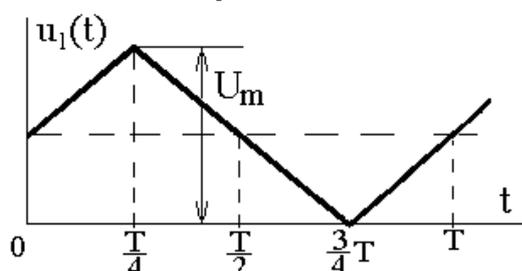


Рисунок 3-7

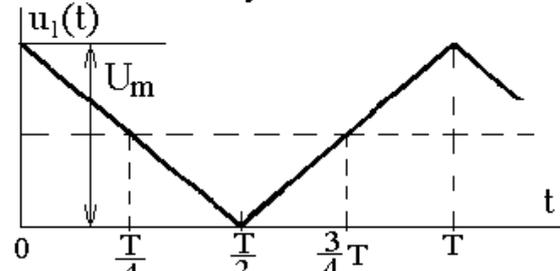


Рисунок 3-8

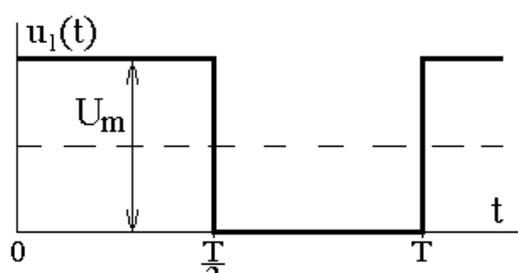


Рисунок 3-9

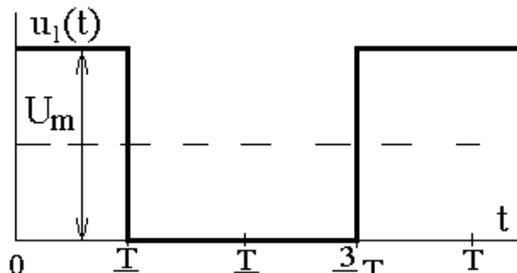


Рисунок 3-10

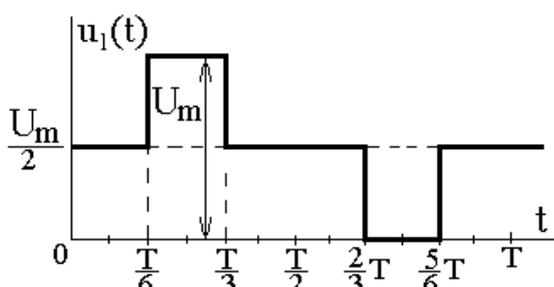


Рисунок 3-11

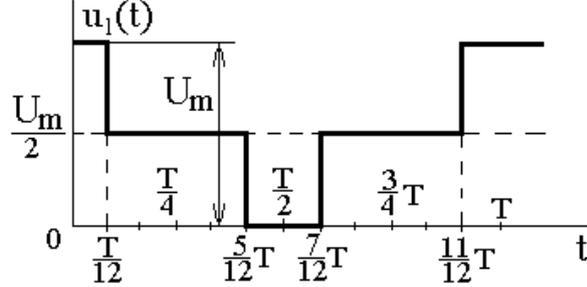


Рисунок 3-12

Указания:

1) Для получения разложения кривой напряжения на входе цепи $[u_1(t)]$ прежде всего выделяют постоянную составляющую $\frac{U_m}{2}$ и мысленно проводят новую ось времени на высоте $\frac{U_m}{2}$.

Относительно новой оси времени для оставшейся части напряжения находят табличное разложение в ряд Фурье по учебникам (справочникам). Из сравнения заданного напряжения с кривой для табличного разложения необходимо учесть смещение во времени напряжения относительно кривой с табличным разложением (запаздывание или опережение).

2) Для вывода формулы для напряжения на выходе схемы \dot{U}_{2m} (напряжения на нагрузке R_H) через напряжение \dot{U}_{1m} на входе схемы и параметры схемы электрическая цепь описывается системой уравнений по законам Кирхгофа, а затем путём подстановок и закона Ома система уравнений сводится к требуемому выражению (из записанных уравнений исключаются токи).

Таблица 3.1 – Параметры элементов электрической цепи

№ варианта	Рисунок с изображением схемы	Рисунок с графиком $u_1(t)$	L	C	T	U_m	R_H
			мГн	мкФ	мс	В	Ом
0	3-4	3-10	0,5	0,4	0,137	110	28,1
1	3-2	3-10	1,7	0,9	0,40	12	32,0
2	3-3	3-9	11	4	2	100	65,7
3	3-4	3-8	0,5	0,4	0,147	50	27,6
4	3-1	3-6	0,4	0,5	0,158	50	36,5
5	3-2	3-7	0,7	0,24	0,134	45	41,4
6	3-3	3-10	5	1	0,625	25	86,5
7	3-4	3-9	5,6	2,28	1,20	50	38,6
8	3-1	3-9	2,55	1,4	0,63	20	55,5
9	3-2	3-8	4,2	1,44	0,8	40	41,4
10	3-3	3-7	21	1	1,50	80	185
11	3-4	3-10	1	1	0,314	100	25
12	3-1	3-10	21,5	9,85	5,88	30	58
13	3-2	3-5	1,3	0,316	0,23	35	50
14	3-3	3-12	2,58	1,43	0,484	75	49,8
15	3-4	3-5	3	0,9	0,525	40	45,4
16	3-1	3-11	5,4	3	1,34	15	55,2
17	3-2	3-6	6,25	12,4	3,13	40	17,5
18	3-3	3-7	6,25	10	2,5	70	31,6
19	3-3	3-6	18	5,8	3	100	69

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ 3

С учётом индивидуального варианта задачи (№19 из таблицы 3.1) схема заданной электрической цепи с учётом сопротивления нагрузки R_H имеет вид, приведённый на рисунке 3.13.

Вариант задачи	Рисунок схемы	Рисунок графика $u_1(t)$	L, мГн	C, мкФ	T, мс	R_H , Ом	U_m , В
19	3-4	2-2	18	5,8	3	69	100

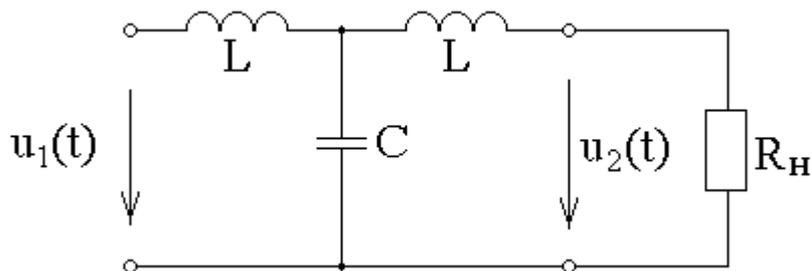


Рисунок 3.13 – Схема электрической цепи

На входных зажимах электрической цепи действует периодическое несинусоидальное напряжение, показанное на рисунке 3.14.

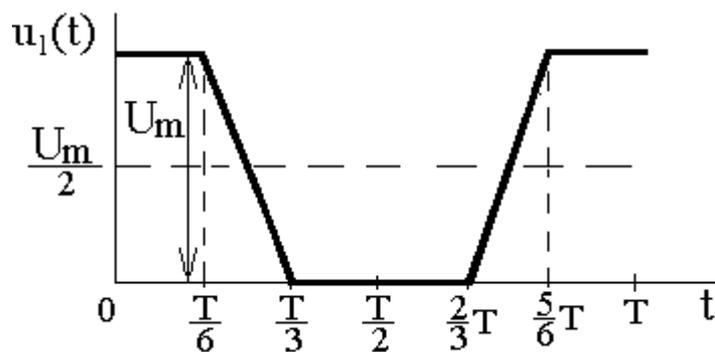


Рисунок 3.14 – Напряжение на входе электрической цепи

1. Кривую заданного входного напряжения представим в виде тригонометрического ряда Фурье. В общем случае ряд Фурье для периодической несинусоидальной функции времени заданного входного напряжения запишется:

$$u_1(t) = U_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} U_{1m}^{(k)} \cdot \sin(\kappa\omega t + \psi_{u_1}^{(k)}).$$

Определение составляющих ряда Фурье входного напряжения выполним, воспользовавшись табличными разложениями, при -

ведёнными в учебниках по теоретическим основам электротехники.

Прежде всего, выделяем во входном напряжении $u_1(t)$ постоянную составляющую:

$$U_1^{(0)} = \frac{U_m}{2}.$$

Проводим новую ось времени на высоте постоянной составляющей напряжения $U_1^{(0)}$. Для оставшейся части напряжения находим в учебниках и справочниках подобное табличное разложение. Затем определяем соотношения, учитывающие соответствие табличной кривой и заданного напряжения на входе электрической цепи, а также возможное их смещение по оси времени (опережение или запаздывание).

Для заданного входного напряжения подобная табличная кривая [Л.1 – приложение 1; Л.2 – таблица 7.1] имеет вид, приведённый на рисунке 3.15.

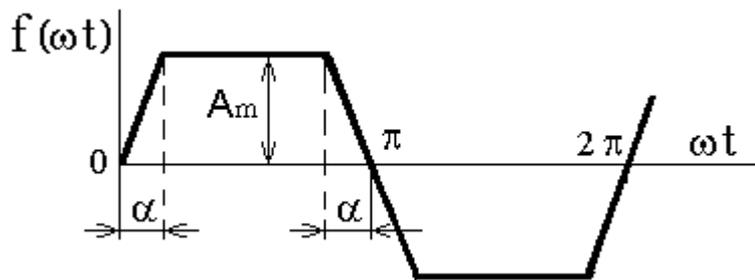


Рисунок 3.15 – Табличная кривая

Разложение в ряд Фурье табличной кривой:

$$f(\omega t) = \frac{4 A_m}{\alpha \cdot \pi} \cdot \left(\sin \alpha \cdot \sin(\omega t) + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \cdot \sin(3\omega t) + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \cdot \sin(5\omega t) + \dots \right).$$

Из сравнения заданного несинусоидального входного напряжения (рисунок 3.14) с табличной кривой (рисунок 3.15) имеем:

1) наличие постоянной составляющей $U_1^{(0)} = \frac{U_m}{2}$;

2) $A_m = \frac{U_m}{2}$;

3) $\alpha = \omega \cdot \frac{T}{12} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{12} = \frac{\pi}{6}$ или $\alpha = 30^\circ$;

4) напряжение на входе цепи опережает во времени табличную кривую на время t_0 :

$$t_0 = \frac{T}{4} \left(\omega \cdot t_0 = \frac{\omega \cdot T}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \right).$$

Таким образом, заданное входное напряжение с учётом постоянной составляющей имеет следующее разложение в ряд Фурье:

$$u_1(t) = \frac{U_m}{2} + \frac{4 \left(\frac{U_m}{2} \right)}{\frac{\pi}{6} \cdot \pi} \cdot \left\{ \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin [\omega(t+t_0)] + \frac{1}{9} \sin \left(3 \cdot \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sin [3\omega(t+t_0)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} \sin \left(5 \cdot \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sin [5\omega(t+t_0)] + \dots \right\} = \\ = \frac{U_m}{2} + \frac{12 U_m}{\pi^2} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{9} \sin \left(3\omega t + \frac{3\pi}{2} \right) + \frac{1}{50} \sin \left(5\omega t + \frac{5\pi}{2} \right) + \dots \right].$$

С учётом заданных численных значений варианта задачи получаем следующий закон изменения напряжения на входе цепи:

$$u_1(t) = 50 + 60,793 \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) + 13,510 \cdot \sin(3\omega t + 270^\circ) + \\ + 2,432 \cdot \sin(5\omega t + 90^\circ) + \dots = U_1^{(0)} + u_1^{(1)}(t) + u_1^{(3)}(t) + u_1^{(5)}(t) + \dots \quad (B).$$

График входного напряжения как сумма четырёх первых гармоник разложения имеет вид, представленный на рисунке 3.16.

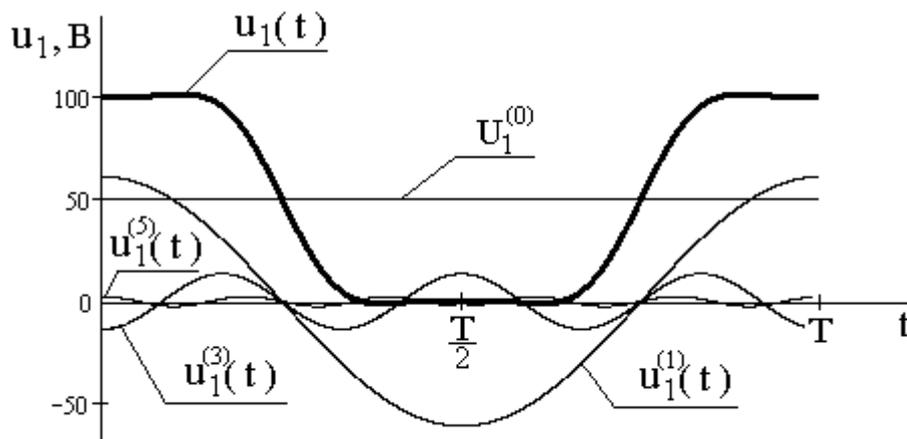


Рисунок 3.16 – График входного напряжения как сумма гармоник

2. Обозначим сопротивления элементов схемы в общем виде как R_H , $(jX_L^{(k)})$, $(-jX_C^{(k)})$ и получим формулу для комплексной амплитуды напряжения на нагрузке $\dot{U}_{2m}^{(k)}$ через амплитуду входного напряжения $\dot{U}_{1m}^{(k)}$. Полученное выражение пригодно для каждой

гармоники, понимая под $X_L^{(k)}$ и $X_C^{(k)}$ сопротивления индуктивности и ёмкости для гармоники с номером k .

Расчётная схема для произвольной гармоники “к” в комплексной форме имеет вид, представленный на рисунке 3.17.

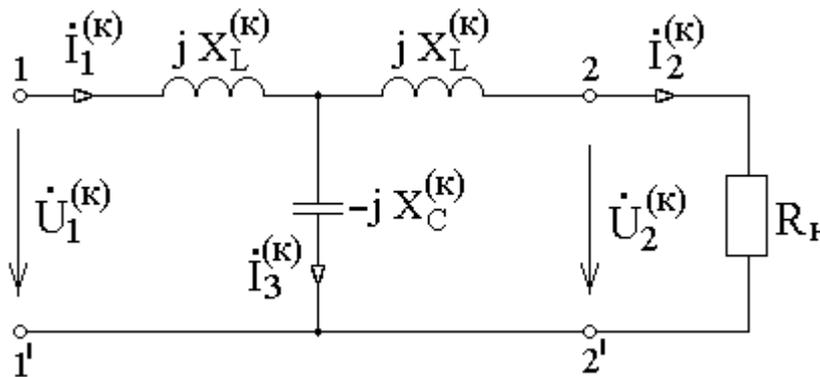


Рисунок 3.17 – Расчётная схема для гармоники “к”

По законам Кирхгофа и Ома в комплексной форме для действующих значений электрическая цепь опишется уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{U}_1^{(k)} = j X_L^{(k)} \cdot \dot{I}_1^{(k)} + (R_H + j X_L^{(k)}) \cdot \dot{I}_2^{(k)} ; & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -(-j X_C^{(k)}) \cdot \dot{I}_3^{(k)} + (R_H + j X_L^{(k)}) \cdot \dot{I}_2^{(k)} ; & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1^{(k)} = \dot{I}_2^{(k)} + \dot{I}_3^{(k)} ; & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_2^{(k)} = \frac{\dot{U}_2^{(k)}}{R_H} . & (4) \end{cases}$$

Выразим из уравнения (2) ток $\dot{I}_3^{(k)}$ и подставим полученное значение в уравнение (3):

$$\dot{I}_3^{(k)} = \frac{(R_H + j X_L^{(k)})}{-j X_C^{(k)}} \cdot \dot{I}_2^{(k)} ; \quad (5)$$

$$\dot{I}_1^{(k)} = \dot{I}_2^{(k)} + \frac{R_H + j X_L^{(k)}}{-j X_C^{(k)}} \cdot \dot{I}_2^{(k)} = \frac{-j X_C^{(k)} + R_H + j X_L^{(k)}}{-j X_C^{(k)}} \cdot \dot{I}_2^{(k)} . \quad (6)$$

Полученное выражение для тока $\dot{I}_1^{(k)}$ (6) подставим в уравнение (1), а затем выполним подстановку (4):

$$\begin{aligned}
\dot{U}_1^{(k)} &= j X_L^{(k)} \cdot \frac{-j X_C^{(k)} + R_H + j X_L^{(k)}}{-j X_C^{(k)}} \cdot \dot{I}_2^{(k)} + (R_H + j X_L^{(k)}) \cdot \dot{I}_2^{(k)} = \\
&= \dot{I}_2^{(k)} \cdot \frac{j X_L^{(k)} \cdot (-j X_C^{(k)} + R_H + j X_L^{(k)}) + (-j X_C^{(k)}) \cdot (R_H + j X_L^{(k)})}{-j X_C^{(k)}} = \\
&= \frac{\dot{U}_2^{(k)}}{R_H} \cdot \frac{X_L^{(k)} \cdot X_C^{(k)} + j X_L^{(k)} \cdot R_H - (X_L^{(k)})^2 - j X_C^{(k)} \cdot R_H + X_C^{(k)} \cdot X_L^{(k)}}{-j X_C^{(k)}} = \\
&= \dot{U}_2^{(k)} \cdot \frac{(2 X_C^{(k)} - X_L^{(k)}) \cdot X_L^{(k)} + j (X_L^{(k)} - X_C^{(k)}) \cdot R_H}{-j X_C^{(k)} \cdot R_H}.
\end{aligned}$$

Искомая формула для комплексной амплитуды напряжения на нагрузке $\dot{U}_{2m}^{(k)}$ через амплитуду входного напряжения $\dot{U}_{1m}^{(k)}$:

$$\dot{U}_{2m}^{(k)} = \dot{U}_{1m}^{(k)} \cdot \frac{-j X_C^{(k)} \cdot R_H}{(2 X_C^{(k)} - X_L^{(k)}) \cdot X_L^{(k)} + j (X_L^{(k)} - X_C^{(k)}) \cdot R_H}.$$

3. Используя полученную формулу, определим комплексную амплитуду напряжения на выходе цепи для нулевой ($k = 0$), первой ($k = 1$) и третьей ($k = 3$) гармоник (для схемы № 3-4).

1) Расчёт нулевой гармоники ($k = 0$).

$$U_1^{(0)} = U_{1m}^{(0)} = 50 \text{ В}.$$

Так как при постоянных токах и напряжениях в электрической цепи индуктивность представляет собой “закоротку” $|X_L^{(0)} = 0|$, а ёмкость представляет собой “разрыв ветви” $|X_C^{(0)} = \infty|$, то для заданной цепи напряжение на нагрузке определится:

$$\begin{aligned}
U_{2m}^{(0)} &= U_{1m}^{(0)} \cdot \frac{-j X_C^{(0)} \cdot R_H}{(2 X_C^{(0)} - X_L^{(0)}) \cdot X_L^{(0)} + j (X_L^{(0)} - X_C^{(0)}) \cdot R_H} = \\
&= U_{1m}^{(0)} \cdot \lim_{\substack{X_L^{(0)} \rightarrow 0 \\ X_C^{(0)} \rightarrow \infty}} \frac{-j R_H}{\left(2 - \frac{X_L^{(0)}}{X_C^{(0)}}\right) \cdot X_L^{(0)} + j \left(\frac{X_L^{(0)}}{X_C^{(0)}} - 1\right) \cdot R_H} = U_{1m}^{(0)} = 50 \text{ В}.
\end{aligned}$$

2) Расчёт первой гармоники ($k = 1$).

Частота основной (первой) гармоники сигнала:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-3}} = 333,33 \text{ Гц} .$$

Комплексное значение амплитуды входного напряжения:

$$\dot{U}_{1m}^{(1)} = 60,793 \cdot e^{j90^\circ} \text{ В} .$$

Реактивные сопротивления индуктивностей и ёмкости при частоте первой гармоники напряжения на входе цепи:

$$X_L^{(1)} = \omega \cdot L = 2\pi f \cdot L = \frac{2\pi}{T} \cdot L = \frac{2\pi}{3 \cdot 10^{-3}} \cdot 18 \cdot 10^{-3} = 37,70 \text{ Ом};$$

$$X_C^{(1)} = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2\pi f \cdot C} = \frac{T}{2\pi \cdot C} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 5,8 \cdot 10^{-6}} = 82,322 \text{ Ом} .$$

Комплексная амплитуда напряжения на нагрузке:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{2m}^{(1)} &= \dot{U}_{1m}^{(1)} \cdot \frac{-j X_C^{(1)} \cdot R_f}{(2 X_C^{(1)} - X_L^{(1)}) \cdot X_L^{(1)} + j (X_L^{(1)} - X_C^{(1)}) \cdot R_f} = \\ &= 60,793 e^{j90^\circ} \cdot \frac{-j 82,322 \cdot 69}{(2 \cdot 82,322 - 37,70) \cdot 37,70 + j (37,70 - 82,322) \cdot 69} = \\ &= 60,793 e^{j90^\circ} \cdot \frac{-j 5680,218}{4785,789 - j 3078,918} = 60,793 e^{j90^\circ} \cdot \frac{5680,218 e^{-j90^\circ}}{5690,651 e^{-j32,76^\circ}} = \\ &= 60,793 e^{j90^\circ} \cdot 0,9982 e^{-j57,24^\circ} = 60,682 e^{j32,76^\circ} \text{ В} . \end{aligned}$$

3) Расчёт третьей гармоники ($k = 3$).

Комплексное амплитудное значение входного напряжения:

$$\dot{U}_{1m}^{(3)} = 13,510 \cdot e^{j270^\circ} \text{ В} .$$

Реактивные сопротивления индуктивностей и ёмкости:

$$X_L^{(3)} = 3 \cdot X_L^{(1)} = 3 \cdot 37,70 = 113,10 \text{ Ом};$$

$$X_C^{(3)} = \frac{1}{3} \cdot X_C^{(1)} = \frac{82,322}{3} = 27,441 \text{ Ом} .$$

Комплексная амплитуда напряжения на нагрузке:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{2m}^{(3)} &= \dot{U}_{1m}^{(3)} \cdot \frac{-j X_C^{(3)} \cdot R_H}{\left(2 X_C^{(3)} - X_L^{(3)}\right) \cdot X_L^{(3)} + j \left(X_L^{(3)} - X_C^{(3)}\right) \cdot R_H} = \\ &= 13,510 e^{j270^\circ} \cdot \frac{-j27,441 \cdot 69}{(2 \cdot 27,441 - 113,10) \cdot 113,10 + j(113,10 - 27,441) \cdot 69} = \\ &= 13,510 e^{j270^\circ} \cdot \frac{-j1893,429}{-6584,456 + j5910,471} = 13,510 e^{j270^\circ} \cdot \frac{1893,429 e^{-j90^\circ}}{8848,092 e^{j138,09^\circ}} = \\ &= 13,510 \cdot e^{j270^\circ} \cdot 0,2140 e^{-j228,09^\circ} = 2,891 e^{j41,91^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

4) Расчёт пятой гармоники ($k = 5$).

Комплексное амплитудное значение входного напряжения:

$$\dot{U}_{1m}^{(5)} = 2,432 \cdot e^{j90^\circ} \text{ В.}$$

Реактивные сопротивления индуктивностей и ёмкости:

$$X_L^{(5)} = 5 \cdot X_L^{(1)} = 5 \cdot 37,70 = 188,5 \text{ Ом};$$

$$X_C^{(5)} = \frac{1}{5} \cdot X_C^{(1)} = \frac{82,322}{5} = 16,464 \text{ Ом}.$$

Комплексная амплитуда напряжения на нагрузке:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{2m}^{(5)} &= \dot{U}_{1m}^{(5)} \cdot \frac{-j X_C^{(5)} \cdot R_H}{\left(2 X_C^{(5)} - X_L^{(5)}\right) \cdot X_L^{(5)} + j \left(X_L^{(5)} - X_C^{(5)}\right) \cdot R_H} = \\ &= 2,432 e^{j90^\circ} \cdot \frac{-j16,464 \cdot 69}{(2 \cdot 16,464 - 188,5) \cdot 188,5 + j(188,5 - 16,464) \cdot 69} = \\ &= 2,432 e^{j90^\circ} \cdot \frac{-j1136,016}{-29325,322 + j11870,484} = 2,432 e^{j90^\circ} \cdot \frac{1136,016 e^{-j90^\circ}}{31636,733 e^{j157,96^\circ}} = \\ &= 2,432 e^{j90^\circ} \cdot 0,03591 e^{-j247,96^\circ} = 0,0873 e^{-j157,96^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

4. Закон изменения во времени напряжения на нагрузке в виде ряда Фурье (мгновенное значение напряжения на выходе цепи):

$$u_2(t) = U_2^{(0)} + u_2^{(1)}(t) + u_2^{(3)}(t) + u_2^{(5)}(t) = 50 + 60,695 \sin(\omega t + 32,76^\circ) + 2,892 \sin(3\omega t + 41,91^\circ) + 0,0873 \sin(5\omega t - 157,96^\circ) \text{ В.}$$

5. Линейчатые спектры амплитуд входного напряжения $u_1(t)$ и выходного напряжения $u_2(t)$ – рисунок 3.18.

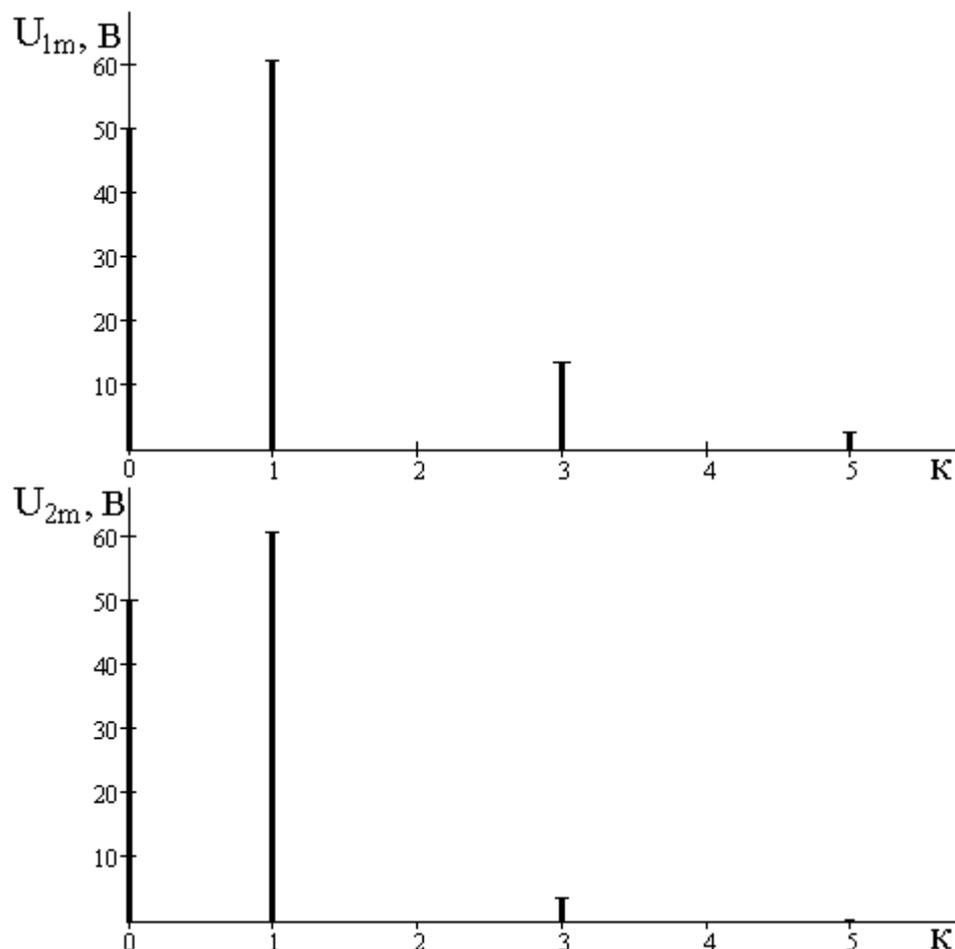


Рисунок 3.18 – Линейчатые спектры амплитуд входного (u_1) и выходного (u_2) напряжений

8. Закон изменения напряжения на нагрузке в функции времени приведён на рисунке 3.19.

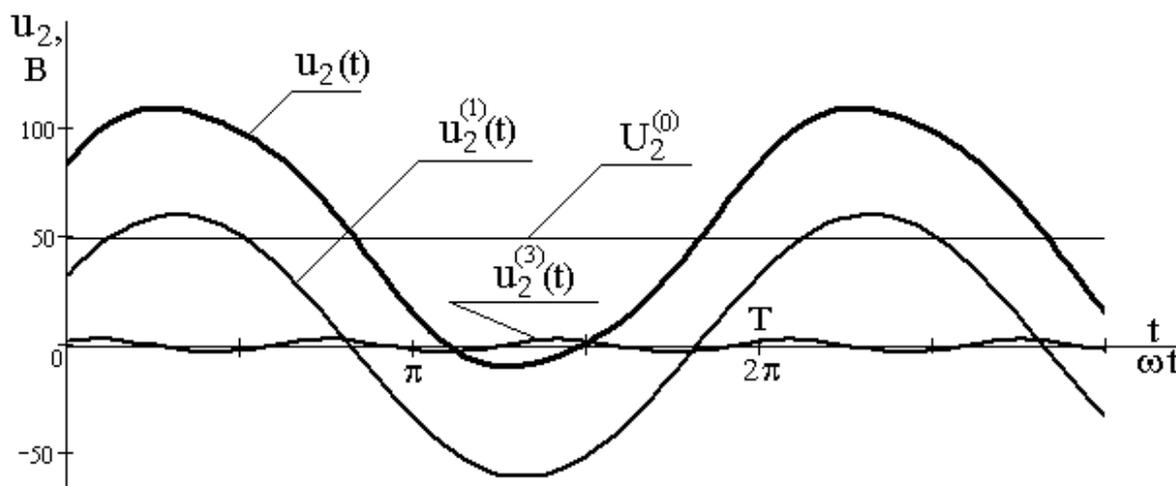


Рисунок 3.19 – График изменения напряжения на нагрузке

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зевеке Г.В. Основы теории цепей: учебник для вузов / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.

2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник для вузов / Л.А. Бессонов. – 10-е изд. – М.: Гардарики, 2001. – 638 с.

3. Попов В.П. Основы теории цепей: учебник для вузов / В.П. Попов. – 5-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2005. – 575 с.

4. Шебес М.Р. Задачник по теории линейных электрических цепей: учебное пособие для вузов / М.Р. Шебес, М.В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1990, – 544 с.

5. Бессонов Л.А. Сборник задач по теоретическим основам электротехники. / Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди и др. – М.: Высшая школа, 1988, – 543с.