

Вычислим теперь потерю механической энергии при ударе шарика о стержень. Энергия МС до удара равна начальной кинетической энергии шарика:

$$E_0 = \frac{mV_0^2}{2}. \quad (2.9)$$

Энергия МС сразу после удара складывается из кинетических энергий шарика и стержня:

$$E_K = \frac{m(\omega_0 2l/3)^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2}. \quad (2.10)$$

Вычитая выражения (2.9) из (2.10), после соответствующих преобразований находим потерю механической энергии  $\Delta E = E_K - E_0$  при ударе шарика о стержень:

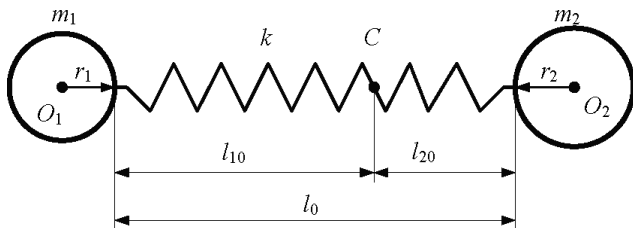
$$\Delta E = -\frac{mV_0^2}{2} \frac{7M}{(16m + 7M)}. \quad (2.11)$$

В формуле (2.11)  $\Delta E < 0$ , это говорит о том, что при ударе механическая энергия МС уменьшилась, т. е. некоторое количество механической энергии МС при внедрении шарика в стержень перешло в теплоту.

### 3. КОЛЕБАНИЯ

В данных методических указаниях рассматриваются свободные затухающие механические колебания различных механических систем (МС), которые наиболее близки к реальным колебательным системам (КС). Например, МС, состоящая из двух, трех и более шариков массой  $m$  каждый, соединенных упругими пружинами с жесткостью  $k$  каждая, с достаточно хорошим приближением моделирует колебания молекулы, состоящей из двух, трех и более атомов, соединенных упругими связями.

В качестве примера рассмотрим МС, состоящую из двух шариков  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных упругой пружиной длиной  $l_0$  и жесткостью  $k$  (рис. 18). Такая МС неплохо моделирует некоторую молекулу, состоящую из двух разных атомов, соединенных упругой связью.



**Рис. 18**

Чтобы исключить влияние силы тяжести на данную МС, будем рассматривать движение этой системы на горизонтальной плоскости. Трением шариков об эту плоскость будем пренебрегать. Поскольку данная МС является замкнутой, колебания этих шариков вдоль линии  $O_1 O_2$ , проходящей через центры шариков, можно рассматривать как колебания каждого шарика относительно неподвижного центра масс МС (точка  $C$ ). В этом случае круговые (циклические) частоты колебаний 1-го и 2-го шариков будут равны  $\omega_1 = \omega_2$  и соответственно будут определять частоту колебаний МС  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Данный тезис подтверждается соответствующими расчетами. Из формулы, определяющей координату центра масс МС, получаем равенство

$$m_1(r_1 + l_{10}) = m_2(r_2 + l_{20}), \quad (3.1)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы 1-го и 2-го шариков. В дальнейшем будем полагать, что  $l_{10} \gg r_1$  и  $l_{20} \gg r_2$  и тогда вместо уравнения (3.1) получаем

$$m_1 l_{10} = m_2 l_{20}. \quad (3.2)$$

Поскольку  $l_0 = l_{10} + l_{20}$ , то в соответствии с выражением (3.2) находим величины:

$$l_{10} = l_0 \frac{m_2}{m_1 + m_2}; \quad (3.3)$$

$$l_{20} = l_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.4)$$

Известно, что жесткость пружины обратно пропорциональна ее длине. Поэтому можно записать, что

$$k l_0 = k_1 l_{10} = k_2 l_{20} = b = \text{const}, \quad (3.5)$$

где значение постоянной  $b$  зависит от упругих свойств материала пружины и ее геометрии;  $k_1$  и  $k_2$  — жесткости левой и правой частей пружины, определяемых соответственно длинами  $l_{10}$  и  $l_{20}$ . Циклические частоты колебаний 1-го и 2-го шариков, согласно условию (3.5), будут равны соответственно

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{k \frac{l_0}{l_{10} m_1}}; \quad (3.6)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{k \frac{l_0}{l_{10} m_2}}. \quad (3.7)$$

Поскольку формула (3.2) остается справедливой в любой момент времени, из выражений (3.6) и (3.7) следует, что

$$\omega_1 = \omega_2. \quad (3.8)$$

Подставив выражение (3.3) в (3.6), а (3.4) в (3.7), с учетом равенства (3.8) получаем формулу, определяющую круговую частоту колебаний рассматриваемой МС:

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}. \quad (3.9)$$

Величина

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.10)$$

в формуле (3.9) называется приведенной массой КС. Следовательно, круговая частота данной КС

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}. \quad (3.11)$$

В этом случае задачу о колебаниях двух шариков можно свести к задаче колебания классического пружинного осциллятора с приведенной массой  $\mu$ . В частности, при  $m_1 = m_2 = m$ , согласно выражениям (3.10) и (3.11) получаем, что

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}. \quad (3.12)$$

Из формулы (3.12) видно, что частота колебаний одинаковых шариков, соединенных пружиной, в  $\sqrt{2}$  раз больше частоты колебаний одного шарика на такой же пружине.

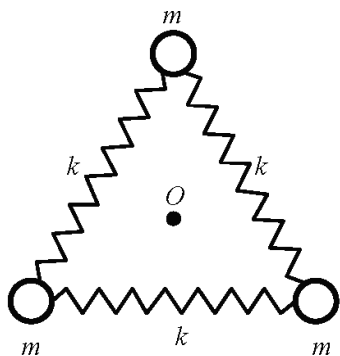


Рис. 19

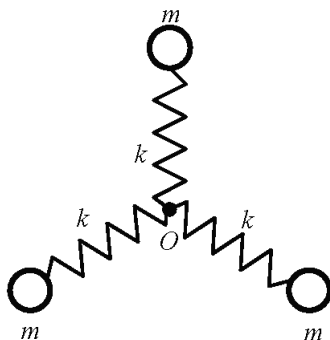


Рис. 20

На рис. 19, 20 представлены конструктивные схемы МС, состоящих из трех одинаковых шариков массой  $m$  каждый, соединенных тремя пружинами жесткостью  $k$  каждая. На рис. 19 шарики расположены в вершинах равностороннего треугольника, а на рис. 20 шарики вместе с пружинами образуют правильную трехлучевую звезду с центром в точке  $O$ .

Данные МС можно рассматривать как модели трехатомных молекул, соединенных между собой упругими связями. Так же, как в предыдущей задаче, будем рассматривать движение этой МС на горизонтальной плоскости, а трением шариков об эту плоскость будем пренебрегать.

Требуется определить собственную частоту колебаний каждой МС при условии, что шарики будут совершать малые синхронные колебания с соблюдением условий центральной симметрии.

Движение шариков МС, показанной на рис. 20, будет происходить вдоль лучей звезды, так что три шарика в любой момент времени будут находиться на одинаковом расстоянии от центра масс МС (точка  $O$ ) и будут образовывать подобные геометрические фигуры.

Шарики МС, изображенной на рис. 19, также будут двигаться вдоль лучей, исходящих из центра (точка  $O$ ). При этом исходная форма равностороннего треугольника этой МС будет сохраняться в любой момент времени, а изменяться будут только размеры треугольника (подобие треугольников сохраняется).

В обеих задачах при движении шариков из положения равновесия к центру пружины сжимаются, а при движении от центра пружины растягиваются. Но центры масс МС (точка  $O$ ) на рис. 19, 20 остаются при любых движениях шариков неподвижными. Поэтому частоты колебаний МС будут равны частотам колебаний каждого отдельного шарика.

Итак, собственная круговая частота свободных незатухающих колебаний МС, показанной на рис. 20, будет равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.13)$$

Несколько сложнее дело обстоит с МС, приведенной на рис. 19. Определим частоту этой МС, используя закон сохранения механической энергии. На рис. 21 представлена схема треугольной МС при ее расширяющемся движении.

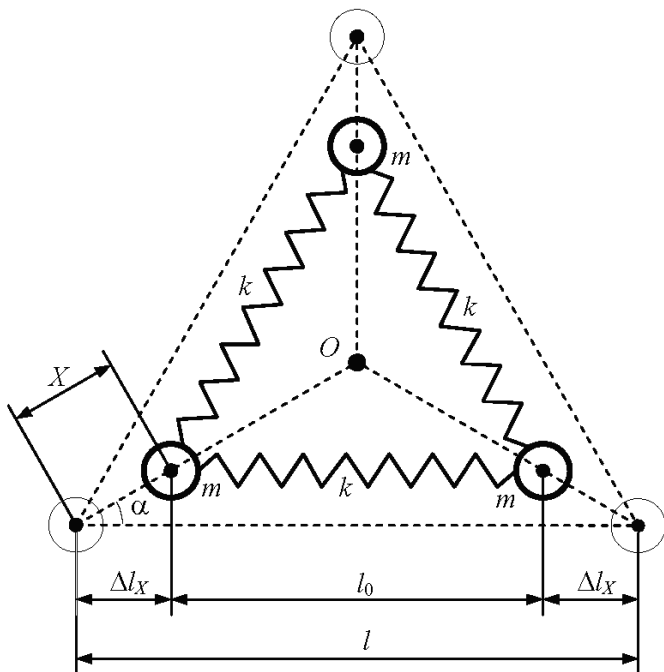


Рис. 21

Обозначим через  $\Delta l = l - l_0$  изменение длины каждой пружины, которое, согласно рис. 21, будет равно

$$\Delta l = 2\Delta l_x = 2x \cos \alpha, \quad (3.14)$$

где  $x$  — смещение шарика относительно его положения равновесия вдоль линии движения. Поскольку каждый угол в равностороннем треугольнике равен  $60^\circ$ , угол  $\alpha$  на рис. 21 будет равен  $\alpha = 30^\circ$ . А так как  $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ , вместо выражения (3.14) следует написать

$$\Delta l = \sqrt{3}x. \quad (3.15)$$

Полная механическая энергия всей МС в произвольный момент времени

$$E = 3 \frac{k\Delta l^2}{2} + 3 \frac{mV_x^2}{2} = \text{const}. \quad (3.16)$$

После подстановки (3.15) в (3.16) получим:

$$E = 9 \frac{kx^2}{2} + 3 \frac{mV_x^2}{2} = \text{const}. \quad (3.17)$$

Поскольку энергия  $E$ , согласно (3.17), не зависит от времени, производная от энергии по времени будет равна нулю:

$$\frac{dE}{dt} = 0. \quad (3.18)$$

Подставляя (3.17) в (3.18) приходим к уравнению следующего вида:

$$V_x \left( 3kx + m \frac{dV_x}{dt} \right) = 0.$$

Так как в общем случае  $V_x \neq 0$ , выражение, стоящее в скобках, должно быть равно нулю. А поскольку  $V_x = \dot{x}$ , в итоге получаем дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.19)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}. \quad (3.20)$$

Итак, формула (3.20) определяет круговую частоту МС, изображенной на рис. 19, а также частоту колебаний каждого шарика

этой МС. Интересно, что частота, определяемая по формуле (3.20), в  $\sqrt{3}$  больше частоты, которая определяется формулой (3.13).

Аналогичным образом вычисляют собственные частоты незатухающих колебаний МС, изображенных на рис. 22—25. С этой целью необходимо, используя закон сохранения механической энергии, вывести дифференциальное уравнение для этих МС, аналогичное уравнению (3.19).

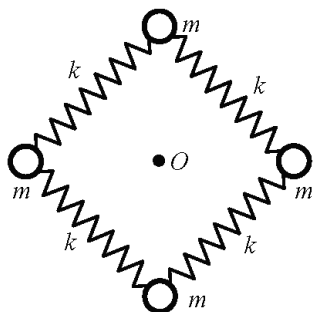


Рис. 22

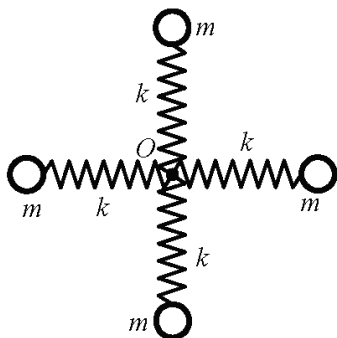


Рис. 23

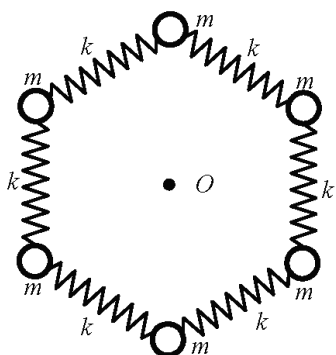


Рис. 24

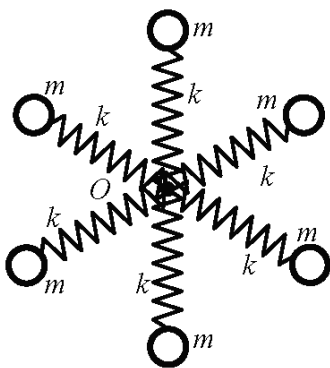


Рис. 25

**Общие условия задач раздела 3.** Для конкретной колебательной системы (КС), представленной на соответствующем рисунке, необходимо:

1) вывести дифференциальное уравнение малых свободных затухающих колебаний, если сила сопротивления движению тела КС пропорциональна скорости, т. е.  $\vec{F} = -r\vec{V}$ , где  $r$  — коэффициент сопротивления;

2) определить круговую частоту  $\omega_0$  и период  $T_0$  свободных незатухающих колебаний;

3) найти круговую частоту  $\omega$  и период  $T$  свободных затухающих колебаний;

4) вычислить логарифмический декремент затухания;

5) определить, используя начальные условия задачи и исходные данные, начальные амплитуду  $A_0$  и фазу  $\varphi_0$  колебаний;

6) записать уравнение колебаний с учетом найденных значений.

**Общие исходные данные:**  $m^* = 0,1$  кг;  $k^* = 10$  Н/м;  $l^* = 0,1$  м;  $r^* = 0,2$  кг/с;  $u^* = 0,1$  м/с;  $\rho^* = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $S^* = 10^{-3}$  м<sup>2</sup>;  $\varphi^* = \pi/6$ .

Другие исходные данные и начальные условия задачи для каждого варианта задания приведены в табл. 8 — 15.

**Основные зависимости к задаче раздела 3.** Исходными уравнениями для вывода дифференциального уравнения колебаний могут быть, например, уравнение поступательного движения твердого тела, записанное в проекции на ось  $OX$ , или уравнение вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси вращения  $OZ$ . В первом случае уравнение имеет вид

$$ma_x = \sum_i F_{ix},$$

где  $a_x = \ddot{x}$  — проекция вектора ускорения тела на ось  $OX$ ;  $F_{ix}$  — проекция вектора  $i$ -й силы, действующей на тело, на ось  $OX$ .

Во втором случае уравнение выглядит так:

$$I_z \epsilon_z = \sum_i M_{iz},$$

где  $I_z$  — момент инерции тела относительно оси  $OZ$ ;  $\epsilon_z = \ddot{\alpha}$  — проекция углового ускорения на ось  $OZ$ ;  $\alpha$  — угол поворота тела;  $M_{iz}$  — проекция вектора момента  $i$ -й силы на ось  $OZ$ .



Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний запишется так:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где  $\beta = \frac{r}{2m}$  — коэффициент затухания.

Решение этого уравнения при условии, что  $\omega_0 > \beta$ , имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  — круговая частота свободных затухающих колебаний.

Логарифмический декремент затухания вычисляется по формуле

$$\delta = \beta T,$$

где  $T = 2\pi/\omega$ .

### Задача 3-1

Для МС, расположенных на горизонтальной плоскости и представленных на рис. 22–25, определить круговую частоту и период собственных незатухающих колебаний. Значения масс шариков, жесткость соединяющих их пружин, а также другие исходные данные приведены в табл. 8. Трением шариков при их движении о контактную горизонтальную плоскость пренебречь.

Дополнительно (в соответствии с общими условиями задачи 3) рассчитать значения всех требуемых величин и вывести уравнение затухающих колебаний горизонтального пружинного маятника (см. рис. 26), у которого масса шарика  $m$ , а длина и жесткость пружины равны соответственно  $l_0$  и  $k$  (см. табл. 8). В начальный момент времени шарик смещают так, что длина пружины становится равной  $l$ , а за тем кратковременным воздействием сообщают шарiku скорость  $\vec{v}_1$  или  $\vec{v}_2$ . В результате система приходит в колебательное движение в горизонтальном направлении. Трением шарика о боковую поверхность пренебречь.

Номер варианта	Рисунок	$m$	$k$	$l_0$	$l$	$r$	$V_1$	$V_2$
1	22; 23	$0,3m^*$	$1,5k^*$	$1,3l^*$	$1,5l^*$	$1,1r^*$	$0,5u^*$	0
2	24; 25	$0,9m^*$	$1,1k^*$	$1,5l^*$	$1,2l^*$	$1,5r^*$	0	$0,4u^*$
3	22; 23	$0,5m^*$	$1,7k^*$	$1,7l^*$	$1,5l^*$	$1,7r^*$	$0,7u^*$	0
4	24; 25	$0,7m^*$	$1,3k^*$	$1,1l^*$	$1,4l^*$	$1,9r^*$	0	$0,6u^*$

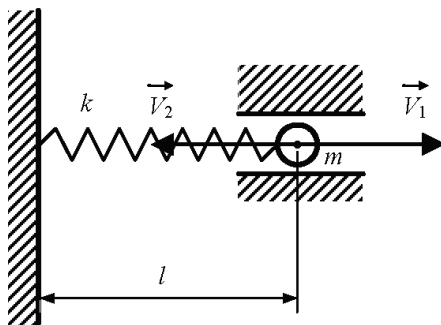


Рис. 26

## Задача 3-2

Механическая система, рассматриваемая в этой задаче, расположена на горизонтальной плоскости (см. рис. 18). Значения массы шариков, длина и жесткость соединяющих их пружин, а также другие исходные данные приведены в табл. 9.

Определить:

- 1) положение центра масс МС;
- 2) жесткость левой и правой частей пружины, длины которых равны  $l_{10}$  и  $l_{20}$ ;
- 3) приведенную массу МС;
- 4) круговую частоту и период собственных незатухающих колебаний.

Трением шариков о контактную горизонтальную плоскость пренебречь.

Номер варианта	$m_1$	$m_2$	$k$	$l_0$	$l$	$r$	$V_1$	$V_2$
5	$0,4m^*$	$0,6m^*$	$1,2k^*$	$l^*$	$1,2l^*$	$2r^*$	$0,4u^*$	0
6	$0,2m^*$	$0,7m^*$	$1,5k^*$	$1,2l^*$	$l^*$	$1,4r^*$	0	$0,5u^*$
7	$0,8m^*$	$0,4m^*$	$1,6k^*$	$1,4l^*$	$1,6l^*$	$1,8r^*$	$0,6u^*$	0
8	$0,6m^*$	$0,5m^*$	$1,4k^*$	$1,6l^*$	$1,2l^*$	$1,6r^*$	0	$0,7u^*$

Дополнительно (в соответствии с общими условиями задач раздела 3) рассчитать значения всех требуемых величин и вывести уравнение затухающих колебаний вертикального пружинного маятника (см. рис. 27), у которого масса шарика равна  $m = m_1$ , а длина и жесткость пружины равны соответственно  $l_0$  и  $k$  (см. табл.9). В начальный момент времени шарик смещают так, что длина пружины становится равной  $l$ , а затем кратковременным воздействием сообщают ему скорость  $\vec{V}_1$  или  $\vec{V}_2$ . В результате система приходит в колебательное движение в вертикальном направлении. Трением шарика о боковую поверхность пренебречь.

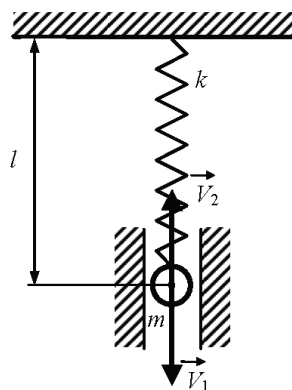


Рис. 27

### Задача 3-3

Колебательные системы, представленные на рис. 28 — 31, состоят из шайбы массой  $m$  и двух упругих пружин, имеющих жесткости  $k_1$  и  $k_2$ . Движение КС происходит в окружающей среде с малыми вязкими свойствами (малым коэффициентом сопротивления  $r$ ). На рис. 28, 30 шайба колеблется под воздействием пружин, соединенных параллельно, а на рис. 29, 31 колебания происходят под воздействием пружин, соединенных последовательно. Массой пружин можно пренебречь. На рис. 28, 29 КС имеет горизонтальное расположение в поле силы тяжести, а на рис. 30, 31 — вертикальное расположение. Длины 1-й и 2-й пружин в недеформиро-

ванных состояниях равны  $l_{10}$  и  $l_{20}$ . Возможные векторы начальной скорости шайбы равны  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ . Шайбу, находящуюся в положении равновесия, смещают на расстояние  $L$ , а затем импульсом придают ей в начальный момент времени  $t = 0$  скорость  $\vec{V}_1$  или  $\vec{V}_2$  в соответствии с заданием (см. табл. 10–13). В результате КС приходит в колебательное движение. На рис. 28, 30 длина каждой пружины в деформированном состоянии при  $t = 0$  равна  $L$ . На рис. 29, 31 общая длина двух пружин в деформированном состоянии при  $t = 0$  равна  $L$ .

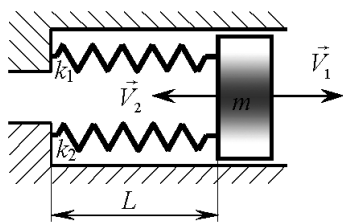


Рис. 28

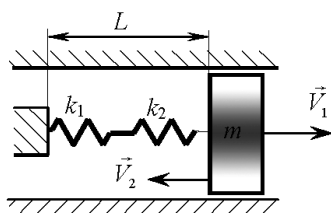


Рис. 29

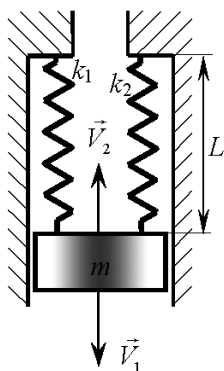


Рис. 30

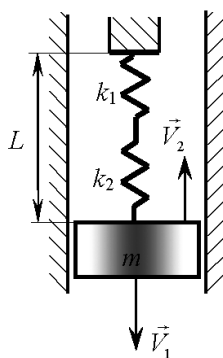


Рис. 31

Таблица 10 (к рис. 28)

Номер варианта	$r$	$k_1$	$k_2$	$m$	$l_{10}$	$l_{20}$	$L$	$V_1$	$V_2$
9	$r^*$	$1,6k^*$	$1,4k^*$	$1,4m^*$	$l^*$	$l^*$	$0,9l^*$	$0,4U^*$	0
10	$2r^*$	$1,2k^*$	$k^*$	$1,5m^*$	$1,1l^*$	$1,1l^*$	$1,2l^*$	$0,5U^*$	0
11	$4r^*$	$1,6k^*$	$1,4k^*$	$m^*$	$1,2l^*$	$1,2l^*$	$1,1l^*$	0	$0,3U^*$

Таблица 11 (к рис. 29)

Номер варианта	$r$	$k_1$	$k_2$	$m$	$l_{10}$	$l_{20}$	$L$	$V_1$	$V_2$
12	$3r^*$	$0,8k^*$	$k^*$	$m^*$	$l^*$	$l^*$	$2,1l^*$	$0,4U^*$	0
13	$2r^*$	$1,6k^*$	$1,4k^*$	$0,8m^*$	$l^*$	$l^*$	$1,9l^*$	0	$0,2U^*$
14	$3r^*$	$k^*$	$1,2k^*$	$1,4m^*$	$1,1l^*$	$1,1l^*$	$2,3l^*$	0	$0,3U^*$

Таблица 12 (к рис. 30)

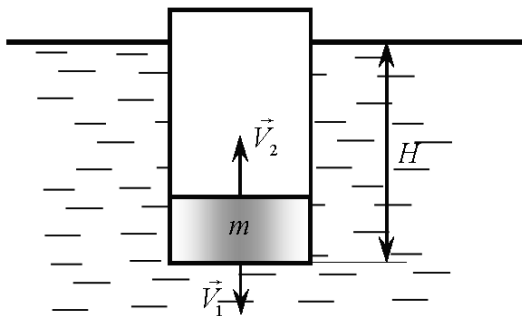
Номер варианта	$r$	$k_1$	$k_2$	$m$	$l_{10}$	$l_{20}$	$L$	$V_1$	$V_2$
15	$2r^*$	$1,6k^*$	$1,4k^*$	$m^*$	$1,6l^*$	$1,6l^*$	$1,5l^*$	$U^*$	0
16	$2r^*$	$1,2k^*$	$1,4k^*$	$1,4m^*$	$1,5l^*$	$1,5l^*$	$1,4l^*$	0	$U^*$
17	$3r^*$	$2k^*$	$1,8k^*$	$0,8m^*$	$l^*$	$l^*$	$1,6l^*$	$0,8U^*$	0

Таблица 13 (к рис. 31)

Номер варианта	$r$	$k_1$	$k_2$	$m$	$l_{10}$	$l_{20}$	$L$	$V_1$	$V_2$
18	$r^*$	$1,6k^*$	$1,4k^*$	$0,8m^*$	$3l^*$	$3l^*$	$5,8l^*$	$U^*$	0
19	$3r^*$	$1,2k^*$	$k^*$	$0,4m^*$	$2l^*$	$2l^*$	$4,8l^*$	$0,8U^*$	0
20	$r^*$	$1,8k^*$	$1,6k^*$	$m^*$	$4l^*$	$4l^*$	$7,8l^*$	0	$U^*$

### Задача 3-4

Колебательная система, представленная на рис. 32, состоит из невесомой пробирки площадью поперечного сечения  $S$ , на дно которой насыпана свинцовая дробь массой  $m$ . Пробирка с дробью



**Рис. 32**

опущена в жидкость плотностью  $\rho$  и находится в ней в вертикальном положении.

Пробирку, находящуюся в положении равновесия на глубине  $H_0$ , смещают на глубину  $H$ , а затем импульсом придают ей в начальный момент времени  $t = 0$  скорость  $\vec{V}_1$  или  $\vec{V}_2$  в соответствии с заданием (табл. 14).

В результате КС приходит в колебательное движение в вертикальном направлении. Коэффициент сопротивления при движении пробирки в жидкости равен  $r$ .

*Таблица 14*

Номер варианта	$\rho$	$S$	$m$	$r$	$H$	$V_1$	$V_2$
21	$\rho^*$	$S^*$	$m^*$	$5 r^*$	$1,1l^*$	$0,2U^*$	0
22	$\rho^*$	$1,2S^*$	$2m^*$	$5r^*$	$1,9l^*$	0	$0,3U^*$
23	$0,9\rho^*$	$1,1S^*$	$1,5m^*$	$6r^*$	$1,6l^*$	$0,4U^*$	0
24	$0,9\rho^*$	$S^*$	$m^*$	$6r^*$	$1,2l^*$	0	$0,2U^*$

### Задача 3-5

На рис. 33 представлен физический маятник (ФМ), состоящий из двух шаров радиусами  $R_1$  и  $R_2$  и массами соответственно  $m_1$  и  $m_2$ . Шары жестко скреплены с помощью стержня длиной  $L$  и массой  $m_3$ . Через точку  $O$  стержня проходит горизонтальная ось вращения ФМ, расположенная на расстоянии  $l_0$  от верхнего кон-

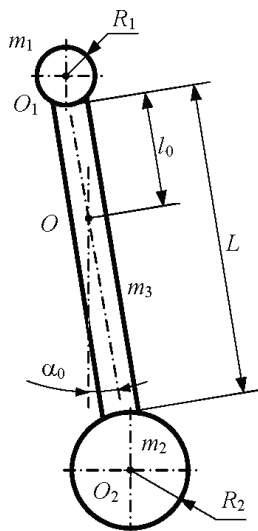


Рис. 33

ца стержня так, что ФМ может совершать вращательное движение в вертикальной плоскости. Физический маятник, находящийся в положении равновесия, отклоняют на угол  $\alpha_0$  (табл. 15), а затем в начальный момент времени  $t = 0$  отпускают. В результате ФМ начинает совершать свободные незатухающие колебания, т. е. в этой задаче коэффициент сопротивления считается равным нулю ( $r = 0$ ).

Таблица 15

Номер варианта	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$R_1$	$R_2$	$L$	$l_0$	$\alpha_0$
25	$8,8m^*$	$21m^*$	$32m^*$	$0,3l^*$	$0,4l^*$	$10l^*$	$3l^*$	$1/2\varphi^*$
26	$21m^*$	$41m^*$	$35m^*$	$0,4l^*$	$0,5l^*$	$12l^*$	$4l^*$	$1/3\varphi^*$
27	$8,8m^*$	$21m^*$	$28m^*$	$0,3l^*$	$0,4l^*$	$8l^*$	$2l^*$	$1/2\varphi^*$
28	$21m^*$	$41m^*$	$30m^*$	$0,4l^*$	$0,5l^*$	$9l^*$	$3l^*$	$1/3\varphi^*$

## 4. ВОЛНЫ

### Задача 4-1

В среде на расстоянии  $d$  друг от друга находятся одинаковые излучатели плоских продольных, акустических, монохроматических волн ( $S_1$  и  $S_2$ , рис. 34). Оба излучателя колеблются по закону  $\xi = A \cos(\omega t)$ , где  $\xi$  — смещение излучателя из положения равновесия при колебаниях;  $A$  — амплитуда;  $\omega$  — круговая частота при колебаниях излучателя.

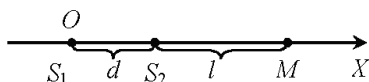


Рис. 34

Исходные данные для каждого варианта задания представлены в табл. 16.

Таблица 16

Номер варианта	Частота $\nu$ , кГц	Амплитуда $A$ , мм	$d$ , м	$l$ , м	Среда	Скорость волны в среде $c$ , м/с
1	1	0,8	1,36	30	Воздух	340
2	2	0,6	0,68	20	Воздух	340
3	1	0,5	0,34	10	Воздух	340
4	10	0,3	0,9	30	Вода	1500
5	20	0,2	0,6	20	Вода	1500
6	10	0,1	0,3	10	Вода	1500

Необходимо:

1) вывести уравнение продольных колебаний частиц среды в точке  $M$ , находящейся на расстоянии  $l$  от второго излучателя. Считать, что направления колебаний частиц среды в точке  $M$  совпадают с осью  $x$ ;

2) определить отношение амплитуды смещений частиц среды к длине волны  $\lambda$ ;



3) вывести уравнение колебаний скорости частиц среды в точке  $M$ . Найти амплитуду скорости частиц среды и ее отношение к скорости распространения волны;

4) вывести уравнение колебаний деформаций частиц среды в точке  $M$ . Найти связь амплитуды деформаций с амплитудой скорости частиц среды.

**Основные зависимости к задачам раздела 4.** Уравнение плоской монохроматической косинусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , в общем случае имеет вид

$$\xi = A \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где  $\xi$  — смещение частиц среды;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число;  $\lambda$  — длина волны, определяемая по формулам  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  или  $\lambda = cT$  (здесь  $c$  — скорость волны в среде); круговая частота  $\omega$ , период  $T$  и частота колебаний  $\nu$  связаны соотношениями  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $T = 1/\nu$ ;  $\varphi$  — начальная фаза волны.

*Принцип суперпозиции (наложения) волн* формулируется следующим образом.

Результирующая волна, образующаяся при наложении двух волн  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , определяется по формуле

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2),$$

где индексы 1, 2 относятся соответственно к параметрам первой и второй волн.

В частном случае рассмотрим, как это происходит в задаче 4-1.

Если начало координат (точка  $O$ ) совпадает с расположением источника колебаний  $S_1$ , то от этого источника вдоль оси  $OX$  будет распространяться первая волна вида

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx). \quad (4.1)$$

От источника колебаний  $S_2$  вдоль оси  $OX$  будет распространяться вторая волна

$$\xi_2 = A \cos[\omega t - k(x - d)]. \quad (4.2)$$

В итоге результирующие колебания частиц среды в произвольной точке  $x$  оси  $OX$  будут происходить в соответствии с принци-

пом суперпозиции волн:

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t). \quad (4.3)$$

После подстановки выражений (4.1) и (4.2) в (4.3) и последующих преобразований получаем

$$\xi(x, t) = 2A \cos\left(\frac{kd}{2}\right) \cos\left(\omega t - kx + \frac{kd}{2}\right). \quad (4.4)$$

Скорость частиц среды определяется как частная производная от смещения частиц (4.4) по времени:

$$V_x = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (4.5)$$

а деформация (относительное изменение длины частиц среды) — как частная производная по координате:

$$\epsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (4.6)$$

Далее вместо произвольной координаты  $x$  в уравнения (4.4)–(4.6) подставим координату точки  $M$  ( $x = d + l$ ), тем самым определив искомые значения  $\xi$ ,  $V_x$ ,  $\epsilon_x$  в точке  $M$ .

#### Задача 4-2

Для стержня длиной  $l$ , закрепленного, как показано на рис. 35–40, необходимо:

1) вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в стержне, при которых в нем образуется стоячая волна;

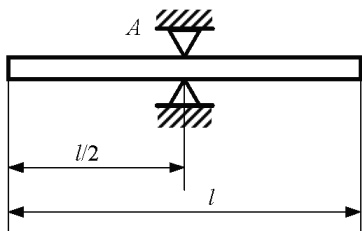


Рис. 35

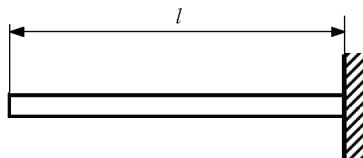


Рис. 36

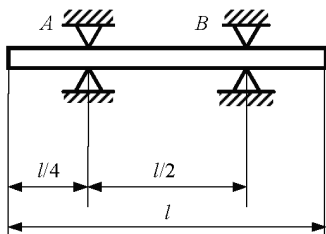


Рис. 37

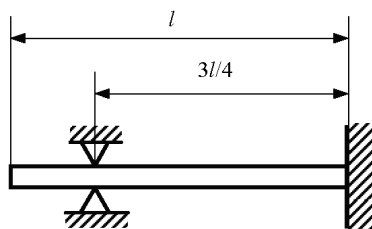


Рис. 38

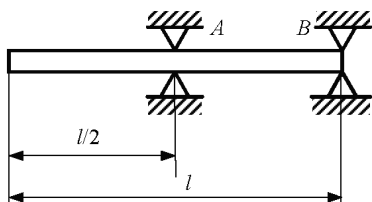


Рис. 39

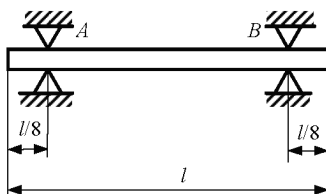


Рис. 40

2) указать какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам (к высшим гармоникам);

3) определить частоту и длину волны  $i$ -й гармоники;

4) для этой гармоники нарисовать вдоль стержня качественную картину:

а) стоячей волны амплитуд смещений;

б) стоячей волны амплитуд деформаций.

Исходные данные для каждого варианта задачи представлены в табл. 17.

Таблица 17

Номер варианта	Вид крепления	Материал	Плотность $\rho$ , $10^3$ кг/м <sup>3</sup>	Модуль Юнга $E$ , $10^{10}$ Па	Длина $l$ , м	Определить $i$ -ю гармонику
7	Рис. 35	Сталь	7,8	20	0,8	3
8	Рис. 36	Латунь	8,5	12	1	2
9	Рис. 37	Алюминий	2,7	7	1,2	1

Номер варианта	Вид крепления	Материал	Плотность $\rho$ , $10^3$ кг/м <sup>3</sup>	Модуль Юнга $E$ , $10^{10}$ Па	Длина $l$ , м	Определить $i$ -ю гармонику
10	Рис. 38	Стекло	2,5	6	1	1
11	Рис. 39	Титан	4,5	11	0,8	1
12	Рис. 35	Медь	8,9	12	1,2	2
13	Рис. 36	Сталь	7,8	20	0,8	3
14	Рис. 37	Латунь	8,5	12	1	2
15	Рис. 38	Алюминий	2,7	7	1,2	2
16	Рис. 39	Стекло	2,5	6	1	2
17	Рис. 40	Сталь	7,8	20	1,6	2

**Элементы теории стоячих волн.** Если на левом торце стержня длиной  $l$ , закрепленного, как показано на рис. 35, будет действовать источник гармонических колебаний

$$\xi(t) = A \cos \omega t,$$

то вдоль стержня слева направо будет распространяться прямая волна

$$\xi_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx), \quad (4.7)$$

где  $A$  — амплитуда волны;  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число;  $\omega$  — циклическая частота колебаний;  $\lambda$  — длина волны.

При отражении прямой волны (4.7) от свободного противоположного правого торца стержня длиной  $l$  по стержню будет распространяться обратная отраженная волна

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t + kx - 2kl). \quad (4.8)$$

При наложении прямой (4.7) и обратной (4.8) волн в стержне образуется стоячая волна

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = 2A \cos(kl - kx) \cos(\omega t - kl).$$

Амплитуда стоячей волны будет равна

$$A_{\text{ст}} = 2A \cos(kl - kx). \quad (4.9)$$

При  $x = l$  из выражения (4.9) следует, что  $A_{\text{ст}} = 2A$ . Это означает, что на конце стержня всегда будет пучность смещений частиц стержня. Чтобы на переднем торце стержня, откуда по стержню распространяется возмущение, т. е. при  $x = 0$ , была также пучность, необходимо, чтобы в формуле (4.9) выполнялось условие  $\cos kl = 1$ . А это возможно при выполнении условия, что

$$kl = \pi n,$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  — целочисленный ряд значений. С учетом того, что  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , после преобразований получаем

$$l = \frac{\lambda}{2} n. \quad (4.10)$$

Формула (4.10) показывает, что при образовании в стержне стоячей волны на его длине  $l$  должно укладываться целое число полуволн.

Величина  $\lambda/2$  в формуле (4.10) определяет длину стоячей волны  $\lambda_{\text{ст}} = \lambda/2$ . Из формулы (4.10) можно также определить частоты  $\nu_n$ , при которых в стержне образуется стоячая волна.

Поскольку

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad (4.11)$$

где  $\nu$  — частота колебаний, связанная с циклической частотой соотношением  $\omega = 2\pi\nu$ , а скорость упругой волны  $c$  определяется по формуле  $c = \sqrt{E/\rho}$ , то при подстановке выражения (4.11) в (4.10) находим возможные частоты, при которых в стержне может образоваться стоячая волна,

$$\nu_n = \frac{c}{2l} n. \quad (4.12)$$

При  $n = 1$  из (4.12) определяем основную частоту (основной тон)  $\nu = \frac{c}{2l}$ , а при  $n = 2, 3, 4 \dots$  находим обертоны.

Из формулы (4.9) при условии, что  $\cos(kl - kx) = 0$ , находим координаты узлов стоячей волны:

$$kl - kx = \frac{\pi}{2} (2m + 1),$$

где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Отсюда при условии, что  $k = 2\pi/\lambda$ , находим

$$x_m = l - \frac{\lambda}{4}(2m + 1). \quad (4.13)$$

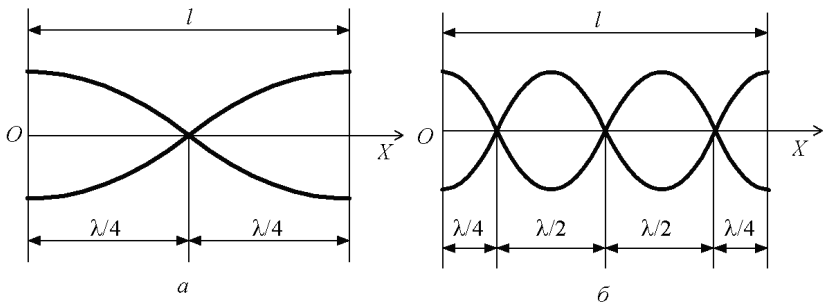
Подставляя в (4.13) целочисленный ряд значений, находим координаты узлов:

$$\text{при } m = 0 \quad x_0 = l - \frac{\lambda}{4};$$

$$\text{при } m = 1 \quad x_1 = l - \frac{3}{4}\lambda;$$

$$\text{при } m = 2 \quad x_2 = l - \frac{5}{4}\lambda.$$

Эти координаты для различных стоячих волн указаны на рис. 41, *а*, *б*. В данной задаче стержень закреплен посередине. Следовательно, в центре стержня всегда будет узел стоячей волны. На рис. 41, *а* схематично изображена стоячая волна при  $n = 1$  и  $m = 0$ , а на рис. 41, *б* при  $n = 3$  и  $m = 0, 1, 2$ . При  $n = 2$  в рассматриваемом стержне стоячая волна не образуется. В точке с координатой  $x = 0$  узла не должно быть, так как с этого места в стержень передается возмущение от внешнего источника.



**Рис. 41**

Если второй торец стержня имеет жесткую заделку, как показано на рис. 36, то фаза отраженной волны от этой заделки будет смещена на величину  $\pi$ :

$$\xi_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx - 2kl - \pi),$$

а прямая волна остается без изменений

$$\xi_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx).$$

При наложении прямой и обратной волн получаем стоячую волну:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_1 + \xi_2 = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx - 2kl - \pi) = \\ &= 2A\cos\left(kl - kx - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t - kl - \frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

или

$$\xi(x, t) = 2A\sin(kl - kx) \sin(\omega t - kl),$$

где амплитуда стоячей волны имеет вид

$$A_{\text{CT}} = 2A\sin(kl - kx). \quad (4.14)$$

В итоге уравнение стоячей волны запишется так:

$$\xi(x, t) = A_{\text{CT}}\sin(\omega t - kl).$$

Согласно формуле (4.14), амплитуда стоячей волны при  $x = l$  будет равна нулю ( $A_{\text{CT}} = 0$ ). Отсюда следует, что на заднем торце стержня, где имеется жесткая заделка, всегда будет узел стоячей волны.

При  $x = 0$  из формулы (4.14) получаем:

$$A_{\text{CT}} = 2A\sin kl. \quad (4.15)$$

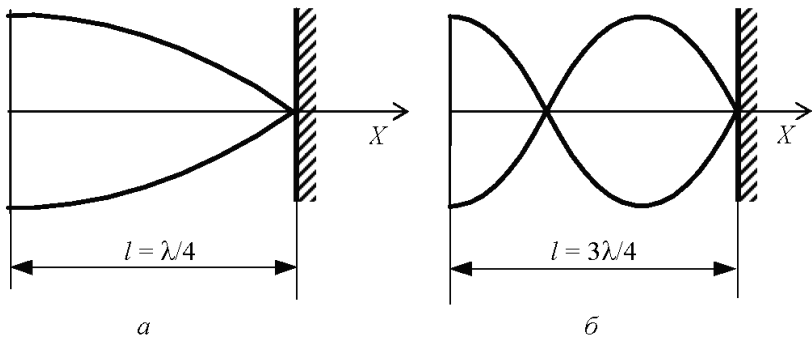
Так как на переднем торце стержня, откуда от источника колебаний распространяются возмущения, должна быть пучность, из (4.15) следует, что  $\sin kl = 1$ . В этом случае находим:

$$kl = \pi n - \frac{\pi}{2}, \quad (4.16)$$

где  $n$  принимает целочисленный ряд значений  $n = 1, 2, 3 \dots$ . Поскольку волновое число  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , из выражения (4.16) следует, что

$$l = \frac{\lambda}{2} \left( n - \frac{1}{2} \right). \quad (4.17)$$

Например, при  $n = 1$  из (4.17) получаем:  $l = \lambda/4$  (см. рис. 42, а), а при  $n = 2$   $l = (3/4)\lambda$  (см. рис. 42, б).



**Рис. 42**

Подставляя известное соотношение  $\lambda = c/v$  в (4.17), находим спектр резонансных частот, при которых в данном стержне будет образовываться стоячая волна:

$$v_n = \frac{c}{2l} \left( n - \frac{1}{2} \right).$$

При  $n = 1$  получаем основную частоту  $v_1 = \frac{c}{4l}$ , а при  $n = 2, 3, 4, \dots$  определяем обертоны.

Считается, что в тех точках стержня, где имеется одно или два крепления (например,  $A$  на рис. 35, 38 или  $A$  и  $B$  на рис. 37, 39, 40), нет продольных смещений частиц стержня, т. е. в этих точках будут расположены узлы стоячей волны.

### **Задача 4-3**

Для прямого вертикального волновода (трубы) длиной  $l$ , расположенного в среде (воздухе или воде), как указано на соответствующем рисунке, необходимо:

1) вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в волноводе, при которых в нем образуется стоячая волна;

2) указать, какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам (высшим гармоникам);

3) определить частоту и длину волны  $i$ -й гармоники;



4) для этой гармонике нарисовать вдоль волновода качественную картину:

а) стоячей волны амплитуд смещений;

б) стоячей волны амплитуд давлений.

При этом необходимо учитывать то обстоятельство, что в том месте, где расположен узел стоячей волны смещений, будет возникать пучность стоячей волны давлений и наоборот.

Исходные данные для каждого варианта задачи представлены в табл. 18.

Скорость звука в воде  $c_1 = 1500$  м/с, а в воздухе  $c_2 = 340$  м/с.

Таблица 18

Номер варианта	Схема волновода	Среда		Длина волновода $l$ , м	Определить $i$ -ю гармонику
		внутри	снаружи		
18	Рис. 43	Воздух	Воздух	1,02	1
19	Рис. 44	Вода	Вода	1,5	4
20	Рис. 45	Вода	Вода	0,9	2
21	Рис. 46	Воздух	Воздух	2,04	2
22	Рис. 47	Воздух	Воздух	3,4	4

**Дополнительные пояснения к задачам 4-2, 4-3.** На рис. 46 волновод открыт с обоих концов. На рис. 43—45, 47 волновод на одном конце имеет жесткую пластину, а другой его конец свободен. На рис. 46, 47 открытый нижний конец волновода совпадает с границей раздела сред (воздух — вода), а другой конец волновода открыт и находится полностью в воздухе (см. рис. 46) либо закрыт жесткой пластиной (см. рис. 47).

Задачи 4-2 и 4-3, которые относятся к стержням и волноводам, необходимо выполнять в следующем порядке: сперва прорисовать возможные стоячие волны на длине стержня (волновода) при различных длинах волн так, чтобы на длине стержня (волновода) укладывалось, в соответствии с граничными условиями, требуемое число полуволн и четвертей волн. Начинать прорисовывать стоячие волны необходимо для больших длин волн, а затем для

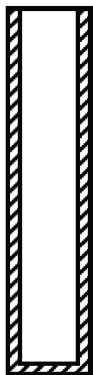


Рис. 43

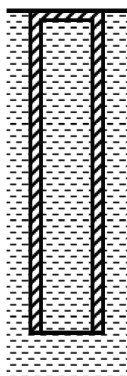


Рис. 44

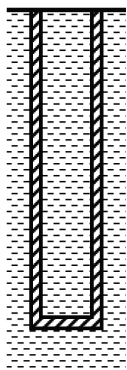


Рис. 45

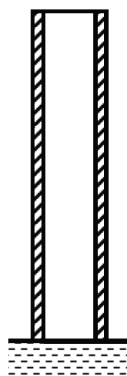


Рис. 46

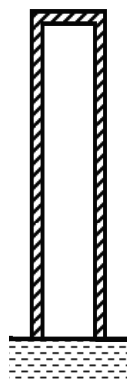


Рис. 47

меньших длин волн. Далее, внимательно рассматривая получившиеся рисунки, постараться установить общую закономерность возникновения стоячих волн при разных длинах волн так, чтобы в итоге получить общую формулу, связывающую длину стержня (волновода) с числом полуволн и четвертей волн, укладывающихся на его длине.

Рассмотрим, как это делается, на примере образования стоячей волны внутри замкнутого волновода, заполненного воздухом, с жесткими торцами, верхний торец которого выполнен в виде заглушки на резьбовом соединении, а в центре волновода расположен источник колебаний. Сперва прорисуем возможные стоячие волны в рассматриваемом волноводе (рис. 48).

Рассматривая получившиеся рисунки, можно подобрать формулу, которая определяет число полуволн на длине  $l$  волновода, например, при  $i = 1$   $l = \lambda/2$ , при  $i = 2$   $l = 3\lambda/2$ , при  $i = 3$   $l = 5\lambda/2$ . Следовательно, общая формула, связывающая  $l$  и  $\lambda$  при любом целочисленном значении  $i = 1, 2, 3, 4, \dots$ , будет иметь вид

$$l = (2i - 1)\lambda/2. \quad (4.18)$$

Согласно выражению (4.18) и известному соотношению  $\lambda = c/v$ , находим значения резонансных частот, при которых в волноводе образуется стоячая волна:

$$v_i = (2i - 1)c/2l. \quad (4.19)$$

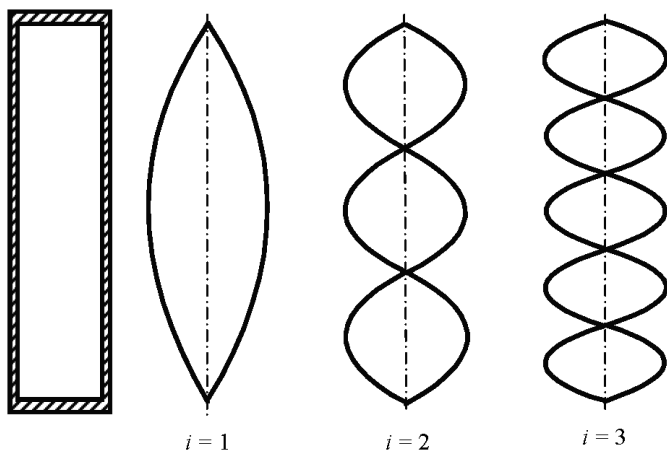


Рис. 48

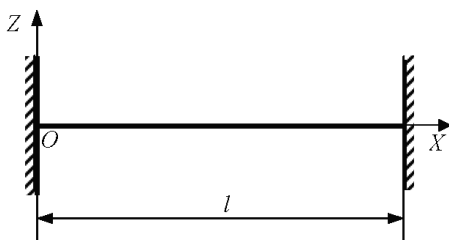


Рис. 49

Итак, при  $i = 1$  из формулы (4.19) получаем основную частоту  $\nu_1 = c/2l$ , а при  $i = 2, 3, 4, \dots$  получаем частоты  $\nu_2, \nu_3, \nu_4, \dots$ , которые будут соответствовать обертонам.

#### Задача 4-4

Для струны длиной  $l$ , натянутой с силой  $\vec{F}$  и закрепленной, как указано на рис. 49, необходимо:

- 1) определить частоту колебаний и длину волны  $i$ -й гармоники стоячей волны;
- 2) для этой гармоники нарисовать вдоль струны качественную картину:

- а) стоячей волны амплитуд смещений точек струны;  
 б) распределения скоростей точек струны для момента времени  $t = 0,25T$ , где  $T$  — период колебания струны для  $i$ -й гармоники.

Исходные данные для каждого варианта задачи представлены в табл. 19.

Таблица 19

Номер варианта	Характеристики струны				Сила натяжения $F$ , Н	Номер гармоники
	длина $l$ , м	диаметр $d$ , мм	материал струны	плотность $\rho$ , $10^3$ кг/м <sup>3</sup>		
23	0,6	0,4	Медь	8,9	1	3
24	0,9	0,5	Медь	8,9	3	4
25	1,0	0,6	Медь	8,9	4	5
26	1,2	0,3	Сталь	7,8	5	4
27	0,8	0,2	Сталь	7,8	6	3
28	0,7	0,1	Сталь	7,8	2	2

**Дополнительные пояснения к задаче 4-4.** Скорость волны в струне (скорость распространения поперечных смещений) рассчитывают по формуле  $a = \sqrt{\frac{F}{\tau}}$ , где  $\tau = \frac{m}{l}$  — линейная плотность материала струны, а  $m$  — масса струны. Волновое уравнение, описывающее распространение вдоль струны поперечной волны, имеет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

где  $z$  — смещение частиц струны относительно положения равновесия в поперечном направлении.